

BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS DUCROT

Fibré déterminant et courbes relatives

Bulletin de la S. M. F., tome 118, n° 3 (1990), p. 311-361

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_3_311_0

© Bulletin de la S. M. F., 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FIBRÉ DÉTERMINANT ET COURBES RELATIVES

PAR

FRANÇOIS DUCROT (*)

RÉSUMÉ. — On établit ici des généralisations des formules classiques d'addition pour les fonctions thêta des jacobiniennes de courbes algébriques, au cas des familles de courbes sur des bases quelconques ; on montre en particulier comment la notion de "forme principale" et la formule trisécante de Fay s'interprètent dans ce langage. Pour ceci la notion de diviseur thêta est remplacée par celle de fibré déterminant. On étudie aussi l'action de la dualité de Serre sur le fibré déterminant.

ABSTRACT. — Some classical formulas on theta functions on Riemann surfaces are generalized to families of algebraic curves over any basis. For example the notion of "prime form" is interpreted and we prove Fay's trisecant formula in this context. We use the notion of determinant bundle instead of that of theta divisor. Finally we study the action of Serre duality on the determinant bundle.

0. Introduction

0.1. — Soient A une variété abélienne et L un faisceau inversible sur A ; le théorème du cube [24, p. 58] affirme que le faisceau inversible suivant sur A^3 est trivial

$$(1) \quad \theta(L) = m^*L \otimes (m_{12}^*L)^{-1} \otimes (m_{23}^*L)^{-1} \otimes (m_{31}^*L)^{-1} \\ \otimes p_1^*L \otimes p_2^*L \otimes p_3^*L$$

où m , m_{ij} , p_i sont les applications $A \times A \times A \rightarrow A$ définies par $m(x_1, x_2, x_3) = x_i + x_j + x_k$, $m_{ij}(x_1, x_2, x_3) = x_i + x_j$ et $p_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$. Si on définit pour tout $x \in A$ l'application $\tau_x : X \rightarrow X$ par $\tau_x(y) = x + y$, ceci entraîne que pour tout faisceau inversible L sur A , l'application $\Phi_L : A \rightarrow \widehat{A} = \text{Pic}^0 A$ définie par $\Phi_L(x) = \tau_x^*L \otimes L^{-1}$ est un homomorphisme de groupes algébriques de A dans la variété abélienne duale

(*) Texte reçu le 12 mars 1990, révisé le 11 juillet 1990.

F. DUCROT, Université d'Angers, Faculté des Sciences, Dépt. de Mathématiques, 2, Bd. Lavoisier, 49045 Angers Cedex, France.

de A . On appelle alors *polarisation* de A [25, 6.2] une isogénie $u : A \rightarrow \widehat{A}$ telle qu'il existe un faisceau inversible L ample sur A tel que $u = \Phi_L$. Enfin si (A, u) est une variété abélienne polarisée, on appelle *diviseur thêta* (resp. *diviseur thêta symétrique*) de A un diviseur Θ sur A (resp. tel que $j^*\Theta = \Theta$, où j est l'involution $x \mapsto -x$ de A) tel que $\mathcal{O}(\Theta)$ définit la polarisation u .

La variété de Picard $\text{Pic}^0 C$ d'une courbe algébrique complexe compacte C de genre g est munie naturellement d'une polarisation, qu'on peut décrire de la manière suivante (cf. Moret-Bailly [21]) :

- On construit d'abord un diviseur canonique sur $\text{Pic}^{g-1} C$. Soient \mathcal{P} un faisceau universel sur $C \times \text{Pic}^{g-1} C$ et p la projection $C \times \text{Pic}^{g-1} C \rightarrow \text{Pic}^{g-1} C$; on introduit ([21], [4]) le faisceau inversible $(\det R p_* \mathcal{P})^{-1}$ et on montre qu'il est muni d'une section holomorphe canonique. Ceci définit un diviseur effectif canonique $W_{g-1}(C)$ sur $\text{Pic}^{g-1} C$ tel que

$$(2) \quad \mathcal{O}(W_{g-1}(C)) = (\det R p_* \mathcal{P})^{-1}.$$

Son ensemble sous-jacent est $\{L \in \text{Pic}^{g-1} C \mid h^0(C, L) \geq 1\}$ (rappelons que d'après Riemann-Roch, un faisceau inversible L de degré $(g - 1)$ sur C vérifie $h^0(C, L) = h^1(C, L)$ et que, de plus, pour L générique on a $h^0(C, L) = 0$). Signalons enfin que $W_{g-1}(C)$ est invariant par la dualité de Serre $L \mapsto \Omega_C^1 \otimes L^{-1}$.

- Pour tout élément L de $\text{Pic}^{g-1} C$, en utilisant la translation $\tau_L : \text{Pic}^0 C \rightarrow \text{Pic}^{g-1} C$ on définit un diviseur (dépendant de L) $\Theta = \tau_L^* W_{g-1}(C)$ de $\text{Pic}^0 C$ et on note θ la section canonique de $\mathcal{O}(\Theta)$. La propriété d'autodualité de la jacobienne [21, 2.7] affirme que Θ définit une polarisation principale sur $\text{Pic}^0 C$, c'est-à-dire que Φ_Θ est un isomorphisme. De plus si L vérifie $L^2 \simeq \Omega_C^1$, l'invariance de $W_{g-1}(C)$ par la dualité de Serre entraîne que le diviseur Θ associé est symétrique. Introduisons enfin l'application d'Abel-Jacobi :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} C^n \times C^n & \xrightarrow{\mu_n} & \text{Pic}^0 C \\ (P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n) & \mapsto & \mathcal{O}(\sum P_i - \sum Q_i). \end{array}$$

Un problème classique consiste à étudier les diviseurs $\mu_n^*(\Theta_L)$. Un tel problème est traité par Kempf dans [17], où il définit le faisceau $\mathcal{O}(\Theta)$ à l'aide de la formule (2) et fait des calculs en utilisant des réalisations explicites de certains complexes dérivés.

Cette description géométrique des diviseurs thêta sur une jacobienne peut aussi s'écrire en termes de fonctions thêta de Riemann (cf. FAY [9]) :

soit C une courbe algébrique sur \mathbb{C} lisse, compacte et connexe de genre g , munie d'une base symplectique $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g\}$ de l'homologie et d'une base $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ de l'espace des différentielles holomorphes sur C , vérifiant $\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}$. On introduit alors le tore complexe $J = \mathbb{C}^g / \Lambda$, où Λ est le réseau $\mathbb{Z}^g + \tau \mathbb{Z}^g$ de \mathbb{C}^g défini par la matrice $\tau = (\int_{\beta_i} \omega_j)_{ij}$. La fonction thêta de Riemann est alors une fonction holomorphe ϑ sur \mathbb{C}^g qui vérifie la formule $\vartheta(z + \lambda, \tau) = \exp(Q(z, \lambda))\vartheta(z, \tau)$ de quasi-périodicité relativement à Λ , où $Q(Z, \lambda)$ est une fonction quadratique sur $\mathbb{C}^g \times \Lambda$. Une telle fonction définit donc un diviseur Θ sur le tore complexe J .

La théorie classique des fonctions thêta développée par Riemann, Wirtinger, etc. (cf. FAY [9]) étudie les composés de ϑ avec les "intégrales abéliennes" :

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} C^n \times C^n & \xrightarrow{\mu_n} & J \\ (P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n) & \longmapsto & (\sum_{i=1}^n \int_{P_i}^{Q_i} \omega_1, \dots, \sum_{i=1}^n \int_{P_i}^{Q_i} \omega_g). \end{array}$$

$\vartheta \circ \mu_n$ est d'après la quasi-périodicité de ϑ une "fonction multiforme" sur $C^n \times C^n$. Pour étudier cette fonction, on peut former des quotients à partir de $\vartheta \circ \mu_n$ et de ses translatés afin d'obtenir des égalités entre des fonctions véritables (méromorphes) sur $C^n \times C^n$. C'est le cas par exemple de la formule trisécante de Fay (FAY [9], MUMFORD [23]) :

$$(5) \quad \frac{\vartheta\left(\sum x_i - \sum y_i - e\right)}{\vartheta(e)} \frac{\prod_{i < j} E(x_i, x_j) E(y_i, y_j)}{\prod_{(i, j)} E(x_i, y_j)} = \det \left(\frac{\vartheta(x_i - y_j - e)}{\vartheta(e) E(x_i, y_j)} \right)$$

où $E(x, y)$ est la fonction principale ("prime function") qui est une fonction sur $C \times C$, elle-même définie comme un quotient de fonctions thêta. Le lien entre cette théorie et la théorie géométrique est décrit par le théorème d'annulation de Riemann (cf. par exemple [9, I]), qui affirme que si P est un point fixé de C , il existe une constante c de \mathbb{C}^g (la constante de Riemann) telle que les points P_1, \dots, P_g vérifient l'égalité

$$\vartheta \left(c + \int_P^{P_1} + \dots + \int_P^{P_g} \right) = 0$$

si et seulement si on a $h^0(C, \mathcal{O}(P_1 + \dots + P_g - P)) \geq 1$, c'est-à-dire $\mathcal{O}(P_1 + \dots + P_g - P) \in W_{g-1}$.

0.2. — Dans ce travail, on se placera dans le cadre relatif en considérant une courbe relative de genre $g : X \xrightarrow{p} S$ munie d'un faisceau inversible L et on étudiera le faisceau inversible $\Theta_L = (\det R p_* L)^{-1}$ sur S introduit dans [21]. On peut par exemple penser à la courbe relative $C \times \text{Pic}^{g-1} C \longrightarrow \text{Pic}^{g-1} C$ munie d'un faisceau universel; on retrouve alors la définition (2).

Pour mener à bien cette étude il sera nécessaire de rappeler dans la section 1 certaines propriétés du déterminant d'un complexe dérivé (décrites dans [19] et [6]) en précisant des questions de signes. Il faudra aussi définir (section 3), pour tout couple de diviseurs relatifs effectifs D et E sur une courbe relative S , des diviseurs canoniques sur S qui s'interprètent comme le résultant de D et E et la racine carrée du discriminant de D . On verra brièvement qu'on peut transposer à ces diviseurs les résultats classiques sur les résultants et les discriminants.

On rappellera dans la section 2 la définition de Θ_L ainsi que de sa section canonique θ_L (dans le cas où L est de degré $g - 1$). On donnera des réalisations explicites de Θ_L et θ_L (LEMMES 2.21 et 2.2.2).

On étudiera dans la section 4 les faisceaux $\Theta_{L(D-E)}$, où D et E sont des diviseurs relatifs effectifs, et leurs sections canoniques. Cette étude généralise sur une base quelconque l'étude des intégrales abéliennes. En effet si C est une courbe complexe, en considérant la courbe relative

$$C \times C^p \times C^p \times \text{Pic}^{g-1} C \longrightarrow C^p \times C^p \times \text{Pic}^{g-1} C$$

qui est munie d'un faisceau universel L et de $2p$ sections canoniques $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$, on retrouve la théorie classique des intégrales abéliennes; en particulier la section $\theta_{L(\sum x_i - \sum y_i)}$ de $\Theta_{L(\sum x_i - \sum y_i)}$ s'interprète comme la fonction multiforme sur $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^{2p}$:

$$(z; x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \longmapsto \vartheta \left(z + \sum_{i=1}^p \int_{x_i}^{y_i} \omega \right).$$

On obtient ainsi une interprétation de la fonction principale de Klein qui intervient dans la formule 5. On utilisera cette étude pour décrire explicitement (PROPOSITION 4.1.2) l'isomorphisme du théorème du cube tel qu'il apparaît chez DELIGNE [5] et on obtiendra une formule d'addition correspondante (PROPOSITION 4.3.1) pour les sections θ qui donne une interprétation de la formule (5) trisécante de Fay valable au dessus d'une base quelconque. Cette formule, qui est le résultat principal de cette

section a été partiellement obtenue par KEMPF [18], dont la démonstration ne rend pas compte des termes $E(x_i, y_j)$ de la formule (5), ainsi que par des auteurs ([16], [1]) utilisant des méthodes de physique (cf. section 0.3).

On étudiera dans la section 5 l'isomorphisme $\sigma_L : \Theta_L \xrightarrow{\sim} \Theta_{\omega_{X/S} \otimes L^{-1}}$ induit par la dualité de Serre ([21, 4.15]). On verra que σ_L identifie les sections canoniques θ_L et $\theta_{\omega_{X/S} \otimes L^{-1}}$ de ces deux faisceaux. Cette propriété généralise de manière relative la classique symétrie de W_{g-1} par la dualité de Serre. La PROPOSITION 5.5.1 établira une propriété de compatibilité entre σ_L et la structure du cube décrite par la PROPOSITION 4.1.2. Ceci constitue une généralisation au cadre relatif de l'existence d'une Sigma-structure (cf. BREEN [3]) pour le diviseur thêta de la jacobienne d'une courbe. On étudiera enfin (PROPOSITION 5.6.1) l'isomorphisme σ_L dans le cas où L vérifie $L^2 \simeq \omega_{X/S}$, ce qui permet de retrouver un résultat de MUMFORD [22] sur la dimension de l'espace des sections holomorphes d'une thêta-caractéristique. De ces deux derniers résultats on déduit la formule de Riemann-Mumford qui exprime la relation entre l'accouplement $e_2(-, -)$ de Weil (lié à la structure de groupe de $\text{Pic}^0 X$) et l'involution de $\text{Pic}^{g-1} X$ induite par la dualité de Serre.

0.3. — Ce travail a été motivé par des travaux récents ([15], [16], [26]) liés à l'étude des systèmes intégrables et de la théorie des cordes, et bien que leur influence n'apparaisse plus visiblement ici, il est bon de les rappeler brièvement :

SEGAL et WILSON ont introduit dans [26], suivant une idée de SATO, une grassmannienne infinie Gr , munie d'un fibré déterminant \det . On peut décrire le lien entre cette construction et la géométrie des courbes algébriques de la manière suivante [4]. Pour une courbe complexe compacte X et un point lisse P de X , on note $\overline{\text{Pic}}^{g-1} X$ l'ensemble des données (L, ϕ, z) où L est un faisceau inversible sur X de degré $(g-1)$, ϕ est une trivialisations de L en P et z un paramètre local en P . Le dictionnaire de Kricever ([26, Chapitre 6]) définit un morphisme $F : \overline{\text{Pic}}^{g-1} X \rightarrow \text{Gr}$ et l'image inverse de \det par F est l'image inverse d'un faisceau Θ sur $\overline{\text{Pic}}^{g-1} X$ par l'application "oubli de ϕ et z ".

En théorie des cordes on utilise la construction de Kricever en faisant de plus varier la courbe X . A cet effet on considère un espace de modules des courbes \mathcal{M} possédant une courbe universelle \mathcal{C} . La construction de Kricever donne un morphisme $\mathcal{M} \times \text{Pic}_{\mathcal{C}/\mathcal{M}} \rightarrow \text{Gr}$ et l'image inverse par ce morphisme du faisceau \det sur Gr définit un faisceau inversible sur $\mathcal{M} \times \text{Pic}_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}$ qui est aussi obtenu en appliquant notre construction à la courbe relative : $\mathcal{C} \times \text{Pic}_{\mathcal{C}/\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M} \times \text{Pic}_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}$.

Pour mener à bien des calculs de fonctions de partition sur des produits cartésiens X^n (n -points fonctions) de nombreux auteurs (par exemple [16]) ont utilisé la notion d'opérateurs de Vertex, héritée de la physique. C'est la donnée de morphismes

$$\psi, \psi^* : X \times \det_{|\overline{\text{Pic}^{g-1} X}} \longrightarrow \det_{|\overline{\text{Pic}^{g-1} X}}$$

qui relèvent les morphismes μ et $\tau : X \times \text{Pic}^{g-1} X \longrightarrow \text{Pic}^{g-1} X$ tels que $\mu(Q, L) = L(P - Q)$ et $\tau(Q, L) = L(Q - P)$. En d'autres termes, pour tout point Q de X , on obtient des opérateurs $\psi(Q)$ (resp. $\psi^*(Q)$) définis sur $\det_{|L}$ et à valeurs dans $\det_{|L(P-Q)}$ (resp. $\det_{|L(Q-P)}$). On établit des relations d'anticommutation entre ψ et ψ^* qui permettent de donner des démonstrations de la formule de Fay. En effet si on considère un élément ω de la fibre $\det_{|L}$ de \det au dessus de L , on peut calculer $\psi(P_1) \cdots \psi(P_n) \cdot \psi^*(Q_1) \cdots \psi^*(Q_n)(\omega)$ de deux façons différentes :

- en remarquant que ceci s'exprime en fonction de $\theta(L(\sum P_i - \sum Q_i))$;
- en utilisant les relations d'anticommutation entre ψ et ψ^* .

