BULLETIN DE LA S. M. F.

J.-M. TREPREAU

Sur la propagation des singularités dans les variétés CR

Bulletin de la S. M. F., tome 118, n° 4 (1990), p. 403-450
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_4_403_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 403–450.

SUR LA PROPAGATION DES SINGULARITÉS DANS LES VARIÉTÉS CR

PAR

J.-M. TREPREAU (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons un théorème général de propagation des singularités hypo-analytiques pour les solutions des équations de Cauchy-Riemann induites. Comme applications, nous étudions la propagation de la propriété de prolongement holomorphe à un wedge et nous donnons des exemples de solutions qui ne sont pas sommes de valeurs au bord de fonctions holomorphes.

ABSTRACT. — We give a general result of propagation of hypoanalytic singularities for solutions of induced Cauchy-Riemann equations. As applications, we study the propagation of holomorphic extendability to a wedge and we give examples of solutions which can not be written as sums of boundary values of holomorphic functions.

L'étude du prolongement holomorphe des fonctions CR a connu plusieurs succès ces dernières années. Le résultat le plus remarquable est peut-être le théorème général de prolongement de A. E. TUMANOV [23]. Nous nous intéressons ici à la propagation des singularités hypoanalytiques des fonctions CR définies sur une sous-variété générique M de $\mathbb{C}^n$. Dans [12] N. HANGES et F. TRÈVES montrent que la propriété de prolongement holomorphe local se propage le long des sous-variétés complexes de M. Quand M est analytique réelle, on obtient un résultat plus fort en appliquant le théorème de propagation microlocale de N. HANGES et J. SJÖSTRAND [11]. Le but de cet article est de prouver une version CR générale du théorème de N. HANGES et J. SJÖSTRAND. Nous obtiendrons (THÉORÈME 7) que les singularités se propagent le long des sous-variétés CR minimales (au sens de Tumanov) de $T^*_M\mathbb{C}^n$. De telles sous-variétés, non triviales, existent en particulier quand M n'est pas minimale (THÉORÈMES 8, 9, 10).

Ces théorèmes ont plusieurs applications intéressantes. Quand M n'est pas minimale, utilisant les fonctions CR singulières récemment construites

(*) Texte reçu le 9 décembre 1989, révisé le 13 septembre 1990.
J.-M. TREPREAU, Univ. Paris VI, Analyse Complexe et Géométrie, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1990/403/$ 5.00

par M. S. Baouendi et L. P. Rothschild [6], nous montrerons que, lorsque le défaut local de M (Définition I.2.1) est au moins deux, M porte "en général" des fonctions CR qui ne sont pas sommes de valeurs au bord de fonctions holomorphes (Théorèmes 5, 6), ce qui généralise un exemple (non publié) que nous avions donné en 1985. Les autres applications concernent la propagation de la propriété pour une fonction CR d'être prolongeable à un wedge (Théorèmes 2, 3, 4). Outre les résultats de propagation microlocale, elles utilisent une généralisation du théorème de Tumanov (Théorème 1) que la méthode de Tumanov donne facilement : si le défaut local de M en un point z est s, les fonctions CR sur M se prolongent en fonctions CR sur un "wedge" de codimension s dans $\mathbb{C}^n$, près de z.

La démonstration des théorèmes microlocaux repose sur la notion de front d'onde hypoanalytique, introduite par M. S. Baouendi, C.H. Chang et F. Trèves [3], qui rend les mêmes services dans l'étude des fonctions CR que le micro-support de Sato [15] dans l'étude des singularités analytiques. Nous adopterons le point de vue de J. Sjöstrand [16], [17] : les transformations, dites F.B.I., qui servent à définir le front d'onde quantifient des transformations canoniques complexes non homogènes. Une telle transformation ramène l'étude de la propagation des singularités à l'étude de la propagation d'une estimation pour une fonction holomorphe dépendant d'un grand paramètre. Classiquement dans cette étude ([9′], [12], [17]) intervient le théorème des trois cercles de Hadamard (on pourrait à la place utiliser le lemme de Hopf). Dans le cas général, les feuilles qui propagent les singularités ne sont pas des variétés holomorphes, mais des variétés CR. Nous nous ramenons à une situation où le principe du maximum et ses variantes s'appliquent grâce à une construction de disques complexes, via l'équation de Bishop. C'est peut-être l'originalité de ce papier de combiner les méthodes microlocales et la méthode des disques complexes.

Le chapitre I est une (assez longue) introduction aux fonctions CR et à leurs singularités. Nous y énonçons nos principaux résultats.

Dans le chapitre II nous établissons les résultats sur l'équation de Bishop dont nous aurons besoin et nous démontrons le Théorème 1.

Les théorèmes d'application sont prouvés dans le chapitre III, les théorèmes de propagation microlocale dans le chapitre IV.

I. Introduction

1. Notations. — $T\mathbb{C}^n$ est le fibré tangent réel à $\mathbb{C}^n$. Nous noterons $\sqrt{-1}$ l'opérateur qui définit sa structure complexe canonique :

$$\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Les vecteurs antiholomorphes (resp. holomorphes) sont ainsi les vecteurs complexes de la forme $X + i\sqrt{-1}\,X$ (resp. $X - i\sqrt{-1}\,X$), $X \in T\mathbb{C}^n$. $T^*\mathbb{C}^n$ est le fibré des $(1,0)$-formes $\omega = \sum_{j=1}^n \zeta_j\, \mathrm{d}z_j$. C'est un espace complexe, muni des coordonnées canoniques (z, ζ). $T^*\mathbb{C}^n$ s'identifie au dual sur $\mathbb{C}$ de $T\mathbb{C}^n$ par :

$$\omega = \sum_{j=1}^n \zeta_j\, \mathrm{d}z_j\,; \quad \Big\langle \omega, \frac{\partial}{\partial x_k} \Big\rangle = \frac{1}{i} \Big\langle \omega, \frac{\partial}{\partial y_k} \Big\rangle = \zeta_k.$$

On utilisera surtout la dualité réelle définie par :

$$(\omega, X) \in T^*\mathbb{C}^n \times T\mathbb{C}^n \quad (\omega, X) \mapsto \operatorname{Im}\langle \omega, X \rangle. \tag{1.1}$$

Soit M une sous-variété réelle de $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$. $T_M\mathbb{C}^n = T\mathbb{C}^n{}_{|M} \bmod TM$ est le fibré normal à M. On utilise la dualité (1.1) pour définir le conormal à M dans $\mathbb{C}^n$:

$$T^*_M\mathbb{C}^n[z] = \Big\{ \omega \in T^*_z\mathbb{C}^n, \quad \operatorname{Im} \omega_{|T_zM} = 0 \Big\}.$$

Les fibrés $T_M\mathbb{C}^n$ et $T^*_M\mathbb{C}^n$ sont en dualité par

$$\big(\omega, X \bmod TM\big) \longmapsto \operatorname{Im}\langle \omega, X \rangle. \tag{1.2}$$

Un wedge (au-dessus de M) en $(z, \theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$ est un ouvert de la forme :

$$\mathcal{W} = \big\{ z' + \theta'\,;\ z' \in U,\ \theta' \in \Gamma \big\} \cap \Omega,$$

où Ω est un voisinage ouvert de z dans $\mathbb{C}^n$, $U = M \cap \Omega$, et Γ un voisinage ouvert conique dans $T_z\mathbb{C}^n$, ici identifié à $\mathbb{C}^n$, d'un représentant de θ. La définition est indépendante, dans les germes, du choix d'un représentant de θ au sens où tout wedge défini à partir d'un choix contient un wedge défini à partir d'un autre choix.

Nous venons d'utiliser les notations suivantes : si $\mathcal{T}$ est un fibré vectoriel sur M, $\dot{\mathcal{T}}$ désigne le même fibré, privé de la section nulle, $\mathcal{T}_z$, ou $\mathcal{T}[z]$ quand la place manque, la fibre de $\mathcal{T}$ en $z \in M$, $\mathcal{T}_{|N}$ la restriction de $\mathcal{T}$ à une sous-variété N de M.

Si $\widetilde{M}$ est une variété de classe $\mathcal{C}^1$ à bord dans $\mathbb{C}^n$, de bord M, les vecteurs tangents rentrant dans $\widetilde{M}$ en $z \in M$ remplissent un demi-espace de la forme $T_zM + \dot{\mathbb{R}}^+\theta$, $\theta \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n[z]$. Nous dirons que $\widetilde{M}$ définit la direction $\theta \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n[z]$, ou $(z,\theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$.

Soit E, E' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, en dualité. On note $\dot{E} = E \setminus 0$, $\dot{E}' = E' \setminus 0$ et si Γ est un cône dans E, $\dot{\Gamma} = \Gamma \setminus 0$. Un cône Γ dans $\dot{E}$ est dit saillant s'il est contenu dans un cône fermé convexe de $\dot{E}$. Ainsi, si Γ est un cône convexe fermé dans E, $\dot{\Gamma}$ est saillant si et seulement si $\dot{\Gamma}$ ne contient pas deux points antipodaux. Plus généralement, un cône fermé Γ de $\dot{E}$ est saillant si une somme $\sum_{i=1}^{N} \theta_i$, $\theta_i \in \Gamma$, n'est jamais nulle. Le polaire d'un cône $\Gamma \subset \dot{E}$ est le cône fermé $\Gamma^0 \subset \dot{E}'$ défini par

$$\Gamma^0 = \Big\{\omega \in \dot{E}',\ \ \langle \omega, \theta\rangle \geq 0 \ \text{ pour tout } \theta \in \Gamma\Big\}.$$

$\Gamma^0 \cup \{0\}$ est toujours convexe, mais pas Γ^0.

Soit M une variété de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathfrak{X}$ un système de champs de vecteurs réels sur M, de classe $\mathcal{C}^1$. Une courbe intégrale (par morceaux) de $\mathfrak{X}$ est une courbe γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans M obtenue en partant d'un point $x \in M$, en intégrant successivement des champs $X_1, \ldots, X_N \in \mathfrak{X}$ pendant des temps $t_1, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$ tels que le point $x' = e^{t_N X_N} \cdots e^{t_1 X_1} x$ soit bien défini; x est l'origine, x' l'extrémité de γ. L'orbite de $x \in M$, notée $\mathcal{O}(\mathfrak{X}, x)$ est l'ensemble des extrémités des courbes intégrales de $\mathfrak{X}$ d'origine x. L'analyse de H. J. SUSSMANN [19], écrite dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$ s'applique sans changement ou presque (les (a), (b) du théorème 4.1 de [19] restent vrais dans le cadre $\mathcal{C}^1$) : on peut munir canoniquement l'orbite $\mathcal{O}(\mathfrak{X}, x)$ d'une structure de variété $\mathcal{C}^1$ (la topologie peut être plus fine que la topologie induite par M) telle que l'injection $i : \mathcal{O}(\mathfrak{X}, x) \to M$ soit une immersion de classe $\mathcal{C}^1$. En particulier, l'image par i d'un voisinage ouvert assez petit de x est une sous-variété de M au sens usuel, soit N; par construction $x \in N$ et les éléments de $\mathfrak{X}$ sont tangents à N. La famille $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_{|U}, x)$, U voisinage ouvert de x dans M, est évidemment décroissante et stationnaire dans les germes. Sa limite est un germe de variété en x, appelé orbite locale de x et notée $\mathcal{O}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X}, x)$.

2. Variétés CR. Fonctions CR. — Soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}^n$. Pour $z \in M$, on identifie comme plus haut T_zM à un sous-espace de $T_z\mathbb{C}^n$ et on note $T_z^cM = T_zM \cap \sqrt{-1}\,T_zM$ l'espace tangent complexe en z à M. M est une variété CR si la dimension complexe de $T^c_z M$ ne dépend pas de z; on l'appelle dimension CR de M et on la note CR-dim M. On a alors un sous-fibré vectoriel réel de TM de rang 2 CR-dim M :

$$T^c M = TM \cap \sqrt{-1}\, TM. \tag{2.1}$$

$T^c M$ est relié aux fibrés $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$ des champs holomorphes et antiholomorphes (on dira champs CR) tangents à M par :

$$\begin{aligned} T^{1,0}M &= \{X - i\sqrt{-1}\,X\ ;\ X \in T^c M\}, \\ T^{0,1}M &= \{X + i\sqrt{-1}\,X\ ;\ X \in T^c M\}, \\ T^c M &= \{\operatorname{Re} X\ ;\ X \in T^{1,0}M\}. \end{aligned}$$

$T^{1,0}M$, $T^{0,1}M$ sont des sous-fibrés complexes intégrables de $\mathbb{C}TM$, de rang CR-dim M. En général, $T^c M$ n'est pas intégrable.

On suppose maintenant M de classe $\mathcal{C}^2$, CR. Dans les questions de prolongement, le rôle crucial est joué par $T^c M$ et l'espace $\mathfrak{X}$ de ses sections de classe $\mathcal{C}^1$. On peut appliquer à $\mathfrak{X}$ les notions du § 1. L'orbite locale $\mathcal{O}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X}, z)$ de $z \in M$ vérifie clairement :

$$2\,\text{CR-dim}\, M \leq \dim \mathcal{O}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X}, z) \leq \dim M.$$

On introduit les définitions suivantes, inspirées de A. E. TUMANOV.

DÉFINITION 2.1. — *Soit M une sous-variété* CR *de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{C}^n$. Le* défaut local *de M en $z \in M$, noté $\delta^{\mathrm{loc}}(M, z)$, est la codimension de $\mathcal{O}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X}, z)$ dans M :*

$$\delta^{\mathrm{loc}}(M, z) \in \Big\{0, 1, \ldots, \dim M - 2\,\text{CR-dim}\, M\Big\}.$$

On dit que M est minimale en z *si le défaut local de M en z est nul. On dit que M est* minimale *si pour un, donc pour tout $z \in M$, $M = \mathcal{O}(\mathfrak{X}, z)$.*

Notons que M est minimale en z si et seulement si z possède un système fondamental de voisinages ouverts (dans M) minimaux pour la structure CR induite.

Une fonction CR sur M est une fonction annulée par les champs CR. Pour alléger l'exposé, fonction CR voudra dire fonction CR continue, mais le Théorème de représentation de M. S. BAOUENDI et F. TRÈVES [7], [22] permet d'étendre sans difficulté nos résultats aux distributions CR quand la régularité de M le permet. Nous ne ferons exception à cette règle que dans l'étude de la décomposabilité des fonctions CR (voir § 4).

Une sous-variété CR M de $\mathbb{C}^n$ est générique si :

$$TM + \sqrt{-1}\,TM = T\mathbb{C}^n_{|M}. \tag{2.2}$$

Dans les définitions suivantes, M est une sous-variété générique de $\mathbb{C}^n$ et u une fonction CR sur M.

DÉFINITION 2.2. — *La fonction* CR u *est* prolongeable *en* $z \in M$ *si* u *est, près de* z, *la trace d'une fonction holomorphe.*

Une fonction holomorphe dans un wedge $\mathcal{W}$ en $(z,\theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$, continue jusqu'au bord (resp. à croissance lente au bord quand M est lisse) définit une fonction CR (resp. une distribution CR) u près de z dans M. On dit que u est prolongeable au wedge $\mathcal{W}$ en z.

DÉFINITION 2.3. — *La fonction* CR u *est* $\mathcal{W}$-prolongeable en $(z,\theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$ *si* u *est prolongeable à un wedge en* (z,θ) ; u *est* $\mathcal{W}$-prolongeable en z *si* u *est* $\mathcal{W}$*-prolongeable en au moins un* $(z,\theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$.

Soit Γ le cône ouvert des directions $\theta \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n[z]$ dans lesquelles u est $\mathcal{W}$-prolongeable. $\Gamma \cup \{0\}$ est convexe (peut-être vide) (Théorème du Edge of the Wedge, *cf.* § 5). Soit $\widetilde{M}$ une variété de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{C}^n$, à bord de bord M près de $z \in M$, définissant la direction $\theta \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n[z]$. On dit que u est CR-prolongeable à $\widetilde{M}$ en z si u est, près de z, la trace d'une fonction CR sur $\widetilde{M}$.

DÉFINITION 2.4. — *La fonction* CR u *est* CR-prolongeable *en* $(z,\theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$ *si* u *est* CR*-prolongeable à une variété* $\widetilde{M}$ *de bord* M *en* z, *définissant la direction* (z,θ).

3. Théorèmes de prolongement et de propagation du $\mathcal{W}$-prolongement.

Soit M une sous-variété générique de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{C}^n$. Le théorème de TUMANOV [23] s'énonce :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Si } M \text{ est minimale en } z, \text{ toute fonction CR}\\ \text{est } \mathcal{W}\text{-prolongeable en } z.\end{array}\right. \tag{3.1}$$

Quand M est une hypersurface, (3.1) redonne le résultat principal de [21]. La méthode de Tumanov permet d'obtenir la généralisation suivante :

THÉORÈME 1. — *Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe C^2, soit $p =$ CR-dim M, s le défaut local de M en $z \in M$, N l'orbite locale de z ($\dim N = 2p + r, p + r + s = n$). Il existe r variétés de classe C^1, $\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_r$ à bord de bord M près de z, telles que :*

(i) *Toute fonction* CR *sur M est* CR*-prolongeable à $\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_r$ en z.*

(ii) $\sum_{j=1}^{r} T_{z'}\widetilde{M}_j = T_{z'}M + \sqrt{-1}\, T_{z'}N$ *si $z' \in N$, voisin de z.*

En particulier, $\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_r$ définissent r directions indépendantes $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n[z]$.

REMARQUE. — Si M est un peu plus régulière, le théorème du type Edge of the Wedge de R. A. AÏRAPETYAN [1] permet d'obtenir un résultat plus précis (voir COROLLAIRE II, 3.2). Pour les applications, nous nous servirons seulement du THÉORÈME 1.

En conjonction avec le THÉORÈME 1, les théorèmes de propagation microlocale nous donneront le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit M une variété générique de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^n$. Si une fonction* CR *est $\mathcal{W}$-prolongeable en $z \in M$, elle est $\mathcal{W}$-prolongeable en tout point de l'orbite $\mathcal{O}(\mathfrak{X}, z)$ de z.*

En fait la régularité C^4, peut-être C^3, nous suffit pour démontrer ce théorème. Nous obtenons un résultat meilleur quand l'orbite est une variété complexe ou, plus généralement, est complexifiable au sens suivant :

DÉFINITION 3.1. — *Une sous-variété* CR *N de $\mathbb{C}^n$ est* complexifiable *si N est générique dans une sous-variété complexe $\widehat{N}$ de $\mathbb{C}^n$.*

Nous avons alors un résultat avec M de classe C^2 :

THÉORÈME 3. — *Soit M une variété générique de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ et $z \in M$. Si l'orbite $\mathcal{O}(\mathfrak{X}, z)$ de z est complexifiable et minimale en tout point, une fonction* CR *sur M, $\mathcal{W}$-prolongeable en z, est $\mathcal{W}$-prolongeable en tout point de $\mathcal{O}(\mathfrak{X}, z)$.*

D'autres énoncés de ce type seront donnés dans le chapitre III.

