BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE CONZE
ALBERT RAUGI

Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications

Bulletin de la S. M. F., tome 118, nº 3 (1990), p. 273-310
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_3_273_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 273–310.

FONCTIONS HARMONIQUES POUR UN OPÉRATEUR DE TRANSITION ET APPLICATIONS

PAR

JEAN-PIERRE CONZE ET ALBERT RAUGI (*)

RÉSUMÉ. — Soit u une fonction continue ≥ 0, définie sur $[0,1]$, telle que $u(x) + u(x+1/2) = 1$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ et P_u l'opérateur de transition défini par $P_u f(x) = u(x/2)f(x/2) + u(x/2+1/2)f(x/2+1/2)$, f continue sur $[0,1]$. Nous faisons l'étude des fonctions invariantes par l'opérateur P_u et du comportement asymptotique de ses itérés $(P_u^n,\, n \in \mathbb{N})$. Nous appliquons les résultats à des équations fonctionnelles, à la construction des ondelettes et au filtrage.

ABSTRACT. — Let u be a continuous non-negative function, defined on $[0,1]$, such that $u(x) + u(x+1/2) = 1$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ and P_u be the transition operator defined by $P_u f(x) = u(x/2)f(x/2) + u(x/2+1/2)f(x/2+1/2)$, f continuous on $[0,1]$. We study the asymptotic behaviour of the iterates $(P_u^n,\, n \in \mathbb{N})$, and give some applications to functional equations, wavelet theory and filtering.

I. Introduction

Soit u une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs positives ou nulles, vérifiant

$$u(x) + u\big(x + \tfrac{1}{2}\big) = 1, \text{ pour tout } x \in \big[0, \tfrac{1}{2}\big].$$

Nous considérons dans ce travail l'opérateur de transition P_u associé à u qui, à f continue sur $[0,1]$, fait correspondre $P_u f$ définie par :

$$P_u f(x) = u\Big(\frac{x}{2}\Big) f\Big(\frac{x}{2}\Big) + u\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big) f\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big).$$

L'étude du comportement de la suite des itérés $(P_u^n,\, n \in \mathbb{N})$ de ce type d'opérateur a fait l'objet de plusieurs travaux, généralement sous des hypothèses de régularité portant sur u (JAMISON [4], NORMAN [9]), ou de

(*) Texte reçu le 8 mars 1990.
J.-P. CONZE, A. RAUGI, Université de Rennes I, Laboratoire de Probabilités, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

stricte positivité de u dans le cadre des mesures de Gibbs (WALTERS [12]). Elle est liée à la détermination des fonctions continues invariantes par P_u, appelées *fonctions P_u-harmoniques.*

Nous nous proposons ici de reprendre cette étude sous des hypothèses plus générales à la fois concernant la régularité de u et ses zéros. En effet, certains résultats peuvent être obtenus sous la seule hypothèse de continuité de u; d'autre part, l'étude du cas où u peut s'annuler permet de répondre à des questions posées, dans le cadre de la construction des 'g-mesures' en théorie ergodique, par M. KEANE [5].

Par ailleurs, nous présentons des applications de l'étude des fonctions P_u-harmoniques à des domaines débordant du cadre proprement dit des probabilités ou de la théorie ergodique. La construction donnée par Y. MEYER, S. MALLAT, I. DAUBECHIES (voir [7]) de bases d'ondelettes orthogonales dans le cadre de l'analyse multi-résolution est reliée à l'étude des fonctions P_u-harmoniques où u est une fonction intervenant dans cette construction.

Comme corollaire des résultats sur les fonctions harmoniques, nous pouvons donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que les fonctions construites par la méthode de l'analyse multi-résolution vérifient la condition d'orthogonalité, complétant ainsi les résultats obtenus par A. COHEN [1] dans ce domaine. L'application de l'algorithme pyramidal (S. MALLAT [6]) nous a également amenés à considérer les produits aléatoires d'opérateurs du type P_u. Il était donc nécessaire de préciser le comportement de la suite des itérés (P_u^n).

Enfin mentionnons une application de l'étude des fonctions P_u-harmoniques à l'équation fonctionnelle

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big)\Big],$$

où f est une fonction continue sur $]0,1[$. A côté de la solution classique fournie par $\operatorname{cotg}^2(\pi x)$, la méthode des martingales permet de faire apparaître une autre solution qui ne semble pas pouvoir s'obtenir par une méthode analytique élémentaire.

Ainsi l'objet de ce travail est double. D'une part étendre la théorie des opérateurs de transitions, d'autre part donner des exemples d'applications de cette théorie à des domaines variés. C'est d'ailleurs l'observation du rôle joué par ces opérateurs dans des domaines tels que la théorie des ondelettes, qui nous a conduit à en reprendre la théorie.