Par la première méthode on obtient une expression symétrique en les P_i et en les Q_j , alors que par la seconde l'expression obtenue est antisymétrique. Une relation entre deux telles expressions, comme par exemple la formule de Fay, est appelée formule de bosonisation et exprime une dualité entre particules "fermioniques" et particules "bosoniques".

1. Déterminants de complexes

1.1 Rappels d'après Knudsen-Mumford.

Soit S un schéma noethérien, on note \mathcal{P}_S (catégorie des \mathcal{O}_S -modules inversibles gradués) la catégorie dont les objets sont les couples (L, α) où L est un \mathcal{O}_S -module inversible et α est une application continue $S \longrightarrow \mathbb{Z}$ et dont les morphismes $(L, \alpha) \longrightarrow (M, \beta)$ sont les morphismes de \mathcal{O}_S -modules $u : L \longrightarrow M$ tels que $\alpha(x) \neq \beta(x) \implies u_x = 0$. Dans cette catégorie on définit un produit tensoriel par $(L, \alpha) \otimes (M, \beta) = (L \otimes M, \alpha + \beta)$. On dispose alors d'un isomorphisme de symétrie $\psi_{L, M} : (L, \alpha) \otimes (M, \beta) \longrightarrow (M, \beta) \otimes (L, \alpha)$ (isomorphisme de Koszul), défini sur des sections locales par $\psi(\ell \otimes m) = (-1)^{\alpha\beta} m \otimes \ell$. En général on notera L le faisceau gradué (L, α) et de même on écrira ψ à la place de $\psi_{L, M}$. Enfin on appellera dual (à droite) de L un faisceau inversible gradué L^{-1} muni d'un accouplement $u : L \otimes L^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_S$. Si L' est un dual de L à droite, il peut être vu comme un dual à gauche en considérant le morphisme $L' \otimes L \xrightarrow{\psi} L \otimes L' \xrightarrow{u} \mathcal{O}_S$.

L'utilisation des faisceaux inversibles gradués nécessite une certaine prudence. Ainsi, si $(L_i, \alpha_i)_{i \in I}$ est une famille de faisceaux inversibles gradués, on ne peut pas définir de façon canonique le produit tensoriel $\bigotimes_{i \in I} (L_i, \alpha_i)$. Dans les cas que nous considérerons, de telles familles seront indexées par des ensembles $\{1, \dots, n\}$ et le produit tensoriel sera défini par

$$\bigotimes_{i=1}^n (L_i, \alpha_i) = \left(\bigotimes_{i=1}^{n-1} (L_i, \alpha_i) \right) \otimes (L_n, \alpha_n).$$

Dans ce cas on dispose d'un isomorphisme canonique (défini par récurrence)

$$\bigotimes_{i=1}^n (L_i, \alpha_i) \xrightarrow{\sim} \left(\bigotimes_{i=1}^n L_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i \right).$$

Pour plus de détails sur ce sujet, on réfère à [19].

GROTHENDIECK a introduit l'idée d'associer de manière fonctorielle à tout complexe de \mathcal{O}_S -modules localement libres, son déterminant qui est un \mathcal{O}_S -module inversible gradué. Plus précisément KNUDSEN et MUMFORD ont montré l'existence d'un foncteur déterminant dont la formation commute au changement de base $\det : \mathcal{C}is_S^* \rightarrow \mathcal{P}is_S$ où $\mathcal{C}is_S^*$ est la catégorie dont les objets sont les complexes bornés de \mathcal{O}_S -modules localement libres et les morphismes sont les quasi-isomorphismes de complexes et $\mathcal{P}is_S$ a pour objets les objets de \mathcal{P}_S et pour morphismes les isomorphismes de \mathcal{P}_S .

1.1.1. — Le *déterminant* d'un complexe quelconque

$$F^\bullet = (\dots \rightarrow F^i \rightarrow F^{i+1} \rightarrow \dots)$$

est défini par :

$$\det(F^\bullet) = \left(\bigotimes \left(\bigwedge^{\max} F^i \right)^{(-1)^i}, \chi(F^\bullet) \right)$$

en convenant que $\det(0^\bullet) = \mathcal{O}_S$. On omettra désormais d'écrire le terme $\chi(F^\bullet)$. Remarquons qu'on dispose d'un accouplement canonique

$$(6) \quad \det(F^\bullet) \otimes \det(F^\bullet[1]) \rightarrow \mathcal{O}_S$$

qui fait de $\det(F^\bullet[1])$ le dual de $\det(F^\bullet)$ et qui est défini par :

$$\begin{aligned} & \bigotimes_i \left(\bigwedge^{\max} F^i \right)^{(-1)^i} \otimes \bigotimes_i \left(\bigwedge^{\max} F^i \right)^{(-1)^{i+1}} \\ & \xrightarrow{\psi} \bigotimes_i \left(\left(\bigwedge^{\max} F^i \right)^{(-1)^i} \otimes \left(\bigwedge^{\max} F^i \right)^{(-1)^{i+1}} \right) \rightarrow \mathcal{O}_S. \end{aligned}$$

1.1.2. — Si $0 \rightarrow E^\bullet \xrightarrow{\alpha} F^\bullet \xrightarrow{\beta} G^\bullet \rightarrow 0$ est une suite exacte de complexes, on définit alors un isomorphisme $i_{\alpha\beta} : \det(E^\bullet) \otimes \det(G^\bullet) \xrightarrow{\sim} \det(F^\bullet)$ par :

$$\begin{aligned}
 \det(E^\bullet) \otimes \det(G^\bullet) &= \bigotimes_{i \in \mathbf{Z}} \left(\bigwedge^{\max} E^i \right)^{(-1)^i} \otimes \bigotimes_{i \in \mathbf{Z}} \left(\bigwedge^{\max} G^i \right)^{(-1)^i} \\
 &\quad \downarrow \psi \\
 (7) \quad &\bigotimes_{i \in \mathbf{Z}} \left(\bigwedge^{\max} E^i \otimes \bigwedge^{\max} G^i \right)^{(-1)^i} \\
 &\quad \downarrow \bigotimes_{k \in \mathbf{Z}} (i_{\alpha_k \beta_k})^{(-1)^k} \\
 &\bigotimes_{i \in \mathbf{Z}} \left(\bigwedge^{\max} F^i \right)^{(-1)^i} = \det(F^\bullet)
 \end{aligned}$$

où les isomorphismes $i_{\alpha_k \beta_k}$ sont les isomorphismes classiques déduits des suites exactes $0 \rightarrow E^k \xrightarrow{\alpha_k} F^k \xrightarrow{\beta_k} G^k \rightarrow 0$.

Ces isomorphismes permettent de définir par dévissage un isomorphisme canonique

$$(8) \quad \det F^\bullet \simeq \bigotimes_{i \in \mathbf{Z}} \left(\bigwedge^{\max} H^i(F^\bullet) \right)^{(-1)^i}$$

dans le cas où la cohomologie de F^\bullet est localement libre.

1.1.3. — Le déterminant d'un quasi-isomorphisme est plus difficile à définir. Signalons en seulement les propriétés qui nous seront utiles :

- Si $F^\bullet = (F^0 \rightarrow F^1)$ est un complexe acyclique, le déterminant du quasi-isomorphisme nul $0 : F^\bullet \xrightarrow{u} 0^\bullet$ est décrit par

$$\begin{aligned}
 \det(F^\bullet) &= \left(\bigwedge^{\max} F^0 \right) \otimes \left(\bigwedge^{\max} F^1 \right)^{-1} \\
 &\xrightarrow{\det u \otimes 1} \left(\bigwedge^{\max} F^1 \right) \otimes \left(\bigwedge^{\max} F^1 \right)^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_S.
 \end{aligned}$$

- $i_{\alpha\beta}$ est fonctoriel pour les morphismes de suites exactes de complexes

dont les composantes sont des quasi-isomorphismes : pour un tel morphisme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & F^\bullet & \xrightarrow{\alpha} & G^\bullet & \xrightarrow{\beta} & H^\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & \downarrow \nu & & \\
 0 & \longrightarrow & F'^\bullet & \xrightarrow{\alpha'} & G'^\bullet & \xrightarrow{\beta'} & H'^\bullet & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \det F^\bullet \otimes \det H^\bullet & \xrightarrow{i_{\alpha\beta}} & \det G^\bullet \\
 \det \lambda \otimes \det \nu \downarrow & & \downarrow \det \mu \\
 \det F'^\bullet \otimes \det H'^\bullet & \xrightarrow{i_{\alpha'\beta'}} & \det G'^\bullet
 \end{array}
 \tag{9}$$

• Si F^\bullet (et donc G^\bullet) est à cohomologie localement libre, le déterminant du quasi-isomorphisme $F^\bullet \xrightarrow{u} G^\bullet$ est donné par :

$$\det(u) = \bigotimes_{i \in \mathbf{Z}} \det(H^i(u))^{(-1)^i}.$$

1.1.4 *Extension aux catégories dérivées.* — La définition du déterminant d'un complexe s'étend aux complexes parfaits et aux quasi-isomorphismes entre de tels complexes. De plus, pour tout triangle distingué de complexes parfaits à cohomologie parfaite $\Delta : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow X^\bullet[1]$ il existe un isomorphisme $i_\Delta : \det X^\bullet \otimes \det Z^\bullet \rightarrow \det Y^\bullet$ qui généralise celui associé aux suites exactes courtes de complexes.

Si $X \xrightarrow{p} S$ est un morphisme propre, les constructions précédentes permettent de définir pour tout \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F} plat sur S , un \mathcal{O}_S -module inversible gradué $\det Rp_*\mathcal{F}$ dont la construction est fonctorielle pour les isomorphismes de \mathcal{O}_X -modules. De plus si

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules cohérents et plats sur S on obtient un isomorphisme canonique :

$$\det Rf_*\mathcal{F}' \otimes_S \det Rf_*\mathcal{F}'' \xrightarrow{\sim} \det Rf_*\mathcal{F}$$

qui est fonctoriel pour les isomorphismes de suites exactes.

1.2 Questions de signe.

1.2.1 *Rotation d'un triangle.* — En considérant le diagramme des neuf suivant

$$\begin{array}{ccccc} X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet & \longrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\ 0 & \longrightarrow & Z^\bullet & \xlongequal{\quad} & Z^\bullet & \longrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ X^\bullet[1] & \xlongequal{\quad} & X^\bullet[1] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \end{array}$$

dont la première ligne est constituée d'un triangle distingué Δ et la seconde colonne est le triangle distingué $\rho(\Delta)$ obtenu par rotation d'un tiers de tour à partir de Δ , on obtient ([6], 4.1.4) un diagramme commutatif qui exprime la compatibilité entre i_Δ et $i_{\rho(\Delta)}$

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} \det X^\bullet \otimes \det Z^\bullet \otimes \det X^\bullet[1] & \xrightarrow{i_\Delta \otimes 1} & \det Y^\bullet \otimes \det X^\bullet[1] \\ \psi \downarrow & & \downarrow i_{\rho(\Delta)} \\ \det X^\bullet \otimes \det X^\bullet[1] \otimes \det Z^\bullet & \longrightarrow & \det Z^\bullet. \end{array}$$

1.2.2 *Déterminant du complexe dual.* — Pour tout \mathcal{O}_S -module localement libre L , on notera $L^\vee = \mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_S)$. Si $A^\bullet = (\dots \rightarrow A^i \xrightarrow{u_i} A^{i+1} \rightarrow \dots)$ est un complexe de \mathcal{O}_S -modules localement libres, $R\mathcal{H}om(A^\bullet, \mathcal{O}_S)$ est représenté par le complexe

$$(A^\bullet)^\vee \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathcal{H}om(A^\bullet, \mathcal{O}_S) = (\dots \rightarrow B^i \xrightarrow{v_i} B^{i+1} \rightarrow \dots)$$

où $B^i = (A^{-i})^\vee$ et où v^i est l'application duale de $(-1)^{(i+1)}u^{-i-1}$. Or on dispose classiquement pour tout \mathcal{O}_S -module localement libre V d'un accouplement de dualité $\bigwedge^{\max}(V) \otimes \bigwedge^{\max}(V^\vee) \rightarrow \mathcal{O}_S$ défini sur des sections locales par

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \otimes (v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*) \mapsto \det(v_j^*(v_i))_{ij}.$$

On en déduit un accouplement de dualité

$$(11) \quad \det((A^\bullet)^\vee) \otimes \det(A^\bullet) \rightarrow \mathcal{O}_S.$$

Les deux accouplements (6) et (11) induisent un isomorphisme canonique

$$(12) \quad \det(A^\bullet) \simeq \det(A^{\bullet\vee}[1])$$

dont le lemme suivant décrit les propriétés :

LEMME 1.2.3

i) Soit $\Delta : A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow A^\bullet[1]$ un triangle distingué de complexes de \mathcal{O}_S -modules localement libres provenant d'une suite exacte et soit $\Delta' : (C^\bullet)^\vee[1] \rightarrow (B^\bullet)^\vee[1] \rightarrow (A^\bullet)^\vee[1] \rightarrow (C^\bullet)^\vee[2]$ le triangle obtenu en appliquant à Δ le foncteur $R\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_S)$ et en effectuant une rotation d'un tour (ce qui multiplie les flèches par -1). Alors le diagramme suivant est commutatif à un signe $(-1)^{\chi(A^\bullet)\chi(C^\bullet)+\chi(A^\bullet)+\chi(C^\bullet)}$ près.

$$\begin{array}{ccc} \det(A^\bullet) \otimes \det(C^\bullet) & \xrightarrow{i_\Delta} & \det(B^\bullet) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \\ \det(C^\bullet) \otimes \det(A^\bullet) & & \\ \downarrow & & \\ \det(C^{\bullet\vee}[1]) \otimes \det(A^{\bullet\vee}[1]) & \xrightarrow{i_{\Delta'}} & \det(B^{\bullet\vee}[1]) \end{array}$$

ii) Si X^\bullet est un complexe acyclique de \mathcal{O}_S -modules localement libres, $X^{\bullet\vee}[1]$ est aussi acyclique et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \det(X^\bullet) & \xrightarrow{\sim} & \det(X^{\bullet\vee}[1]) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{O}_S & \end{array}$$

Démonstration

i) Par dévissage, il suffit de considérer le cas où tous les complexes sont concentrés en degré 0. On regarde donc la suite exacte de \mathcal{O}_S -modules localement libres $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \rightarrow 0$ et sa suite duale $0 \rightarrow C^\vee \xrightarrow{v^\vee} B^\vee \xrightarrow{u^\vee} A^\vee \rightarrow 0$. Le triangle Δ' est associé à la suite exacte $0 \rightarrow C^\vee[1] \xrightarrow{-v^\vee} B^\vee[1] \xrightarrow{-u^\vee} A^\vee[1] \rightarrow 0$. Il s'agit donc de montrer que le diagramme suivant est commutatif au signe $(-1)^{rg A \cdot rg B + rg A + rg B}$ près

$$\begin{array}{ccc}
 \bigwedge^{\max} A \otimes \bigwedge^{\max} C \otimes \bigwedge^{\max} C^\vee \otimes \bigwedge^{\max} A^\vee & \xrightarrow{i_{uv} \otimes i_{-v^t, -u^t}} & \bigwedge^{\max} B \otimes \bigwedge^{\max} B^\vee \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigwedge^{\max} A \otimes \bigwedge^{\max} A^\vee & \longrightarrow & \mathcal{O}_S
 \end{array}$$

ce qui se vérifie directement en appliquant ce diagramme à une section locale de $\bigwedge^{\max} A \otimes \bigwedge^{\max} C \otimes \bigwedge^{\max} C^\vee \otimes \bigwedge^{\max} A^\vee$.

ii) Si X^\bullet est un complexe acyclique de longueur supérieure à 2, on peut le scinder par une suite exacte $0 \rightarrow Y^\bullet \rightarrow X^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow 0$ en deux complexes acycliques de longueurs strictement inférieures. Comme $\chi(Y^\bullet) = \chi(Z^\bullet) = 0$, il suffit d'après i) de montrer le résultat pour Y^\bullet et Z^\bullet . On se ramène donc par récurrence à un complexe $X^\bullet = (X^0 \xrightarrow{u} X^1)$ de longueur 1. En posant $\mathcal{X}^i = \bigwedge^{\max} X^i$ et $\bar{\mathcal{X}}^i = \bigwedge^{\max} (X^i)^\vee$, il suffit alors de vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{X}^0) \otimes (\mathcal{X}^1)^{-1} & \xrightarrow{\psi} & (\mathcal{X}^1)^{-1} \otimes (\mathcal{X}^0) & \longrightarrow & (\bar{\mathcal{X}}^1) \otimes (\bar{\mathcal{X}}^0)^{-1} \\
 \downarrow \det u \otimes 1 & & & & \det(-u^t) \otimes 1 \downarrow \\
 (\mathcal{X}^1) \otimes (\mathcal{X}^1)^{-1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longleftarrow & (\bar{\mathcal{X}}^0) \otimes (\bar{\mathcal{X}}^0)^{-1}
 \end{array}$$

ce qui provient de l'égalité $\det u = \det(u^t)$. \square

2. Le faisceau Thêta et sa section canonique.

2.1 Définitions. — Soit S un schéma noethérien réduit et soit $p : X \rightarrow S$ une courbe relative sur S , c'est-à-dire un schéma relatif propre et plat sur S , dont les fibres géométriques sont projectives, réduites et irréductibles, de dimension 1 et de genre arithmétique g et soit L un faisceau inversible sur X .