Compte-tenu de (3.1), le THÉORÈME 2 a le corollaire suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit M une variété générique de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^n$, minimale et minimale en un point au moins. Alors, toute fonction* CR *sur M est $\mathcal{W}$-prolongeable en tout point.*

Ce théorème n'est pas la meilleure version globale de (3.1) qu'on puisse espérer être vraie. Nous pensons que les théorèmes démontrés ici devraient permettre d'analyser la conjecture suivante (la difficulté vient du fait que même si M est minimale, les défauts locaux de M peuvent être tous grands).

Conjecture : Si M est minimale, toute fonction CR sur M est $\mathcal{W}$-prolongeable en tout point $z \in M$.

4. Fonctions CR indécomposables. — Dans ce paragraphe, nous supposons pour simplifier la variété M, générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et nous considérons aussi les distributions CR. La raison de ce choix est que la continuité n'est pas conservée dans la décomposition des fonctions en somme de valeurs au bord de fonctions holomorphes.

DÉFINITION 4.1. — *La fonction* CR u *est* décomposable *en* $z \in M$ *si, près de* z, $u = \sum_{i=1}^N u_i$ *où* $u_1, \ldots, u_N$ *sont des distributions* CR *au voisinage de* z *dans* M, $\mathcal{W}$*-prolongeables en* z.

Évidemment, des fonctions CR indécomposables en z ne peuvent exister, d'après (3.1), que si M n'est pas minimale en z. Nous avons donné le premier exemple de fonction CR indécomposable (voir III, § 3).

Nous allons généraliser cet exemple en utilisant la propagation microlocale et le résultat récent de M. S. BAOUENDI et L. P. ROTHSCHILD [6]. Dans [6], les auteurs prouvent le résultat suivant, qui montre que le théorème (3.1) de Tumanov est optimal, au moins localement :

$$
(4.1) \qquad \begin{cases} \text{Si } M \text{ n'est pas minimale en } z, \text{ si } N = \mathcal{O}^{\text{loc}}(\mathfrak{X}, z), \\ \text{il existe une fonction CR } u, \text{ définie près de } z, \text{ telle} \\ \text{que } WFu = \dot{T}^*_M\mathbb{C}^n \cap iT^*_N\mathbb{C}^n \text{ près de } z. \end{cases}
$$

(Voir le § 5 pour le front d'onde WFu.) En particulier, une telle fonction n'est pas $\mathcal{W}$-prolongeable en z (voir (5.5).) Nous montrerons que, souvent, elle n'est pas décomposable en z.

Nous obtiendrons le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — *Soit* N *une variété* CR *lisse dans* $\mathbb{C}^n$, *minimale en* $z \in N$. *On suppose* CR-dim $N \geq 1$ *et* $\dim N \leq n +$ CR-dim $N - 2$. *Il existe alors un germe de variété générique lisse* M *en* z, *contenant* N *près de* z *et de même dimension* CR *que* N *et une fonction* CR *sur* M, *indécomposable en* z.

Il ne doit pas être difficile de montrer que, en un certain sens, "presque toute M" convient (mais pas toute ! *cf.* les structures rigides de [4]).

Quand N est analytique réelle, on peut choisir M de même et il y a des fonctions CR indécomposables même au sens des hyperfonctions (voir Remarque III, 1.1). Ainsi, si $p \in \{1, \ldots, n-2\}$ et $s \in \{2, \ldots, n-p\}$, il existe des sous-variétés génériques M de $\mathbb{C}^n$, CR-dim $M = p$, de défaut local s en un point, portant des fonctions CR indécomposables en ce point. Les conditions sur p, s excluent le cas $p = 0$ (M est totalement réelle ; toute fonction est décomposable d'après [3]), évidemment le cas $p = n$, le cas $p = n - 1$ (M est une hypersurface, toute fonction CR est décomposable d'après [2]). Par contre le cas $s = 1$ est exclu par la méthode :

Problème : Trouver une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de dimension CR $p \in \{1, \dots, n-2\}$, défaut local 1, portant des fonctions CR indécomposables. Le THÉORÈME 5 est pourtant optimal :

THÉORÈME 6. — *Soit $p \in \{1, \dots, n-2\}$. Il existe une variété* CR *N lisse dans $\mathbb{C}^n$, de dimension* CR *p, de dimension $n + p - 1$, minimale en z et ayant la propriété suivante : pour tout germe en z de variété générique lisse M, contenant N près de z et de dimension* CR *p, toute fonction* CR *sur M est décomposable en z.*

5. Le front d'onde hypoanalytique. — Nous rappelons ici les propriétés du front d'onde hypoanalytique qui nous seront utiles, renvoyant le lecteur à [3], [5], [17] pour la théorie. Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$. La formule (1.2) met $T_M^*\mathbb{C}^n$ et $T_M\mathbb{C}^n$ en dualité et les notions du § 1 sur les cônes et la polarité s'appliquent fibre par fibre à $\dot{T}_M^*\mathbb{C}^n$ et $\dot{T}_M\mathbb{C}^n$. Le front d'onde hypoanalytique, noté WFu (les fibres sont notées $WF_z u$) d'une fonction CR u est une partie de $\dot{T}_M^*\mathbb{C}^n$ ayant les propriétés suivantes :

(5.1) WFu est fermé, conique, dans $\dot{T}_M^*\mathbb{C}^n$;

(5.2) $WF(u_1 + u_2) \subset WFu_1 \cup WFu_2$;

(5.3) u est prolongeable en z si et seulement si $WF_z u$ est vide ;

(5.4) u est $\mathcal{W}$-prolongeable en $(z, \theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$ si et seulement si $WF_z u$ est contenu dans l'intérieur de $(\mathbb{R}^+\theta)^0$.

En particulier :

(5.5) u est $\mathcal{W}$-prolongeable en z si et seulement si $WF_z u$ est saillant.

L'estimation de $WF_z u$ dans (5.4) se démontre en déformant le contour d'intégration d'une intégrale F.B.I. associée à u ([3], [17]) ; quand u se prolonge à une variété à bord $\widetilde{M}$, la même démonstration, la déformation ayant lieu sur $\widetilde{M}$, donne :

(5.6) si u est CR-prolongeable en $(z, \theta) \in \dot{T}_M\mathbb{C}^n$, on a $WF_z u \subset (\dot{\mathbb{R}}^+\theta)^0$.

Si M' est une sous-variété générique contenue dans M, $u_{|M'}$ est une fonction CR sur M'. On a :

(5.7) $WF(u_{|M'}) = (WFu)_{|M'}$.

On a alors la majoration *a priori* : $WF(u_{|M'}) \subset \dot{T}_M^*\mathbb{C}^n{}_{|M'}$.

Pour démontrer le THÉORÈME 6, nous utiliserons la propriété suivante [5] :

(5.8) Si $WF_z u$ est réunion finie disjointe de cônes saillants, u est décomposable en z.

6. Théorèmes de propagation. — Nous verrons dans III, § 1 ce que donne le théorème de Hanges-Sjöstrand quand on l'applique aux variétés génériques analytiques réelles. Le résultat le plus voisin de celui-là que nous obtiendrons, dans le cas C^∞ ou peu régulier, est le suivant :

THÉORÈME 7. — *Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe C^∞, et $\mathcal{L} \subset \dot{T}^*_M\mathbb{C}^n$ une sous-variété de classe C^∞,* CR *et minimale dans $\dot{T}^*\mathbb{C}^n$. Si u est une fonction* CR *sur M, on a $\mathcal{L} \subset WFu \Leftrightarrow \mathcal{L} \cap WFu \neq \emptyset$.*

On notera l'analogie avec les propriétés du support des fonctions CR (voir F. TRÈVES [22]), la différence étant qu'en général la dimension CR de $\dot{T}^*_M\mathbb{C}^n$ en un point est nulle : le théorème ne donne rien.

Le théorème s'applique de façon non triviale quand M n'est pas minimale. Nous verrons en effet (voir § 7, 8) qu'on a la propriété suivante :

PROPOSITION 6.1. — *Soit M générique dans $\mathbb{C}^n$ et N une sous-variété* CR *de M, de même dimension* CR *que M, M et N de classe C^2. $\mathcal{L} = T^*_M\mathbb{C}^n \cap iT^*_N\mathbb{C}^n$ est une sous-variété* CR *de $T^*\mathbb{C}^n$, de même dimension et de même dimension* CR *que M.*

Dans la définition de $\mathcal{L}$, la multiplication par i est évidemment une multiplication dans la fibre.

Compte-tenu de cette proposition, le THÉORÈME 7 a le corollaire suivant :

THÉORÈME 8. — *Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe C^∞ et N une sous-variété* CR *de M, de classe C^∞ et de même dimension* CR *que M. Soit $\dot{\mathcal{L}} = \dot{T}^*_M\mathbb{C}^n \cap i\dot{T}^*_N\mathbb{C}^n$. Si u est une fonction* CR *sur M, $WFu \cap \dot{\mathcal{L}}$ est une réunion d'orbites de $\dot{\mathcal{L}}$, pour sa structure* CR.

Notons que, dans cet énoncé, les orbites sont non-triviales, sauf évidemment quand M est totalement réelle (dimension CR nulle) ou quand $M = N$ localement ($\mathcal{L}$ est réduit à la section nulle).

Nous obtiendrons aussi (d'ailleurs plus facilement) l'analogue du THÉORÈME 8 quand M est seulement supposée de classe C^∞ mais que N est complexifiable :

THÉORÈME 9. — *Même énoncé que le précédent, avec M de classe C^2 et N complexifiable.*

Dans le dernier énoncé, on voit sans peine que N est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{L}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Il peut y avoir une ambiguïté dans la définition des orbites de $\mathcal{L}$. Les orbites à considérer sont précisées dans le § 8. Aussi, dans le § 8, les théorèmes 8 et 9 seront traduits comme théorèmes de propagation dans T^*M, comme c'est l'usage dans le domaine des équations aux dérivées partielles (voir THÉORÈME 10).

7. La variété caractéristique de M.

On considère maintenant la variété générique M comme une variété réelle munie des sous-fibrés vectoriels T^cM (resp. $\mathbb{C}T^cM = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$) de TM (resp. $\mathbb{C}TM$). Soit Σ_M l'orthogonal de T^cM dans T^*M ; c'est la variété caractéristique du système des champs CR. Compte-tenu de (2.2) et de la définition de $T^*_M\mathbb{C}^n$, on a un isomorphisme canonique :

$$\theta : T^*_M\mathbb{C}^n \longrightarrow \Sigma_M \tag{7.1}$$

défini par $\theta(\omega) = i^*_M\omega$, $i_M : M \to \mathbb{C}^n$ l'injection.

A un champ de vecteurs X sur M est associé son symbole $\sigma(X)$, fonction sur T^*M ; à une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur T^*M est associé son champ hamiltonien H_f.

Soit $Z_j = X_j + iX_{j+p}$, $j = 1,\dots,p$, une base (locale) de champs CR. Si $X = \sum_{j=1}^{2p} \varphi_j X_j$ est une section $\mathcal{C}^1$ de T^cM, on a

$$H_{\sigma(X)\,|\Sigma_M} = \sum_{j=1}^{2p} \varphi_j H_{\sigma(X_j)\,|\Sigma_M}$$

puisque $\sigma(X_j)$, $j = 1,\dots,2p$, est nul sur Σ_M. On en déduit que, si $x^* \in \Sigma_M[x]$, $H_{\sigma(X)}(x^*)$ ne dépend que de $X(x) \in T^c_xM$, pas de la section choisie : l'application ainsi définie est "tensorielle".

On a la même propriété, pour l'application qui à Z, Z', sections de $T^{1,0}M$ associe :

$$\sigma\big([Z,\overline{Z}']\big)_{|\Sigma_M} = H_{\sigma(Z)}\sigma\big(\overline{Z}'\big)_{|\Sigma_M} = -H_{\sigma(\overline{Z}')}\sigma(Z)_{|\Sigma_M}.$$

D'où la définition, où dans les membres de droite les vecteurs sont prolongés en sections.

DÉFINITION 7.1. — *Soit* $x^* \in \dot{\Sigma}_M[x]$. *On pose :*

$$X \in \mathbb{C}T^c_xM, \quad \widehat{X} = H_{\sigma(X)}(x^*) \in \mathbb{C}T(T^*M)[x^*]\,;$$
$$Z, Z' \in T^{1,0}_xM, \quad Q^*_x(Z,\overline{Z}') = \tfrac{1}{2}i\sigma\big([Z,\overline{Z}']\big)(x^*).$$

Q^*_x *est la* forme de Lévi *de* M *en* x^*.

LEMME 7.2. — *Soit $x^* \in \dot{\Sigma}_M[x]$ et $Z \in T_x^{1,0}M$. $\widehat{Z}$ est tangent à Σ_M en x^* si et seulement si Z est dans le noyau de Q_x^*.*

Démonstration. — $\widehat{Z}$ est tangent à $\dot{\Sigma}_M$ si et seulement si $\widehat{Z}$ annule $\sigma(Z')$, $\sigma(\overline{Z}')$ pour toute section Z' de $T^{1,0}M$. Comme $T^{1,0}M$ est intégrable, on a toujours $\widehat{Z}\sigma(Z')_{|\Sigma_M} = \sigma([Z,Z'])_{|\Sigma_M} = 0$ et il reste les conditions $\widehat{Z}\sigma(\overline{Z}')(x^*) = (2/i)Q_x^*(Z,\overline{Z}') = 0$.

Nous allons maintenant établir une correspondance entre les vecteurs holomorphes tangents à $T_M^*\mathbb{C}^n$ et les vecteurs $\widehat{Z}$ tangents à Σ_M. Comme le résultat en vue est invariant par biholomorphisme et ne dépend que du 2-jet de M, nous allons supposer que M est définie près de 0 dans $\mathbb{C}^n$ par les équations :

$$M =: \ \operatorname{Im} z_k = Q^k(z',\bar{z}'); \quad k = p+1,\dots,p+q,$$

où $z = (z',z'') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = \mathbb{C}^n$ et Q^k est une forme hermitienne.

Une transformation linéaire en z'' permet de se placer au point $z^* = (0\,;\ 0,\dots,0,1) \in \dot{T}_M^*\mathbb{C}^n$. Finalement, une transformation linéaire en z' diagonalise Q^n sans changer z^* :

$$Q^n(z',\bar{z}') = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j z_j \bar{z}_j, \quad \varepsilon_j \in \{-1,0,+1\}\cdot$$

$T^*\mathbb{C}^n$ est muni des coordonnées (z,ζ) et des coordonnées réelles associées, $z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. On munit M des coordonnées (x,y') et T^*M des coordonnées canoniques associées (x,y',ξ,η').

Pour $\omega = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \mathrm{d}z_j$, voisin de z^*, on calcule $i_M^*\omega$ à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} i_M^*\omega &= i_M^*\Big[\sum_{j=1}^{p} \zeta_j \mathrm{d}z_j + \sum_{j=p+1}^{n} \zeta_j(\mathrm{d}x_j + i\mathrm{d}Q^j)\Big] \\ &\equiv \sum_{j=1}^{p} (\xi_j + i\eta_j)(\mathrm{d}x_j + i\mathrm{d}y_j) + \sum_{j=p+1}^{n} (\xi_j + i\eta_j)\mathrm{d}x_j + i\mathrm{d}Q^n. \end{aligned}$$

D'où

$$\operatorname{Re} i_M^*\omega \equiv \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathrm{d}x_j - \sum_{j=1}^{p} \eta_j \mathrm{d}y_j\,,$$

$$\operatorname{Im} i_M^*\omega \equiv \sum_{j=1}^{p} \big[(\xi_j + 2\varepsilon_j y_j)\mathrm{d}y_j + (\eta_j + 2\varepsilon_j x_j)\mathrm{d}x_j\big] + \sum_{j=p+1}^{n} \eta_j \mathrm{d}x_j.$$

De l'expression de $\operatorname{Im} i_M^*\omega$ on déduit l'équation de l'espace tangent à $T_M^*\mathbb{C}^n$ en z^*, identifié à un sous-espace de $T^*\mathbb{C}^n$:

$$T(T_M^*\mathbb{C}^n)[z^*] =: \begin{cases} y'' = 0, & \eta'' = 0, \\ \xi' + 2\varepsilon \cdot y' = 0, & \eta' + 2\varepsilon \cdot x' = 0, \end{cases} \tag{7.2}$$

où $\varepsilon \cdot x' = (\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_p x_p)$, *etc.*

De l'expression de $\operatorname{Re} i_M^*\omega$, on déduit que $\theta'(z^*)$ est la restriction à (7.2) de l'application linéaire :

$$(x, y, \xi, \eta) \longmapsto (x, y', \xi, -\eta'). \tag{7.3}$$

De (7.2) il résulte que les vecteurs holomorphes tangents à $T_M^*\mathbb{C}^n$ en z^* sont les vecteurs (on note $\partial/\partial z_j = \frac{1}{2}(\partial/\partial x_j - i\partial/\partial y_i)$) :

$$\widetilde{Z} = \sum_{\varepsilon_j = 0} w_j \frac{\partial}{\partial z_j}. \tag{7.4}$$

Le fait que $\widetilde{Z}$ est "horizontal" dépend des réductions faites.

On calcule maintenant les choses sur M. On note encore $z_j = x_j + iy_j$, $\partial/\partial z_j = \frac{1}{2}(\partial/\partial x_j - i\partial/\partial y_i), \dots$ dans les coordonnées de M, pour $j = 1, \dots, p$. Une base de $T^{1,0}M$ près de 0 est donnée par :

$$Z_k = \frac{\partial}{\partial z_k} + i \sum_{\alpha = p+1}^{n} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad k = 1, \dots, p.$$

Les coefficients de la forme de Lévi en $x^* = (0\,;\ 0, \dots, 0, 1)$ sont

$$c_{jk} = \tfrac{1}{2} i\sigma\big([Z_j, \overline{Z}_k]\big)(x^*) = \frac{\partial^2 Q^n}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = \delta_{jk}\varepsilon_k.$$

Finalement, si $Z = \sum_{j=1}^p w_j \partial/\partial z_j \in T_0^{1,0}M$, on calcule :

$$\widehat{Z}(x^*) = \sum_{j=1}^p w_j H_{\sigma(Z_j)}(x^*) = \sum_{j=1}^p w_j \Big(\frac{\partial}{\partial z_j} - i\varepsilon_j \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j}\Big).$$

Compte-tenu du LEMME 7.2, $\widehat{Z}(x^*)$ est tangent à Σ_M en x^* si et seulement si $Z = \sum_{\varepsilon_j = 0} w_j \partial/\partial z_j$, auquel cas $\widehat{Z}(x^*) = \sum_{\varepsilon_j = 0} w_j \partial/\partial z_j$. Compte-tenu de (7.3), (7.4), nous avons obtenu le résultat suivant :

LEMME 7.3. — *Soit $\theta : \dot{T}^*_M\mathbb{C}^n \to \dot{\Sigma}_M$ l'isomorphisme canonique, $z^* \in \dot{T}^*_M\mathbb{C}^n[z]$ et $x^* = \theta(z^*) \in \dot{\Sigma}_M[z]$. Si $Z \in T^{1,0}_z M$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\widehat{Z}$ est tangent à Σ_M en x^* ;*

(2) *il existe $\widetilde{Z} \in T^{1,0}(T^*_M\mathbb{C}^n)[z^*]$ (nécessairement unique) de composante horizontale Z.*

De plus, on a alors $\widehat{Z} = \theta'(z^*) \cdot \widetilde{Z}$.