Pour simplifier, nous nous sommes placés dans le cadre dyadique décrit par l'opérateur P_u défini plus haut. Cet opérateur est un cas particulier d'opérateur de 'Perron-Frobenius' associé à la fonction u et à la transformation $x \mapsto 2x$ mod 1. Le cadre dyadique nous a paru suffisant pour dégager les idées principales employées (propriétés géométriques des orbites, martingales, chaîne espace-temps), mais il est clair que les méthodes présentées ici se généralisent à une famille de transformations plus vaste, dont $x \mapsto 2x$ mod 1 est le modèle.

Plan de l'article :

II. Définitions et notations

Soit $(E, \| \|_\infty)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. Dans toute la suite, nous désignerons par u un élément de E, à valeurs positives, vérifiant

$$u(x) + u\big(x + \tfrac{1}{2}\big) = 1, \text{ pour tout } x \in \big[0, \tfrac{1}{2}\big].$$

Nous notons P_u l'opérateur de transition associé à u, défini sur E par :

$$P_u f(x) = u\Big(\frac{x}{2}\Big) f\Big(\frac{x}{2}\Big) + u\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big) f\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big).$$

Les solutions dans E de l'équation fonctionnelle

$$P_u h = h$$

seront appelées fonctions P_u-*harmoniques* continues.

Nous désignons par $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions P_u-harmoniques continues. Cet espace contient les fonctions constantes. Un cas important est celui où $\mathcal{H}$ ne contient que les constantes. C'est le cas, par exemple, comme on le voit facilement, quand la fonction u est strictement positive. Dans ce travail, nous montrerons que $\mathcal{H}$ est de dimension finie, et nous donnerons des conditions générales pour qu'il soit réduit aux constantes.

Pour $i \in \{0,1\}$, nous notons S_i la transformation affine de $\mathbb{R}$ définie par

$$S_i : x \longmapsto S_i(x) = \tfrac{1}{2}(x+i).$$

Par commodité, nous seront amenés dans certains cas à confondre dans la même notation la transformation S_i et l'indice i correspondant.

La donnée de u permet de définir une chaîne de Markov à valeurs dans $[0,1]$: à chaque étape, à partir d'un point x, deux transitions sont possibles vers les points $S_0(x)$ et $S_1(x)$ avec les probabilités respectives $u(S_0(x))$ et $u(S_1(x))$. La construction de ce processus sera précisée en IV. Les définitions ci-dessous sont de nature géométrique (voir par exemple NORMAN [9]).

Définitions. — Pour $x \in [0,1]$, nous appelons *trajectoire* de x tout sous-ensemble de $[0,1]$ de la forme $\{\sigma_n \cdots \sigma_1 x,\ n \geq 1\}$ où $\{\sigma_n,\ n \geq 1\}$ est une suite d'éléments de $\{S_0, S_1\}$ vérifiant $u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x) \cdots u(\sigma_1 x) > 0$, pour tout $n \geq 1$.

L'adhérence de l'ensemble des trajectoires de x est un compact de $[0,1]$ appelé *orbite* de x. Un compact F de $[0,1]$ est dit *invariant*, si, pour tout $x \in F$ et tout $\sigma \in \{S_0, S_1\}$ tels que $u(\sigma x) > 0$, on a $\sigma x \in F$.

Un compact F est donc invariant s'il contient les orbites de chacun de ses points. L'orbite d'un élément quelconque de $[0,1]$ est un exemple de compact invariant.

Nous dirons que u est *proximale*, si les orbites de deux éléments quelconques de $[0,1]$ se recoupent. Autrement dit, u est proximale s'il n'existe pas deux compacts invariants disjoints.

Remarque. — Soit h une fonction P_u-harmonique continue. Alors l'ensemble des points de $[0,1]$, où h atteint son maximum (resp. son minimum) est un compact invariant. Si h est non constante, il existe donc deux compacts invariants disjoints. Ainsi la proximalité implique que l'espace $\mathcal{H}$ est réduit aux constantes. Dans la suite, nous préciserons le lien existant entre les fonctions harmoniques et les compacts invariants.

Définitions. — Nous appellerons '*mot*' de longueur N, tout N-uple de la forme $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$, avec $\sigma_k = S_0$ ou S_1, autrement dit tout élément de $\{S_0, S_1\}^N$.

Soient N un entier ≥ 1 et $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ un 'mot' de longueur N. Le nombre réel

$$q(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sum_{k \geq 1} \sigma_{\underline{k}} 2^{-k}$$

avec $\underline{k} \in \{1, \dots, N\}$ et $\underline{k} = k \bmod N$ est appelé *point périodique* associé au mot $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$.