DÉFINITION 2.1.1. — On appelle *faisceau thêta associé au faisceau L* et on note Θ_L le faisceau inversible sur S :

$$\Theta_L = (\det Rp_*L)^{-1}.$$

Comme la dimension relative de X est 1, Rp_*L est localement isomorphe à un complexe $[E^0 \rightarrow E^1]$ de longueur 1 formé de faisceaux localement libres. Dans ce cas Θ_L se calcule par :

$$\Theta_L = \left(\bigwedge^{\max} E^0 \right)^{-1} \otimes_S \left(\bigwedge^{\max} E^1 \right).$$

Supposons maintenant que L est de degré $(g-1)$ dans les fibres. D'après Riemann-Roch la caractéristique d'Euler de toute réalisation de Rp_*L est nulle. Pour toute réalisation $E^\bullet = (E^0 \xrightarrow{u} E^1)$ on peut donc définir un morphisme de \mathcal{O}_S -modules $\det E^\bullet \rightarrow \mathcal{O}_S$ par :

$$\left(\bigwedge^{\max} E^0 \right) \otimes_S \left(\bigwedge^{\max} E^1 \right)^{-1} \xrightarrow{\det u} \left(\bigwedge^{\max} E^1 \right) \otimes_S \left(\bigwedge^{\max} E^1 \right)^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_S.$$

Si E^\bullet est un complexe acyclique, ce morphisme coïncide avec le déterminant $\det 0$ du quasi-isomorphisme nul. La propriété de functorialité du déterminant d'un quasi-isomorphisme entraîne que ce morphisme est indépendant de la réalisation de Rp_*L choisie. Ceci définit donc une section canonique de Θ_L .

DÉFINITION 2.1.2. — On note θ_L la section canonique de Θ_L ainsi construite, c'est la *section thêta associée à L* .

REMARQUE 2.1.3. — Par construction Θ_L et θ_L sont invariants par changement de base puisque la formation du déterminant de l'image directe dérivée commute au changement de base.

2.2 Réalisations explicites.

Soit D un diviseur de Cartier effectif relatif tel que $R^1p_*L(D) = 0$. On en déduit que $p_*L(D)$ est localement libre, de plus comme D est fini et plat sur S , $p_*(L(D)|_D)$ est localement libre.

LEMME 2.2.1

a) Rp_*L est canoniquement isomorphe au complexe de faisceaux localement libres :

$$(13) \quad p_*L(D) \longrightarrow p_*L(D)|_D$$

placé en degrés 0 et 1, et dont la flèche est donnée par le morphisme restriction.

b) Θ_L est canoniquement isomorphe à

$$\left(\bigwedge^{\max} p_*L(D) \right)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_*L(D)|_D \right),$$

et θ_L correspond par cet isomorphisme au déterminant du morphisme (13).

Démonstration

a) En considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L(D) \longrightarrow L(D)|_D \longrightarrow 0$$

on obtient un quasi-isomorphisme entre complexes placés en degrés 0 et 1 :

$$(14) \quad (L \longrightarrow 0) \xrightarrow{\text{qis}} (L(D) \longrightarrow L(D)|_D).$$

Or Rp_*L est par définition la limite directe $\varinjlim (p_*F^\bullet)$, où F^\bullet parcourt le système inductif $\{L \xrightarrow{\text{qis}} F^\bullet\}$ des complexes de faisceaux quasi-isomorphes à L ; on obtient donc un morphisme *canonique* dans la catégorie dérivée $D(S)$:

$$\left(p_*L(D) \longrightarrow p_*L(D)|_D \right) \longrightarrow Rp_*L.$$

Comme, d'après les hypothèses, $L(D)$ et $L(D)|_D$ sont acycliques pour le foncteur p_* , le morphisme (9) est un isomorphisme dans $D(S)$.

b) Ceci provient immédiatement de a) et de la définition de Θ_L et de θ_L . \square

De même, soit E un diviseur de Cartier relatif effectif tel que $p_*L(-E) = 0$ et que $R^1p_*L(-E)$ soit localement libre, en considérant la suite exacte

$$(15) \quad 0 \longrightarrow L(-E) \longrightarrow L \longrightarrow L|_E \longrightarrow 0,$$

on obtient le :

LEMME 2.2.2. — Θ_L est canoniquement isomorphe à

$$\left(\bigwedge^{\max} p_*L|_E\right)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} R^1p_*L(-D)\right),$$

et θ_L correspond par cet isomorphisme au déterminant du morphisme de cobord

$$(16) \quad g : p_*L|_E \longrightarrow R^1p_*L(-E).$$

Démonstration. — En appliquant le foncteur Rp_* à la suite exacte (15), et en faisant tourner le triangle obtenu on a un triangle :

$$Rp_*L \longrightarrow Rp_*L|_E \longrightarrow Rp_*L(-E)[1] \longrightarrow Rp_*L[1].$$

On obtient un isomorphisme canonique :

$$(17) \quad (\det Rp_*L|_E)^{-1} \otimes \det Rp_*L(-E)[1] \xrightarrow{\sim} (\det Rp_*L)^{-1}.$$

De plus, si on applique les propriétés du déterminant au morphisme de triangles :

$$\begin{array}{ccccccc} Rp_*L & \longrightarrow & Rp_*L|_E & \longrightarrow & Rp_*L(-E)[1] & \longrightarrow & Rp_*L[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0^\bullet & \longrightarrow & Rp_*L(-E)[1] & = & Rp_*L(-E)[1] & \longrightarrow & 0^\bullet, \end{array}$$

on voit que l'isomorphisme (17) identifie le morphisme $\det Rp_*L \longrightarrow \mathcal{O}_S$ au déterminant du morphisme $Rp_*L|_E \longrightarrow Rp_*L(-E)[1]$. On conclut en utilisant les isomorphismes $Rp_*L|_E \simeq p_*L|_E$ et $Rp_*L(-E)[1] \simeq R^1p_*L(-E)$ qui identifient le morphisme $Rp_*L|_E \longrightarrow Rp_*L(-E)[1]$ au morphisme de cobord $p_*L|_E \longrightarrow R^1p_*L(-E)$. \square

REMARQUE 2.2.3. — Contrairement au résultat du lemme précédent, l'isomorphisme

$$\Theta_L \simeq \left(\bigwedge^{\max} p_*L|_E\right)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} R^1p_*L(-E)\right)$$

ne provient pas d'un isomorphisme canonique $Rp_*L \simeq (p_*L|_E \xrightarrow{g} R^1p_*L(-E))$.

3. Quelques diviseurs particuliers

3.1 La norme d'un morphisme fini et plat.

Considérons ici un morphisme fini et plat $p : D \rightarrow S$ de degré d . Soit L un faisceau inversible sur D , la norme de L sur D ([12, II.6.5]) est le faisceau inversible sur S :

$$(18) \quad N_{D/S}(L) = \left(\bigwedge^{\max} p_* L \right) \otimes_S \left(\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D \right)^{-1}.$$

$N_{D/S}$ définit un foncteur de la catégorie des \mathcal{O}_D -modules inversibles vers la catégorie des \mathcal{O}_S -modules inversibles, qui commute au changement de base puisque l'image directe par un morphisme fini et plat commute au changement de base ([11, I.9.3.2]) ainsi que la formation du déterminant.

Si L et M sont deux faisceaux inversibles, on a un isomorphisme canonique et fonctoriel en L et M :

$$(19) \quad \bigwedge^{\max} p_*(L \otimes M) \otimes \bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D \simeq \bigwedge^{\max} p_* L \otimes \bigwedge^{\max} p_* M.$$

En effet, il suffit de constater que si $M = \mathcal{O}_D$, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\bigwedge^{\max} p_*(L \otimes \mathcal{O}_D) \otimes \bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D \simeq \bigwedge^{\max} p_* L \otimes \bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D$$

qui est fonctoriel pour les isomorphismes $\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_D$. L'isomorphisme (19) induit un isomorphisme ([12, II, 6.5.2.1]) fonctoriel en L et M :

$$(20) \quad N_{D/S}(L) \otimes N_{D/S}(M) \simeq N_{D/S}(L \otimes M).$$

Par ailleurs (19) induit pour tous L et M un isomorphisme fonctoriel en L

$$(21) \quad N_{D/S} L \simeq \bigwedge^{\max} (p_* L \otimes M) \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_* M \right)^{-1}.$$

3.2 Élimination.

Dans cette section et dans la section 3.3 on ne supposera plus que la courbe X/S est propre. On supposera par contre que tous les diviseurs considérés sont finis sur S .

DÉFINITION 3.2.1. — Soient D et E deux diviseurs de Cartier effectifs relatifs finis sur S , on pose :

$$(22) \quad \Delta_{D,E} = N_{D/S}(\mathcal{O}_X(E)|_D)$$

et on note $s_{D,E}$ la section canonique de $\Delta_{D,E}$, norme du morphisme : $\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_X(E)|_D$ restriction à D de la section canonique de $\mathcal{O}_X(E)$.

Pour tout faisceau inversible L sur X , on déduit de (21) un isomorphisme canonique :

$$(23) \quad \Delta_{D,E} \simeq \text{Hom}_S \left[\bigwedge^{\max} p_*L|_D, \bigwedge^{\max} p_*L(E)|_D \right]$$

qui identifie la section $s_{D,E}$ de $\Delta_{D,E}$ au déterminant de l'image directe $p_*L|_D \rightarrow p_*L(E)|_D$ du morphisme $L|_D \rightarrow L(E)|_D$.

LEMME 3.2.2. — Pour tout faisceau inversible L sur X , il existe des isomorphismes canoniques :

$$(24) \quad \begin{aligned} \Delta_{D,E} &\simeq \text{Hom}_S \left[\bigwedge^{\max} p_*L|_{D+E}, \bigwedge^{\max} (p_*L|_D \oplus p_*L|_E) \right] \\ &\simeq \text{Hom}_S \left[\bigwedge^{\max} (p_*L(-D)|_E \oplus p_*L(-E)|_D), \bigwedge^{\max} p_*L|_{D+E} \right] \\ &\simeq \Delta_{E,D}. \end{aligned}$$

$s_{D,E}$ correspond par ces isomorphismes :

- au déterminant de l'image directe par p du morphisme de restriction

$$L|_{D+E} \rightarrow L|_D \oplus L|_E;$$

- au déterminant de l'image directe par p du morphisme d'inclusion

$$L(-E)|_D \oplus L(-D)|_E \rightarrow L|_{D+E};$$

- à $s_{E,D}$.

Démonstration. — En appliquant la propriété (9) de functorialité du déterminant aux deux morphismes de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p_*L(-E)|_D & \longrightarrow & p_*L|_{D+E} & \longrightarrow & p_*L|_E \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & p_*L|_D & \longrightarrow & p_*L|_D \oplus p_*L|_E & \longrightarrow & p_*L|_E \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & p_*L(-D)|_E & \longrightarrow & p_*L(-E)|_D \oplus p_*L(-D)|_E & \longrightarrow & p_*L(-E)|_D \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & p_*L(-D)|_E & \longrightarrow & p_*L|_{D+E} & \longrightarrow & p_*L|_D \longrightarrow 0
 \end{array}$$

on obtient les deux premiers isomorphismes ainsi que les résultats sur les sections et le troisième s'en déduit par symétrie. \square

REMARQUE 3.2.3. — L'isomorphisme de symétrie $\Delta_{D,E} \xrightarrow{\sim} \Delta_{E,D}$ induit si $D = E$ un automorphisme de $\Delta_{D,E}$ qui est donné par la multiplication par $(-1)^{\deg D}$. Notons que ceci est compatible avec l'affirmation sur les sections ; en effet dans ce cas la section $s_{D,E}$ est nulle.

LEMME 3.2.4. — *Il existe des isomorphismes canoniques :*

$$\begin{aligned}
 (25) \quad & \Delta_{D,E_1+E_2} \simeq \Delta_{D,E_1} \otimes_S \Delta_{D,E_2} \quad \text{et} \\
 (26) \quad & \Delta_{D_1+D_2,E} \simeq \Delta_{D_1,E} \otimes_S \Delta_{D_2,E}
 \end{aligned}$$

qui identifient respectivement :

- s_{D,E_1+E_2} et $s_{D,E_1} \otimes_S s_{D,E_2}$;
- $s_{D_1+D_2,E}$ et $s_{D_1,E} \otimes_S s_{D_2,E}$.

Démonstration

Les résultats concernant le premier isomorphisme proviennent immédiatement de la formule (20) et de sa functorialité et les autres s'en déduisent par la symétrie de $\Delta_{D,E}$ (LEMME 3.2.2). \square

REMARQUE 3.2.5. — La construction de $\Delta_{D,E}$ que nous faisons ici est utilisée ([5, 1.3]) par DELIGNE (qui n'étudie pas la section canonique $s_{D,E}$ de ce faisceau) pour construire un accouplement entre faisceaux inversibles sur X (nous y reviendrons dans le Chapitre 4).

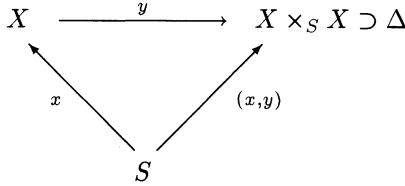
Relions enfin le faisceau $\Delta_{D,E}$ et sa section canonique $s_{D,E}$ au diviseur Δ , diagonale de $X \times_S X$ et à la section canonique δ de $\mathcal{O}(\Delta)$.

LEMME 3.2.6. — *Si $D = \sum_{i=1}^n x_i(S)$ et $D = \sum_{j=1}^p y_j(S)$ sont deux diviseurs qui s'écrivent comme somme de sections de X/S , le faisceau $\Delta_{D,E}$ est canoniquement isomorphe à $\bigotimes_{i=1}^n \bigotimes_{j=1}^p (x_i, y_j)^* \mathcal{O}(\Delta)$ et cet isomorphisme identifie les sections canoniques $s_{D,E}$ et $\bigotimes_{i=1}^n \bigotimes_{j=1}^p (x_i, y_j)^* \delta$.*

Démonstration

- Si D et E sont les images schématiques de deux sections x et y de X/S , notons $(x, y) : S \rightarrow X \times_S X$ la section de $X \times_S X \rightarrow S$ induite

par x et y et notons encore y la section de $X \times_S X \rightarrow X$ déduite de y par changement de base. En considérant le diagramme :



on obtient par la propriété universelle de Δ l'égalité entre diviseurs sur S : $(x, y)^* \Delta = x^*(y(S))$, qui se traduit en termes de faisceaux et de sections par :

$$(x, y)^* \mathcal{O}(\Delta) \simeq x^* \mathcal{O}(y) \simeq N_{x/S} \mathcal{O}(y) = \Delta_{x,y} \quad \text{et} \quad (x, y)^* \delta = s_{xy}.$$

• Plus généralement si $D = \sum_{i=1}^n x_i(S)$ et $D = \sum_{j=1}^p y_j(S)$ on obtient d'après le LEMME 3.2.4 un isomorphisme canonique :

$$(27) \quad \Delta_{D,E} \simeq \bigotimes_{i=1}^n \bigotimes_{j=1}^p \Delta_{x_i, y_j} \simeq \bigotimes_{i=1}^n \bigotimes_{j=1}^p (x_i, y_j)^* \mathcal{O}(\Delta)$$

qui identifie les sections $s_{D,E}$ et $\bigotimes_{i=1}^n \bigotimes_{j=1}^p (x_i, y_j)^* \delta$. \square

DÉFINITION 3.2.7. — Pour tout diviseur de Cartier relatif effectif D fini sur S , on note Δ_D le faisceau inversible $(\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D)^{-1}$ sur S . Si de plus D est à support dans le lieu lisse de X/S et s'écrit comme somme de sections $D = \sum_{i=1}^n x_i(S)$, on note s_D la section de Δ_D définie par :

$$\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D \longrightarrow \bigwedge^{\max} \left(\bigoplus_{i=1}^n p_* \mathcal{O}_{|x_i} \right) \simeq \bigotimes_{i=1}^n x_i^* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_S.$$

REMARQUE 3.2.8. — Nous remercions ici le rapporteur de nous avoir signalé que la section s_D n'est pas canoniquement associée à D , mais dépend du choix des sections x_i et de leur ordre :

a) Si σ est une permutation des n sections x_i , le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D & \longrightarrow & \bigwedge^{\max} \left(\bigoplus p_* \mathcal{O}_{|x_i} \right) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigwedge^{\max} \left(\bigoplus p_* \mathcal{O}_{|x_{\sigma(i)}} \right) & \longrightarrow & \mathcal{O}_S
 \end{array}$$

est commutatif à un signe $\epsilon(\sigma)$ près (la signature de σ).

b) Si $X = \mathbf{A}_S^1$, si $\epsilon \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ est une section de carré nul, considérons les sections $x_1 = \epsilon, x_2 = -\epsilon, y_1 = y_2 = 0$. $x_1(S) + x_2(S)$ et $y_1(S) + y_2(S)$ définissent alors un même diviseur D , mais ces deux décompositions donnent respectivement $s_D = 2\epsilon$ et $s_D = 0$.