Le LEMME 7.3 est fondamental pour nous. Il permet de faire le lien entre les énoncés de propagation sur T^*M, qui s'écrivent en termes des champs hamiltoniens $\widehat{Z}$ et les énoncés sur $T^*_M\mathbb{C}^n$ qui font intervenir la structure complexe. Par exemple, la PROPOSITION 6.1 est un corollaire de ce lemme (voir (8.1)).

Soit $\sigma = \sum_{j=1}^n \zeta_j \mathrm{d}z_j$ la 1-forme canonique sur $T^*\mathbb{C}^n$, $\mathrm{d}\sigma$ la 2-forme canonique (complexe), σ_M la 1-forme canonique sur T^*M. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 7.4. — *Si $i : T^*_M\mathbb{C}^n \to T^*\mathbb{C}^n$, $j : \Sigma_M \to T^*M$ sont les injections, on a : $i^*\sigma = \theta^* j^* \sigma_M$.*

Démonstration. — Tout est tautologique. Si on note $(X \to Y)$ les applications canoniques, on a pour $\omega \in T^*_M\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} i^*\sigma(\omega) &= \big(T^*_M\mathbb{C}^n \to \Sigma_M\big)^*(\Sigma_M \to M)^*(M \to \mathbb{C}^n)^*\omega \\ &= \theta^*\big(\Sigma_M \to T^*M\big)^*(T^*M \to M)^*\theta(\omega) \\ &= \theta^* j^* \sigma_M\big(\theta(\omega)\big). \quad \square \end{aligned}$$

LEMME 7.5. — *Dans le* THÉORÈME 7, *la variété $\mathcal{L}$ est isotrope pour la 2-forme canonique complexe $\mathrm{d}\sigma$.*

Notons que $T^*_M\mathbb{C}^n$ n'est lagrangien que pour $\operatorname{Im} \mathrm{d}\sigma$.

Démonstration. — D'après le LEMME 7.4, il suffit de montrer que $\mathcal{L}' = \theta(\mathcal{L})$ est isotrope dans T^*M. Par définition de $\mathcal{L}$ et le LEMME 7.3, on voit que $\mathcal{L}'$ est contenue dans Σ_M et est une orbite d'une famille de champs locaux de la forme $\widehat{X}$, X section locale de T^cM. Il existe donc une famille $\mathcal{F}$ de fonctions locales lisses f sur T^*M, nulles sur $\mathcal{L}'$ et telle que $\mathcal{L}'$ est une orbite au sens de Sussmann de la famille de champs de vecteurs locaux H_f, $f \in \mathcal{F}$. Appliquons le théorème de Sussmann [19] : le fibré tangent à $\mathcal{L}'$ est engendré par les champs H_f, $f \in \mathcal{F}$, et leurs images par le "groupe" engendré par les flots locaux des champs H_f, $f \in \mathcal{F}$. Un tel difféomorphisme local φ est une transformation canonique qui conserve $\mathcal{L}'$ donc $\varphi_* H_f = H_{f\circ\varphi}, f \circ \varphi|_{\mathcal{L}'} = 0$. Les vecteurs tangents à $\mathcal{L}'$ en x^* sont donc de la forme $H_f(x^*)$, $f|_{\mathcal{C}'} = 0$. Si H_f, H_g sont deux tels vecteurs,

$$\mathrm{d}\sigma_M\big(H_f(x^*), H_g(x^*)\big) = H_f \cdot g(x^*) = 0. \quad \square$$

8. Propagation sur le conormal aux orbites.

Soit M générique de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{C}^n$, $\theta : \dot{T}^*_M\mathbb{C}^n \to \dot{\Sigma}_M$ l'isomorphisme canonique.

DÉFINITION 8.1. — *Si u est une fonction* CR *sur M, on note $WF'u = \theta(WFu)$.*

Nous laissons au lecteur le soin de transporter le THÉORÈME 7 sur Σ_M. Intéressons-nous à la situation considérée dans les THÉORÈMES 8 et 9 : N est une variété CR, de même dimension CR que M, contenue dans M. Soit $T^*_N M$ le conormal à N dans M.

On suppose M et N de classe $\mathcal{C}^2$. Si $X \in \mathfrak{X}$ est une section de classe $\mathcal{C}^1$ de T^cM, X est tangent à N, puisque $T^cN = T^cM|_N$, et $\widehat{X} = H_{\sigma(X)}|_{T^*_N M}$ est tangent à $T^*_N M$. Compte-tenu du LEMME 7.3, on a démontré la PROPOSITION 6.1 :

$$(8.1) \qquad \begin{cases} T^*_M\mathbb{C}^n \cap iT^*_N\mathbb{C}^n = \theta^{-1}(T^*_N M) \text{ a même} \\ \text{dimension et même dimension CR que } M. \end{cases}$$

On note :

$$(8.2) \qquad \widehat{\mathfrak{X}} = \big\{\widehat{X}_{|T^*_N M}\ ;\ X \in \mathfrak{X}\big\}.$$

Rappelons que l'application $X \mapsto \widehat{X}$ est tensorielle. Choisissons des coordonnées de classe $\mathcal{C}^2$ sur M, soit $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$, telles que N soit définie par $x'' = 0$. Soit $(x', \xi'') \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ les coordonnées canoniques sur $T^*_N M$. Si

$$X = \sum_{j=1}^{\ell+m} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$a_j(x', 0) = 0$ pour tout $j = \ell+1, \dots, \ell+m$, est un champ de classe $\mathcal{C}^1$ tangent à N, on a :

$$(8.3) \qquad \widehat{X}_{|T^*_N M} = \sum_{j=1}^{\ell} a_j(x', 0) \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j,k=\ell+1,\dots,\ell+m} \frac{\partial a_j}{\partial x_k}(x', 0)\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_k}.$$

C'est un champ de vecteurs continu, mais d'une forme particulière.

On a encore existence et unicité des courbes intégrales. On voit que si $\widehat{\gamma}(t) = (x'(t), \xi''(t))$ est une courbe intégrale de $\widehat{X}$, $\gamma(t) = x'(t)$ est une courbe intégrale de $X_{|N}$ tandis que $\xi''(t)$, qui vérifie un système linéaire, est déterminé par γ et la donnée initiale $\xi''(0)$; $\xi''(t)$ dépend linéairement de $\xi''(0)$. L'orbite $\mathcal{O}(\widehat{\mathfrak{X}}, x^*)$, $x^* \in \dot{T}^*_N M$, est définie de façon évidente.

Compte-tenu du LEMME 7.3, les THÉORÈMES 8 et 9 sont équivalents au suivant (qui précise le sens du THÉORÈME 9) :

THÉORÈME 10. — *Soit M, générique dans $\mathbb{C}^n$ de classe C^∞ (resp. C^2) et N une sous-variété* CR *de M de classe C^∞ (resp. complexifiable) de même dimension* CR *que M. Si u est une fonction* CR *sur M, $WF'u \cap \dot{T}^*_N M$ est une réunion d'orbites de $\widehat{\mathfrak{X}} = \{\widehat{X}_{|T^*_N M} \,;\, X \in \mathfrak{X}\}$. Si γ est une courbe intégrale par morceaux de $T^c M$, d'origine $x_1 \in N$, extrémité $x_2 \in N$, il existe un isomorphisme linéaire :*

$$c(\gamma) : T^*_N M[x_1] \to T^*_N M[x_2]$$

tel que, si $\alpha \in T^*_N M[x_1]$:

$$\alpha \in WF'_{x_1} u \iff c(\gamma) \cdot \alpha \in WF'_{x_2} u.$$

9. Propagation non caractéristique.

Classiquement ([9], [16] et dans un contexte CR [22]), la propagation le long des courbes intégrales d'un champ de vecteurs est équivalente à la propagation à travers toute hypersurface non caractéristique. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\mathfrak{X}$ un système de champs de vecteurs sur Ω et $\omega \subset \Omega$ un ouvert. Si $\Sigma = \{h = 0\}$ est un germe d'hypersurface C^1 en $x \in \Omega$, Σ est non-caractéristique si $Xh(x) \neq 0$ pour un $X \in \mathfrak{X}$. Quand les champs $X \in \mathfrak{X}$ sont de classe C^1, les propriétés suivantes sont équivalentes ([9], [22]) :

$$\text{Si } x \in \omega, \quad \mathcal{O}(\mathfrak{X}, x) \subset \omega. \tag{9.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } x \in \Omega, \text{ tout germe } \Sigma = \{h = 0\} \text{ d'hyper-} \\ \text{surface non caractéristique en } x, \text{ si } \Sigma_- = \{h < 0\} \\ \text{est contenu dans } \omega \text{ près de } x, \ x \in \omega. \end{array} \right. \tag{9.2}$$

Nous prouverons toujours la propriété (9.2), dans les situations suivantes :

EXEMPLE 9.1. — (*cf.* THÉORÈME 10), $\Omega = \dot{T}^*_N M$, $\mathfrak{X} = \widehat{\mathfrak{X}}$, $\omega = \Omega \backslash WF'u$.

EXEMPLE 9.2. — (*cf.* THÉORÈME 2), $\Omega = M$, $\mathfrak{X}$, $\omega = \{z \in M,\ u$ est $\mathcal{W}$-prolongeable en $z\}$.

EXEMPLE 9.3. — (*cf.* IV, § 1), Ω une variété CR M, $\mathfrak{X}$, u une section de H_ϕ au voisinage de M, $\omega = \{z \in M, u \underset{\phi}{\sim} 0 \text{ en } z\}$.

Quand les champs $X \in \mathfrak{X}$ sont seulement continus, (9.1) implique encore (9.2) (dans (9.2) $\mathcal{O}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X}, x)$ coupe Σ_-) mais la réciproque est fausse en général (prendre pour X un champ ayant deux courbes intégrales tangentes en x, distinctes dans les germes, $\mathfrak{X} = \{X\}$, Ω un petit voisinage de x et pour ω le complémentaire d'une des courbes dans Ω). Dans la situation du THÉORÈME 10, quand M est de classe $\mathcal{C}^2$, les champs $X \in \widehat{\mathfrak{X}}$ sont continus, mais de la forme particulière (8.3). Nous sommes contraints de vérifier que la méthode des déformations non caractéristiques s'applique encore :

LEMME 9.4. — (9.1) *et* (9.2) *sont équivalents quand* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, *et avec* $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, *les champs* $X \in \mathfrak{X}$ *sont de la forme*

$$X = \sum_{j=1}^{p} a_j(x') \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j=p+1}^{p+q} a_{ij}(x') x_i \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où $X_0 = \sum_{j=1}^{p} a_j(x') \partial / \partial x_j$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et ne s'annule pas, et les* a_{ij} *sont continues.*

Démonstration. — On suppose donc (9.2). Il suffit de montrer (9.1) quand $\mathfrak{X} = \{X\}$ a un seul élément, localement près d'un point (mais le voisinage ne dépend pas de ω!). Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en x' redresse X_0 en $\partial/\partial x_1$, et, compte-tenu de la linéarité de X en x'', un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme en (x_1, x'') redresse $X_{|x_2 = \cdots = x_p = 0}$ en $\partial/\partial x_1$. Après translation, on est ramené à montrer, en notant $x = (x_1, x', x'') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^q$, que si :

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \Big[a_j(x_1, x') + \sum_{k=p+1}^{p+q} a_{jk}(x_1, x') x_k \Big] \frac{\partial}{\partial x_j},$$

avec a_j, a_{jk} continues pour $|x_1| \le R$, $|x'| \le R$, et nulles quand $x' = 0$, et si $0 \in \omega$, les points $(x_1, 0, 0)$, $0 \le x_1 < R$, appartiennent à ω.

Pour $r_0 > 0$ assez petit, le voisinage

$$F = \Big\{ x = (x_1, x', x''),\ |x_1| \le r_0,\ |x'| \le r_0,\ |x''| \le r_0 \Big\}$$

de 0 est contenu dans ω. Pour $r < r_0$, on considère :

$$D_r =: \ 0 \le x_1 \le R, \quad |x'| \le r, \quad |x''| \le r_0.$$

Si $x \in D_r$ et si (x, ξ) est caractéristique pour X, on a

$$\xi_1 + \sum_{j=p+1}^{p+q} \Big[a_j(x_1, x') + \sum_{k=p+1}^{p+q} a_{jk}(x_1, x') x_k \Big] \xi_j = 0$$

donc $|\xi_1| \leq \varepsilon(r)|\xi''|$ avec $\varepsilon(r) \xrightarrow[r \to 0]{} 0$ puisque les coefficients sont nuls quand $x' = 0$. On choisit $r > 0$ assez petit pour que $\varepsilon(r) < r_0/(2R)$. On considère alors l'ellipsoïde :

$$\mathcal{E}_0 =: \ x_1 = 0, \quad \frac{x'^2}{r^2} + \frac{x''^2}{r_0^2} = 1$$

et la famille de paraboloïdes tronqués, pour $0 < T < R$:

$$\mathcal{E}_T =: \ 0 \leq x_1 \leq T, \quad \frac{x'^2}{r^2} + \frac{x''^2}{r_0^2} = \frac{T - x_1}{T} \cdot$$

Par construction, $\mathcal{E}_0$ est contenu dans ω, $\mathcal{E}_T$ est contenu dans D_r et la normale en x à $\mathcal{E}_T$, $\xi = (1/T, 2x'/r^2, 2x''/r_0^2)$ vérifie $|\xi_1| > \varepsilon(r)|\xi''|$: $\mathcal{E}_T$ est non caractéristique. La propriété (9.2) donne (c'est la méthode des déformations non caractéristiques) que $\mathcal{E}_T$ est contenu dans ω pour $0 < T < R$, donc aussi les points $(T, 0, 0)$, $0 \leq T < R$. $\square$

II. Constructions de disques

Dans ce chapitre, nous prouvons les lemmes sur la construction de disques complexes dont nous aurons besoin et nous démontrons le Théorème 1. La résolution de l'équation de Bishop est classique (voir par exemple C. D. Hill et G. Taiani [13], A. Boggess et J. C. Polking [8]) mais nous utilisons l'idée suivante de B. Coupet [10] qui permet d'économiser une dérivée sur la fonction G dans l'équation (1.6) ci-dessous : on construit des solutions C^α par approximations successives dans L^2, plutôt que dans C^α.

1. Résolution de l'équation de Bishop.

D est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, S le cercle unité. α est un nombre fixé, $0 < \alpha < 1$. On note C^α pour tout espace de fonctions, sur S ou $\overline{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, vérifiant une condition de Hölder d'ordre α. Les normes sur $\mathbb{R}^n$ et les espaces de matrices sont notées $|\cdot|$. On note :

$$X \in C^\alpha, \quad |X| = \max_\tau |X(\tau)|, \quad |X|_\alpha = |X| + \max_{\tau,\sigma} \frac{|X(\tau) - X(\sigma)|}{|\tau - \sigma|^\alpha} ;$$

$$X \in C^{1,\alpha}, \quad |X|_{1,\alpha} = |X|_\alpha + |X'|_\alpha ,$$

où X' est la dérivée (en un sens évident) de X. Pour $\rho > 0$, nous posons :

$$\begin{aligned} C^\alpha(\rho) &= \{X \in C^\alpha,\ |X|_\alpha < \rho\}, \\ C^{1,\alpha}(\rho) &= \{X \in C^{1,\alpha},\ |X|_\alpha < \rho\}, \\ \mathbb{R}^n(\rho) &= \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < \rho\}\cdot \end{aligned}$$

Dans les énoncés de cette section, C sera une constante, pouvant dépendre des dimensions, du choix des normes, de la fonction G, de α mais pas des autres données (en particulier pas de ρ). De même, ε sera une fonction qui tend vers 0 avec son argument, fixe au même sens que C. Enfin, "si $\rho < \rho_0$" se lit "il existe $\rho_0 > 0$ tel que si $\rho < \rho_0$", ρ_0 étant fixé au même sens que C.

Toujours, l'espace C^α considéré sera clair d'après le contexte. Soit :

$$G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ près de } 0,\ G(0) = 0. \tag{1.1}$$

Pour $\rho < \rho_0$, G induit une application

$$\begin{aligned} G : C^\alpha(\rho) &\longrightarrow C^\alpha, \\ G(Z)(\tau) &= G(Z(\tau)). \end{aligned}$$

On a classiquement ([8], [13]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \rho < \rho_0,\ G : C^\alpha(\rho) \to C^\alpha \text{ est continue, avec :} \\ |G(Z)|_\alpha \le C C(\rho) |Z|_\alpha\,; \\ |G(Z_1) - G(Z_2)|_\alpha \le C\big(C(\rho)|Z_1 - Z_2|_\alpha + \rho\kappa(|Z_1 - Z_2|)\big), \\ \text{où } C(\rho) = \max_{|z|\le\rho} |G'(z)| \text{ et } \kappa \text{ est un} \\ \text{module de continuité de } G'. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ près de } 0, \text{ si } \rho < \rho_0, \\ G : C^\alpha(\rho) \to C^\alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et pour tout } \dot Z \in C^\alpha, \\ (G'(Z)\dot Z)(\tau) = G'(Z(\tau))\dot Z(\tau). \end{array} \right. \tag{1.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ près de } 0, \text{ et } G'(0) = 0, \text{ si } \rho < \rho_0, \\ G : C^{1,\alpha}(\rho) \to C^{1,\alpha} \text{ est continue, avec :} \\ |G(Z)|_{1,\alpha} \le C\rho |Z|_{1,\alpha}\,; \\ |G(Z_1) - G(Z_2)|_{1,\alpha} \le C\rho|Z_1 - Z_2|_{1,\alpha} + |Z_1|_{1,\alpha}\varepsilon(|Z_1 - Z_2|_\alpha). \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Bien sûr, quand G est $\mathcal{C}^2$ et $G'(0) = 0$, dans (1.2) on peut prendre $C(\rho) = C\rho$ et $\kappa(\rho) = C\rho$.