Nous appelons *cycle périodique* (de longueur N) tout sous-ensemble de $[0,1]$ formé des points périodiques associés aux mots déduits par substitution circulaire d'un mot $(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{S_0, S_1\}^N$. Soit $q(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ le point périodique associé au mot $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$. On note que le cycle périodique associé à $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ est invariant si et seulement si :

$$u\big(\sigma_N q(\sigma_1, \dots, \sigma_N)\big) = \dots = u\big(\sigma_1 \cdots \sigma_N q(\sigma_1, \dots, \sigma_N)\big) = 1.$$

Notons τ la transformation $x \mapsto 2x \bmod 1$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Les points périodiques sont les points fixes des puissances de τ .

Dans la section III, nous faisons une étude géométrique des compacts invariants. Dans IV, les martingales permettent de relier les fonctions P_u-harmoniques continues aux compacts invariants. Ce lien est précisé dans la section V, sous une hypothèse de régularité de u. Le comportement en moyenne des itérés (P_u^n) s'en déduit. Dans la section VI, nous étudions le comportement de la suite de ces itérés. La deuxième partie de l'article est consacrée à la présentation d'exemples et d'applications, notamment à la théorie des ondelettes et à la théorie ergodique.

III. Compacts invariants

Dans cette section, nous établissons quelques propriétés des compacts invariants.

Dans toute la suite, nous désignons par δ un réel de $]0,1]$ tel que, pour tous éléments x, y de $[0,1]$ vérifiant $|x-y| < \delta$, on ait $|u(x) - u(y)| < \frac{1}{2}$. Nous notons N l'entier naturel défini par

$$\frac{1}{2^{N+1}} < \delta \leq \frac{1}{2^N} \cdot$$

PROPOSITION 3.1. — *Tout compact invariant de* $[0,1]$ *contient au moins un cycle périodique. Si F et G sont deux compacts invariants disjoints, alors :* $d(F,G) \geq 2\delta$.

Preuve.

a) La méthode de démonstration de la proposition est liée à la remarque simple suivante : pour tout couple de points x et y de $[0,1]$, tel que $|x-y| < 2\delta$, il existe une suite $(\sigma_n,\ n \geq 1)$ à valeurs dans $\{S_0, S_1\}$ telle que l'on ait simultanément, pour tout $n \geq 1$,

$$u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x) \cdots u(\sigma_1 x) > 0 \quad \text{et} \quad u(\sigma_n \cdots \sigma_1 y) \cdots u(\sigma_1 y) > 0.$$

En effet, partant de x, construisons l'orbite de x correspondant aux plus grandes probabilités de transition fournies par le noyau de transition associé à P_u. Compte-tenu de la définition de P_u, il est possible de trouver une suite $\sigma = (\sigma_n,\ n \geq 1)$ d'éléments de $\{S_0, S_1\}$ telle que :

$$u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x) \geq \tfrac{1}{2}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Soit y un point de $[0,1]$ tel que $|x-y| < 2\delta$. Alors, la propriété de contraction des applications S_0 et S_1, implique que, pour tout entier $n \geq 1$, les points $\sigma_n \cdots \sigma_1 y$ et $\sigma_n \cdots \sigma_1 x$ restent à une distance inférieure à δ.

D'après le choix de la suite σ, et celui de δ, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$u(\sigma_n \cdots \sigma_1 y) \cdots u(\sigma_1 y) > 0.$$

Ceci implique que les suites $(\sigma_n \cdots \sigma_1 x,\ n \geq 1)$ et $(\sigma_n \cdots \sigma_1 y,\ n \geq 1)$ sont deux trajectoires de x et de y, et la distance $|\sigma_n \cdots \sigma_1 x - \sigma_n \cdots \sigma_1 y|$ tend vers zéro.

b) Appliquons cette remarque pour prouver que deux compacts invariants disjoints F et G sont à une distance supérieure à 2δ. Choisissons x et y quelconques respectivement dans F et G. Le raisonnement précédent montre que, si $|x-y| < 2\delta$, alors les orbites fermées de x et de y ont un point commun. On a donc nécessairement $d(F,G) \geq 2\delta$.

c) Montrons maintenant que tout compact invariant F contient un point périodique.