On fera cependant un abus de notation en utilisant la notation s_D .

LEMME 3.2.9. — Soient $D = \sum_{i=1}^n x_i(S)$ à support dans le lieu lisse de X/S et L un faisceau inversible sur X . Alors il existe des isomorphismes canoniques :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \Delta_D \simeq \text{Hom}_S \left[\bigwedge^{\max} p_* L|_D, \bigotimes_{i=1}^n x_i^* L \right]; \\ (b) \quad \simeq \text{Hom}_S \left[\bigotimes_{i=1}^n x_i^* L(x_i), \bigwedge^{\max} p_* L(D)|_D \right]; \\ (c) \quad \simeq \bigotimes_{i < j} \Delta_{x_i x_j} \end{array} \right.$$

et s_D est identifiée par ces isomorphismes :

- (a) au déterminant de l'image directe par p du morphisme $L|_D \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n L|x_i$;
- (b) au déterminant du morphisme $\bigoplus_{i=1}^n p_* L(x_i)|_{x_i} \rightarrow p_* L(D)|_D$;
- (c) à $\bigotimes_{i < j} s_{x_i x_j}$.

Démonstration

(a) D'après le LEMME 3.2.4, on a un isomorphisme fonctoriel en L

$$(29) \quad N_{D/S} L|_D \simeq \bigotimes_{i=1}^n N_{x_i/S} L|x_i$$

qui induit : $(\bigwedge^{\max} p_* L|_D)^{-1} \otimes \bigotimes_{i=1}^n x_i^* L \simeq (\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D)^{-1} \otimes \bigotimes_{i=1}^n x_i^* \mathcal{O}_X$ ce qui donne l'isomorphisme (a). L'affirmation sur les sections étant locale sur S et D étant fini sur S , on peut supposer que $L|_D$ est isomorphe à \mathcal{O}_D . Soit $\phi : L|_D \rightarrow \mathcal{O}_D$ un tel isomorphisme, le résultat provient alors de la functorialité de l'isomorphisme (29) et de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} p_* L & \longrightarrow & \bigoplus p_* L|x_i \\ \downarrow p^* \phi & & \downarrow \bigoplus p^* \phi_{x_i} \\ p_* \mathcal{O}_D & \longrightarrow & \bigoplus p_* \mathcal{O}|_{x_i} \end{array}$$

(b) L'existence de l'isomorphisme (b) ainsi que l'affirmation correspondante sur les sections se déduit de (a) en raisonnant par récurrence sur le degré de D à l'aide de l'isomorphisme suivant déduit du LEMME 3.2.2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} p_* L|_{D+E}, \bigwedge^{\max} (p_* L|_D \oplus p_* L|_E) \right] \\ \simeq \mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} (p_* L(D)|_D \oplus p_* L(E)|_E), \bigwedge^{\max} p_* L(D+E)|_{D+E} \right]. \end{aligned}$$

(c) Se démontre par récurrence sur n en considérant le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p_*(\mathcal{X}) & \longrightarrow & p_*(\mathcal{Y}) & \longrightarrow & p_*(\mathcal{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (30) & & \bigotimes_{i=1}^n s_{x_i, x_{n+1}} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & p_*(\mathcal{O}|_{x_{n+1}}) & \longrightarrow & p_*\left(\bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}|_{x_i}\right) & \longrightarrow & p_*\left(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}|_{x_i}\right) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{X} = \mathcal{O}(-\sum_{i=1}^n x_i)|_{x_{n+1}}, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{O}|_{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}, \quad \mathcal{Z} = \mathcal{O}|_{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Les deux dernières flèches verticales de ce diagramme ont pour déterminants $s_{x_1+\dots+x_{n+1}}$ et $s_{x_1+\dots+x_n}$. En utilisant la propriété (9) de fonctorialité du déterminant pour les isomorphismes de suites exactes, on obtient un isomorphisme :

$$\Delta_{x_1+\dots+x_{n+1}} \simeq \Delta_{x_1+\dots+x_n} \otimes \bigotimes_{i=1}^n \Delta_{x_i, x_{n+1}}$$

qui identifie $s_{x_1+\dots+x_{n+1}}$ et $s_{x_1+\dots+x_n} \otimes \bigotimes_{i=1}^n s_{x_i, x_{n+1}}$. \square

3.3 Théorie classique du résultant et du discriminant.

Les formules $s_{D,E} = \bigotimes_{i,j} s_{x_i y_j}$ et $s_D = \bigotimes_{i < j} s_{x_i x_j}$ sont à rapprocher des formules $\text{res}(f, g) = \prod_{i,j} (x_i - y_j)$ et $\text{discr}(f) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$ qui expriment le résultant et le discriminant des deux polynômes $f(X) = \prod (X - x_i)$ et $g(X) = \prod (X - y_j)$. Faisons dans ce paragraphe une digression pour expliciter ce rapport.

Soit k un corps algébriquement clos, notons $C = A_k^1$ la droite affine sur k . Considérons le schéma relatif : $X/S \stackrel{\text{déf}}{=} (C^n \times C^p \times C \rightarrow C^n \times C^p)$ et notons D et E les diviseurs relatifs canoniques de X/S de degré n et p . Ecrivons ceci en termes d'algèbres ; posons $A = k[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p]$ et $B = A[X]$, et notons f et g les polynômes $\prod_{i=1}^n (X - a_i)$ et $\prod_{i=1}^p (X - b_i)$. On a alors :

$$S = \text{Spec } A, \quad X = \text{Spec } B, \quad D = \text{Spec } B/f, \quad E = \text{Spec } B/g.$$

On a vu dans le LEMME 3.2.2 que la section $s_{D,E}$ de $\Delta_{D,E}$ pouvait s'interpréter comme le déterminant du morphisme $p_*\mathcal{O}(-D)|_E \oplus p_*\mathcal{O}(-E)|_D \rightarrow p_*\mathcal{O}|_{D+E}$ soit en termes d'algèbres comme le déterminant du morphisme de A -modules

$$\phi : (fB \otimes B/gB) \oplus (gB \otimes B/fB) \rightarrow B/fgB.$$

Les A -modules B/fB , B/gB et B/fgB sont isomorphes aux espaces des polynômes sur A de degrés strictement inférieurs respectivement à n , p et $n + p$. En trivialisant ces différents modules par le choix des bases $(1, X, \dots, X^{n-1})$, $(1, X, \dots, X^{p-1})$ et $(1, X, \dots, X^{n+p-1})$, on voit donc que $s_{D,E}$ s'identifie au déterminant classique ([2, A, IV, 6])

$$\det \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & b_0 & \ddots & \vdots \\ a_n & & & 0 & b_p & & & 0 \\ 0 & a_n & & a_0 & 0 & b_p & & b_0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & b_p \end{bmatrix}.$$

On sait que $\text{res}(f, g) = (-1)^{np} \text{res}(g, f)$; ce signe n'est pas visible dans l'énoncé du LEMME 3.2.2 qui donne la symétrie de $\Delta_{D,E}$ et $s_{D,E}$. Il est caché dans l'isomorphisme de symétrie :

$$\begin{aligned} \bigwedge^{\max} (p_*L(D)|_D) \otimes \bigwedge^{\max} (p_*L(E)|_E) &\simeq \bigwedge^{\max} (p_*L(D)|_D \oplus p_*L(E)|_E) \\ &\simeq \bigwedge^{\max} (p_*L(E)|_E) \otimes \bigwedge^{\max} (p_*L(D)|_D) \end{aligned}$$

qui est donné par un isomorphisme de Koszul.

Remarquons d'autre part que notre définition de $s_{D,E}$ comme déterminant du morphisme de \mathcal{O}_S -modules $(p_*\mathcal{O}_D \rightarrow p_*\mathcal{O}(E)|_D)$ correspond en termes d'algèbres à la formule classique ([2, A, IV, 6, 30]) :

$$(31) \quad \text{res}(f, g) = N_{(B/f)/A}(g).$$

Considérons maintenant le schéma relatif : $X/S \stackrel{\text{déf}}{=} (C^n \times C \rightarrow C^n)$ muni de son diviseur relatif universel D de degré n qui est somme de n sections a_i . Posons alors $A = k[a_1, \dots, a_n]$, $B = A[X]$ et notons g le polynôme $\prod_{i=1}^n (X - a_i)$. On a alors $S = \text{Spec } A$, $X = \text{Spec } B$ et $D = \text{Spec}(B/g)$. La section s_D de Δ_D est le déterminant du morphisme de \mathcal{O}_X -modules :

$$p_* \mathcal{O}_D \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n a_i^* \mathcal{O}_{X^n \times X} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X^n}.$$

Soit en termes de morphisme de A -modules : $B/g \rightarrow A^n, f \mapsto (f(a_1), \dots, f(a_n))$. En trivialisant B/g par le choix de la base $1, \dots, X^{n-1}$, on voit que s_D est identifié à l'élément de A :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

On reconnaît ici le classique déterminant de Vandermonde $\prod_{i < j} (a_i - a_j)$ dont le carré est le discriminant de g .

Explicitons le rapport entre la section s_D et le discriminant du morphisme fini et plat $D \rightarrow S$, que la formule précédente laisse deviner. Rappelons que le discriminant de D/S est par définition le faisceau $\text{Discr}(D) = (\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D)^{\otimes -2}$, qui est muni d'une section canonique $(\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D) \otimes (\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathcal{O}_S$ définie pour toutes sections locales $u = u_1 \wedge \dots \wedge u_d$ et $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ de $\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D$ par :

$$\text{discr}(D)(u \otimes v) = \det [\text{tr}_{D/S}(u_i v_j)].$$

LEMME 3.3.1. — Si $D = \sum_{i=1}^d x_i$ est une somme de sections de X/S , les sections canoniques $\text{discr}(D)$ et $(s_D)^{\otimes 2}$ de $(\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D)^{\otimes -2}$ sont égales.

Démonstration

Pour un tel diviseur D , la trace d'une section f de $p_* \mathcal{O}_D$ est égale à $\text{tr}(f) = \sum_{i=1}^d x_i^* f$. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{discr}(D)(u \otimes v) &= \det \left[\sum_{k=1}^d x_k^* u_i \cdot x_k^* v_j \right]_{i,j} \\ &= \det [x_k^* u_i]_{i,k} \cdot \det [x_k^* v_j]_{j,k} \\ &= s_D(u) \cdot s_D(v) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\text{discr}(D)$ coïncide avec le morphisme composé

$$\bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D \otimes \bigwedge^{\max} p_* \mathcal{O}_D \xrightarrow{s_D \otimes s_D} \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S. \quad \square$$

Finissons cette digression en interprétant dans notre langage, dans le cas où X/S est lisse, la formule :

$$(32) \quad \text{discr}(f) = \text{res}(f, f').$$

Pour un diviseur relatif de la forme $D = \sum x_i$, notons d la section canonique de $\mathcal{O}(D)$ et définissons d'abord une section $d'|_D$ de $\omega_{X/S}(D)|_D$ qui s'interprète comme la "restriction à D de la dérivée de d ". Considérons le schéma relatif $p : D \times X \rightarrow D$, notons δ sa section canonique et Δ l'image schématique de δ . Soit q la projection $D \times X \rightarrow X$, l'image inverse par q de la section d de $\mathcal{O}(D)$ définit un morphisme $q^*d : q^*\mathcal{O} = \mathcal{O}_{D \times X} \rightarrow q^*\mathcal{O}(D)$ qui s'annule sur Δ et qui induit donc un morphisme : $\mathcal{O}(\Delta) \rightarrow q^*\mathcal{O}(D)$. Prenons l'image directe par p de la restriction de ce morphisme à Δ , on obtient ainsi un morphisme de faisceaux sur D :

$$p_*(\mathcal{O}(\Delta)|_\Delta) = \delta^*\mathcal{O}(\Delta) = (\omega_{X/S|_D})^{-1} \longrightarrow p_*(q^*\mathcal{O}(D)|_\Delta) = \mathcal{O}(D)|_D.$$

C'est donc une section de $\omega_{X/S} \otimes \mathcal{O}(D)|_D$, qu'on notera désormais $d'|_D$.

LEMME 3.3.2. — *Il existe un isomorphisme :*

$$N_{D/S}(\omega_{X/S} \otimes \mathcal{O}(D)|_D) \simeq (\Delta_D)^{\otimes 2}$$

qui identifie les sections $N_{D/S}(d'|_D)$ et $(s_D)^{\otimes 2}$.

Démonstration

Notons π la projection $D \rightarrow S$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_*((\omega_{X/S|_D})^{-1}) & \xrightarrow{\pi_*(d'|_D)} & \pi_*(\mathcal{O}(D)|_D) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \bigoplus x_i^*(\omega_{X/S})^{-1} = \bigoplus x_i^*\mathcal{O}(x_i) & \end{array}$$

En prenant le déterminant de ce diagramme, on obtient un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} \pi_*(\omega_{X/S|D})^{-1}, \bigwedge^{\max} \pi_*(\mathcal{O}(D)|_D) \right] &\simeq \\ \mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} \pi_*(\omega_{X/S|D})^{-1}, \bigwedge^{\max} \left(\bigoplus x_i^* \mathcal{O}(x_i) \right) \right] & \\ \otimes \mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} \left(\bigoplus x_i^* \mathcal{O}(x_i) \right), \bigwedge^{\max} \pi_*(\mathcal{O}(D)|_D) \right] & \end{aligned}$$

qui identifie les sections naturelles de ces faisceaux. On conclut en constatant, à l'aide du LEMME 3.2.9, que les deux termes de droite sont tous les deux isomorphes à Δ_D , et que leurs sections naturelles correspondent à s_D . \square

4. Intégrales abéliennes et théorème du cube

Dans cette section on étudie le faisceau $\Theta_{L(D-E)}$ et sa section canonique quand D et E sont deux diviseurs effectifs.

4.1 Le théorème du cube. — Dans cette partie, on fixe un faisceau inversible K sur X/S . Conformément aux notations de [3], on définit pour tous faisceaux inversibles L et M sur X/S le faisceau inversible sur S :

$$(33) \quad \Lambda_K(L, M) = \Theta_{K \otimes L \otimes M} \otimes (\Theta_{K \otimes L})^{-1} \otimes (\Theta_{K \otimes M})^{-1} \otimes \Theta_K.$$

Calculons alors ce faisceau, dans le cas où M s'écrit : $M = \mathcal{O}_X(D - E)$, où D et E sont des diviseurs de Cartier relatifs effectifs. Pour tout faisceau inversible F , les suites exactes $0 \rightarrow F \rightarrow F(D) \rightarrow F(D)|_D \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow F(D - E) \rightarrow F(D) \rightarrow F(D)|_E \rightarrow 0$ induisent un isomorphisme canonique :

$$(34) \quad \Theta_{F(D-E)} \simeq \Theta_F \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_* F(D)|_D \right)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_* F(D)|_E \right)$$

donc en particulier des isomorphismes canoniques :

$$\Theta_{K \otimes L(D-E)} \simeq \Theta_{K \otimes L} \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_* K \otimes L(D)|_D \right)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_* K \otimes L(D)|_E \right),$$

$$\Theta_{K(D-E)} \simeq \Theta_K \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_* K(D)|_D \right)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_* K(D)|_E \right).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \Lambda_K(L, \mathcal{O}_X(D - E)) & \\ \simeq \left[\left(\bigwedge^{\max} p_* K \otimes L(D)|_D \right) \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_* K(D)|_D \right)^{-1} \right]^{-1} & \\ \otimes \left[\left(\bigwedge^{\max} p_* K \otimes L(D)|_E \right) \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_* K(D)|_E \right)^{-1} \right] & \end{aligned}$$

et donc un isomorphisme canonique (cf. [4, p. 670]) :

$$(35) \quad \Lambda_K(L, \mathcal{O}_X(D - E)) \simeq (N_{D/S}(L|_D))^{-1} \otimes (N_{E/S}(L|_E)).$$

REMARQUE 4.1.1. — La définition de $\Lambda_K(L, \mathcal{O}_X(D - E))$ par (33) est intrinsèque et ne dépend que des faisceaux L et $\mathcal{O}_X(D - E)$ et pas du choix des diviseurs D et E . On peut préciser ce point en termes de l'isomorphisme (35). Soit ϕ un isomorphisme $\mathcal{O}_X(D_1 - E_1) \simeq \mathcal{O}_X(D_2 - E_2)$, il induit un isomorphisme $\mathcal{O}_X(D_1 + E_2) \simeq \mathcal{O}_X(D_2 + E_1)$ qui induit par functorialité de la norme un isomorphisme

$$N_{D_1+E_2/S}(L|_{D_1+E_2}) \simeq N_{D_2+E_1/S}(L|_{D_2+E_1})$$

et donc, d'après la multiplicativité de la norme, un isomorphisme canoniquement associé à ϕ :

$$(N_{D_1/S}(L|_{D_1}))^{-1} \otimes N_{E_1/S}(L|_{E_1}) \simeq (N_{D_2/S}(L|_{D_2}))^{-1} \otimes N_{E_2/S}(L|_{E_2}).$$

L'expression (35) est donc bien définie à un isomorphisme unique près.