Si u est une fonction sur S, on note Pu le prolongement harmonique de u à D, Tu la transformée de Hilbert de u (T est $\mathbb{C}$-linéaire, $PTu(0) = 0$, et $P(u + iTu)$ est holomorphe). Suivant [8], on introduit, pour $\lambda \in \overline{D}$ l'opérateur $u \mapsto T_\lambda u$:

$$\tau \in S, \quad T_\lambda u(\tau) = Tu(\tau) - P(Tu)(\lambda).$$

Les opérateurs $T = T_0$, T_λ, P sont bornés dans L^2, C^α, $C^{1,\alpha}$, uniformément en λ. Dans les calculs, leurs normes seront cachées dans la "constante" C. Étant donnée la fonction :

(1.5) $\quad G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 près de 0, $G(0) = 0$, $G'(0) = 0$,

l'équation de Bishop s'écrit :

$$Y = T_\lambda G(X, Y) + y, \tag{1.6}$$

où $X : S \to \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \overline{D}$, $y \in \mathbb{R}^n$ sont donnés, $Y : S \to \mathbb{R}^n$ est l'inconnue.

Soit $C(\rho) = \max_{|x| \leq \rho, |y| \leq \rho} |G'(x, y)|$. Par hypothèse $C(\rho) \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$. Si X, λ, y sont donnés avec $|X| \leq \rho$ et si Y_1, Y_2 sont deux solutions de l'équation (1.6) vérifiant $|Y_1| \leq \rho$, $|Y_2| \leq \rho$, on a :

$$|Y_1 - Y_2|_{L^2} \leq CC(\rho)|Y_1 - Y_2|_{L^2}.$$

Comme $CC(\rho) < 1$ pour $\rho < \rho_0$, on obtient :

$$\begin{cases} \text{Si } \rho < \rho_0 \text{ et } |X| \leq \rho, \text{ (1.6) a au plus} \\ \text{une solution } Y \text{ telle que } |Y| \leq \rho. \end{cases} \tag{1.7}$$

On résout (1.6) par la méthode des approximations successives :

$$Y_0 = 0\,; \quad Y_{n+1} = T_\lambda G(X, Y_n) + y \quad \text{si } n \geq 0. \tag{1.8}$$

Si $\rho < \rho_0$, si $X \in C^\alpha(\rho)$, $y \in \mathbb{R}^n(\frac{1}{2}\rho)$ et $Y_n \in C^\alpha(\rho)$, Y_{n+1} est bien définie et, d'après (1.2) :

$$|Y_{n+1}|_\alpha \leq CC(\rho)\big(|X|_\alpha + |Y_n|_\alpha\big) + |y| \leq \tfrac{1}{2}\rho + 2CC(\rho)\rho$$

si ρ_0 est choisi assez petit, $CC(\rho) < \frac{1}{4}$ et on obtient par récurrence que la suite Y_n est bien définie et uniformément bornée (par ρ) dans C^α. Pour $\rho < \rho_0$, elle converge dans L^2 puisque :

$$|Y_{n+1} - Y_n|_{L^2} \leq CC(\rho)|Y_n - Y_{n-1}|_{L^2}.$$

Nous avons obtenu :

LEMME 1.1. — *Soit G vérifiant* (1.5). *Si $\rho < \rho_0$, l'équation* (1.6) *possède pour tout $(X, y, \lambda) \in C^\alpha(\rho) \times \mathbb{R}^n(\frac{1}{2}\rho) \times \overline{D}$ une unique solution $Y \in C^\alpha(\rho)$. Quand $y = 0$, $|Y|_\alpha = |X|_\alpha \varepsilon(|X|_\alpha)$.*

Le LEMME 1.1 définit pour $\rho < \rho_0$ une application :

$$Y : C^\alpha(\rho) \times \mathbb{R}^n(\tfrac{1}{2}\rho) \times \overline{D} \to C^\alpha(\rho). \tag{1.9}$$

Dans les énoncés suivants, ρ_0 peut être choisi plus petit.

LEMME 1.2. — *Si G est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\rho < \rho_0$, la solution* (1.9) *est continue.*

Démonstration. — Soit $Y_k = T_{\lambda_k} G(X_k, Y_k) + y_k$, $k = 1, 2$. (1.2) donne :

$$\begin{aligned}
|Y_1 - Y_2|_\alpha &\leq |T_{\lambda_1}(G(X_1, Y_1) - G(X_2, Y_2))|_\alpha \\
&\qquad + |(T_{\lambda_2} - T_{\lambda_1})G(X_2, Y_2)|_\alpha + |y_1 - y_2| \\
&\leq C\rho\big(|X_1 - X_2|_\alpha + |Y_1 - Y_2|_\alpha\big) + C\rho^2|\lambda_1 - \lambda_2|^\alpha + |y_1 - y_2|.
\end{aligned}$$

D'où le lemme, quand $C\rho < 1$. ▯

LEMME 1.3. — *Si G est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\rho < \rho_0$, la solution* (1.9) *induit pour $\lambda \in \overline{D}$ fixé une application $Y : C^\alpha(\rho) \times \mathbb{R}^n(\frac{1}{2}\rho) \to C^\alpha(\rho)$ de classe C^1.*

Démonstration. — On résout (1.6) par le théorème des fonctions implicites. D'après (1.3), si $\mathcal{F}(X, Y, y) = T_\lambda G(X, Y) + y$, l'application $\mathcal{F} : C^\alpha(\rho) \times \mathbb{R}^n(\frac{1}{2}\rho) \to C^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $D_Y \mathcal{F}(0, 0, 0) = 0$. ▯

LEMME 1.4. — *Si G est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\rho < \rho_0$, la solution* (1.9) *induit une application continue $Y : C^{1,\alpha}(\rho) \times \mathbb{R}^n(\frac{1}{2}\rho) \times \overline{D} \to C^{1,\alpha}(\rho)$.*

Démonstration. — On considère à nouveau, pour $X \in C^{1,\alpha}(\rho)$ et $y \in \mathbb{R}^n(\frac{1}{2}\rho)$, la suite (1.8). Il est clair par récurrence que $Y_n \in C^{1,\alpha}(\rho)$ pour tout n, et par (1.4) :

$$|Y_{n+1}|_{1,\alpha} \leq C\rho\big(|X|_{1,\alpha} + |Y_n|_{1,\alpha}\big) + |y|.$$

Quand $C\rho < \frac{1}{4}$, on en déduit par récurrence que la suite Y_n est uniformément bornée dans $C^{1,\alpha}$ (par $|X|_{1,\alpha} + 2|y|$). Donc $Y \in C^{1,\alpha}$ avec :

$$|Y|_{1,\alpha} \leq |X|_{1,\alpha} + 2|y|.$$

Si $Y_k = T_{\lambda_k} G(X_k, Y_k) + y_k$, $k = 1, 2$, on a, toujours d'après (1.4) :

$$\begin{aligned}
|Y_1 - Y_2|_{1,\alpha} &\leq \big|T_{\lambda_1}(G(X_1, Y_1) - G(X_2, Y_2))\big|_{1,\alpha} \\
&\qquad + \big|(T_{\lambda_1} - T_{\lambda_2})G(X_2, Y_2)\big|_{1,\alpha} + |y_1 - y_2| \\
&\leq C\rho\big(|X_1 - X_2|_{1,\alpha} + |Y_1 - Y_2|_{1,\alpha}\big) \\
&\qquad + \big(|X_1|_{1,\alpha} + |Y_1|_{1,\alpha}\big)\varepsilon\big(|X_1 - X_2|_\alpha + |Y_1 - Y_2|_\alpha\big) \\
&\qquad\quad + C\rho^2|\lambda_1 - \lambda_2|^\alpha + |y_1 - y_2|,
\end{aligned}$$

d'où le lemme, quand $C\rho < 1$. ▯

2. Constructions de disques. — Un disque (complexe) est une application continue $Z : \overline{D} \to \mathbb{C}^n$, holomorphe sur D. On note $\partial Z = Z_{|S}$ (le bord de Z). On identifie souvent Z et ∂Z à leurs images dans $\mathbb{C}^n$. On note $\mathcal{O}^\alpha$ l'espace des disques complexes $Z \in C^\alpha$.

Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ près de $z \in M$, de dimension CR p, codimension q. Une transformation linéaire affine ramène l'étude en 0, avec $T_0 M = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$. Avec $z = (z', z'') \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, on a alors :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} M =: \ \operatorname{Im} z'' = G(z', \operatorname{Re} z''), \text{ où } G : \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q \text{ est} \\ \text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ près de } 0, \text{ nulle à l'ordre deux en } 0. \end{cases}$$

Un disque $Z : \overline{D} \to \mathbb{C}^n$ s'écrit $Z = (Z', Z'')$, $Z' : \overline{D} \to \mathbb{C}^p$, $Z'' : \overline{D} \to \mathbb{C}^q$.

LEMME 2.1. — *Soit M la variété générique définie par* (2.1). *Si $\rho < \rho_0$, pour tout disque $Z' \in \mathcal{O}^\alpha(\rho)$, tout $x'' \in \mathbb{R}^q(\rho)$, tout $\lambda \in \overline{D}$, il existe un unique disque Z vérifiant :*

$$Z = (Z', Z'')\,; \quad \partial Z \subset M\,; \quad |Z|_\alpha \leq C\rho\,; \quad \operatorname{Re} Z''(\lambda) = x''.$$

De plus, quand $x'' = 0$, $|Z''|_\alpha = |Z'|_\alpha \varepsilon(|Z'|_\alpha)$.

Démonstration. — Si $Z'' = X'' + iY''$, les conditions $\partial Z \subset M$, $\operatorname{Re} Z''(\lambda) = x''$ donnent :

$$X''_{|S} = -T_\lambda Y''_{|S} + x'' = -T_\lambda G\Big(Z'_{|S}, X''_{|S}\Big) + x''.$$

Le LEMME 1.1 (aux notations près) s'applique et donne $X''_{|S}$. Z'' est donnée par $Z'' = P(X''_{|S} + iG(Z'_{|S}, X''_{|S})$. □

Compte-tenu des LEMMES 1.2, 1.3, 1.4 de (1.3), (1.4) et de la formule précédente, on a :

LEMME 2.2. — *Soit M la variété générique définie par* (2.1); *on suppose M de classe $\mathcal{C}^2$. Si $\rho < \rho_0$, le disque Z du* LEMME 2.1 *induit des applications continues $\mathcal{O}^\alpha(\rho) \times \mathbb{R}^q(\rho) \times \overline{D} \to \mathcal{O}^\alpha$ et $\mathcal{O}^{1,\alpha}(\rho) \times \mathbb{R}^q(\rho) \times \overline{D} \to \mathcal{O}^{1,\alpha}$ et, pour λ fixé, des applications $\mathcal{O}^\alpha(\rho) \times \mathbb{R}^q(\rho) \to \mathcal{O}^\alpha$ de classe $\mathcal{C}^1$.*

Soit maintenant M une variété CR dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ près de $z \in M$, de dimension CR p, codimension $r + 2s$, avec $n = p + r + s$. Une transformation linéaire affine ramène l'étude en 0 avec $T_0 M = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \times \{0\}$. Avec $z = (z', z'', z''') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, on a :

$$(2.2) \qquad \begin{cases} M =: \ \operatorname{Im} z'' = G(z', \operatorname{Re} z''), \quad z''' = g(z', \operatorname{Re} z''), \\ \text{où } G : \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r \text{ et } g : \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{C}^s \text{ sont} \\ \text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ près de } 0, \text{ nulles à l'ordre deux en } 0. \end{cases}$$

Soit M_0 la variété générique dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r$, de dimension CR p, définie par :

$$M_0 =: \ \operatorname{Im} z'' = G(z', \operatorname{Re} z''). \tag{2.3}$$

Si $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial/\partial z_i$ est un vecteur holomorphe tangent à M en $z = (z', z'', z''')$, on voit que $\sum_{i=1}^{p+r} a_i \partial/\partial z_i$ est tangent à M_0 en (z', z''), détermine Z et annule $\bar{g}$ en (z', z''). Comme CR-dim M = CR-dim M_0, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} g, \text{ considérée comme fonction } g_{|M_0} : M_0 \to \mathbb{C}^s \\ \text{est une fonction CR.} \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Réciproquement, la condition (2.4) caractérise les variétés CR de la forme (2.2). Venons-en à la construction de disques. On se donne un disque $Z' \in \mathcal{O}^\alpha(\rho)$, $x'' \in \mathbb{R}^r(\rho)$ et $\lambda \in \bar{D}$. Quand $\rho < \rho_0$, le LEMME 2.1 fournit un disque $Z'' \in \mathcal{O}^\alpha$ tel que :

$$\partial(Z', Z'') \subset M_0, \quad \operatorname{Re} Z''(\lambda) = x''.$$

Posons

$$Z''' = P\Big(g_{|M_0}(Z'_{|S}, Z''_{|S})\Big).$$

D'après le théorème d'approximation de BAOUENDI-TRÈVES [7], $g_{|M_0}$ est près de 0 limite uniforme d'une suite de polynômes holomorphes g_n. Pour $\rho < \rho_0$ et par le principe du maximum, la suite $g_n(Z', Z'')$, qui converge uniformément sur S converge sur $\bar{D}$. Donc Z''' est holomorphe sur D. On a obtenu un disque $Z = (Z', Z'', Z''') \in \mathcal{O}^\alpha$ tel que

$$\partial Z \subset M, \quad \operatorname{Re} Z''(\lambda) = x''.$$

Compte-tenu de la formule qui donne Z''' et des LEMMES 2.1, 2.2, on a :

LEMME 2.3. — *Soit M la variété* CR *dans $\mathbb{C}^n$ définie par* (2.2) (2.4). *Si $\rho < \rho_0$, pour tout disque $Z' \in \mathcal{O}^\alpha(\rho)$, tout $x'' \in \mathbb{R}^r(\rho)$, tout $\lambda \in \bar{D}$, il existe un unique disque $Z \in \mathcal{O}^\alpha$ vérifiant*

$$Z = (Z', Z'', Z''')\,; \ \partial Z \subset M\,; \ |Z|_\alpha \le C\rho\,; \ \operatorname{Re} Z''(\lambda) = x''.$$

Quand M est de classe C^2, ce disque induit pour $\rho < \rho_0$ des applications continues $\mathcal{O}^\alpha(\rho) \times \mathbb{R}^r(\rho) \times \bar{D} \to \mathcal{O}^\alpha$ et $\mathcal{O}^{1,\alpha}(\rho) \times \mathbb{R}^r(\rho) \times \bar{D} \to \mathcal{O}^{1,\alpha}$.

On en déduit (ce résultat est aussi dans BAOUENDI-ROTHSCHILD [6]) :

COROLLAIRE 2.4. — *Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ et $z \in M$. Si Z est un disque complexe, si $z \in \partial Z \subset M$ et si $|Z|_\alpha$ est assez petit, ∂Z est contenu dans l'orbite locale $\mathcal{O}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X}, z)$ de z.*

Démonstration. — On se ramène à la situation locale qu'on vient d'envisager, avec $z = 0$ et un représentant fixé du germe de variété $\mathcal{O}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X}, z)$. Le disque Z est de la forme $Z = (Z', Z'', Z''')$ avec $Z(\lambda) = 0$ pour un $\lambda \in S$. D'après le LEMME 2.3, il existe, si $|Z'|_\alpha$ est assez petit, un disque $\widetilde{Z} = (Z', \widetilde{Z}'', \widetilde{Z}''')$ tel que $\partial \widetilde{Z} \subset \mathcal{O}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X}, z)$ et $\operatorname{Re} \widetilde{Z}''(\lambda) = 0$, donc $\widetilde{Z}(\lambda) = 0$. Par l'unicité, si $|Z|_\alpha$ est assez petit, $\widetilde{Z} = Z$. $\square$

3. Démonstration du Théorème 1. — Le résultat étant local, on peut supposer $z = 0$ et M définie par

$$M =: \ \operatorname{Im} z'' = G(z', \operatorname{Re} z''), \tag{3.1}$$

où $G : \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ est de classe $\mathcal{C}^2$ près de 0, nulle à l'ordre deux en 0. Soit s le défaut local de M en 0, $n = p + r + s$, N (un représentant de) l'orbite locale de 0 ; N est une variété CR de dimension CR p, dimension $2p + r$. Fixons α, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et introduisons l'espace :

$$\mathcal{O}_0^\alpha(\rho) = \{Z' \in \mathcal{O}^\alpha(\rho), \ \ Z'(1) = 0\}\cdot$$

Suivant TUMANOV [23], nous considérons pour $\rho < \rho_0$ l'application $\hat{h} : \mathcal{O}^{1,\alpha}(\rho) \to \mathbb{R}^q$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{h}(Z') = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(P(G(Z'_{|S}, X'')(1-t)\Big)_{|t=0}, \text{ où } X'' \\ \text{est la solution de : } X'' = -T_1 G\big(Z'_{|S}, X''\big). \end{array} \right. \tag{3.2}$$

$\hat{h}$ est bien définie et continue (LEMME 1.4). Comme nous verrons, le LEMME suivant est implicite dans [23].

LEMME 3.1. — *Si $\rho < \rho_0$, il existe r disques complexes $Z_1', \ldots, Z_r' \in \mathcal{O}_0^{1,\alpha}(\rho)$ tels que $\hat{h}(Z_1'), \ldots, \hat{h}(Z_r')$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^q$.*

Nous allons d'abord en déduire le THÉORÈME 1. On suppose ρ assez petit pour que le théorème d'approximation de [7] s'applique : toute fonction CR sur M est sur M et pour $|z| \le C\rho$ limite uniforme d'une suite de polynômes holomorphes. Soit Z' un des disques du LEMME 3.1. On considère la famille de disques, paramétrée par $z' \in \mathbb{C}^p(\rho)$, $x'' \in \mathbb{R}^q(\rho)$:

$$\tau \in \overline{D}, \quad Z(z', x'')(\tau) = \Big(Z'(\tau) + z', Z''(z', x'')(\tau)\Big),$$

déterminée, pour $\rho < \rho_0$, par les conditions (*cf.* LEMME 2.1, avec $\lambda = 1$) :

$$|Z(z',x'')|_\alpha \leq C\rho\,; \quad \partial Z(z',x'') \subset M\,; \quad \operatorname{Re} Z''(z',x'')(1) = x''.$$

Considérons, pour $\rho < \rho_0$ l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} : \mathbb{C}^p(\rho) \times \mathbb{R}^q(\rho) \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}^n, \\ \mathfrak{Z}(z',x'',t) &= Z(z',x'')(1-t). \end{aligned}$$

Par le LEMME 2.2, on sait que $(z',x'') \mapsto Z(z',x'')$ est continue à valeurs dans $\mathcal{O}^{1,\alpha}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathcal{O}^\alpha$. On en déduit que $\mathfrak{Z}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Par construction, on a :

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Z}(z',x'',0) = \big(z', x'' + iG(z',x'')\big) \in M, \\ &\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}(0,0,0) = \big(\cdots, \cdots + i\hat{h}(Z')\big) \in T_0\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathfrak{Z}$ paramètre une variété à bord de classe $\mathcal{C}^1$ $\widetilde{M}$, de bord M, définissant la direction $(0, i\hat{h}(Z'))$ modulo T_0M. En répétant cette construction avec chacun des disques $Z'_1, \ldots, Z'_r$ du LEMME 3.1, on obtient r variétés $\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_r$ de bord M, définissant en 0 r directions indépendantes dans $T_M\mathbb{C}^n[0]$. Il reste à vérifier les propriétés (i) et (ii).