Soit x un élément de F. Considérons comme précédemment une suite $\sigma = (\sigma_n,\ n \geq 1)$ d'éléments de $\{S_0, S_1\}$ telle que

$$u(\sigma_n \cdots \sigma_1 x) \geq \tfrac{1}{2}, \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Soit v une valeur d'adhérence de la suite $(\sigma_n \cdots \sigma_1 x,\ n \geq 1)$. Supposons que v ne soit pas un nombre dyadique. Soit $v = \sum_{k \geq 1} i_k 2^{-k}$ la décomposition dyadique de v. (Si v est dyadique, on choisit celle des deux décompositions de v qui convient…) Posons $\eta_k = S_{i_k}$, pour $k \geq 1$.

Compte-tenu de la construction de v, nous avons $u(v) \geq \frac{1}{2}$, et il existe des entiers r et s et des mots $(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ et $(\rho_1, \ldots, \rho_s)$ de longueur respectivement r et s tels que :

$$(\sigma_{2N+r+s}, \ldots, \sigma_1) = (\eta_1, \ldots, \eta_N, \tau_1, \ldots, \tau_r, \eta_1, \ldots, \eta_N, \rho_1, \ldots, \rho_s).$$

Montrons que F contient le point périodique associé au mot $(\eta_1, \ldots, \eta_N, \tau_1, \ldots, \tau_r)$ de longueur $N + r$.

Posons $z_0 = \eta_1 \cdots \eta_N \rho_1 \cdots \rho_s x$. Le point z_0 est un élément de F pour lequel les transitions

$$z_0 \longrightarrow \tau_r z_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tau_1 \cdots \tau_r z_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \eta_1 \cdots \eta_N \tau_1 \cdots \tau_r z_0$$

sont possibles avec probabilité $\geq \frac{1}{2}$.

Soit z un élément de F pour lequel les transitions

$$z \longrightarrow \tau_r z \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tau_1 \cdots \tau_r z \longrightarrow \cdots \longrightarrow \eta_1 \cdots \eta_N \tau_1 \cdots \tau_r z$$

sont possibles. Appelons Uz l'élément $\eta_1 \cdots \eta_N \tau_1 \cdots \tau_r z$ de F. Pour tout entier $k \geq 1$ et tous éléments $\theta_1, \cdots \theta_k$ de $\{S_0, S_1\}$, nous avons

$$\left|\theta_1 \cdots \theta_k U z - \theta_1 \cdots \theta_k z_0\right| \leq 1/2^{N+k} < \delta.$$

Grâce au choix de δ, il en résulte que les transitions

$$Uz \longrightarrow \tau_r U z \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tau_1 \cdots \tau_r U z \longrightarrow \cdots \longrightarrow \eta_1 \cdots \eta_N \tau_1 \cdots \tau_r U z$$

sont possibles.

En appliquant cette remarque successivement aux points $z = z_0$, $z = Uz_0$, $z = U^2 z_0, \ldots$, on obtient que F contient le cycle périodique associé au mot $(\eta_1 \cdots \eta_N \tau_1 \cdots \tau_r)$. $\square$

Les deux corollaires suivant se déduisent de la proposition

COROLLAIRE 3.2. — *Le nombre maximal de fermés invariants disjoints est au plus égal à* $\dfrac{1}{2\delta} + 1$.

COROLLAIRE 3.3. — *Soient F et G deux compacts invariants disjoints (il en existe si u n'est pas proximale). Pour tout mot $(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ de longueur N et tout x dans F tel que*

$$u(\zeta_1 \cdots \zeta_N x)\, u(\zeta_2 \cdots \zeta_N x) \cdots u(\zeta_N x) > 0,$$

on a, pour tout élément y appartenant à G :

$$u(\zeta_1 \cdots \zeta_N y)\, u(\zeta_2 \cdots \zeta_N y) \cdots u(\zeta_N y) = 0.$$

Remarque. — En prenant pour x un élément périodique de G, (nous avons vu qu'il en existe), on obtient que u s'annule sur des points rationnels. On en déduit que si u est non nulle sur les rationnels, u est proximale.

COROLLAIRE 3.4. — *Si u ne possède qu'un nombre fini de zéros, alors u est proximale si et seulement s'il n'existe pas deux cycles périodiques invariants disjoints.*

Preuve. — Lorsque u ne possède qu'un nombre fini de zéros, le COROLLAIRE 3.3 ci-dessus montre que si F et G sont deux compacts invariants disjoints, ils sont nécessairement finis.