On reconnaît dans l'expression (35) la définition de l'accouplement

$$(L, \mathcal{O}_X(D - E)) \mapsto \langle L, \mathcal{O}_X(D - E) \rangle$$

donnée par DELIGNE ([5, 1.3]) dans le cas d'une courbe X/S lisse (le cas général est traité dans [7] et [8]). La propriété de multiplicativité de la norme permet à DELIGNE d'en déduire la :

PROPOSITION 4.1.2 (DELIGNE). — *L'accouplement :*

$$\Lambda_K : \text{PIC}(X/S) \times \text{PIC}(X/S) \longrightarrow \text{PIC}(S)$$

défini sur la catégorie $\text{PIC}(X/S)$ des faisceaux inversibles sur X/S est symétrique et bimultiplicatif.

REMARQUE 4.1.3. — La multiplicativité de l'accouplement Λ_K s'écrit :

$$\begin{aligned} & \Theta_{K \otimes L_1 \otimes L_2 \otimes L_3} \otimes \Theta_K \otimes (\Theta_{K \otimes L_1})^{-1} \otimes (\Theta_{K \otimes L_2 \otimes L_3})^{-1} \\ & \simeq \left[\Theta_{K \otimes L_1 \otimes L_2} \otimes \Theta_K \otimes (\Theta_{K \otimes L_1})^{-1} \otimes (\Theta_{K \otimes L_2})^{-1} \right] \\ & \quad \otimes \left[\Theta_{K \otimes L_1 \otimes L_3} \otimes \Theta_K \otimes (\Theta_{K \otimes L_1})^{-1} \otimes (\Theta_{K \otimes L_3})^{-1} \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire un isomorphisme :

$$(36) \quad \left[\Theta_{K \otimes L_1 \otimes L_2 \otimes L_3} \otimes \Theta_{K \otimes L_1} \otimes \Theta_{K \otimes L_2} \otimes \Theta_{K \otimes L_3} \right] \\ \otimes \left[\Theta_{K \otimes L_1 \otimes L_2} \otimes \Theta_{K \otimes L_1 \otimes L_3} \otimes \Theta_{K \otimes L_2 \otimes L_3} \otimes \Theta_K \right]^{-1} \simeq \mathcal{O}_S.$$

On reconnaît ici le théorème du cube, sous une forme un peu raffinée, car vivant dans la catégorie $\text{PIC}_{X/S}$, plutôt que dans la variété de Picard relative $\text{Pic}_{X/S}$. Si C est une courbe complexe lisse et K un faisceau inversible de degré $(g - 1)$, considérons la courbe relative $X = C \times (\text{Pic}^0 C)^3 \rightarrow (\text{Pic}^0 C)^3 = S$, et notons encore K le faisceau $p_C^* K$ sur X . Soit \mathcal{P} un faisceau universel sur $C \times (\text{Pic}^0 C)$, considérons les images inverses L_1, L_2, L_3 de \mathcal{P} par les trois projections de X sur $C \times (\text{Pic}^0 C)$. L'isomorphisme (36) appliqué à L_1, L_2, L_3 et K montre que si Θ désigne le diviseur $\tau_K^* W_{g-1}$ sur $\text{Pic}^0 C$, le faisceau $\theta(\mathcal{O}(\Theta))$ de la formule (1) est trivial.

4.2.1 Images inverses par les intégrales abéliennes.

LEMME 4.2.1. — *Supposons que X/S possède un faisceau dualisant relatif inversible $\omega_{X/S}$. Soient L un faisceau inversible sur X/S et D et E deux diviseurs de Cartier sur X à supports dans le lieu lisse de X/S qui s'écrivent comme sommes de sections $D = \sum_{i=1}^n x_i(S), E = \sum_{j=1}^p y_j(S)$. On a alors un isomorphisme canonique*

$$(37) \quad \Theta_{L(\sum x_i - \sum y_j)} \\ \simeq \Theta_L \otimes \Delta_{D,E} \otimes (\Delta_D)^{-1} \otimes (\Delta_E)^{-1} \\ \otimes \left(\bigotimes x_i^*(\omega_{X/S} \otimes_X L^{-1}) \right) \otimes \left(\bigotimes y_j^* L \right).$$

Démonstration

On déduit de la formule (34) et de l'isomorphisme

$$\bigwedge^{\max} (p_* L(D)|_E) \simeq \bigwedge^{\max} (p_* L|_E) \otimes \Delta_{D,E}$$

un isomorphisme canonique

$$\Theta_{L(D-E)} \simeq \Theta_L \otimes \left(\bigwedge^{\max} (p_* L(D)|_D) \right)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} (p_* L|_E) \right) \otimes \Delta_{D,E}.$$

De plus, d'après les propriétés de Δ_D et Δ_E , on a

$$\bigwedge^{\max} (p_* L(D)|_D) \simeq \bigotimes x_i^* L(x_i) \otimes \Delta_D \quad \text{et} \\ \bigwedge^{\max} (p_* L|_E) \simeq \bigotimes y_j^* L \otimes (\Delta_E)^{-1}$$

d'où le résultat, puisque comme D est dans le lieu lisse de X/S , on a $(x_i^*L(x_i))^{-1} \simeq x_i^*(\omega \otimes L^{-1})$. \square

4.2.2 *Cas particulier : la forme principale de Klein.* — Revenons à la situation classique en considérant une courbe complexe compacte et lisse C et un faisceau inversible L sur C tel que : $L^2 \simeq \Omega_C^1$ et $h^0(L) = 1$ (une thêta-caractéristique singulière non dégénérée). On remarque que ces hypothèses entraînent que C est de genre $g \geq 1$. Soit c un point du revêtement universel \mathbb{C}^g de la jacobienne $J(C)$ correspondant à L , FAY définit explicitement ([9, Chapitre 2]) une fonction multiforme $h_c(x)$ sur C correspondant à une section de L . Il définit alors la fonction principale :

$$(38) \quad E(x, y) = \frac{\vartheta(c + \int_x^y)}{h_c(x) \cdot h_c(y)}.$$

Il constate alors que $E(x, y)$ est une fonction holomorphe sur le revêtement universel de $C \times C$ qui s'annule exactement sur la diagonale Δ , et qui est indépendante de la thêta-caractéristique L choisie ainsi que de son représentant c . Interprétons ce calcul.

Considérons le schéma relatif X/S obtenu par changement de base :

$$\begin{array}{ccc} X = C^2 \times C & \xrightarrow{q} & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ S = C^2 & \xrightarrow{q} & S_0 = \text{Spec } \mathbb{C}. \end{array}$$

Notons x et y les sections canoniques de X/S , p_1, p_2 les projections de C^2 sur C et Δ la diagonale de $S = C \times C$. Posons $M = q^*L$ et considérons le faisceau dualisant relatif $\omega = \omega_{X/S} = q^*\Omega_C^1$. Fixons enfin un isomorphisme $\phi : L^2 \rightarrow \Omega_C^1$ et notons encore $\phi : M^2 \rightarrow \omega$ son image inverse par q . On a alors d'après le LEMME 4.2.1

$$\Theta_{M(x-y)} \simeq \Theta_M \otimes x^*(\omega \otimes M^{-1}) \otimes y^*M \otimes \Delta_{x,y}.$$

De plus la formation de Θ commute au changement de base, donc $\Theta_M \simeq q^*\Theta_L$ et ϕ induit un isomorphisme $\omega \otimes M^{-1} \simeq M$. On obtient donc un isomorphisme canoniquement associé à ϕ :

$$(39) \quad \Theta_{M(x-y)} \simeq q^*\Theta_L \otimes \mathcal{O}(\Delta) \otimes (p_1^*L) \otimes (p_2^*L).$$

Soit h une section non nulle de L (définie à une constante multiplicative près); on peut associer à ϕ et à h un isomorphisme $I_{\phi,h} : \Theta_L \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{S_0}$:

$$\begin{aligned} \Theta_L &\xrightarrow{\sim} H^0(C, L)^{-1} \otimes H^1(C, L) && (\text{car } h^0(C, L) = 1), \\ &\xrightarrow{\sim} H^0(C, L)^{-1} \otimes H^0(C, L)^{-1} && (\text{en utilisant } \phi \text{ et} \\ & && \text{la dualité de Serre),} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{S_0} && (\text{par multiplication par } h^2). \end{aligned}$$

On notera encore $I_{\phi,h}$ l'isomorphisme induit $\Theta_M \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$. D'après (39), $\theta_{M(x-y)}/p_1^*h \otimes p_2^*h$ est une section méromorphe de $q^*\Theta_L \otimes \mathcal{O}(\Delta)$, on obtient donc en utilisant $I_{\phi,h}$ une section méromorphe $E_{\phi,h}$ de $\mathcal{O}(\Delta)$.

On voit enfin que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul on a $I_{\phi,\lambda h} = \lambda^2 I_{\phi,h}$, ce qui entraîne que $E_{\phi,h}$ est indépendante du choix de h ; on constate de même qu'elle est indépendante de ϕ . On a donc construit une section E , a priori méromorphe, de $\mathcal{O}(\Delta)$ qui ne dépend que du choix de L . Le résultat suivant montre qu'en réalité E est holomorphe et indépendante de L .

LEMME 4.2.3. — *La section E est égale à la section canonique δ de $\mathcal{O}(\Delta)$.*

Démonstration

Soit $Z_1 = p_1^*\text{Div}(h)$. Il suffit de montrer que $E = \delta$ sur l'ouvert $U = S - Z_1$. Soit $(u, v) \in U$, on a $h(u) \neq 0$, donc comme $H^0(C, L)$ est engendré par h on a $H^0(C, L(-u)) = 0$ et on en déduit :

- (a) $H^1(C, L(u)) = 0$ (par dualité) et $\dim H^0(C, L(u)) = 1$;
- (b) le morphisme $H^0(C, L) \rightarrow H^0(C, L(u))$ est un isomorphisme (en comparant les dimensions).

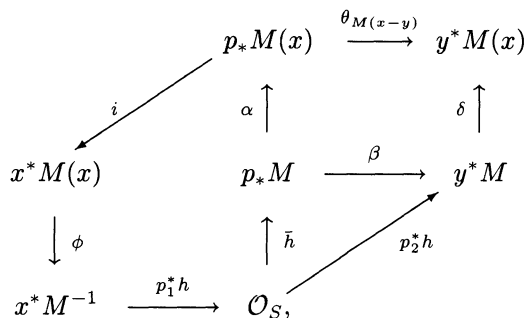
Comme la formation de $R^1p_*M(x)$ commute au changement de base, on déduit de (a) que $R^1p_*M(x) = 0$ sur U . Donc sur U , $p_*M(x)$ commute au changement de base et on déduit de (b) que le morphisme $\alpha : p_*M \rightarrow p_*M(x)$ est un isomorphisme. La nullité de $R^1p_*M(x)$ sur U entraîne que $\theta_{M(x-y)}$ s'identifie à la section canonique de $\text{Hom}(p_*M(x), p_*M(x)|_y)$.

On en déduit également que Θ_M est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}(p_*M(x), x^*M(x))$. L'image inverse i de la section 1 de \mathcal{O}_S par l'isomorphisme $I_{\phi,h} : \Theta_M \rightarrow \mathcal{O}_S$ est donc un isomorphisme de \mathcal{O}_S -modules, qu'on peut décrire comme composé des isomorphismes :

$$p_*M(x) \xleftarrow{\alpha} p_*M \xleftarrow{\bar{h}} \mathcal{O}_S \xleftarrow{p_1^*h} (x^*M)^{-1} \xleftarrow{\phi} x^*M(x),$$

où $\bar{h} : \mathcal{O}_S \rightarrow p_*M = H^0(C, L) \otimes \mathcal{O}_S$ désigne la multiplication par h et où $p_1^*h : \mathcal{O}_S \rightarrow p_1^*L = x^*M$ et où $p_2^*h : \mathcal{O}_S \rightarrow p_2^*L = y^*M$ sont les morphismes induits par $h : \mathcal{O}_C \rightarrow L$.

Considérons le diagramme suivant :



où β désigne le morphisme d'évaluation en y . Compte tenu de la définition de E , l'assertion du lemme signifie que le circuit extérieur de ce diagramme est commutatif, ce qui résulte de la commutativité des trois circuits intérieurs. \square

4.3 La Formule trisécante de Fay. — On ne suppose plus ici que X/S est lisse; g désigne le genre arithmétique des fibres géométriques de X/S . Fixons un faisceau inversible K sur X , de degré relatif $(g - 1)$, soit M un faisceau inversible de degré relatif 0, posons : $L = K \otimes_X M$ et soient $D = \sum_{i=1}^n x_i(S)$ et $E = \sum_{j=1}^n y_j(S)$ à supports dans le lieu lisse de X . On obtient en développant $\Theta_{K(x_i - y_j)}$:

$$(40) \quad \Lambda_K(M, \mathcal{O}_X(x_i - y_j)) \simeq \Theta_{L(x_i - y_j)} \otimes (\Theta_L)^{-1} \otimes (\Delta_{x_i y_j})^{-1} \otimes x_i^* K(x_i) \otimes y_j^* K^{-1}$$

et de même

$$(41) \quad \Lambda_K(M, \mathcal{O}_X(D - E)) \simeq \Theta_{L(D-E)} \otimes (\Theta_L)^{-1} \otimes \Delta_D \otimes \Delta_E \otimes (\Delta_{D,E})^{-1} \otimes \bigotimes_{i=1}^n x_i^* K(x_i) \otimes \bigotimes_{j=1}^n y_j^* K^{-1}.$$

Le théorème du cube décrit un isomorphisme

$$\Lambda_K(M, \mathcal{O}_X(D - E)) \simeq \bigotimes_{i=1}^n \Lambda_K(M, \mathcal{O}_X(x_i - y_i))$$

et donc d'après (40) et (41) :

$$(42) \quad \Theta_{L(D-E)} \otimes (\Theta_L)^{-1} \otimes \Delta_D \otimes \Delta_E \otimes (\Delta_{D,E})^{-1} \\ \simeq \bigotimes_{i=1}^n \left(\Theta_{L(x_i-y_i)} \otimes (\Theta_L)^{-1} \otimes (\Delta_{x_i,y_i})^{-1} \right).$$

On peut alors se demander si on obtient une égalité semblable pour les sections canoniques de ces faisceaux. La réponse est négative; la section $\theta_{L(D-E)} \otimes (\theta_L)^{-1} \otimes s_D \otimes s_E \otimes (s_{D,E})^{-1}$ n'apparaît pas comme un produit $\bigotimes_{i=1}^n (\theta_{L(x_i-y_i)} \otimes (\theta_L)^{-1} \otimes s_{x_i,y_i})^{-1}$ mais comme un déterminant dont ce produit n'est qu'un des termes, comme le montre la :

PROPOSITION 4.3.1. — Soient L un faisceau inversible sur X/S de degré relatif $(g-1)$, $D = \sum_{i=1}^n x_i(S)$ et $E = \sum_{j=1}^n y_j(S)$ des diviseurs de Cartier relatifs à supports dans le lieu lisse de X . On suppose que $R^1 p_* L(x_i) = 0$ pour tout i , alors :

1) Il existe un isomorphisme canonique :

$$\phi : \left[\Theta_{L(D-E)} \otimes \Theta_L^{n-1} \otimes \Delta_E \otimes \Delta_D \right] \\ \simeq \mathcal{H}om_S \left[\bigwedge^{\max} \bigoplus p_* L(x_i), \bigwedge^{\max} \bigoplus y_j^* L(D) \right].$$

2) Pour tout (i, j) , il existe un isomorphisme canonique :

$$\Theta_{L(x_i-y_j)} \otimes \left(\bigotimes_{k \neq i} \Delta_{x_i x_k} \right) \simeq \mathcal{H}om_S(p_* L(x_i), y_j^* L(D)).$$

3) En notant β_{ij} la section de $\mathcal{H}om_S(p_* L(x_i), y_j^* L(D))$ correspondant par cet isomorphisme à $\theta_{L(x_i-y_j)} \otimes \bigotimes_{k \neq i} s_{x_k,y_j}$, on a :

$$(43) \quad \phi \left(\theta_{L(D-E)} \otimes \theta_L^{n-1} \otimes s_E \otimes s_D \right) = \det(\beta_{ij}).$$

Avant de démontrer la proposition, énonçons un lemme :

LEMME 4.3.2. — Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{H}om_S \left[\bigwedge_{i=1}^{\max} \bigoplus p_* L(x_i), \bigwedge p_* L(D) \right] \simeq (\Theta_L)^{\otimes(n-1)} \otimes \Delta_D$$

qui identifie la section $(\theta_L^{n-1} \otimes s_D)$ avec le déterminant de l'homomorphisme de faisceaux $i_D : \bigoplus_{i=1}^n p_*L(x_i) \rightarrow p_*L(D)$ déduit des inclusions naturelles $L(x_i) \rightarrow L(D)$.