La propriété (i) est donnée par la méthode des disques complexes [8] : une fonction CR u sur M est limite sur M et pour $|z| \leq \rho_0$ d'une suite de polynômes holomorphes u_n ; par le principe du maximum, une telle suite converge uniformément sur tout disque Z tel que $|Z| \leq \rho_0$ et $\partial Z \subset M$, donc, par construction des $\widetilde{M}_j$, converge uniformément sur chaque $\widetilde{M}_j$ vers une fonction CR continue qui prolonge u.

La propriété (ii) est donnée par le COROLLAIRE 2.4 : soit $\widetilde{M}$ l'un des $\widetilde{M}_j$; au point $z = (z', x'' + iG(z',x'')) \in M$, $\widetilde{M}$ définit la direction $\partial\mathfrak{Z}/\partial t(z',x'',0)$ modulo T_zM, c'est-à-dire la dérivée normale en $1 \in S$ du disque complexe $Z(z',x'')$. Par l'holomorphie de $Z(z',x'')$, c'est $\sqrt{-1}$ appliqué à la dérivée tangentielle de $Z(z',x'')_{|S}$. Quand $z \in N$, si $\rho < \rho_0$, on sait que $\partial Z(z',x'')$ est contenu dans N. On a donc bien $T_z\widetilde{M} \subset T_zM + \sqrt{-1}\,T_zN$. La preuve est complète.

Démonstration du Lemme 3.1 : introduisons le noyau de Poisson. On a :

$$\begin{aligned} P\big(G(Z'_{|S}, X'')\big)(1-t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G\big(Z'(\zeta), X''(\zeta)\big)\frac{1-(1-t)^2}{|\zeta-(1-t)|^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= t\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{G\big(Z'(\zeta),X''(\zeta)\big)}{|\zeta-1|^2}\,\mathrm{d}\theta + \varepsilon(t)\right] \end{aligned}$$

où $\zeta = e^{i\theta} \in S$. On a donc :

$$\hat{h}(Z') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G\big(Z'(\zeta), X''(\zeta)\big)}{|\zeta - 1|^2}\, d\theta.$$

Aux notations près, $\hat{h}$ est l'opérateur introduit par TUMANOV dans [23, page 132] (page 133 de la traduction). TUMANOV montre que $\hat{h} : \mathcal{O}_0^{\beta}(\rho) \to \mathbb{R}^q$ est de classe C^1 si $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et $\rho < \rho_0$, et possède la propriété suivante (voir dans [23] les lemmes 2.3, 2.4 et la fin de la démonstration du Théorème 1, pages 136–137 de la traduction) : si $\hat{h}$ a en tout point un rang $\leq q - \sigma$, il existe une sous-variété CR de M, de classe C^1 et de même dimension CR que M, passant par 0 et de codimension $\geq \sigma$. Comme une telle variété contient l'orbite locale de 0, une telle propriété ne peut avoir lieu que si $\sigma \leq s$. On en déduit que pour tout $\rho < \rho_0$, $\hat{h} : \mathcal{O}_0^{\beta}(\rho) \to \mathbb{R}^q$ a un rang maximal au moins égal à r, donc qu'il existe $Z'_1, \ldots, Z'_r \in \mathcal{O}_0^{\beta}(\rho)$ tels que $\hat{h}(Z'_1), \ldots, \hat{h}(Z'_r)$ soient linéairement indépendants. On conclut en remarquant que $\mathcal{O}^{1,\alpha}$ est dense dans $\mathcal{O}_0^{\beta}$ pour la norme $C^{\beta'}$, si $\beta' < \beta$. □

Quand M est plus régulière, le THÉORÈME 1 de AÏRAPETYAN [1] permet d'améliorer le résultat du THÉORÈME 1. Une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ de la forme

$$\widetilde{M} =: \ h_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, r\,; \quad h_j = 0,\ j = r+1, \ldots, r+s,$$

où les h_j sont de classes C^k près de 0, nulles en 0 et $\bar{\partial} h_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial} h_{r+s}(0) \neq 0$, est appelé un wedge de classe C^k, codimension s, en 0, au-dessus de la variété

$$M =: \ h_j = 0, \quad j = 1, \ldots, r+s.$$

On a le résultat suivant :

COROLLAIRE 3.2. — *Mêmes hypothèses que dans le* THÉORÈME 1. *On suppose en plus M de classe C^4. Alors il existe un wedge $\widetilde{M}$ au-dessus de M en z, de classe C^2 et de codimension s, tel que :*

(i) *Toute fonction* CR *sur M est* CR*-prolongeable à $\widetilde{M}$ près de z.*

(ii) $T\widetilde{M}_{\,|N} = TM_{\,|N} + \sqrt{-1}\,TN$, *près de z.*

L'hypothèse de régularité n'est évidemment pas optimale. Aussi, comme nous n'utilisons pas ce résultat, nous esquisserons seulement la démonstration.

Démonstration. — On applique d'abord le THÉORÈME 1. Comme M est de classe C^4, il est facile de montrer que $\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_r$ sont de classe C^3.

Alors le Théorème 1 de [1] s'applique et fournit un wedge $\widetilde{M}$ vérifiant les propriétés voulues, sauf peut-être (ii). Pour démontrer (ii), il suffirait sans doute d'analyser la preuve dans [1]. On peut aussi donner une démonstration a priori, en utilisant les fonctions singulières I (4.1). Quitte à restreindre la variété M, on peut supposer qu'il existe une fonction CR u sur M telle que $WF'u = \dot{T}^*_N M$, ou encore :

$$WF_z u = \left(T_z M + \sqrt{-1}\, T_z N\right)^0, \text{ pour tout } z \in N. \tag{3.3}$$

Soit maintenant $z \in N$ et θ un vecteur tangent rentrant dans $\widetilde{M}$ en z. Il est clair que u est CR-prolongeable dans la direction θ, donc que $WF_z u \subset (\dot{R}^+\theta)^0$ (*cf.* I(5.6)). Compte-tenu de (3.3), on a $\theta \in T_z M + \sqrt{-1}\, T_z N$ et le résultat. $\square$

REMARQUE 3.3. — Le théorème de TUMANOV (I(3.1)) a une conséquence intéressante sur la géométrie des variétés CR minimales (nous ne nous en servirons pas). Soit N un germe de variété CR en 0 dans $\mathbb{C}^n$, de classe C^2 et de dimension CR p, dimension $2p + r$, $p + r + s = n$. D'après (2.2), modulo une transformation linéaire, N est de la forme :

$$N = \left\{z \in M_0,\ z''' = g(z', z'')\right\},$$

où g est une fonction CR sur la variété générique (dans $\mathbb{C}^n$ ou dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r$) :

$$M_0 =: \ \operatorname{Im} z'' = G(z', \operatorname{Re} z'').$$

Comme $T_0 M_0 = T_0 N + T_0^c M_0$, il est clair que si N est minimale en 0, M_0 l'est aussi (l'espace tangent à l'orbite locale de 0 contient $T_0 N$ et $T_0^c M_0$).

La fonction CR g se prolonge ainsi holomorphiquement à un wedge $\mathcal{W}$ au-dessus de M_0. Soit $\hat{g}$ le prolongement holomorphe de g. On obtient que N est le "edge" d'un wedge holomorphe $\widehat{N} = \{z\,;\ z''' = \hat{g}(z', z''),\ (z', z'') \in \mathcal{W}\}$ de dimension complexe $p + r$. On notera l'importance du fait qu'on a supposé N minimale; par exemple, une courbe réelle dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, n'est pas le bord d'une courbe complexe, en général.

III. Applications des théorèmes microlocaux

Dans ce chapitre, nous démontrons les THÉORÈMES 2, 3, 5, 6. Ce sont des applications du THÉORÈME 10 et, pour certains d'entre eux, du THÉORÈME 1. Quelques autres résultats sont présentés.

1. Comparaison du Théorème 7 avec le Théorème d'Hanges-Sjöstrand.

Le théorème principal de [11] (voir aussi [16]) concerne la propagation des singularités analytiques des solutions d'un OPD analytique de type principal. Soit $P(x,D)$ un OPD analytique sur $\mathbb{R}^n$, de symbole principal complexe $p(x,\xi) = a(x,\xi) + ib(x,\xi)$, de variété caractéristique $\Sigma_p = \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n,\ p(x,\xi) = 0\}$, H_a, H_b les champs hamiltoniens de a, b, $\partial/\partial\lambda = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial/\partial\xi_j$ le champ radial et, pour $x^* \in \dot{T}^*\mathbb{R}^n$, $\mathcal{N}(x^*)$ la feuille de Nagano de x^* du système H_a, H_b, $\partial/\partial\lambda$. D'après [11], si u est une solution de $P(x,D)u = 0$, on a :

$$\text{(1.1)} \qquad \text{si } x^* \in WF_a u \text{ et si } \mathcal{N}(x^*) \subset \Sigma_p, \text{ alors } \mathcal{N}(x^*) \subset WF_a u,$$

où $WF_a u$ est le front d'onde analytique de u.

REMARQUE 1.1. — Le théorème de Hanges-Sjöstrand est vrai dans la catégorie des hyperfonctions. On peut le montrer dans ce cadre en utilisant une transformation canonique complexe qui ramène l'étude de P à l'étude de l'opérateur $\partial/\partial z_1$ à la frontière d'un domaine strictement pseudoconvexe (c'est une méthode due à M. KASHIWARA, T. KAWAÏ, T. OSHIMA, voir [14], [20]).

Appliqué aux variétés génériques dans $\mathbb{C}^n$, réelle-analytiques (alors WF' et WF_a coïncident), (1.1) donne le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, analytique, et $\mathcal{L} \subset \dot{T}^*_M\mathbb{C}^n$ une variété analytique réelle, minimale pour le système $\{\operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z\}$, où Z est un champ réel-analytique de vecteurs holomorphes tangents à $\mathcal{L}$. Si u est une distribution (hyperfonction) CR sur M, on a :*

$$\mathcal{L} \subset WFu \iff \mathcal{L} \cap WFu \neq \emptyset.$$

Ce résultat est plus fort que le THÉORÈME 7, car $\mathcal{L}$ n'est pas supposée CR. On peut le retrouver par la méthode utilisée ici, sous la même hypothèse d'analyticité, mais il n'est pas clair pour nous qu'un résultat analogue soit vrai dans le cadre C^∞ (voir Remarque IV.3.2).

Démonstration du Théorème 1.2 : compte-tenu des résultats de I, § 7, on transporte la situation sur Σ_M. Soit $Z_1, \ldots, Z_p$ une base (locale) de $T^{1,0}M$, de symboles analytiques $\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_p$. Comme $WF_a u$ est conique, on peut conifier $\mathcal{L}$ et supposer $\mathcal{L}$ minimale pour le système $\{\operatorname{Re} Z, \operatorname{Im} Z, \partial/\partial\lambda\}$, avec $Z = \sum_{j=1}^p a_j H_{\mathcal{Z}_j}$, a_j analytique homogène de degré 0. Alors $Z_{|\mathcal{L}} = H_{p|\mathcal{L}}$, $p = \sum_{j=1}^p a_j \mathcal{Z}_j$ et (1.1) appliqué à l'OPD $P(x,D) = \sum_{j=1}^p a_j(x,D) Z_j$ donne le résultat. $\square$

2. Propagation de la $\mathcal{W}$-prolongeabilité.

Démonstration du Théorème 2 : il suffit (*cf.* I, § 9) de prouver la propagation non caractéristique. Soit $z \in M$ et $\Sigma = \{h = 0\}$ un germe d'hypersurface non caractéristique en z. On suppose la fonction CR u $\mathcal{W}$-prolongeable en tout point $z' \in \Sigma_- = \{h < 0\}$ suffisamment voisin de z. On doit montrer que u est $\mathcal{W}$-prolongeable en z. Soit N un représentant de l'orbite locale de z.

Si $N = M$ dans les germes I (3.1) s'applique. On suppose donc $N \neq M$ dans les germes. Comme Σ est non caractéristique, N coupe Σ_- (dans les germes en z). Montrons d'abord :

$$(2.1)\quad \begin{cases} \text{Si } z' \in N, \text{ voisin de } z,\ WF'_{z'}u \text{ est contenu dans le polaire } \Gamma^0_{z'} \\ \text{d'un cône ouvert non vide } \Gamma_{z'} \text{ de } T_{z'}N, \text{ contenant } T^c_{z'}M. \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer le THÉORÈME 1 et I (5.6) : en z', u est CR-prolongeable dans r directions, $\dim N = 2\,\text{CR-}\dim M + r$, $\sqrt{-1}\,\theta_1,\ldots,$ $\sqrt{-1}\,\theta_r$, où $\theta_1,\ldots,\theta_r \in T_{z'}N$ sont indépendants modulo $T^c_{z'}M$. Par I (5.6) et la définition du front d'onde, on a, si $\omega \in WF'_{z'}u$:

$$\omega_{|T^c_{z'}M} = 0\,; \quad \langle\omega,\theta_j\rangle = \operatorname{Im}\bigl\langle\theta^{-1}(\omega),\sqrt{-1}\,\theta_j\bigr\rangle \geq 0, \quad j = 1,\ldots,r.$$

On obtient (2.1) en prenant pour $\Gamma_{z'}$ l'intérieur du cône engendré par $T^c_{z'}M$, $\theta_1,\ldots,\theta_r$. Soit $z' \in N$, voisin de z. Si $WF'_{z'}u$ est saillant, évidemment $WF'_{z'}u \cap \dot{T}^*_N M[z']$ l'est aussi. Si $WF'_{z'}u$ n'est pas saillant, il existe $\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in WF'_{z'}u$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 0$. Soit $\Gamma_{z'}$ le cône couvert non vide de $T_{z'}N$ donné par (2.1). Comme

$$\alpha_{1|\Gamma_{z'}} \geq 0,\ldots,\alpha_{N|\Gamma_{z'}} \geq 0,$$

nécessairement $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ sont nuls sur $\Gamma_{z'}$, donc sur $T_{z'}N$, qui est engendré par $\Gamma_{z'}$.

Donc $\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in WF'_{z'}u \cap \dot{T}^*_N M[z']$. On a obtenu :

$$(2.2)\quad \begin{cases} \text{Si } z' \in N, \text{ voisin de } z,\ WF'_{z'}u \text{ est saillant si et} \\ \text{seulement si } WF'_{z'}u \cap \dot{T}^*_N M[z'] \text{ est saillant.} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant conclure : soit $z' \in N \cap \Sigma_-$, voisin de z. Par hypothèse, u est $\mathcal{W}$-prolongeable en z', donc $WF'_{z'}u$ est saillant (I(5.5)), donc $WF'_{z'}u \cap \dot{T}^*_N M[z']$ est saillant, donc $WF'_z u \cap \dot{T}^*_N M[z]$ est saillant par propagation (THÉORÈME 10), donc $WF'_z u$ est saillant ((2.2)), donc u est $\mathcal{W}$-prolongeable en z (I(5.5)) □

REMARQUE 2.1. — On pourrait sans doute démontrer ce théorème par la méthode des disques complexes, à la Tumanov : cette méthode est mieux que locale dans les germes et marche dès qu'un voisinage assez petit (en un sens qu'on contrôle) de z est minimal. L'idée serait, après réduction à la situation qu'on vient de considérer, de déformer M là où on sait que u se prolonge, et d'appliquer la méthode de Tumanov à la variété déformée.

Démonstration du Théorème 3. La démonstration est identique à la démonstration précédente, les hypothèses de régularité étant l'autre choix dans le THÉORÈME 10. Comme $\mathcal{O}(\mathfrak{X}, z)$ est supposée minimale en chacun de ses points, si $z' \in \mathcal{O}(\mathfrak{X}, z)$, l'orbite locale $\mathcal{O}^{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X}, z')$ coïncide avec $\mathcal{O}(\mathfrak{X}, z)$ dans les germes en z', donc est complexifiable. Le THÉORÈME 10 s'applique.

Le THÉORÈME 3 s'applique en particulier quand M contient une variété holomorphe de dimension la dimension CR de M, soit N. Il est clair que N est minimale en tout point, puisque $TN = T^c M_{|N}$. De plus, comme $\Sigma_{M\,|N} = \dot{T}^*_N M$, si γ est un chemin dans N, d'origine z, extrémité z', le THÉORÈME 10 donne un isomorphisme $C(\gamma) : \dot{\Sigma}_M[z] \to \dot{\Sigma}_M[z']$: on a aussi propagation pour la relation $WF_z u = \emptyset$. Nous retrouvons le théorème de N. HANGES et F. TRÈVES [12], que nous généralisons au $\mathcal{W}$-prolongement :

THÉORÈME 2.2. — *Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe C^2 et Λ une courbe complexe connexe contenue dans M. Si une fonction* CR *sur M est $\mathcal{W}$-prolongeable (resp. prolongeable) en $z \in \Lambda$, elle est $\mathcal{W}$-prolongeable (resp. prolongeable) en tout point de Λ.*

Démonstration. — On se ramène comme dans [12] au cas où le THÉORÈME 3 s'applique en introduisant (localement) une variété générique M', de classe C^2 et dimension CR un, telle que $\Lambda \subset M' \subset M$. Les considérations précédentes s'appliquent au couple M', Λ. Si u est une fonction CR sur M', $WF_z u$ est saillant (resp. vide) en $z \in \Lambda$ si et seulement si $WF_{z'} u$ est saillant (resp. vide) en $z' \in \Lambda$. Quand u est une fonction CR sur M, on applique (I. (5.7)). □

Quand M est une hypersurface réelle dans $\mathbb{C}^n$,

$$\dim M = 2\,\mathrm{CR}\text{-}\dim M + 1$$

et les orbites locales sont soit M (dans les germes) soit des germes d'hypersurfaces complexes. Dans ce cas, la propagation du $\mathcal{W}$-prolongement le long d'une courbe complexe peut être démontrée de façon élémentaire (par exemple par les méthodes de [21]). On obtient la généralisation suivante d'un résultat de B. STENSONES [18] :

THÉORÈME 2.3. — *Soit M une hypersurface de classe C^2. Si l'orbite de $z \in M$ est un voisinage de z, toute fonction* CR *sur M s'étend, près de z, holomorphiquement d'un côté de M.*

Ce résultat est plus fort que le théorème principal de [18]. Si N est un germe d'hypersurface complexe en z, contenu dans M, B. STENSONES considère le cas où N se prolonge en une hypersurface complexe qui "quitte" M loin de z. Le THÉORÈME 2.3 couvre des cas où N "disparaît".