La preuve du corollaire résulte alors du lemme suivant :

LEMME 3.5. — *Tout compact invariant fini de* $[0,1]$ *est une réunion de cycles périodiques invariants.*

Preuve. — Soient F un compact invariant fini et x un élément de F. Soit $(\sigma_k \cdots \sigma_1 x,\ k \geq 1)$ une trajectoire de x. Comme F est fini, il existe deux entiers n et $m < n$ tels que :

$$\sigma_n \cdots \sigma_1 x = (\sigma_n \cdots \sigma_{m+1})\, \sigma_m \cdots \sigma_1 x = \sigma_m \cdots \sigma_1 x.$$

Il en résulte que $\sigma_m \cdots \sigma_1 x$ est le point périodique associé au mot $(\sigma_n \cdots \sigma_{m+1})$ et x est également un mot périodique. Ainsi tout les éléments de F sont des points périodiques.

Les transitions possibles à partir des points de F sont nécessairement déterminées : x a une seule trajectoire possible qui est celle qui correspond à la décomposition dyadique de x. Ceci implique que u vaut 1 sur F. □

IV. Fonctions harmoniques et martingales

Définitions et notations.

Soit $x \in [0,1]$. Nous considérons la probabilité $\mathbb{P}_x$ définie sur la tribu produit $\mathcal{F}$ de l'espace $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}-\{0\}}$, qui, pour tout entier $n \geq 1$, est définie sur les fonctions ne dépendant que des n premières coordonnées par

$$\int f(\omega)\mathbb{P}_x(\mathrm{d}\omega) = \sum_{(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\{0,1\}^n} u(S_{\omega_n} \cdots S_{\omega_1} x) \cdots u(S_{\omega_1} x)\, f(\omega_1, \dots, \omega_n).$$

Désignons par $\{X_n,\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ la suite des applications coordonnées de l'espace produit Ω, par $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale et par $\mathcal{F}_n,\ n \geq 1$, la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{X_k,\ 1 \leq k \leq n\}$.

Pour $x \in [0,1]$, nous définissons : $Z_0(x,\omega) = x$, et, pour $n \geq 1$, $Z_n(x,\omega) = S_{X_n(\omega)} \cdots S_{X_1(\omega)} x$. On vérifie aisément que le processus $\{Z_n(x,\cdot),\ n \geq 0\}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ est une chaîne de Markov sur $[0,1]$ de probabilité de transition P_u partant de x.

Appelons θ l'opérateur de décalage (le 'shift') sur Ω défini par

$$\theta(\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) = (\omega_2, \ldots, \omega_{n+1}, \ldots).$$

Pour la chaîne $\big(\Omega, \mathcal{F}, ((Z_n(x,\cdot))_{n \geq 0}, \mathbb{P}_x)_{x \in [0,1]}\big)$, la propriété de Markov s'écrit

$$\mathbb{E}_x\Big[V\big(Z_n(x,\cdot), \theta^n.\big) \mid \mathcal{F}_n\Big] = \mathbb{E}_{Z_n(x,\cdot)}\big[V(x,\cdot)\big], \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

pour tout $x \in [0,1]$ et toute variable aléatoire bornée V sur $[0,1] \times \Omega$. Si h est une fonction borélienne P_u-harmonique bornée, on vérifie que la suite de variables aléatoires $\{h(Z_n(x,\cdot)),\ n \geq 0\}$ est une martingale bornée. Elle converge donc $\mathbb{P}_x$-p.s. La variable aléatoire $V_h(x,\cdot) = \lim_{n \to \infty} h(Z_n(x,\cdot))$ vérifie alors la relation d'invariance

$$V_h(S_{\omega_1} x, \theta\omega) = V_h(x,\omega). \tag{1}$$

Réciproquement (propriété de Markov) si V est une variable aléatoire bornée sur $[0,1] \times \Omega$ vérifiant (1), alors la fonction $h(x) = \mathbb{E}_x[V(x,\cdot)]$ est P_u-harmonique bornée. Cette correspondance biunivoque est classique (cf. NEVEU [8], Proposition V.2.4.).

Notons $A(\omega)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite

$$\{Z_n(0,\omega),\ n \geq 1\}.$$

Si h est un élément de $\mathcal{H}$, la variable V_h que l'on obtient ne dépend pas de la première coordonnée et s'identifie à une variable θ-invariante sur Ω. En particulier, pour toute partie fermée F de $[0,1]$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : A(\omega) \subset F\}$ est un sous-ensemble θ-invariant de Ω, et la fonction $x \mapsto \mathbb{P}_x\{\omega \in \Omega : A(\omega) \subset F\}$ est une fonction P_u-harmonique borélienne bornée.

Sous une hypothèse de régularité sur u, nous verrons, dans la section V, que, réciproquement, pour toute variable aléatoire V sur Ω, θ-invariante bornée, la fonction $x \to \mathbb{E}_x[V]$ est dans $\mathcal{H}$.

Représentation des fonctions harmoniques.