Démonstration du lemme

On démontre ceci par récurrence sur n . Notons α le morphisme

$$p_*L(x_n) \rightarrow p_*L(x_1 + \dots + x_n) \rightarrow (x_n)^*L(x_1 + \dots + x_n).$$

Il coïncide avec le morphisme

$$p_*L(x_n) \rightarrow p_*L(x_n)|_{x_n} \rightarrow p_*L(x_1 + \dots + x_n)|_{x_n}.$$

L'isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om \left[p_*L(x_n), p_*L \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) |_{x_n} \right] \\ \simeq \mathcal{H}om \left[p_*L(x_n), p_*L(x_n)|_{x_n} \right] \\ \otimes \mathcal{H}om \left[p_*L(x_n)|_{x_n}, p_*L \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) |_{x_n} \right] \\ \simeq \theta_L \otimes \Delta_{x_n, x_1 + \dots + x_{n-1}} \end{aligned}$$

identifie donc α et $\theta_L \otimes s_{x_n, x_1 + \dots + x_{n-1}}$. En appliquant la propriété (9) au morphisme de suites exactes suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{n-1} p_*L(x_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n p_*L(x_i) & \longrightarrow & p_*L(x_n) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i_{D-x_n} & & \downarrow i_D & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & p_*L \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) & \longrightarrow & p_*L \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) & \longrightarrow & p_*L \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) |_{x_n} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont la deuxième ligne est exacte puisque $R^1 p_*L(x_1 + \dots + x_{n-1}) = 0$, on obtient un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om \left[\bigwedge_{i=1}^{\max} \bigoplus_{i=1}^n p_*L(x_i), \bigwedge_{i=1}^{\max} p_*L \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right] \\ \simeq \mathcal{H}om \left[\bigwedge_{i=1}^{\max} \bigoplus_{i=1}^{n-1} p_*L(x_i), \bigwedge_{i=1}^{\max} p_*L \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \right] \\ \otimes \mathcal{H}om \left[p_*L(x_n), p_*L \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) |_{x_n} \right] \end{aligned}$$

$$\simeq \text{Hom} \left[\bigwedge_{i=1}^{\max n-1} \bigoplus p_* L(x_i), \bigwedge_{i=1}^{\max} p_* L \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \right] \\ \otimes \Theta_L \otimes \Delta_{x_n, x_1 + \dots + x_{n-1}}$$

qui identifie $\det i_D$ et $\det i_{D-x_n} \otimes \theta_L \otimes s_{x_n, x_1 + \dots + x_{n-1}}$. On conclut par récurrence en utilisant l'isomorphisme $\Delta_{x_1, \dots, x_n} \simeq \bigotimes_{i < j} \Delta_{x_i, x_j}$ donné par le LEMME 3.2.9 (c). \square

Démonstration de la proposition

a) Le point 2) résulte de l'isomorphisme :

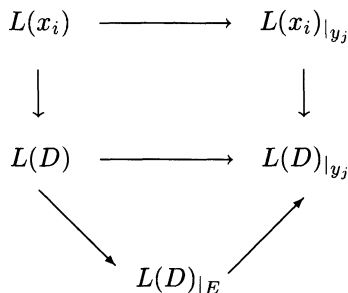
$$\text{Hom}(p_* L(x_i), p_* L(D)|_{y_j}) \\ \simeq \text{Hom}(p_* L(x_i), p_* L(x_i)|_{y_j}) \otimes \text{Hom}(p_* L(x_i)|_{y_j}, p_* L(D)|_{y_j})$$

donné par la composition des homomorphismes de faisceaux, et du fait que par hypothèse $(p_* L(x_i) \rightarrow L(x_i)|_{y_j})$ est une réalisation de $Rp_* L(x_i - y_j)$.

b) β_{ij} est donc obtenu en prenant l'image directe par p du morphisme composé :

$$L(x_i) \rightarrow L(x_i)|_{y_j} \rightarrow L(D)|_{y_j}.$$

En prenant l'image directe par p du circuit extérieur du diagramme suivant



on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p_* L(x_i) & \xrightarrow{\beta_{ij}} & p_* L(D)|_{y_j} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_* L(D) & \longrightarrow & p_*(L(D)|_E) \end{array}$$

c) Considérons donc le diagramme commutatif suivant :

$$(44) \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n p_* L(x_i) & \xrightarrow{(\beta_{ij})} & \bigoplus_{j=1}^n p_* L(D)|_{y_j} \\ \downarrow & & \uparrow \\ p_* L(D) & \longrightarrow & p_*(L(D)|_E). \end{array}$$

En prenant le déterminant de ce diagramme, on obtient par composition des homomorphismes :

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} \left(\bigoplus p_* L(x_i) \right), \bigwedge^{\max} \left(\bigoplus p_* L(D)|_{y_j} \right) \right] \\ & \simeq \mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} \left(\bigoplus p_* L(x_i) \right), \bigwedge^{\max} p_* L(D) \right] \\ & \quad \otimes \mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} p_* L(D), \bigwedge^{\max} p_* L(D)|_E \right] \\ & \quad \otimes \mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} p_* L(D)|_E, \bigwedge^{\max} \left(\bigoplus p_* L(D)|_{y_j} \right) \right] \end{aligned}$$

qui identifie les différentes sections canoniques de ces faisceaux. De plus le LEMME 4.3.2 donne un isomorphisme :

$$\mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} \bigoplus_{i=1}^n p_* L(x_i), \bigwedge^{\max} p_* L(D) \right] \simeq (\theta_L)^{\otimes(n-1)} \otimes \Delta_D$$

qui identifie le déterminant de l'inclusion naturelle à $(\theta_L^{n-1} \otimes s_D)$, et par le LEMME 3.2.9, on a un isomorphisme

$$\mathcal{H}om \left[\bigwedge^{\max} p_* L(D)|_E, \bigwedge^{\max} \left(\bigoplus p_* L(D)|_{y_j} \right) \right] \simeq \Delta_E$$

identifiant le déterminant de la projection canonique à s_E . En composant ces différents isomorphismes on obtient le point 1), et le point 3) découle alors de la commutativité du diagramme (44). \square

4.3.3 *Interprétation de la proposition.* — La formule (43) peut s'écrire formellement :

$$\begin{aligned} \theta_L(\sum x_i - \sum y_j) \otimes \left(\bigotimes_{i < j} s_{x_i, x_j} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i < j} s_{y_i, y_j} \right) \otimes (\theta_L)^{n-1} \\ = \det \left[\theta_{L(x_i - y_j)} \otimes \bigotimes_{k \neq i} s_{x_k, y_j} \right]_{i, j}. \end{aligned}$$

Soit encore, si on se place sur un ouvert où ceci a un sens :

$$\theta_{L(\sum x_i - \sum y_j)} \otimes \left(\bigotimes_{i < j} s_{x_i, x_j} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i < j} s_{y_i, y_j} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i, j} s_{x_i, y_j} \right)^{-1}$$

$$= \det \left[\theta_{L(x_i - y_j)} \otimes (s_{x_i, y_j})^{-1} \otimes (\theta_L)^{-1} \right]_{i, j}.$$

Soit C une courbe complexe, compacte et lisse, de genre g , et soit M un faisceau inversible de degré $(g - 1)$, qui n'est pas dans le diviseur Θ de $\text{Pic}^{g-1} C$. Notons θ la section canonique de Θ sur $\text{Pic}^{g-1} C$, et considérons le schéma relatif :

$$C^n \times C^n \times C \longrightarrow C^n \times C^n.$$

Appliquons la proposition au faisceau inversible $L = (p_C)^* M$ et aux $2n$ sections canoniques $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. En identifiant, d'après le LEMME 4.2.3, les sections de la diagonales $s_{x, y}$ aux fonctions principales $E(x, y)$, on obtient alors l'égalité suivante entre sections de faisceaux sur $C^n \times C^n$:

$$\frac{\mu^* \theta \cdot \prod_{i < j} E(x_i, x_j) \cdot \prod_{i < j} E(y_i, y_j)}{\prod_{i, j} E(x_i, y_j)} = \det \left[\frac{\mu_{i, j}^* \theta}{\theta(M) \cdot E(x_i, y_j)} \right]_{i, j}$$

où on a posé $\mu(x, y) = M(\sum x_i - \sum y_j)$ et $\mu_{i, j}(x, y) = M(x_i - y_j)$. On reconnaît ici la formule trisécante de Fay (5).

REMARQUE 4.3.4. — On peut aussi appliquer le même raisonnement au schéma relatif $X/S \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathbf{P}^1)^n \times (\mathbf{P}^1)^n \times \mathbf{P}^1 \longrightarrow (\mathbf{P}^1)^n \times (\mathbf{P}^1)^n$ et au faisceau $q^*(\mathcal{O}(-1))$ où q est la projection de X sur \mathbf{P}^1 . Dans ce cas on obtient l'égalité algébrique :

$$(45) \quad \det \left[\frac{1}{x_i - y_j} \right] = \frac{\prod_{i < j} (x_i - x_j) \cdot \prod_{i < j} (y_i - y_j)}{\prod_{i, j} (x_i - y_j)}.$$

C'est la formule de Cauchy, utilisée par exemple dans [20] pour obtenir des identités sur les fonctions de Schur.

REMARQUE 4.3.5. — On peut également donner une interprétation de la formule de Fay en utilisant les réalisations (16) de Θ_L plutôt que les réalisations (13). Supposons donc que $p_* L(-y_j)$ est nul pour tout j , le diagramme commutatif fondamental qui jouera le rôle du diagramme (44) dans la démonstration de la PROPOSITION 4.3.1 est le suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus p_* L(x_i - E)|_{x_i} & \xrightarrow{(\gamma_{ij})} & \bigoplus R^1 p_* L(-y_j) \\ \downarrow b & & \uparrow c \\ p_* L(D - E)|_D & \xrightarrow{a} & R^1 p_* L(-E). \end{array}$$

Les γ_{ij} sont les morphismes composés

$$p_*L(x_i - E)|_{x_i} \longrightarrow p_*L(x_i - y_j)|_{x_i} \longrightarrow R^1p_*L(-y_j)$$

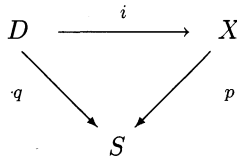
qui s'identifient à $(\bigotimes_{k \neq j} s_{x_i y_k}) \otimes \theta_{L(x_i - y_j)}$. Les déterminants de a , b et c s'identifient respectivement à $\theta_{L(D-E)}$, s_D et $s_E \otimes \theta_L^{n-1}$, la dernière identification étant un analogue du LEMME 4.3.2. En prenant le déterminant de ce diagramme, on obtient un isomorphisme qui identifie $s_D \otimes s_E \otimes \theta_L^{n-1} \otimes \theta_{L(D-E)}$ et $\det(\gamma_{ij})$.

5. Dualité de Serre

Dans cette section, on étudie le comportement du faisceau thêta sous l'action de la dualité de Serre.

5.1 Dualité pour une courbe relative.

Considérons la situation particulière suivante :



où X/S est une courbe relative et D est un diviseur effectif relatif. On note i l'inclusion naturelle et p et q les morphismes structuraux de X et D et on suppose que p est un morphisme de Gorenstein.

Comme p est de Gorenstein, il existe un faisceau dualisant relatif inversible $\omega_{X/S}$ et si on introduit le foncteur

$$p^! = R\mathcal{H}om(p^*(-), \omega_{X/S}[1]) : D(S) \longrightarrow D(X)$$

il existe un morphisme de foncteurs (morphisme trace) : $\text{Tr}_p : Rp_*p^! \longrightarrow \text{id}_{D(S)}$ tel que, pour tous objets $F \in D(X)$, $G \in D(S)$, le morphisme composé :

$$(46) \quad Rp_*R\mathcal{H}om_X(F, p^!G) \longrightarrow R\mathcal{H}om_S(Rp_*F, G)$$

est un isomorphisme dans $D(S)$, qui est fonctoriel en F et G .

D étant fini et plat sur S , on dispose également d'un faisceau dualisant relatif $\omega_{D/S}$ (cf. [13, ex. III.6.10, III.7.2]) d'un foncteur $q^! =$

$R\mathcal{H}om(q^*(-), \omega_{D/S})$ et d'un morphisme trace $\text{Tr}_q : Rq_*q^! \rightarrow \text{id}_{D(S)}$ qui induit un isomorphisme

$$(47) \quad Rq_*R\mathcal{H}om_D(F, q^!G) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_S(Rq_*F, G).$$

Relions les dualités relatives pour X/S et D/S en décrivant la dualité relative pour l'immersion fermée i . Pour tout faisceau inversible M sur X on dispose d'un isomorphisme

$$(48) \quad i^!M \simeq i^*M \otimes_D \mathcal{O}(D)|_D[-1] \simeq M(D)|_D[-1].$$

Le morphisme trace $\text{tr}_i : i_*(M(D)|_D[-1]) \rightarrow M$ est obtenu de la façon suivante (cf. [14, III, 7]) : la suite exacte

$$(49) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow M(D) \rightarrow M(D)|_D \rightarrow 0$$

induit un quasi-isomorphisme de complexes placés en degrés 0 et 1 :

$$(M \rightarrow M(D)) \rightarrow (0 \rightarrow i_*M(D)|_D) = i_*M(D)|_D[-1].$$

tr_i est alors le morphisme composé dans $D(X)$:

$$i_*M(D)|_D[-1] \xleftarrow{\sim} (M \rightarrow M(D)) \rightarrow (M \rightarrow 0) = M.$$

Remarquons que c'est simplement le morphisme qui apparaît dans le triangle

$$i_*(M(D)|_D)[-1] \rightarrow M \rightarrow M(D) \rightarrow i_*(M(D)|_D)$$

obtenu par rotation du triangle $M \rightarrow M(D) \rightarrow i_*(M(D)|_D) \rightarrow M[1]$ déduit de la suite exacte (49). De ces constructions on déduit le

LEMME 5.1.1

i) Pour tout faisceau inversible L sur X , la dualité relative pour X/S induit un isomorphisme canonique Φ_L , fonctoriel en L :

$$(50) \quad \begin{array}{ccc} \Phi_L : Rp_*(\omega_{X/S} \otimes_X L^{-1}[1]) & & \\ \parallel & & \\ Rp_*R\mathcal{H}om_X(L, \omega_{X/S}[1]) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om_S(Rp_*L, Rp_*\omega_{X/S}[1]) \\ & & \text{tr}_p \downarrow \\ & & R\mathcal{H}om_S(Rp_*L, \mathcal{O}_S). \end{array}$$

ii) Le faisceau dualisant relatif $\omega_{D/S}$ pour le morphisme $q : D \rightarrow S$ est canoniquement isomorphe à $\omega_{X/S}(D)|_D$. Le morphisme trace tr_q est donné par :

$$Rq_*(\omega_{X/S}(D)|_D) \rightarrow Rp_*i_*(\omega_{X/S}(D)|_D) \rightarrow Rp_*(\omega_{X/S}[1]) \xrightarrow{\text{tr}_p} \mathcal{O}_S,$$

où l'avant dernière flèche est induite par l'opposé du cobord $i_*\omega_{X/S}(D)|_D \rightarrow \omega_{X/S}[1]$. Pour tout faisceau inversible M sur D , la dualité relative pour D/S induit un isomorphisme canonique Ψ_M , fonctoriel en M :

$$\begin{array}{ccc} \Psi_M : Rq_*(\omega_{D/S} \otimes_D M^{-1}) & & \\ \parallel & & \\ (51) \quad Rq_*R\mathcal{H}om_D(M, \omega_{D/S}) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om_S(Rq_*M, Rq_*\omega_{D/S}) \\ & & \text{tr}_p \downarrow \\ & & R\mathcal{H}om_S(Rq_*M, \mathcal{O}_S). \end{array}$$

Démonstration

Les isomorphismes Φ_L et Ψ_M sont donnés par les isomorphismes (46) et (47) appliqués à $F = L$ ou $F = M$ et $G = \mathcal{O}_S$. L'expression de $\omega_{D/S}$ provient de l'isomorphisme canonique $q^! = i^!p^!$ et tr_q est obtenu par composition

$$Rq_*i^!p^!\mathcal{O}_S \rightarrow Rp_*(Ri_*i^!(p^!\mathcal{O}_S)) \xrightarrow{\text{tr}_i} Rp_*p^!\mathcal{O}_S \xrightarrow{\text{tr}_p} \mathcal{O}_S. \quad \square$$

En dehors de ce paragraphe, on ne fera plus de distinction entre les morphismes p et q , qu'on notera p tous les deux et de même, si M est un faisceau inversible sur X , on notera $M|_D$ par un abus de notation à la fois le faisceau $M|_D$ défini sur D et le faisceau $i_*M|_D$ défini sur X .