Démonstration du Théorème 2.3 : on peut supposer M minimale en remplaçant M par l'orbite de z. De plus M est minimale en un point au moins (sinon M serait Lévi-plate et ne serait pas minimale). On conclut en montrant que la propriété (u est $\mathcal{W}$-prolongeable en z) a la propriété de propagation non caractéristique, ce qui est clair, puisque si M est minimale en z, il y a $\mathcal{W}$-prolongement (d'après I(3.1) ; dans ce cas c'est le résultat de [21]) en z, et sinon, l'orbite locale de z est une hypersurface complexe et le THÉORÈME 3 s'applique. $\square$

3. Fonctions CR **indécomposables.** — Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe C^∞. On suppose que M n'est pas minimale en z (sinon, par I.(3.1) toute fonction CR près de z est décomposable en z) ; soit N l'orbite locale de z. La recette pour construire des fonctions CR indécomposables en z est la suivante : on choisit M de façon qu'il existe une partie $F \subset \dot{T}_N^* M[z]$, non saillante, (en pratique un plan ou un demi-plan épointé) tel que le THÉORÈME 10 donne la propriété suivante de propagation pour les fonctions CR près de z :

$$F \cap WF'_z u \neq \emptyset \implies F \subset WF'_z u. \tag{3.1}$$

Considérons alors une fonction CR u près de z dans M, telle que :

$$WF'u = \dot{T}_N^* M \ \text{ près de } z. \tag{3.2}$$

De telles fonctions existent d'après un résultat récent de M. S. BAOUENDI et L. P. ROTHSCHILD [6] (quand M est analytique, c'est un résultat classique). Si $u = \sum_{i=1}^N u_i$, u_i fonction CR près de z, d'après (3.2) et (I. (5.2)), F coupe $WF'_z u_i$ pour un i, donc $F \subset WF'_z u_i$ par (3.1) et $WF'_z u_i$ n'étant pas saillant, u_i n'est pas $\mathcal{W}$-prolongeable en z. On conclut que u n'est pas décomposable en z. On note la nécessité pour ce raisonnement de supposer N de codimension au moins deux dans M.

Notre exemple initial de fonction CR indécomposable (1985, non publié) correspondait au cas $p = 1$, $r = 0$, $s = 2$ dans la généralisation suivante.

Soit $p \geq 1$, $r \geq 0$, $s \geq 2$. $M = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ est muni des coordonnées $z' = x' + iy'$, $\bar{z}'$, x'', t et de la base duale de champs de vecteurs. On considère la structure CR formelle définie sur M par les champs :

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \qquad j = 1, \ldots, p-1,$$
$$Z_p = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_p} + i\Big(\sum_{\alpha=1,\ldots,r} x_p^\alpha \frac{\partial}{\partial x_{p+\alpha}} + x_p^{r+1}\Theta\Big),$$

où $\Theta = t_1 \partial/\partial t_2 - t_2 \partial/\partial t_1$.

Les champs $\operatorname{Re} Z_j$, $\operatorname{Im} Z_j$, $j = 1, \ldots, p$, et leurs crochets successifs engendrent $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{p+r}, \partial/\partial y_1, \partial/\partial y_p, \Theta$. L'orbite de 0 (qui coïncide dans les germes avec l'orbite locale de 0) est $N = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \times \{0\}$. T^*M étant muni des coordonnées canoniques $(z', x'', t, \zeta', \xi'', \theta)$, on a :

$$T_N^* M =: \ t = 0, \ \zeta' = 0, \ \xi'' = 0\,;$$
$$\hat{Z}_{j|\dot{T}_N^* M} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad j = 1, \ldots, p-1\,;$$
$$\hat{Z}_{p|\dot{T}_N^* M} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_p} + i\Big(\sum_{\alpha=1,\ldots,r} x_p^\alpha \frac{\partial}{\partial x_{p+\alpha}} + x_p^{r+1}\widehat{\Theta}\Big),$$

où $\widehat{\Theta} = \theta_1 \partial/\partial\theta_2 - \theta_2 \partial/\partial\theta_1$. La variété

$$\mathcal{L} = \Big\{ t = 0, \ \zeta' = 0, \ \xi'' = 0, \ \theta_3 = \cdots = \theta_s = 0 \Big\}$$

est minimale pour le système $\{\operatorname{Re} Z_1, \ldots, \operatorname{Im} Z_p, \partial/\partial\lambda\}$. Comme les champs Z_j sont réels-analytiques, cette structure est représentable localement comme variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de dimension CR p, défaut s en 0.

Le THÉORÈME 10 (ici le théorème d'Hanges-Sjöstrand) donne, si $\mathcal{L}[0]$ est la fibre de $\mathcal{L}$ en 0 (c'est un plan épointé) :

$$\mathcal{L}[0] \cap WF'u \neq \emptyset \implies \mathcal{L}[0] \subset WF'u.$$

Donc M porte des germes de fonctions CR indécomposables en 0 (une distribution CR est donnée par $u(z', x'', t) = 1(z', x'') \otimes \delta(t)$).

Démonstration du Théorème 5 : soit N une variété CR dans $\mathbb{C}^n$, de classe C^∞, minimale en $z \in N$, de dimension CR $p \geq 1$, de dimension $2p + r$, avec $p + r + s = n$ et $s \geq 2$. On peut supposer $z = 0$ et N définie par les équations II (2.2). On choisit $z' = (z_1, \ldots, z_p)$, $\bar{z}'$, x''

comme coordonnées locales sur N. Dans ce système de coordonnées, une base de champs CR près de 0 est donnée par :

$$(3.3)\qquad Z_j^0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{k=1,\dots,r} a_{jk}(z',x'')\frac{\partial}{\partial x_{p+k}}, \quad j=1,\dots,p.$$

Les champs Z_j^0 commutent et le plongement de N dans $\mathbb{C}^n$ est donné par $(z',x'') \mapsto \mathcal{Z}^0(z',x'') = (\mathcal{Z}_1^0(z',x''),\dots,\mathcal{Z}_n^0(z',x''))$, où les $\mathcal{Z}_j^0$ sont les fonctions CR :

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \mathcal{Z}_j^0(z',x'') = z_j, \quad j=1,\dots,p\,; \\ \mathcal{Z}_{p+j}^0(z',x'') = x_{p+j} + iG_j(z',x''), \quad j=1,\dots,r\,; \\ \mathcal{Z}_{p+r+j}^0(z',x'') = g_j(z',x''), \quad j=1,\dots,s. \end{cases}$$

Dans $M = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, on identifie N à $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \times \{0\}$ près de l'origine et on considère la structure formelle définie par les champs

$$(3.5)\qquad \begin{cases} Z_j = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \displaystyle\sum_{k=1,\dots,r} a_{jk}(z',x'')\frac{\partial}{\partial x_{p+k}}, \quad j=1,\dots,p-1 \\ Z_p = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_p} + \displaystyle\sum_{k=1,\dots,r} a_{pk}(z',x'')\frac{\partial}{\partial x_{p+k}} + i\,x_p^K\Theta \end{cases}$$

où $\Theta = t_1\partial/\partial t_2 - t_2\partial/\partial t_1$, $t=(t_1,\dots,t_s)$ étant la variable de $\mathbb{R}^s$. Les champs Z_j commutent, sont tangents à $N = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \times \{0\}$, de trace sur N les champs Z_j^0. On choisit $K \geq 1$ assez grand, tel qu'on ait une relation de dépendance :

$$(3.5)' \qquad (\operatorname{ad} X_p^0)^K Y_p^0 = \sum_{j=0}^{K-1} \alpha_j (\operatorname{ad} X_p^0)^j\, Y_p^0 \quad \text{en } (z',x'') = (0,0),$$

où $\alpha_j \in \mathbb{R}$ et $Z_p^0 = X_p^0 + iY_p^0$ est la décomposition de Z_p^0 en champs réels. T_N^*M étant muni des coordonnées canoniques (z',x'',θ), on a :

$$\widehat{Z}_p = \widehat{X}_p + i\widehat{Y}_p \quad \text{sur } T_N^*M,$$

avec

$$\widehat{X}_p = X_p^0, \quad \widehat{Y}_p = Y_p^0 + x_p^K\widehat{\Theta}, \quad \widehat{\Theta} = \theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1}.$$

Compte-tenu de (3.5)′, on a :

$$(\operatorname{ad}\widehat{X}_p)^K\,\widehat{Y}_p-\sum_{j=0}^{K-1}\alpha_j(\operatorname{ad}\widehat{X}_p)^j\,\widehat{Y}_p=\frac{1}{2^K}\,K\,!\,\widehat{\Theta}\ \text{ pour } z'=0,\ x''=0.$$

On a obtenu que dans l'algèbre de Lie engendrée par $\widehat{X}_p$, $\widehat{Y}_p$, il y a un champ qui coïncide avec $\widehat{\Theta}$ quand $z'=0$, $x''=0$. On conclut comme dans l'étude des exemples, plus haut, à condition de vérifier la chose suivante : M, munie de la structure CR formelle $Z_1,\dots,Z_p$, peut être réalisée comme variété générique dans $\mathbb{C}^n$, contenant N (dans les germes en z). Il s'agit de trouver n fonctions CR $\mathcal{Z}_1,\dots,\mathcal{Z}_n$ indépendantes en 0 et telles que, près de 0 :

$$\mathcal{Z}_j(z',x'',0)\equiv\mathcal{Z}_j^0(z',x''),\quad j=1,\dots,n. \tag{3.6}$$

On prend, pour $j=1,\dots,p+r$, $\mathcal{Z}_j(z',x'',t)=\mathcal{Z}_j^0(z',x'')$ indépendante de t, pour $j=p+r+3,\dots,n$, $\mathcal{Z}_j(z',x'',t)=\mathcal{Z}_j^0(z',x'')+t_{j-p-r}$. Ces fonctions sont clairement CR et vérifient (3.6). Enfin, on prend $\mathcal{Z}_{p+r+j}$, $j=1,2$, de la forme :

$$\mathcal{Z}_{p+r+j}(z',x'',t)=\mathcal{Z}_{p+r+j}^0(z',x'')+\varphi_j(x_p,t_1,t_2).$$

Pour que les fonctions $\mathcal{Z}_1,\dots,\mathcal{Z}_n$ répondent à la question, il faut et il suffit que $\varphi_j(x_p,0,0)\equiv 0$, $j=1,2$, que $\det[\partial\varphi_j/\partial t_k(0)]_{j,\,k=1,2}$ soit non nul et que

$$Z_p\mathcal{Z}_{p+r+j}=\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_p}+ix_p^K\Big(t_1\frac{\partial}{\partial t_2}-t_2\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)\Big)\varphi_j\equiv 0,\quad j=1,2.$$

Il suffit de prendre pour φ_j la solution de (Théorème de Cauchy-Kovalewsky)

$$\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_p}+ix_p^K\Big(t_1\frac{\partial}{\partial t_2}-t_2\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)\Big)\varphi_j=0,\quad \varphi_{j\,|x_p=0}=t_j,\quad j=1,2.$$

La preuve est complète. □

Démonstration du Théorème 6 : On choisit N de la forme suivante :

$$N=:\ z_n=0\,;\ \operatorname{Im} z''=G(z'),$$

où $z=(z',z'',z_n)\in\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}=\mathbb{C}^n$, G s'annule en 0 à l'ordre deux.

On choisit (il n'est pas difficile de construire de telles G) pour G une fonction impaire, telle que N est minimale en 0. Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de dimension CR p, contenant N dans les germes en 0. Le THÉORÈME 1, ou plutôt sa démonstration dans II, § 3, nous dit la chose suivante : il existe $\rho > 0$ tel que, si Z est un disque de classe $C^{1,\alpha}$, vérifiant ($\partial/\partial\theta$ est la dérivée tangentielle sur S orienté positivement) :

$$|Z|_\alpha \leq \rho,\ Z(1) = 0,\ \partial Z \subset M,\ \frac{\partial}{\partial\theta} Z_{|S}(1) \notin T^c M \tag{3.7}$$

alors, toute fonction CR sur M est CR-prolongeable dans la direction $\sqrt{-1}\,\partial Z_{|S}/\partial\theta(1)$ modulo T_0M en 0. De plus, il existe r disques $Z_1, \ldots, Z_r$ vérifiant (3.7) et définissant r directions $\theta_j = \sqrt{-1}\,\partial Z_{j|_S}/\partial\theta(1)$, $j = 1, \ldots, r$, indépendantes modulo T_0M. On sait (COROLLAIRE II, 2.4) que si ρ est choisi assez petit, les disques vérifiant (3.7) ont leurs bords dans N. N étant symétrique par rapport à l'origine, les disques $-Z_1, \ldots, -Z_r$ ont aussi leurs bords dans N, donc dans M et vérifient (3.7). On en déduit que toute fonction CR u sur M est CR-prolongeable dans les directions $\theta_1, \ldots, \theta_r$, $-\theta_1, \ldots, -\theta_r$ en 0. D'après I (5.6), WF_0u est contenu dans $(\dot{\mathbb{R}}\theta_1)^0 \cap \ldots \cap (\dot{\mathbb{R}}\theta_r)^0$ donc dans la réunion disjointe de deux demi-droites de $\dot{T}^*_M\mathbb{C}^n[0]$. D'après I (5.8) u est décomposable en 0. $\square$

REMARQUE 3.1. — Voici un exemple où il y a propagation sur un demi-plan épointé. Soit $Z = \partial/\partial\bar{z} + ixt_1\partial/\partial t_2$ dans $M = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$, muni des coordonnées $z = x + iy$, $t = (t_1, t_2)$. Z est tangent à $N = \mathbb{C} \times \{0\}$ et sur $T^*_NM = \{(z, t, \zeta, \theta)\,;\ t = 0,\ \zeta = 0\}$, on a $\widehat{Z} = \partial/\partial\bar{z} - ix\theta_2\partial/\partial\theta_1$. $\dot{T}^*_NM$ se décompose donc en trois orbites du système

$$\{\operatorname{Re}\widehat{Z},\ \operatorname{Im}\widehat{Z},\ \partial/\partial\lambda = \theta_1\partial/\partial\theta_1 + \theta_2\partial/\partial\theta_2\}$$

définies respectivement par $\theta_2 < 0$, $\theta_2 = 0$ et $\theta_2 > 0$.

IV. Démonstration des théorèmes microlocaux

1. Rappels sur la théorie de Sjöstrand. — La théorie générale des transformations FBI (pour Fourier-Bros-Iagolnitzer) est due à J. SJÖSTRAND (voir [16] et [17] pour l'application aux variétés CR). Soit ϕ une fonction continue sur Ω, ouvert de $\mathbb{C}^n$. On note $H^{\mathrm{loc}}_\phi(\Omega)$ l'espace des fonctions u sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$, holomorphes en $z \in \Omega$ et vérifiant pour tout $K \subset \Omega$, compact, et tout $\varepsilon > 0$ une estimation de la forme :

$$z \in K,\ \lambda > 0\,;\ \left|u(z, \lambda)\right| \leq C e^{\lambda(\phi(z)+\varepsilon)}$$

avec $C = C(K,\varepsilon)$. Si $z_0 \in \Omega$ et $u \in H_\phi^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on note

$$u \underset{\phi}{\sim} 0 \text{ en } z_0$$

s'il existe un voisinage K de z_0, $\varepsilon > 0$ et C tels qu'on ait :

$$z \in K,\ \lambda > 0\,;\ \left|u(z,\lambda)\right| \le C e^{\lambda(\phi(z)-\varepsilon)}$$

ϕ étant continue, on peut remplacer $\phi(z)$ par $\phi(z_0)$ dans la définition.

Considérons la fonction $\varphi(z,\tilde z) = \frac{1}{2} i(z-\tilde z)^2$ (on pourrait utiliser n'importe quelle phase admissible au sens de [17]). Le système

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\tilde z) = \zeta, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial \tilde z}(z,\tilde z) = \tilde\zeta,$$

définit une transformation canonique (non-homogène) χ, à savoir :

$$\chi : (z,\zeta) \longmapsto (z + i\zeta, \zeta). \tag{1.1}$$

Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$), qu'on considère microlocalement près de $z^* \in \dot T_M^*\mathbb{C}^n$. Après transformation affine, on peut supposer $z^* = (0\,;\ 0,\dots,0,1)$ et que T_0M contient $\mathbb{R}^n$ (quand $T_0\mathbb{C}^n$ est identifié à $\mathbb{C}^n$). La phase φ est admissible pour M au sens de [17] et l'image par χ d'un petit voisinage de z^* dans $\dot T_M^*\mathbb{C}^n$ est de la forme :

$$\mathcal{L}_M =:\ z \in \Omega,\ \zeta = \frac{2}{i}\frac{\partial\phi}{\partial z}(z) \tag{1.2}$$

où Ω est un voisinage ouvert d'un point $z_0 \in \mathbb{C}^n$ et ϕ une fonction réelle sur Ω, de classe $\mathcal{C}^2$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$). A la fonction φ (et au choix d'une fonction troncature, [17]) est associée une transformation FBI $u \mapsto Tu \in H_\phi^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, u fonction CR sur M, dont la propriété fondamentale est de caractériser WFu : pour $(z,\zeta) \in \dot T_M^*\mathbb{C}^n$, voisin de z^* on a :

$$(z,\zeta) \notin WFu \iff Tu \underset{\phi}{\sim} 0 \text{ en } z + i\zeta. \tag{1.3}$$

La relation (1.3) ramène l'étude de la propagation des singularités de u à l'étude de la propagation de la relation $u \underset{\phi}{\sim} 0$, le point crucial étant que les propriétés symplectiques complexes de $\dot T_M^*\mathbb{C}^n$ se lisent sur $\mathcal{L}_M$.