PROPOSITION 4.1. — *Soit $x \in [0,1]$ et h une fonction borélienne bornée sur $[0,1]$, vérifiant $P_u h = h$. Alors le processus*

$$\Big\{M_n(x,\cdot) = h\big(Z_n(x,\cdot)\big),\ \ n \geq 0\Big\}$$

défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ est une martingale bornée relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_n,\ n \geq 0\}$. Ce processus converge donc $\mathbb{P}_x$-p.s. et l'on a :

$$h(x) = \mathbb{E}_x\big[h\big(Z_n(x,\cdot)\big)\big] = \mathbb{E}_x\big[\lim_{n\to+\infty} h\big(Z_n(x,\cdot)\big)\big]. \tag{2}$$

En outre, pour tout entier $r \geq 1$ et tout mot $(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \{S_0, S_1\}^r$, nous avons, $\mathbb{P}_x$-p.s. :

$$\lim_{n\to+\infty}\Big[\Big(h\big(\sigma_r\cdots\sigma_1 Z_n(x,\cdot)\big) - h\big(Z_n(x,\cdot)\big)\Big)^2 \times u\big(\sigma_r\cdots\sigma_1 Z_n(x,\cdot)\big)\cdots u\big(\sigma_1 Z_n(x,\cdot)\big)\Big] = 0.$$

Preuve. — Nous avons vu plus haut que le processus considéré est une martingale. La première assertion résulte alors de la théorie des martingales (voir [8], IV.5).

Pour prouver la seconde assertion, nous utilisons une idée introduite dans [10]. Posons

$$\delta_n(x) = \mathbb{E}_x\Big[\big(M_{n+r}(x,\cdot) - M_n(x,\cdot)\big)^2\Big].$$

Nous avons d'une part

$$\begin{aligned}\delta_n(x) &= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_x\Big(\big(M_{n+r}(x,\cdot) - M_n(x,\cdot)\big)^2 \mid \mathcal{F}_n\Big)\Big]\\ &= \mathbb{E}_x\Big[\sum_{i\in\{0,1\}^r} \Upsilon_{i,n}(x,\cdot)\Big(h\big(S_{i_r}\cdots S_{i_1} Z_n(x,\cdot)\big) - h\big(Z_n(x,\cdot)\big)\Big)^2\Big]\end{aligned}$$

avec

$$\Upsilon_{i,n}(x,\cdot) = u\big(S_{i_r}\cdots S_{i_1} Z_n(x,\cdot)\big)\cdots u\big(S_{i_1} Z_n(x,\cdot)\big).$$

D'autre part, en développant le carré, on obtient

$$\delta_n(x) = \mathbb{E}_x\Big[\big(M_{n+r}(x,\cdot)\big)^2\Big] - \mathbb{E}_x\Big[\big(M_n(x,\cdot)\big)^2\Big],$$

ce qui implique la convergence de la série $\sum \delta_n(x)$. L'assertion de la proposition en résulte. □

Nous avons vu dans la section III que le nombre maximal de fermés invariants disjoints est au plus égal à $1/2\delta + 1$, où δ est tel que $|x-y| < \delta$ implique $|u(x) - u(y)| < \frac{1}{2}$.

THÉORÈME 4.2. — *L'espace $\mathcal{H}$ des fonctions P_u-harmoniques continues est de dimension finie, inférieure au nombre maximal de fermés invariants disjoints.*

Preuve. — Pour tout $h \in \mathcal{H}$, soit $\Omega_0(h)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui vérifient les deux conditions :

- $\lim_{n\to+\infty} h(Z_n(0,\omega))$ existe;
- pour tout $r \geq 1$, pour tout mot $(\sigma_1 \cdots \sigma_r) \in \{S_0, S_1\}^r$,

$$\lim_n \Big[\Big(h\big(\sigma_r \cdots \sigma_1 Z_n(0,\omega)\big) - h\big(Z_n(0,\omega)\big)\Big)^2 \times u\big(\sigma_r, \cdots \sigma_1 Z_n(0,\omega)\big) \cdots u\big(\sigma_1 Z_n(0,\omega)\big)\Big] = 0.$$

D'après la PROPOSITION 4.1, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathbb{P}_x[\Omega_0(h)] = 1$. Le sous-espace $\mathcal{H}$ étant séparable, nous pouvons choisir une suite dense $\{h_n,\ n \geq 1\}$ dans $\mathcal{H}$, et poser :

$$\Omega_0 = \bigcap_{n\geq 1} \Omega_0(h_n).$$

Nous avons $\Omega_0 = \bigcap_{h\in\mathcal{H}} \Omega_0(h)$, et pour tout $x \in [0,1]$, $\mathbb{P}_x[\Omega_0] = 1$.