5.2 Action de la dualité sur certaines suites exactes.

Pour tout objet A de $D(S)$, on notera pour simplifier $A^\vee = R\mathcal{H}om_S(A, \mathcal{O}_S)$. Désormais on se donne un faisceau inversible L sur X et on note $M = \omega_{X/S} \otimes L^{-1}$.

LEMME 5.2.1. — Soit D un diviseur relatif sur X/S , les isomorphismes de dualité relative pour D/S et X/S induisent un isomorphisme de triangles distingués :

$$(52) \quad \begin{array}{ccccccc} R p_* M & \longrightarrow & R p_* M(D) & \longrightarrow & R p_* M(D)|_D & \longrightarrow & R p_* M[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (R p_* L)^\vee[-1] & \longrightarrow & (R p_* L(-D))^\vee[-1] & \longrightarrow & (R p_* L|_D)^\vee & \longrightarrow & (R p_* L)^\vee \end{array}$$

entre le triangle obtenu en appliquant le foncteur $R p_*$ à la suite exacte

$$(53) \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow M(D) \longrightarrow M(D)|_D \longrightarrow 0$$

et celui obtenu par rotation de $-4\pi/3$ du triangle déduit de la suite exacte

$$(54) \quad 0 \longrightarrow L(-D) \longrightarrow L \longrightarrow i_*(L|_D) \longrightarrow 0$$

par applications du foncteur $R\mathcal{H}om_S(R p_*(-), \mathcal{O}_S)$.

Avant de démontrer ce lemme, rappelons que le triangle obtenu par rotation de $-4\pi/3$ du triangle $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1]$ est :

$$B[-1] \xrightarrow{v[-1]} C[-1] \xrightarrow{-w[-1]} A \xrightarrow{-u} B.$$

Démonstration

Appliquons à la suite exacte (54) les foncteurs $R p_*(R\mathcal{H}om_X(-, \omega_{X/S}))$ et $R\mathcal{H}om_S(R p_*(-), \mathcal{O}_S)$; on obtient ainsi deux triangles distingués de complexes de \mathcal{O}_S -modules et la dualité de Serre établit entre eux un isomorphisme de triangles :

$$(55) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{S}(L, \omega) & \longrightarrow & \mathcal{S}(L(-D), \omega) & \longrightarrow & \mathcal{S}(L|_D, \omega)[1] & \longrightarrow & \mathcal{S}(L, \omega)[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (R p_* L)^\vee[-1] & \longrightarrow & (R p_* L(-D))^\vee[-1] & \longrightarrow & (R p_* L)^\vee & \longrightarrow & (R p_* L)^\vee, \end{array}$$

où, pour simplifier, on a posé $\mathcal{S} = R p_* R\mathcal{H}om$. Par ailleurs, d'après la construction du morphisme trace pour l'immersion fermée $i : D \rightarrow X$, on dispose d'un isomorphisme de triangles de complexes de \mathcal{O}_X -modules :

$$(56) \quad \begin{array}{ccccccc} M & \longrightarrow & M(D) & \longrightarrow & M(D)|_D & \longrightarrow & M[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow^a & & \downarrow \\ \mathcal{R}(L, \omega) & \longrightarrow & \mathcal{R}(L(-D), \omega) & \xrightarrow{b} & \mathcal{R}(L|_D, \omega)[1] & \xrightarrow{c} & \mathcal{R}(L, \omega)[1] \end{array}$$

où, une fois de plus, on a posé pour simplifier $\mathcal{R} = R\mathcal{H}om$ et où la flèche a est donnée par la dualité relative pour D/X et les flèches b et c sont les opposées de celles qui apparaissent dans le triangle Δ obtenu par application du foncteur $R\mathcal{H}om_X(-, \omega_{X/S})$ à la suite exacte (53), le triangle inférieur du diagramme (56) est donc obtenu par rotation d'angle $-4\pi/3$ de Δ .

On obtient alors l'isomorphisme de triangles (52) en appliquant le foncteur Rp_* à (56) et en composant avec (55), tourné de $-4\pi/3$. \square

LEMME 5.2.2. — *Si D et E sont deux diviseurs effectifs relatifs sur X , le diagramme suivant, dont les flèches verticales sont données par les dualités relatives pour les morphismes $D \rightarrow S$ et $D + E \rightarrow S$ est commutatif.*

$$(57) \quad \begin{array}{ccc} Rp_*(M(D)|_D) & \longrightarrow & Rp_*(M(D+E)|_{D+E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Rp_*L|_D)^\vee & \longrightarrow & (Rp_*L|_{D+E})^\vee. \end{array}$$

Démonstration

En appliquant au morphisme $L|_{D+E} \rightarrow L|_D$ l'isomorphisme de dualité relative pour X/S , on obtient un diagramme commutatif

$$(58) \quad \begin{array}{ccc} Rp_*R\mathcal{H}om_X(L|_D, \omega) & \longrightarrow & Rp_*R\mathcal{H}om_X(L|_{D+E}, \omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Rq_*L|_D)^\vee & \longrightarrow & (Rs_*L|_{D+E})^\vee. \end{array}$$

Par ailleurs, d'après la définition des dualités relatives pour les immersions fermées $D \rightarrow X$ et $D + E \rightarrow X$ le diagramme suivant dont les flèches verticales sont données par ces dualités

$$(59) \quad \begin{array}{ccc} (M(D)|_D) & \longrightarrow & (M(D+E)|_{D+E}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\mathcal{H}om_X(L|_D, \omega) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om_X(L|_{D+E}, \omega) \end{array}$$

est commutatif; le diagramme (57) est alors obtenu en composant le diagramme (58) avec l'image directe par p de (59). \square

REMARQUE 5.2.3. — On déduit de ce lemme que les dualités de Serre relatives pour D/S , E/S et $(D + E)/S$ établissent un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Delta_{D,E} &\simeq \text{Hom} \left[\bigwedge^{\max} (p_*L|_{D+E}), \bigwedge^{\max} (p_*L|_D \oplus p_*L|_E) \right] \\ &\quad \downarrow \\ \Delta_{D,E} &\simeq \text{Hom} \left[\bigwedge^{\max} (p_*M(D)|_D \oplus p_*M(E)|_E), \bigwedge^{\max} (p_*M(D + E)|_{D+E}) \right] \end{aligned}$$

qui envoie la section canonique $s_{D,E}$ de $\Delta_{D,E}$ sur elle même. De même si $D = \sum_{i=1}^n x_i$ est à support dans le lieu lisse de X la dualité de Serre induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Delta_D &\simeq \text{Hom} \left[\bigwedge^{\max} (p_*L|_D), \bigwedge^{\max} \left(\bigoplus x_i^*L \right) \right] \\ &\quad \downarrow \\ \Delta_D &\simeq \text{Hom} \left[\bigwedge^{\max} \left(\bigoplus x_i^*M(x_i) \right), \bigwedge^{\max} (p_*M(D)|_D) \right] \end{aligned}$$

qui envoie la section canonique s_D de Δ_D sur elle même.

5.3 Action sur le faisceau Thêta. — L'isomorphisme

$$(60) \quad Rp_*M \simeq R\text{Hom}_S(Rp_*L, \mathcal{O}_S)[-1]$$

donné par la dualité de Serre induit un isomorphisme de \mathcal{O}_S -modules inversibles $\Theta_L \simeq \Theta_M$ (cf. [21, p. 68]), qu'on peut décrire de la façon suivante : L et M possèdent des résolutions locales $L \rightarrow F^\bullet$ et $M \rightarrow G^\bullet$ par des complexes de \mathcal{O}_X -modules acycliques pour p_* et tels que p_*F^\bullet et p_*G^\bullet soient à composantes localement libres (par exemple des résolutions du type (14)). L'isomorphisme (60) induit un isomorphisme dans $D(S)$:

$$p_*G^\bullet \simeq \text{Hom}_S(p_*F^\bullet, \mathcal{O}_S)[-1].$$

En prenant le déterminant, on obtient d'après (12) un isomorphisme de \mathcal{O}_S -modules :

$$(61) \quad \det(p_*G^\bullet) \simeq \det(\text{Hom}_S(p_*F^\bullet, \mathcal{O}_S)[-1]) \simeq \det(p_*F^\bullet).$$

On déduit de ceci la

PROPOSITION 5.3.1. — *Il existe un isomorphisme canonique :*

$$\sigma_L : \Theta_M \xrightarrow{\sim} \Theta_L$$

qui induit, si L est de degré $(g - 1)$, une égalité entre les sections canoniques

$$\sigma_L(\theta_M) = \theta_L.$$

Démonstration

Il reste à montrer l'égalité entre sections. Il suffit de la montrer dans la situation universelle $X \times_S J_{g-1} \xrightarrow{p_2} J_{g-1}$ où J_{g-1} est la variété de Picard relative de X/S et L est un faisceau universel. L'ouvert $U = J_{g-1} - \text{Supp}(R^1 p_* L)$ est schématiquement dense ([21, 2.2.4]) dans J_{g-1} ; il suffit donc de montrer l'égalité sur U . On est donc ramené à la situation où F^\bullet et G^\bullet sont acycliques. Considérons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \det(p_* G^\bullet) & \xrightarrow{\sim} & \det(\text{Hom}_S(p_* F^\bullet, \mathcal{O}_S)[-1]) & \xrightarrow{\sim} & \det p_* F^\bullet \\
 & \searrow \det 0 & \downarrow \det 0 & \swarrow \det 0 & \\
 & & \mathcal{O}_S & &
 \end{array}$$

Le triangle de gauche est commutatif par functorialité du déterminant et celui de droite l'est d'après le LEMME 1.2.3 (ii). Donc le diagramme extérieur est commutatif, ce qui montre le résultat. \square

REMARQUE 5.3.2. — L'existence d'un isomorphisme de symétrie σ_L qui préserve la section canonique θ_L signifie que le diviseur thêta est symétrique pour la dualité de Serre.

REMARQUE 5.3.3. — Si $Rp_* L$ (et donc aussi $Rp_* M$) est à cohomologie localement libre, l'isomorphisme $\det Rp_* M \simeq \det Rp_* L$ peut s'écrire en termes de cohomologie. En effet le déterminant du morphisme (61) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \left(\bigwedge^{\max} H^0(p_*G^\bullet) \right) \otimes \left(\bigwedge^{\max} (H^1(p_*G^\bullet)) \right)^{-1} \\
 & \quad \downarrow \\
 & \left(\bigwedge^{\max} H^0(\text{Hom}(p_*F^\bullet, \mathcal{O}_S)[1]) \right) \otimes \left(\bigwedge^{\max} H^1(\text{Hom}(p_*F^\bullet, \mathcal{O}_S)[1]) \right)^{-1} \\
 & \quad \downarrow \\
 & \left(\bigwedge^{\max} H^1(p_*F^\bullet) \right)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} H^0(p_*F^\bullet) \right) \\
 & \quad \downarrow \psi \\
 & \left(\bigwedge^{\max} H^0(p_*F^\bullet) \right) \otimes \left(\bigwedge^{\max} H^1(p_*F^\bullet) \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
 \det Rp_*M & \simeq \bigwedge^{\max} p_*M \otimes \left(\bigwedge^{\max} R^1p_*M \right)^{-1} \\
 & \quad \downarrow \det \phi_M \otimes \det \phi_L^{-1} \\
 & \left(\bigwedge^{\max} R^1p_*L \right)^{-1} \otimes \bigwedge^{\max} p_*L \\
 & \quad \downarrow \psi \\
 \bigwedge^{\max} p_*L & \otimes \left(\bigwedge^{\max} R^1p_*L \right)^{-1} \simeq \det Rp_*L,
 \end{aligned}$$

où ϕ_L désigne le morphisme $p_*L \rightarrow (R^1p_*L)^{-1}$ induit par (60).

5.4 Dualité et théorème du cube.

LEMME 5.4.1. — *Le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc}
 \det Rp_*M & \xrightarrow{\sim} & \det Rp_*M(D) \otimes (\det Rp_*M(D)|_D)^{-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \det Rp_*L & \xrightarrow{\sim} & \det Rp_*L(-D) \otimes (\det Rp_*L|_D)
 \end{array}
 \tag{63}$$

dont les isomorphismes horizontaux sont donnés par les suites exactes habituelles et les flèches verticales sont données par la dualité de Serre terme à terme est commutatif à un signe $(-1)^{\chi(L)\deg(D)+\chi(L)+\deg(D)}$ près.

Démonstration

D'après le LEMME 5.2.1, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \det R p_* M \otimes \det R p_* M(D)|_D & \longrightarrow & \det R p_* M(D) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \det((R p_* L)^\vee[-1]) \otimes \det(R p_* L|_D)^\vee & \xrightarrow{a} & \det(R p_* L(-D))^\vee[-1]
 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont données par les dualités relatives pour D/S et X/S terme à terme et où l'isomorphisme a est induit par le triangle

$$(R p_* L)^\vee[-1] \longrightarrow (R p_* L(-D))^\vee[-1] \longrightarrow (R p_* L|_D)^\vee \longrightarrow (R p_* L)^\vee.$$

Considérons l'isomorphisme

$$\det(R p_* L|_D)^\vee[-1] \otimes \det(R p_* L(-D))^\vee[-1] \xrightarrow{b} \det(R p_* L)^\vee$$

déduit du triangle

$$(R p_* L|_D)^\vee[-1] \longrightarrow (R p_* L)^\vee \longrightarrow (R p_* L(-D))^\vee[-1] \longrightarrow (R p_* L|_D)^\vee.$$

En posant, pour simplifier,

$$\mathcal{P} = \det(R p_* L|_D)^\vee[-1] \otimes \det(R p_* L(-D))^\vee[-1] \otimes \det(R p_* L|_D)^\vee,$$

$$\mathcal{Q} = \det(R p_* L|_D)^\vee[-1] \otimes \det(R p_* L|_D)^\vee \otimes \det(R p_* L(-D))^\vee[-1],$$

d'après (10) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} & \xrightarrow{b \otimes 1} & \det(R p_* L)^\vee \otimes \det(R p_* L|_D)^\vee \\
 1 \otimes \psi \downarrow & & \downarrow a \\
 \mathcal{Q} & \longrightarrow & \det(R p_* L(-D))^\vee[-1].
 \end{array}$$

Or on sait d'après le LEMME 1.2.3 que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \det(Rp_*L|_D)^\vee[-1] \otimes \det(Rp_*L(-D))^\vee[-1] & \xrightarrow{b} & \det(Rp_*L)^\vee[-1] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \det Rp_*L|_D \otimes \det Rp_*L(-D) & & \\
 \downarrow \psi & & \\
 \det Rp_*L(-D) \otimes \det Rp_*L|_D & \longrightarrow & \det Rp_*L
 \end{array}$$

est commutatif au signe $(-1)^{\chi(L)\deg(D)+\chi(L)+\deg(D)}$ près, ce qui donne le résultat. \square

REMARQUE 5.4.2. — Si L est de degré $(g - 1)$, on déduit de ce lemme que le morphisme composé

$$\begin{aligned}
 \left(\bigwedge^{\max} p_*L(D)\right)^{-1} \otimes \bigwedge^{\max} p_*L(D)|_D &\simeq \Theta_L \\
 \xrightarrow{\sigma_L} \Theta_M &\simeq \left(\bigwedge^{\max} P_*M|_D\right)^{-1} \otimes \bigwedge^{\max} R^1p_*M(-D)
 \end{aligned}$$

déduit des morphismes canoniques donnés par les LEMMES 2.2.1 et 2.2.2 identifie les déterminants des morphismes $p_*L(D) \rightarrow p_*L(D)|_D$ et $p_*L|_D \rightarrow R^1p_*L(-D)$.