2. Démonstration du Théorème 9. — Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$, et N une variété CR complexifiable dans $\mathbb{C}^n$, contenue dans M, de même dimension CR que M, soit p. Il suffit de prouver le théorème localement près d'un point, soit $0 \in M$. On peut supposer, quand $T_0\mathbb{C}^n$ est identifié à $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, que $T_0M = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, $T_0N = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r \times \{0\}$, où s est la codimension de N dans M. Si $\widehat{N}$ est le complexifié de N dans $\mathbb{C}^n$, $T_0\widehat{N} = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r \times \{0\}$ et il s'agit de prouver la propagation non caractéristique sur $\mathcal{L} = \dot{T}^*_M\mathbb{C}^n \cap \dot{T}^*_{\widehat{N}}\mathbb{C}^n$. On sait (PROPOSITION I.6.1) que $\mathcal{L}$ a même dimension et même dimension CR que M. Un biholomorphisme tangent à l'identité met $\widehat{N}$ sous la forme :

$$\widehat{N} =: \ z_k = 0\,;\ k = p + r + 1, \ldots, p + r + s.$$

Soit $\mathcal{L}_M$, $\mathcal{L}_{\widehat{N}}$, $\mathcal{L}_0$ les images de $\dot{T}^*_M\mathbb{C}^n$, $\dot{T}^*_{\widehat{N}}\mathbb{C}^n$, $\mathcal{L}$ par la transformation canonique (1.1). $\mathcal{L}_M$ est donnée par (1.2) et $\mathcal{L}_{\widehat{N}}$ par :

$$\mathcal{L}_{\widehat{N}} =: \ \begin{cases} \zeta_k = 0, \ k = 1, \ldots, p + r\,; \\ z_k - i\zeta_k = 0, \ k = p + r + 1, \ldots, n \end{cases}$$

ou encore, avec $H(z) = \frac{1}{4}(z^2_{p+r+1} + \cdots + z^2_n)$, holomorphe :

$$\mathcal{L}_{\widehat{N}} =: \ \zeta = \frac{2}{i}\frac{\partial H}{\partial z}(z).$$

On en déduit que la variété de classe $\mathcal{C}^1$ $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_M \cap \mathcal{L}_{\widehat{N}}$ est de la forme :

$$\mathcal{L}_0 =: \ z \in M', \quad \zeta = \frac{2}{i}\frac{\partial \phi}{\partial z}(z)$$

où M' est une variété de classe $\mathcal{C}^1$, de même dimension que M, et $\partial\phi/\partial z_{|M'} = \partial H/\partial z_{|M'}$ est annulé par les vecteurs antiholomorphes tangents à M' (on ne sait pas si M' est CR). Soit

$$Z = Z_h + Z_v = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$$

un vecteur holomorphe tangent à $\mathcal{L}_0$ en (z_0, ζ_0) : Z_h est tangent à M' en z_0 et $Z\ (\zeta - 2/i\partial\phi/\partial z) = 0$, $Z_h \partial\phi/\partial\bar{z} = 0$ en (z_0, ζ_0). Quand Z_h est donné, la première équation détermine Z_v tandis que la seconde est toujours vérifiée. On en déduit que M' a en chaque point la même dimension CR que $\mathcal{L}_0$, donc que M : M' est générique. Par la théorie de Sjöstrand, on est ramené à étudier la propagation non-caractéristique sur M' pour la relation $u \underset{\phi}{\sim} 0$. Si $\phi_0 = \phi - (H + \overline{H})$, $\partial\phi_0$ est nulle sur M', donc aussi $\mathrm{d}\phi_0$. Quitte à ajouter une constante à H, ϕ_0 s'annule à l'ordre 2 sur M'. Le changement de fonction holomorphe $v(z, \lambda) = u(z, \lambda)\mathrm{e}^{-2\lambda H(z)}$ ramène l'étude au cas $\phi = \phi_0$. Le THÉORÈME 9 résulte donc du lemme suivant :

LEMME 2.1. — *Soit M une variété générique dans $\mathbb{C}^n$, de classe C^1 près de $0 \in M$ et ϕ une fonction réelle de classe C^2, nulle à l'ordre deux sur M. Si $\Sigma = \{h = 0\}$ est une hypersurface de M non caractéristique en 0, on a :*

$$u \underset{\phi}{\sim} 0 \text{ dans } \Sigma_- = \{h < 0\} \implies u \underset{\phi}{\sim} 0 \text{ en } 0$$

pour tout germe de fonction H_ϕ en 0.

Pour démontrer ce lemme, nous aurons besoin d'un disque :

LEMME 2.2. — *Sous l'hypothèse du* LEMME 2.1, *il existe, pour tout $R > 0$ un disque complexe $Z \in \mathcal{O}^\alpha$ tel que :*

$$|Z|_\alpha \le R\,;\ \partial Z \subset M\,;\ Z(1) = 0\,;\ Z(-1) \in \Sigma_-.$$

Démonstration. — On peut supposer M définie par II (2.1) et :

$$h(z', x'') = -\operatorname{Im} z_p + g(z', x''),\ \frac{\partial g}{\partial z'}(0,0) = 0.$$

On applique le LEMME II.2.1 avec comme données $\lambda = 1$, $x'' = 0$ et le disque $Z'(\tau) = \kappa(0, \dots, 0, i - i\tau)$. Comme $|Z'|_\alpha = 0(\kappa)$ et que

$$h\big(Z'(-1),\ \operatorname{Re} Z''(-1)\big) = -2\kappa + \kappa\varepsilon(\kappa)$$

le disque Z a toutes les propriétés voulues pour $\kappa > 0$ assez petit. $\square$

Démonstration du Lemme 2.1 : soit u un germe de fonction H_ϕ en 0. On peut supposer u définie pour $|z| \le 2R$, vérifiant là :

$$\text{(2.1)}\qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } C_\varepsilon \text{ tel que : } \big|u(z,\lambda)\big| \le C_\varepsilon\, \mathrm{e}^{\lambda(\phi(z)+\varepsilon)}.$$

Soit Z le disque du LEMME 2.2, $Z(-1) = z_0 \in \Sigma_-$. On a $u \underset{\phi}{\sim} 0$ en z_0 :

$$\text{(2.2)}\qquad \big|u(z,\lambda)\big| \le C_0\, \mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon_0} \quad \text{si } |z - z_0| \le r_0.$$

On note $d_M(z)$ la distance de z à M. Puisque ϕ s'annule à l'ordre 2 sur M, on a, R choisi assez petit, $|\phi(z)| \le K d_M(z)^2$ si $|z| \le 2R$. On va montrer que si

$$\text{(2.3)}\qquad \begin{cases} \big|u(z,\lambda)\big| \le \mathrm{e}^{\lambda K d_M(z)^2} & \text{pour } |z| \le 2R \text{ et} \\ \big|u(z,\lambda)\big| \le \mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon_0} & \text{pour } |z - z_0| \le r_0, \end{cases}$$

alors :

$$|u(z,\lambda)| \leq \mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon_1} \quad \text{pour } |z| \leq r_1, \tag{2.4}$$

où $\varepsilon_1 > 0$, $r_1 > 0$ ne dépendent que de $\varepsilon_0 > 0$, $r_0 > 0$, et pas de u. Le LEMME 2.1 en résulte en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_1$ dans (2.1) : $v(z,\lambda) = u(z,\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon}/(C_0 + C_\varepsilon)$ vérifie (2.3) donc (2.4); on obtient $|u(z,\lambda)| \leq (C_0 + C_\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon_1/2}$ pour $|z| \leq r_1$ et $u \underset{\phi}{\sim} 0$ en 0.

Pour démontrer (2.4) à partir de (2.3), l'idée est d'appliquer le théorème des trois cercles sur Z et sur ses translatés. Pour se ramener à la situation standard, on compose Z à droite avec un biholomorphisme φ de $\overline{D}$ qui envoie 1 sur 1, tel que le disque $\widetilde{Z} = Z \circ \varphi$ envoie un disque $\{|\tau| < \delta_0\}$ dans la boule $\{|z - z_0| < \frac{1}{2}r_0\}$. Pour $\eta \in \mathbb{C}^n$, $|\eta| \leq \frac{1}{2}r_0$ (on suppose $r_0 \leq R$), on considère la fonction sur $\overline{D}$:

$$u_\eta(\tau,\lambda) = u\big(\widetilde{Z}(\tau) + \eta, \lambda\big).$$

On a :

$$\text{si } |\tau| = 1 : \quad |u_\eta(\tau,\lambda)| \leq \mathrm{e}^{\lambda K|\eta|^2} \quad \text{puisque } \partial\widetilde{Z} \subset M \text{ et (2.3)};$$

$$\text{si } |\tau| = \delta_0 : \quad |u_\eta(\tau,\lambda)| \leq \mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon_0} \quad \text{puisque } \big|\widetilde{Z}(\tau) + \eta - z_0\big| \leq r_0 \text{ et (2.3).}$$

Le théorème des trois cercles donne :

$$\delta_0 \leq |\tau| \leq 1 : \quad |u_\eta(\tau,\lambda)| \leq \mathrm{e}^{\lambda\theta(\tau)}$$

avec :

$$\theta(\tau) = K|\eta|^2 - \big(\varepsilon_0 + K|\eta|^2\big)\frac{\operatorname{Log}|\tau|}{\operatorname{Log}\delta_0} \leq K|\eta|^2 - \big(1 - |\tau|\big)\varepsilon_0'$$

avec $\varepsilon_0' = \varepsilon_0 \,/ \operatorname{Log} 1/\delta_0$. On utilise cette estimation quand $\tau = 1 - \kappa$, κ petit à choisir, $\eta = z - \widetilde{Z}(1-\kappa)$. On peut supposer $\widetilde{Z}$ de classe $\mathcal{C}^\alpha$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$. On a alors :

$$|\eta| \leq |z| + |\widetilde{Z}|_\alpha \kappa^\alpha \leq \Big(\frac{\varepsilon_0'\kappa}{2K}\Big)^{1/2}$$

si $|z| \leq \kappa$ et κ est choisi assez petit. On a obtenu :

$$|z| \leq \kappa, \quad |u(z,\lambda)| = |u_\eta(1-\kappa,\lambda)| \leq \mathrm{e}^{-\lambda\kappa\varepsilon_0'/2}$$

c'est-à-dire (2.4). La preuve est complète.

3. Démonstration du Théorème 7.

Par rapport au § 2, la démonstration est compliquée par le fait qu'on ne peut pas réduire autant la fonction ϕ ; on utilise une famille de disques au lieu d'un seul. Après application de la théorie de Sjöstrand, on est ramené à étudier la propagation de la relation "$u \underset{\phi}{\sim} 0$ en z" sur une sous-variété $\mathcal{L}$ de $T^*\mathbb{C}^n$, où

$$\mathcal{L} =: \ z \in M', \quad \zeta = \frac{2}{i}\frac{\partial \phi}{\partial z}(z) \tag{3.1}$$

est une variété CR isotrope (*cf.* LEMME I.7.5). En général, M' n'est pas une variété CR. Nous travaillerons donc sur $T^*\mathbb{C}^n$ et prouverons :

LEMME 3.1. — *Soit M une variété* CR *lisse dans $\mathbb{C}^n$, ϕ une fonction réelle lisse au voisinage de M. On suppose*

$$i_M^*\partial\bar{\partial}\phi = 0\,; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_k}_{\,|\,M} \text{ est une fonction CR}, \ k = 1, \dots, n. \tag{3.3}$$

Alors la relation $u \underset{\phi}{\sim} 0$ a la propriété de propagation non caractéristique sur M.

REMARQUE 3.2. — Le THÉORÈME III.1.2 correspond au cas où l'on remplace l'hypothèse (3.3) par $\partial\phi/\partial z_{|M}$ est CR pour la structure formelle (M, Z) définie par un champ holomorphe Z tangent à M, réel analytique. On peut donc démontrer ce théorème en réalisant cette structure par un plongement convenable de M dans un espace de dimension plus grande et se ramener ainsi à la situation du LEMME 3.1. Bien sûr, une telle réduction est impossible, en général, quand les données M, Z ne sont pas analytiques.

Démonstration du Théorème 7 : il s'agit de montrer que la relation "$u \underset{\phi}{\sim} 0$ en z" a la propriété de propagation non caractéristique sur $\mathcal{L}$ quand $\mathcal{L}$, définie par (3.1) est CR isotrope. On applique le LEMME 3.1 dans $T^*\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ à $M = \mathcal{L}$ et la fonction $\tilde{\phi}(z, \zeta) = \phi(z)$. On a $\partial\tilde{\phi}/\partial\zeta_{|\mathcal{L}} = 0$ et $\partial\tilde{\phi}/\partial z_{|\mathcal{L}} = \frac{1}{2} i\, \zeta_{|M}$ d'où (3.3), $i_{\mathcal{L}}^*\ \partial\bar{\partial}\tilde{\phi} = -\mathrm{d}\, i_{\mathcal{L}}^*(\frac{1}{2} i \sum_{i=1}^n \zeta_j dz_j) = 0$, d'où (3.2). Le lemme appliqué aux fonctions $u(z, \lambda)$ indépendantes de ζ donne le résultat. $\square$

La suite est consacrée à la démonstration du LEMME 3.1. On peut supposer (*cf.* II (2.2), (2.4)) que M est définie près de 0 par :

$$M =: \ \operatorname{Im} z'' = G\big(z', \operatorname{Re} z''\big), \ z''' = g(z', \operatorname{Re} z''), \tag{3.4}$$

où $z = (z', z'', z''') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s = \mathbb{C}^n$, G et g sont nulles à l'ordre deux en 0 et g est une fonction CR, quand on la considère comme fonction sur

$$(3.5) \qquad M^0 =: \ \operatorname{Im} z'' = G(z', \operatorname{Re} z'').$$

On a donc :

(3.6) Tout vecteur antiholomorphe tangent à M^0 annule $z''' - g$.

On introduit le système de coordonnées tangentielles

$$(3.7) \qquad (t, r, \tau) = \big((z', x''), y'' - G(z', x''), z''' - g(z', x'')\big) \in (\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^r) \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s.$$

Quand on parle de la base duale de (3.7) il faut comprendre que les coordonnées complexes z', τ sont dédoublées en $z', \bar{z}'$ et $\tau, \bar{\tau}$. On a :

$$M^0 =: \ r = 0; \quad M =: \ r = 0, \ \tau = 0.$$

A $\eta = (\eta'', \zeta''') \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$, on associe $\hat{\eta} = (0, i\eta'', \zeta''') \in \mathbb{C}^n$. On utilisera beaucoup les variétés translatées de M :

$$(3.8) \qquad M_\eta = M + \hat{\eta} =: \ r = \eta'', \ \tau = \zeta'''.$$

Pour trouver une traduction utile des propriétés de la fonction ϕ, nous allons écrire une base de $T^{0,1}\mathbb{C}^n$ dans le système de coordonnées (3.7). Les champs $\partial/\partial\bar{z}_j$, $j = 1, \dots, n = p + r + s$ s'écrivent

$j = 1, \dots, p$:
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{\alpha=1,\dots,r} \frac{\partial r_\alpha}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} + \sum_{\alpha=1,\dots,s} \Big(\frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} + \frac{\partial \bar{\tau}_\alpha}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_\alpha}\Big)$$
$j = p+1, \dots, p+r$:
$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\alpha=1,\dots,r} \frac{\partial r_\alpha}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,\dots,s} \Big(\frac{\partial \tau_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} + \frac{\partial \bar{\tau}_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_\alpha}\Big)$$
$j = p + r + 1, \dots, n$: $\dfrac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{j-p-r}}$.

On remarque que les coefficients ne dépendent que de t et que la matrice $(\partial r_\alpha / \partial \bar{z}_j)_{\alpha=1,\dots,r \,;\, j=p+1,\dots,p+r}$ est inversible en 0. Par combinaisons linéaires, on obtient une base de $T^{0,1}\mathbb{C}^n$ près de 0, de la forme :

$$j=1,\dots,p:\quad A_j=\frac{\partial}{\partial\bar z_j}+\sum_{\alpha=1,\dots,r}a_{j\alpha}(t)\frac{\partial}{\partial x_{p+\alpha}}+\sum_{\alpha=1,\dots,s}b_{j\alpha}(t)\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha},$$

$$j=1,\dots,r:\quad B_j=\frac{\partial}{\partial r_j}+Y_j\Bigl(t,\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)+\sum_{\alpha=1,\dots,s}c_{j\alpha}(t)\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha},$$

$$j=1,\dots,s:\quad C_j=\frac{\partial}{\partial\bar\tau_j}.$$

D'après (3.6), les champs A_j, qui sont tangents à M^0, sont tangents à M : $b_{j\alpha}=0$. Finalement, on a la base de champs antiholomorphes :

$$(3.9)\qquad\begin{cases}A_j=X_j\bigl(t,\dfrac{\partial}{\partial t}\bigr) & j=1,\dots,p\\ B_j=\dfrac{\partial}{\partial r_j}+Y_j\bigl(t,\dfrac{\partial}{\partial t}\bigr)+\displaystyle\sum_{\alpha=1,\dots,s}c_{j\alpha}(t)\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha} & j=1,\dots,r\\ C_j=\dfrac{\partial}{\partial\bar\tau_j} & j=1,\dots,s\end{cases}$$

(C'est la base duale de $\mathrm{d}\bar z_1,\dots,\mathrm{d}\bar z_p,\bar\partial r_1,\dots,\bar\partial r_q,\bar\partial\bar\tau_1,\dots,\bar\partial\bar\tau_s$.)
De la forme des vecteurs A_j,B_j,C_j et de l'intégrabilité de $T^{0,1}\mathbb{C}^n$, on déduit qu'ils commutent; pour j, $k=1,\dots,p$; μ, $\nu=1,\dots,r$; $\alpha=1,\dots,s$:

$$(3.10)\quad [X_j,X_k]=[X_j,Y_\mu]=[Y_\mu,Y_\nu]=0,\ X_jc_{\mu\alpha}=0,\ Y_\mu c_{\nu\alpha}=Y_\nu c_{\mu\alpha}.$$

LEMME 3.3. — *Si $i_M^*\partial\bar\partial\phi=0$, il existe une fonction H près de 0 telle que $\partial\phi_{|M}=\partial H_{|M}$ et $\bar\partial H_{|M}=0$.*

Démonstration. — On a $\mathrm{d}(i_M^*\partial\phi)=0$ donc $\partial\phi_{|M}=\mathrm{d}H_{|M}$. □

La réciproque est aussi trivialement vraie.