Pour ω appartenant à Ω_0, notons $A(\omega)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $\{Z_n(0,\omega),\ n \geq 1\}$. Pour h dans $\mathcal{H}$, la suite

$$\big\{h(Z_n(0,\omega)),\ n \geq 0\big\}$$

étant convergente, h est constant sur $A(\omega)$. Définissons F par

$$F = \Big\{x \in [0,1] : \forall r \geq 1,\ \forall \sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \{S_0, S_1\},\ \forall h \in \mathcal{H}, \big(h(\sigma_r \cdots \sigma_1 x) - h(x)\big)^2 u(\sigma_r \cdots \sigma_1 x) \cdots u(\sigma_1 x) = 0\Big\}.$$

F est un compact invariant de $[0,1]$, constitué des points x de $[0,1]$ tels que chaque élément de $\mathcal{H}$ soit constant sur l'orbite de x. Le compact F contient l'adhérence de la réunion $\bigcup_{\omega\in\Omega_0} A(\omega)$. Les fonctions dans $\mathcal{H}$ sont, compte-tenu de la formule (2), complètement déterminées par leur restriction à F, ou seulement à l'ensemble $\bigcup_{\omega\in\Omega_0} A(\omega)$.

Pour chaque y dans F, l'ensemble

$$F(y) = \Big\{x \in F : h(x) = h(y),\ \text{ pour tout } \ h \in \mathcal{H}\Big\}$$

est un sous-ensemble compact invariant de F. Si y et z sont deux points de F tels qu'il existe une fonction h dans $\mathcal{H}$ vérifiant $h(y) \neq h(z)$, alors les compacts $F(y)$ et $F(z)$ sont disjoints. D'après le COROLLAIRE 3.2, il existe un nombre fini de points $y_1, \dots, y_m$ tels que les compacts $F(y_1), \dots, F(y_m)$ constituent une partition de F.

Toute fonction h dans $\mathcal{H}$ s'écrit alors :

$$h(x) = \sum_{1 \le k \le m} h(y_k)\, \mathbb{P}_x(\Omega_k), \tag{3}$$

où Ω_k est défini comme l'ensemble $\{\omega \in \Omega_0 : A(\omega) \subset F(y_k)\}$. Notons que les ensembles Ω_k sont deux à deux disjoints et vérifient :

$$\mathbb{P}_x\Big[\bigcup_{1 \le k \le m} \Omega_k\Big] = 1, \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

La relation (3) montre que la dimension de l'espace $\mathcal{H}$ est inférieure ou égale à m, donc au nombre maximal de compacts invariants disjoints. $\square$

Remarquons que cette dimension pourrait être inférieure à m, car on ne peut pas affirmer que les fonctions $x \mapsto \mathbb{P}_x(\Omega_k)$, $1 \le k \le m$, sont continues. Nous verrons que, sous des hypothèses de régularité plus fortes portant sur u, on peut affirmer que la dimension de $\mathcal{H}$ est effectivement égale au nombre maximum de compacts invariants disjoints.

V. Cas où u est régulière

Hypothèse de régularité (R_ϕ).

Etant donnée une fonction ϕ continue sur $[0,1]$, à valeurs positives, croissante et nulle en zéro, nous notons L_ϕ le sous-espace de E formé des fonctions f telles que :

$$m_\phi(f) = \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\phi(|x-y|)}, \quad x, y \in [0,1], \ x \neq y \right\} < \infty.$$

Nous munissons L_ϕ de la norme $\| \ \|_\phi$ définie par :

$$\|f\|_\phi = \|f\|_\infty + m_\phi(f).$$

L'espace L_ϕ est un espace de Banach et, d'après le théorème d'Ascoli, tout sous-ensemble borné de L_ϕ est relativement compact dans E. Dans cette section, nous ferons l'hypothèse de régularité (notée (R_ϕ)) suivante sur la fonction u :

$$(R_\phi) \qquad u \in L_\phi, \ \text{pour une fonction } \phi \text{ vérifiant } \sum_{k \ge 0} \phi(2^{-k}) < +\infty.$$

Le cas höldérien.