5.5 Existence d'une Sigma-structure.

Soient K une thêta-caractéristique et L et M deux faisceaux inversibles sur X ; les isomorphismes $\sigma_{K \otimes L}, \sigma_{K \otimes M}, \sigma_{K \otimes L \otimes M}, \sigma_K$ induisent un isomorphisme :

$$(64) \quad \Lambda(\sigma) : \Lambda_K(L, M) \xrightarrow{\sim} \Lambda_K(L^{-1}, M^{-1}).$$

Par ailleurs, le théorème du cube nous donne des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
 \Lambda_K(L, M) \otimes \Lambda_K(L^{-1}, M) &\simeq \Lambda_K(\mathcal{O}_X, M) \simeq \mathcal{O}_S \quad \text{et} \\
 \Lambda_K(L, M) \otimes \Lambda_K(L, M^{-1}) &\simeq \Lambda_K(L, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_S.
 \end{aligned}$$

On obtient donc un isomorphisme :

$$\Phi : \Lambda_K(L, M) \xrightarrow{\sim} \left(\Lambda_K(L, M^{-1})\right)^{-1} \xrightarrow{\sim} \Lambda_K(L^{-1}, M^{-1}).$$

PROPOSITION 5.5.1. — Soient L et M deux faisceaux inversibles sur X ; les deux isomorphismes $\Lambda(\sigma)$ et Φ sont égaux.

Démonstration

Compte-tenu de la définition de l'isomorphisme qui donne le théorème du cube il suffit de montrer que pour tout diviseur effectif D l'isomorphisme composé :

$$\begin{aligned}
 (65) \quad & \bigwedge^{\max} (p_*K \otimes L|_D) \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_*K|_D \right)^{-1} \\
 & \simeq N_{D/S}(L|_D) \simeq (N_{D/S}L|_D^{-1})^{-1} \\
 & \simeq \bigwedge^{\max} (p_*K \otimes L^{-1}(D)|_D)^{-1} \otimes \left(\bigwedge^{\max} p_*K|_D \right)
 \end{aligned}$$

coïncide avec celui donné par la dualité de Serre terme à terme. Or (65) se déduit du morphisme composé

$$\begin{aligned}
 & \bigwedge^{\max} (p_*K \otimes L^{-1}(D)|_D) \otimes \bigwedge^{\max} (p_*K \otimes L|_D) \\
 & \simeq \bigwedge^{\max} (p_*\omega_{X/S}(D)|_D) \otimes \bigwedge^{\max} p_*\mathcal{O}_D \\
 & \simeq \bigwedge^{\max} (p_*K(D)|_D) \otimes \bigwedge^{\max} (p_*K|_D).
 \end{aligned}$$

Le résultat provient alors d'un lemme de compatibilité entre la dualité relative pour un morphisme fini et plat et la multiplicativité de la norme :

LEMME 5.5.2. — Soient $p : D \rightarrow S$ un morphisme fini et plat et $\omega_{D/S}$ le faisceau dualisant relatif pour p . Soient L un faisceau inversible sur D et $M = \omega_{D/S} \otimes L^{-1}$; le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \bigwedge^{\max} (p_*\omega_{D/S}) \otimes \bigwedge^{\max} p_*\mathcal{O}_D & \xrightarrow{\sim} & \bigwedge^{\max} p_*M \otimes \bigwedge^{\max} p_*L \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \mathcal{O}_S &
 \end{array}$$

où les flèches obliques sont données par la dualité et la flèche horizontale est donnée par l'isomorphisme (19).

Démonstration

L'affirmation étant locale sur S et p étant un morphisme fini, il suffit de la vérifier quand L est isomorphe à \mathcal{O}_D et dans ce cas le résultat est trivial compte tenu de la définition de l'isomorphisme (19). \square

REMARQUE 5.5.3. — La PROPOSITION 5.5.1 exprime la compatibilité entre la structure du cube pour Θ_L et la dualité de Serre. En particulier, si C est une courbe complexe compacte et lisse et K est une thêta-caractéristique sur C , cette proposition, appliquée à la situation géométrique décrite par la REMARQUE 4.1.3 montre que le faisceau $\mathcal{O}(\Theta)$ sur $\text{Pic}^0 C$ défini par K est muni d'une *sigma-structure*, suivant la définition de [3].

REMARQUE 5.5.4. — On peut aussi expliciter la relation de compatibilité entre la formule d'addition pour les sections θ et la dualité de Serre : soient L un faisceau inversible sur X , $M = \omega \otimes L^{-1}$ et soient $D = \sum_{i=1}^n x_i$ et $E = \sum_{j=1}^n y_j$ deux diviseurs tels que pour tout i , $p_*M(-x_i) = R^1p_*L(x_i) = 0$, les diagrammes suivants intervenant dans la démonstration de la PROPOSITION 4.3.1 et dans la REMARQUE 4.3.5

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus p_*L(x_i) & \xrightarrow{(\beta_{ij})} & \bigoplus p_*L(D)|_{y_j} \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 p_*L(D) & \longrightarrow & p_*L(D)|_E
 \end{array}
 \quad \text{et}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus p_*M(y_j - D)|_{y_j} & \xrightarrow{(\gamma_{ij})} & \bigoplus R^1p_*M(-x_i) \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 p_*M(E - D)|_D & \longrightarrow & R^1p_*M(-D)
 \end{array}$$

sont mis en dualité par les différents morphismes de dualité relative. En utilisant les remarques 5.2.3 et 5.4.2, on obtient donc un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont données par la dualité de Serre et les flèches horizontales sont les isomorphismes de la formule de Fay

décrits par la PROPOSITION 4.3.1 et dans la REMARQUE 4.3.5

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_D \otimes \Delta_E \otimes \Theta_L^{n-1} & \longrightarrow & \mathcal{H}om \left[\bigotimes p_* L(x_i), \bigotimes p_* L(x_i)|_{y_j} \right] \\
 \otimes \Theta_{L(D-E)} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta_D \otimes \Delta_E \otimes \Theta_M^{n-1} & \longrightarrow & \mathcal{H}om \left[\bigotimes p_* M(y_j - D), \bigotimes R^1 p_* M(-x_i) \right] \\
 \otimes \Theta_{M(E-D)} & &
 \end{array}$$

qui identifie les sections canoniques $s_D \otimes s_E \otimes \theta_L^{n-1} \otimes \theta_{L(D-E)}$, $\det(\beta_{ij})$, $s_D \otimes s_E \otimes \theta_M^{n-1} \otimes \theta_{M(E-D)}$ et $\det(\gamma_{ij})$ de ces différents faisceaux. Cette propriété peut s'interpréter en termes d'opérateurs de Vertex (section 0.3) en disant que la dualité de Serre échange les opérateurs ψ et ψ^* .

5.6 Action sur les thêta-caractéristiques.

Dans cette section on étudie l'action de la dualité de Serre sur le faisceau Θ_L quand L est une thêta-caractéristique.

PROPOSITION 5.6.1. — *Soit L un faisceau inversible sur X tel que $L^2 = \omega_{X/S}$ et tel que $R^1 p_* L$ est un faisceau localement libre de rang r , l'isomorphisme*

$$\sigma_L : \Theta_L \xrightarrow{\sim} \Theta_{\omega \otimes L^{-1}} = \Theta_L$$

est égal à la multiplication par $(-1)^r$.

Démonstration

Remarquons que $p_* L$ est également localement libre de rang r . En utilisant (62), on voit que σ_L s'exprime en terme de cohomologie par :

$$\begin{aligned}
 \bigwedge^{\max} p_* L \otimes \left(\bigwedge^{\max} R^1 p_* L \right)^{-1} & \xrightarrow{\phi_L \otimes \phi_L^{-1}} \left(\bigwedge^{\max} R^1 p_* L \right)^{-1} \otimes \bigwedge^{\max} p_* L \\
 & \xrightarrow{\psi} \bigwedge^{\max} p_* L \otimes \left(\bigwedge^{\max} R^1 p_* L \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

Or puisque $\det(\phi_L^{-1}) = (\det \phi_L)^{-1}$, on voit en testant sur des sections locales que cet isomorphisme est égal à la multiplication par $(-1)^r$. \square

CONSÉQUENCE (cf. MUMFORD [22]). — Si L vérifie $L^2 = \omega_{X/S}$, on pose pour tout point géométrique s de S : $r(s) = h^0(L_s)$ où L_s est le faisceau

sur X_s déduit de L par le changement de base

$$\begin{array}{ccc} X_s & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{spec}(k) & \xrightarrow{s} & S. \end{array}$$

Comme les constructions de Θ_L et σ_L commutent au changement de base, si on note L_s le faisceau obtenu sur X_s , on a $\Theta_{(L_s)} = (\Theta_L)_s$ et $\sigma_{(L_s)} = (\sigma_L)_s$ et la restriction à s de la section σ_L de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(\Theta_L) \simeq \mathcal{O}_S$ coïncide avec la multiplication par $(-1)^{r(s)}$ et donc la parité de $r(s)$ est localement constante sur S .

REMARQUE 5.6.2. — Sous cette forme le résultat apparaît dans l'article de MUMFORD [22]. De façon précise, MUMFORD remarque que si X est une courbe lisse sur un corps k et si L est une thêta-caractéristique la dualité de Serre munit $E = H^0(X, L(D))_{|2D}$ d'une forme quadratique hyperbolique telle que les sous-espaces $F = H^0(X, L(D))$ et $G = H^0(D, L|_D)$ soient des sous-espaces isotropes maximaux. Il montre qu'il existe une isométrie u de E telle que $u(F) = G$ et que $\det u = (-1)^r$. Si on fait cette construction en famille considérant une courbe relative X/S , on peut identifier le terme $(-1)^{r(s)}$ à une section d'un faisceau inversible sur S , ce qui nous donne le résultat.

REMARQUE 5.6.3. — Soient X une courbe complexe compacte, L une thêta-caractéristique et J_2 l'ensemble des points d'ordre 2 de $J = \text{Pic}^0 X$; on définit l'application $q_L : J_2 \rightarrow \{-1, 1\}$ par

$$q_L(x) = (-1)^{h^0(X, L \otimes x) - h^0(X, L)}.$$

La formule de Riemann-Mumford relie q_L à l'accouplement de Weil $e_2(-, -)$ par :

$$(66) \quad e_2(x, y) = q_L(xy) \cdot q_L(x) \cdot q_L(y).$$

Retrouvons cette formule à l'aide des propositions (5.5.1) et (5.6.1). Rappelons d'abord que d'après l'interprétation algébrique de l'accouplement de Weil due à GROTHENDIECK (cf. [3], [10]), $e_2(x, y)$ est simplement l'isomorphisme composé :

$$\Lambda_L(x, y) \longrightarrow (\Lambda_L(x^{-1}, y))^{-1} \longrightarrow \Lambda_L(x^{-1}, y^{-1}) = \Lambda_L(x, y).$$

La proposition (5.5.1) montre que $e_2(x, y)$ est égal au morphisme

$$\Lambda(\sigma) = \sigma_{L \otimes x \otimes y} \otimes (\sigma_{L \otimes x})^{-1} \otimes (\sigma_{L \otimes y})^{-1} \otimes (\sigma_L).$$

Or d'après la PROPOSITION 5.6.1, $\Lambda(\sigma)$ est simplement la multiplication par :

$$(-1)^{h^0(X, L \otimes x \otimes y)} \cdot (-1)^{h^0(X, L \otimes x)} \cdot (-1)^{h^0(X, L \otimes y)} \cdot (-1)^{h^0(X, L)}.$$

Ce qui donne la formule (66).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALVAREZ-GAUME (L.), GOMEZ (C.), REINA (C.). — *New Methods in String Theory*. — C.E.R.N., preprint TH 4775/87, 1987.
- [2] BOURBAKI (N.). — *Algèbre, Chapitres 4, 5, 6, 7*. — Masson, Paris, 1981.
- [3] BREEN (L.). — *Fonctions thêta et théorème du cube, Lectures notes in Mathematics 980*. — Berlin, Springer Verlag, 1983.
- [4] BREEN (L.). — The Cube Structure on the Determinant Bundle, Theta Functions [Bowdoin 1987], *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, t. 49, Part 1, 1987, p. 663–673.
- [5] DELIGNE (P.). — *La formule de dualité globale, Lecture notes in Mathematics, 305, S.G.A.4, Exposé 18, p. 481–587*. — Berlin, Springer Verlag, 1972.
- [6] DELIGNE (P.). — *Catégories spectrales, Notes manuscrites*.
- [7] DELIGNE (P.). — Le déterminant de la cohomologie, *Contemp. Math., t. 67, Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry, Providence, A.M.S.*, p. 663–673.
- [8] ELKIK (R.). — Fibrés d'intersections et intégrales de classes de Chern, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 22, 4^{ème} série, 1989, p. 195–226.
- [9] FAY (J.). — *Theta Functions on Riemann Surfaces, Lectures notes in Mathematics 352*. — Berlin, Springer Verlag, 1973.
- [10] GROTHENDIECK (A.). — *Compléments sur les biextensions, S.G.A.7.I, Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Lecture Notes in Mathematics, 288, p. 218–312*. — Berlin, Springer Verlag, 1972.

- [11] GROTHENDIECK (A.), DIEUDONNÉ (J.). — *Éléments de géométrie algébrique 1, Grundlehren der Mathematik*, **166**. — Berlin, Springer Verlag, 1971.
- [12] GROTHENDIECK (A.), DIEUDONNÉ (J.). — *Éléments de géométrie algébrique 2, Étude globale de quelques classes de morphismes*, Publ. Math. I.H.E.S., **8**. — Paris, 1960.
- [13] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics*, **52**. — Berlin, Springer Verlag, 1977.
- [14] HARTSHORNE (R.). — *Residues and Duality, Lecture notes in Mathematics*, **20**. — Berlin, Springer Verlag, 1966.
- [15] JIMBO (M.), MIWA (T.). — Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras, *Publ. R.I.M.S., Kyoto University*, t. **19**, 1983, p. 943–1001.
- [16] KAWAMOTO (N.), NAMIKAWA (Y.), TSUCHIYA (A.), YAMADA (Y.). — Geometric Realization of Conformal Field Theory on Riemann Surfaces, *Comm.Math.Phys.*, t. **247**, 1988, p. 247–308.
- [17] KEMPF (G.). — *Abelian Integrals, Monografias de Instituto de Matemáticas*, **13**. — Mexico, Universidad Nacional autonoma de Mexico, 1984.
- [18] KEMPF (G.). — *Fay's trisecant formula, Algebraic Geometry and Complex Analysis, [Proceedings, Patzcuaro 1987], Lecture Notes in Mathematics*, **1414**. — Berlin, Springer Verlag, 1989.
- [19] KNUDSEN (F.), MUMFORD (D.). — The Projectivity of the Moduli space of Stable Curves, I. Preliminary on “det” and “Div”, *Math. Scand.*, t. **39**, 1976, p. 19–55.
- [20] KNOTSON (D.). — *λ -Rings and the Representation Theory of the Symmetric group, Lecture Notes in Mathematics*, **308**. — Berlin Springer Verlag, 1973.
- [21] MORET-BAILLY (L.). — Métriques permises, [Szpiro, Séminaire sur les pinceaux arithmétiques, la conjecture de Mordell], *Paris, Astérisque*, t. **127**, 1985, p. 29–87.
- [22] MUMFORD (D.). — Theta Characteristics of an Algebraic Curve, *Ann. E.N.S., 4^{ème} série*, t. **4**, 1971, p. 181–192.
- [23] MUMFORD (D.). — *Tata lectures on Theta I, II, Progress in Mathematics*, **28**, **43**. — Boston, Birkhauser, 1984.
- [24] MUMFORD (D.). — *Abelian Varieties, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics*, **4**. — London, Oxford University Press, 1970.
- [25] MUMFORD (D.). — *Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Mathematik*, **34**. — Berlin, Springer Verlag, 1965.
- [26] SEGAL (G.), WILSON (G.). — Loop Groups and Equations of KDV type, *Publ. Math. I.H.E.S.*, t. **61**, 1985, p. 5–65.