LEMME 3.4. — *Si H est une fonction près de 0 telle que $\bar\partial H_{|M}=0$ et que $\partial H/\partial z_{k|M}$ soit une fonction* CR, *$k=1,\dots,n$, il existe une fonction $\widetilde H$ près de 0 telle que $H-\widetilde H$ est nulle à l'ordre deux sur M, $\bar\partial\widetilde H_{|M}=0$ et $\widetilde H_{|M_\lambda}$ est une fonction* CR *pour tout λ (dans un petit voisinage fixé de 0).*

Démonstration. — On écrit les choses dans les coordonnées (3.7) :

$$H(t,r,\tau)=\widetilde H(t,r,\tau)+\mathrm{O}(r^2+|\tau|^2),$$

$$\widetilde H(t,r,\tau)=h_0(t)+\sum_{j=1,\dots,r}h_j(t)r_j+\sum_{j=1,\dots,s}\bigl(\varphi_j(t)\tau_j+\psi_j(t)\bar\tau_j\bigr).$$

On va montrer que $\widetilde{H}_{|M_\lambda}$ est CR en vérifiant que $\widetilde{H}$ est annulée par les champs $X_1, \ldots, X_p$. De $\bar{\partial} H(t,0,0) = 0$, et (3.9) on tire :

$$\text{(3.11)} \qquad \begin{cases} X_j h_0 = 0, & j = 1, \ldots, p\,; \\ \psi_j = 0, & j = 1, \ldots, s\,; \\ h_j + Y_j h_0 + \sum_{\alpha=1}^{s} c_{j\alpha}\varphi_\alpha = 0, & j = 1, \ldots, r. \end{cases}$$

Pour $k = 1, \ldots, s$, le champ $\partial/\partial z_{p+r+k}$ s'écrit $\partial/\partial \tau_k$ dans les coordonnées (3.7). Comme $\partial H/\partial \tau_{k\,|M}$ est CR, on a :

$$\text{(3.12)} \qquad X_k \varphi_\alpha = 0, \quad k = 1, \ldots, p, \ \alpha = 1, \ldots, s.$$

De (3.10), (3.11), (3.12), on tire :

$$0 = X_k\Big(h_j + Y_j h_0 + \sum_{\alpha=1}^{s} c_{j\alpha}\varphi_\alpha\Big) = X_k h_j, \quad k = 1, \ldots, p\,;\ j = 1, \ldots, r.$$

On a bien obtenu $X_k \widetilde{H} = 0$ pour $k = 1, \ldots, p$. □

Résumons : la variété CR lisse M est définie par (3.4). Si $\eta = (\eta'', \zeta''') \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$, petit, on note $\hat{\eta} = (0, i\eta'', \zeta''') \in \mathbb{C}^n$, $M_\eta = M + \hat{\eta}$ et $M_\eta(R) = \{z \in M_\eta,\ |z| \le R\}$. Tout $z \in \mathbb{C}^n$, petit, s'écrit $z = m(z) + \hat{\eta}(z)$ avec $m(z) \in M$, $\eta(z) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$; la décomposition est unique quand on impose à z, $m(z)$, $\hat{\eta}(z)$ d'être petits. D'après les LEMMES 3.3, 3.4, la fonction ϕ vérifie, avec H fonction lisse près de 0 :

$$\text{(3.13)} \quad |z| \le R_0, \quad \big|\phi(z) - 2\,\mathrm{Re}\, H(z)\big| \le K\big|\eta(z)\big|^2,$$

$$\text{(3.14)} \quad |z| \le R_0, \quad \big|\bar{\partial} H(z)\big| \le K\big|\eta(z)\big|\,;\ H_{|M_\eta(R_0)} \text{ est CR, tout } \eta.$$

Nous devons montrer que si $\Sigma = \{h = 0\}$ est une hypersurface non caractéristique en $0 \in M$ et si u est un germe de fonction H_ϕ en 0 :

$$u \underset{\phi}{\sim} 0 \text{ dans } \Sigma_- = \{h < 0\} \implies u \underset{\phi}{\sim} 0 \text{ en } 0.$$

Comme dernier préparatif, nous construisons une famille de disques :

LEMME 3.5. — *Soit $R > 0$. Il existe $\rho_0 > 0$ et une famille continue $M(\rho_0) \times [0,1] \to \mathcal{O}^{1,\alpha}$ de disques complexes $Z_{m,\kappa}$ ($m \in M(\rho_0), \kappa \in [0,1]$) telle que*

$$|Z_{m,\kappa}|_\alpha \le R, \quad \partial Z_{m,\kappa} \subset M,$$
$$Z_{m,\kappa}(1-\kappa) = m + \hat{\eta}(m,\kappa), \quad Z_{0,0}(-1) \in \Sigma_-,$$

avec $\eta(m,\kappa) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ (*bien sûr* $\eta(m,0) \equiv 0$ *puisque* $\partial Z_{m,\kappa} \subset M$).

Démonstration. — La même que celle du LEMME 2.2, mais en utilisant le LEMME II.2.3 et comme données $\lambda = 1 - \kappa$ et les disques

$$Z'_{0,0}(\tau) = \varepsilon(0,\ldots,0,i - i\tau), \quad Z'_{m,\kappa} = Z'_{0,0} + z' - Z'_{0,0}(1-\kappa)$$

quand $m = (z', x'' + iG(z',x''), g(z',x''))$. □

Soit donc u un germe de fonction H_ϕ en 0, équivalent à 0 dans Σ_-. On suppose u définie pour $|z| \le 2R$ et on introduit la famille $Z_{m,\kappa}$ de disques complexes donnée par le LEMME 3.5. Soit $z_0 = Z_{0,0}(-1) \in \Sigma_-$. Comme dans le § 2, il suffit de démontrer que si

$$\begin{cases} |u(z,\lambda)| \le \mathrm{e}^{\lambda\phi(z)} & \text{quand } |z| \le 2R, \\ |u(z,\lambda)| \le \mathrm{e}^{\lambda(\phi(z_0)-\varepsilon_0)} & \text{quand } |z - z_0| \le r_0, \end{cases} \tag{3.15}$$

alors

$$\big|u(z,\lambda)\big| \le \mathrm{e}^{\lambda(\phi(z)-\varepsilon_1)} \text{ quand } |z| \le r_1, \tag{3.16}$$

où $\varepsilon_1 > 0$, $r_1 > 0$ dépendent de $\varepsilon_0 > 0$, $r_0 > 0$, pas de u. On élargit la famille $Z_{m,\kappa}$ en posant (on peut supposer $r_0 \le R$, $\rho_0 \le R$) :

$$\eta \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s, \quad |\eta| \le \rho_0 : Z_{m,\kappa,\eta} = Z_{m,\kappa} + \hat{\eta}.$$

On peut supposer R assez petit pour que le théorème d'approximation [7] s'applique uniformément pour $|z| \le 2R$ aux fonctions CR $H_{|M_\eta}$. Soit $H_{m,\kappa,\eta} = H \circ Z_{m,\kappa,\eta}$. Puisque $\partial Z_{m,\kappa,\eta} \subset M_\eta(2R)$ et que $H_{|M_\eta}$ est CR, il résulte du théorème d'approximation [7] et du principe du maximum que la fonction $H_{m,\kappa,\eta|S}$ se prolonge holomorphiquement à D. On note $\widehat{H}_{m,\kappa,\eta} \in \mathcal{O}^{1,\alpha}(\overline{D})$ le prolongement. Les fonctions $Z_{m,\kappa,\eta}$, $H_{m,\kappa,\eta}$, $\widehat{H}_{m,\kappa,\eta}$ sont uniformément bornées dans $C^{1,\alpha}(\overline{D})$.

LEMME 3.6. — *On a, uniformément en* $|m| \le \rho_0$, $0 \le \kappa \le 1$, $|\eta| \le \rho_0$, $\tau \in \overline{D}$:

$$\big|\widehat{H}_{m,\kappa,\eta}(\tau) - H_{m,\kappa,\eta}(\tau)\big| \le C_0\big[\,|\eta| + (1-|\tau|)^\alpha\big](1-|\tau|). \tag{3.17}$$

Démonstration. — Sur S, on a $H_{m,\kappa,\eta} = \widehat{H}_{m,\kappa,\eta}$, $\partial\widehat{H}_{m,\kappa,\eta}/\partial\bar\tau = 0$ et $\partial H_{m,\kappa,\eta}/\partial\bar\tau = (\bar\partial H)(Z_{m,\kappa,\eta}) \cdot \overline{\partial Z}_{m,\kappa,\eta} = \mathrm{O}(|\eta|)$ puisque $\partial Z_{m,\kappa,\eta} \subset M_\eta$ et compte-tenu de (3.14). $H_{m,\kappa,\eta}$, $\widehat{H}_{m,\kappa,\eta}$ étant uniformément bornées dans $C^{1,\alpha}$, on en déduit $|\mathrm{d}(\widehat{H}_{m,\kappa,\eta} - H_{m,\kappa,\eta})(\tau)| \le C(|\eta| + (1-|\tau|)^\alpha)$ et (3.17) en intégrant. □

Quitte à diminuer r_0, on a, par continuité :

$$\tag{3.18} \begin{cases} |\phi(z) - \phi(z_0)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon_0, \\ \big|2\operatorname{Re} H(z) - \phi(z_0)\big| \leq \frac{1}{4}\varepsilon_0 \ \text{ quand } |z - z_0| \leq r_0. \end{cases}$$

De même, par continuité et puisque $Z_{0,0,0}(-1) = z_0$, $\widehat{H}_{0,0,0}(-1) = H(z_0)$:

$$\tag{3.19} \begin{cases} \text{si } |m| \leq \rho,\ |\eta| \leq \rho,\ 0 \leq \kappa \leq \rho,\ |\tau + 1| \leq \rho \text{ on a :} \\ \big|Z_{m,\kappa,\eta}(\tau) - z_0\big| \leq r_0,\ \big|\widehat{H}_{m,\kappa,\eta}(\tau) - H(z_0)\big| \leq \frac{1}{4}\varepsilon_0 \end{cases}$$

pour $\rho > 0$ assez petit. On introduit $\delta > 0$ et un biholomorphisme φ de $\overline{D}$ qui envoie le disque $\{|\tau| \leq \delta\}$ dans $\{|\tau + 1| \leq \rho\}$. On a :

$$\tag{3.20} C^{-1}\big(1 - |\tau|\big) \leq 1 - |\varphi(\tau)| \leq C(1 - |\tau|), \quad \tau \in \overline{D}.$$

Soit $u_{m,\kappa,\eta}(\tau, \lambda) = u(Z_{m,\kappa,\eta}(\tau), \lambda)$. Compte-tenu de (3.15), (3.13), (3.17) et du fait que $\partial Z_{m,\kappa,\eta} \subset M_\eta$, on a, si $|m| \leq \rho$, $|\eta| \leq \rho$, $0 \leq \kappa \leq \rho$:

$$\begin{aligned} |\tau| = 1, \quad \frac{1}{\lambda}\operatorname{Log}\big|u_{m,\kappa,\eta}\big(\varphi(\tau), \lambda\big)\big| &\leq \phi\big(Z_{m,\kappa,\eta}(\varphi(\tau)\big) \\ &\leq 2\operatorname{Re} H_{m,\kappa,\eta}\big(\varphi(\tau)\big) + K|\eta|^2 \\ &\leq 2\operatorname{Re} \widehat{H}_{m,\kappa,\eta}\big(\varphi(\tau)\big) + K|\eta|^2. \end{aligned}$$

Par (3.15), (3.13), (3.18), (3.19) et le choix de φ, on a :

$$\begin{aligned} |\tau| = \delta, \quad \frac{1}{\lambda}\operatorname{Log}\big|u_{m,\kappa,\eta}\big(\varphi(\tau), \lambda\big)\big| &\leq \phi(z_0) - \varepsilon_0 \\ &\leq 2\operatorname{Re} H(z_0) - \varepsilon_0 \\ &\leq 2\operatorname{Re} \widehat{H}_{m,\kappa,\eta}\big(\varphi(\tau)\big) - \tfrac{1}{2}\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Par le théorème des trois cercles appliqué à $u_{m,\kappa,\eta} \circ \varphi\, e^{-2\lambda \widehat{H}_{m,\kappa,\eta} \circ \varphi}$, on obtient comme au § 2, avec $\varepsilon_0' = \frac{1}{2}\varepsilon_0 / \operatorname{Log} 1/\delta$, pour $\delta \leq |\tau| \leq 1$:

$$\frac{1}{\lambda}\operatorname{Log}\big|u_{m,\kappa,\eta}\big(\varphi(\tau), \lambda\big)\big| \leq 2\operatorname{Re} \widehat{H}_{m,\kappa,\eta}\big(\varphi(\tau)\big) + K|\eta|^2 - \varepsilon_0'\big(1 - |\tau|\big)$$

donc, compte-tenu de (3.20), avec $\varepsilon_0'' = \varepsilon_0'/C$:

$$\frac{1}{\lambda}\operatorname{Log}\big|u_{m,\kappa,\eta}(\tau, \lambda)\big| \leq 2\operatorname{Re} \widehat{H}_{m,\kappa,\eta}(\tau) + K|\eta|^2 - \varepsilon_0''\big(1 - |\tau|\big).$$

On applique cette estimation à $\tau = 1-\kappa$. Tenant compte de

$$Z_{m,\kappa,\eta}(1-\kappa) = m + \hat{\eta}(m,\kappa) + \hat{\eta},$$

de (3.17), (3.13), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\operatorname{Log}\bigl|u(m+\hat{\eta}(m,\kappa)+\hat{\eta},\lambda)\bigr| \le \phi\bigl(m+\hat{\eta}(m,\kappa)+\hat{\eta}\bigr)&\\ + K\bigl(|\eta|^2 + |\eta+\eta(m,\kappa)|^2\bigr)&\\ + 2C_0\kappa\bigl(|\eta|+\kappa^\alpha\bigr) - \varepsilon_0''\kappa.&\end{aligned}$$

Comme les disques $Z_{m,\kappa,\eta}$ sont uniformément dans $C^{1,\alpha}(\overline{D})$, on a :

$$\bigl|\hat{\eta}(m,\kappa)\bigr| \le C_1\kappa.$$

On a obtenu, pour $z = m+\hat{\eta}+\hat{\eta}(m,\kappa)$, $m \in M(\rho)$, $|\eta| \le \rho$, $0 \le \kappa \le \rho$, une estimation de la forme

$$\bigl|u(z,\lambda)\bigr| \le \mathrm{e}^{\lambda(\phi(z)-\varepsilon_0''\kappa+K'(|\eta|^2+\kappa^{1+\alpha})}.$$

On écrit $\eta = \xi - \eta(m,\kappa)$, pour $|\xi| \le \kappa$, $\kappa \le \rho/C_1+1$. On obtient

$$m \in M(\rho),\ \ |\xi| \le \kappa;\quad \bigl|u(m+\hat{\xi},\lambda)\bigr| \le \mathrm{e}^{\lambda(\phi(m+\hat{\xi})-\varepsilon_0''\kappa+K''\kappa^{1+\alpha})}.$$

Pour $\kappa > 0$ assez petit, on obtient le résultat : $u \underset{\phi}{\sim} 0$ en 0. ▯

BIBLIOGRAPHIE

[1] Airapetyan (R.A.). — Extension of CR-functions from Piecewise-Smooth. CR-Manifolds., *Math. USSR-Sb.*, t. **134**, **176** (trad. 62, 1989, n⁰ 1), 1987, p. 111–120.

[2] Andreotti (A.) and Hill (C.D.). — E. E. Levi Convexity and the Hans Lewy Problem I, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* , t. **26**, 1972, p. 325–363.

[3] BAOUENDI (M.S.), CHANG (C.H.) and TRÈVES (F.). — Microlocal Hypo-Analyticity and Extension of CR-Functions, *J. Differential Geom.*, t. **18**, 1983, p. 331–391.

[4] BAOUENDI (M.S.), ROTHSCHILD (L.P.) and TRÈVES (F.). — CR Structures with group action and extendability of CR functions, *Invent. Math.*, t. **82**, 1985, p. 359–396.

[5] BAOUENDI (M.S.) and ROTHSCHILD (L.P.). — Normal Forms for Generic Manifolds and Holomorphic Extension of CR Functions, *J. Differential Geom.*, t. **25**, 1987, p. 431–467.

[6] BAOUENDI (M.S.) and ROTHSCHILD (L.P.). — Cauchy-Riemann Functions on Manifolds of Higher Codimension in Complex Space *Preprint*, 1989 .

[7] BAOUENDI (M.S.) and TRÈVES (F.). — A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields, *Ann. of Math.*, t. **113**, 1981, p. 387–421.

[8] BOGGESS (A.) and POLKING (J.C.). — Holomorphic Extension of CR Functions, *Duke Math. J.*, t. **49**, 1982, p. 757–784.

[9] BONY (J.-M.). — Principe du maximum, inégalité de Harnack, *Ann. Inst. Fourier*, t. **19**, 1989, p. 277–304.

[9′] BONY (J.-M.). — Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques, *Astérisque*, t. **34–35**, 1976, p. 43–91.

[10] COUPET (B.). — Régularité d'applications holomorphes sur des variétés totalement réelles, *Thèse*, *Université de Provence*, 1987 .

[11] HANGES (N.) and SJÖSTRAND (J.). — Propagation of analyticity for a class of non-micro-characteristic operators, *Ann. of Math.*, t. **116**, 1982, p. 559–577.

[12] HANGES (N.) and TRÈVES (F.). — Propagation of holomorphic extendability of CR functions, *Math. Ann.*, t. **263**, 1983, p. 157–177.

[13] HILL (C.D.) and TAIANI (G.). — Families of Analytic Discs with Boundaries in a Prescribed CR Submanifold, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. **4–5**, 1978, p. 327–380.

[14] KASHIWARA (M.) and SCHAPIRA (P.). — Microlocal Study of Sheaves, *Astérisque*, t. **128**, 1985.

[15] SATO (M.), KAWAÏ (T.) and KASHIWARA (M.). — Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, *Lecture Notes in Math.*, t. **287**, 1973, p. 265–529.

[16] SJÖSTRAND (J.). — Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, t. **95**, 1982.

[17] SJÖSTRAND (J.). — The FBI-Transform for CR Submanifolds of $\mathbb{C}^n$, *Prépublications Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay*, 1982 .

[18] STENSONES (B.). — Extendability of holomorphic functions, *Lecture Notes*, n° 1268, *(Ed. Krantz), Complex Analysis*, 1987 .

[19] SUSSMANN (H.J.). — Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **180**, 1973, p. 171–187.

[20] TREPREAU (J.M.). — Sur l'hypoellipticité analytique microlocale des opérateurs de type principal, *Comm. Partial Differential Equations*, t. **9 (11)**, 1984, p. 1119–1146.

[21] TREPREAU (J.-M.). — Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$, *Invent. Math.*, t. **83**, 1986, p. 583–592.

[22] TREVES (F.). — Approximation and Representation of Functions and Distributions Annihilated by a System of Complex Vector Fields, *Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, Palaiseau*, 1981 .

[23] TUMANOV (A.E.). — Extension of CR Functions into a Wedge from a Manifold of Finite Type, *Math. USSR-Sb*, t. **64**, 1989, p. 129–140.