On notera que l'hypothèse (R_ϕ) est satisfaite, avec $\phi(x) = x^\alpha$, pour un $\alpha > 0$, si u est höldérienne, mais qu'elle est plus générale. On peut par exemple prendre ϕ de la forme

$$\phi(x) = \big(1 + \left|\log(x)\right|\big)^{-(1+\epsilon)}, \quad \text{pour un } \epsilon > 0.$$

Lorsque u est höldérienne d'ordre $\alpha > 0$, considérons les espaces de Banach E et L_ϕ, avec $\phi(x) = x^\alpha$. L'opérateur P_u est une contraction de E et on vérifie facilement l'inégalité

$$m_\phi(P_u f) \leq 2^{-\alpha} m_\phi(f) + 2^{-\alpha} m_\phi(u) \, \|f\|_\infty.$$

On est alors en mesure d'appliquer le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (voir par exemple NORMAN [9], section 3, p. 43) :

THÉORÈME 5.1. (IONESCU-TULCEA et MARINESCU). — *L'opérateur P_u restreint à L_ϕ possède un ensemble fini G de valeurs propres de module 1. Le sous-espace propre E_λ associé à une valeur propre λ de module* 1 *est de dimension finie. Il existe des projecteurs $U_\lambda, \lambda \in G$, de L_ϕ sur E_λ, et un opérateur Q de rayon spectral* < 1, *tels que*

$$P_u = \sum_{\lambda \in G} \lambda U_\lambda + Q,$$
$$U_\lambda^2 = U_\lambda, \quad U_\lambda U_\mu = 0 \ \text{pour } \lambda \neq \mu, \quad U_\lambda Q = Q U_\lambda = 0.$$

On note que, lorsque $u \in L_\phi$, avec $\phi(x) = (1+\log(x))^{-(1+\epsilon)}$, l'opérateur P_u de L_ϕ ne vérifie pas les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu.

La convergence des itérés P_u^n de P_u est liée à la non existence de fonctions propres associées à des valeurs propres de module 1 différentes de 1. Cette étude est faite classiquement à l'aide du THÉORÈME 5.1, donc dans le cas höldérien. Nous reprendrons cette étude, section VI, dans un cadre plus général que le cas höldérien.

Continuité en variation de la famille $(\mathbb{P}_x,\ x \in [0,1])$.

L'hypothèse (R_ϕ) permet de montrer une propriété de continuité en variation pour la famille de probabilités $(\mathbb{P}_x, x \in [0,1])$ introduite dans la section précédente.

PROPOSITION 5.2. — *Si la fonction u appartient à L_ϕ, alors il existe une constante D, $0 \leq D < \infty$, telle que, pour toute variable aléatoire bornée U sur Ω,*

$$\left|\mathbb{E}_x(U) - \mathbb{E}_y(U)\right| \leq D \sum_{k \geq 1} \phi\big(|x-y|2^{-k}\big) \|U\|_\infty,$$

pour $x, y \in [0,1]$.

Preuve. — Soient x, y deux points de $[0,1]$. Pour $i \in \{0,1\}^n$ et $1 \leq p \leq n$, posons $\Upsilon_{i,p}(x) = u\big(S_{i_p} \dots S_{i_1} x\big)$ et

$$\delta_n(x,y) = \sum_{i \in \{0,1\}^n} \big|\Upsilon_n(x) \cdots \Upsilon_1(x) - \Upsilon_n(y) \cdots \Upsilon_1(y)\big|.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\delta_n(x,y) &\leq \sum_{i \in \{0,1\}^n} \big|\Upsilon_{i,n}(x) - \Upsilon_{i,n}(y)\big| \Upsilon_{i,n-1}(x) \dots \Upsilon_{i,1}(x) \\ &\qquad\qquad + \delta_{n-1}(x,y) \\ &\leq 2m_\phi(u)\,\phi\big(|x-y|2^{-n}\big) + \delta_{n-1}(x,y).\end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$\delta_n(x,y) \leq 2m_\phi(u) \sum_{k \geq 1} \phi\big(|x-y|2^{-k}\big).$$

On obtient ainsi le résultat pour les variables aléatoires U ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées.

Dans le cas général, posons $\mathbb{Q} = \frac{1}{2}(\mathbb{P}_x + \mathbb{P}_y)$, et soit U_n l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[U \mid \mathcal{F}_n]$. Les variables aléatoires U_n, $n \geq 1$, sont bornées par $\|U\|_\infty$ et la suite converge $\mathbb{Q}$-p.s., et donc $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{P}_y$-p.s., vers U. Il résulte de la majoration précédente :

$$\big|\mathbb{E}_x(U_n) - \mathbb{E}_y(U_n)\big| \leq \|U\|_\infty \delta_n(x,y) \leq D \sum_{k \geq 1} \phi\big(|x-y|2^{-k}\big)\|U\|_\infty,$$

et l'inégalité cherchée résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue. $\square$

On note que la condition $\sum_{k \geq 0} \phi(2^{-k}) < +\infty$ assure la convergence vers zéro de la somme $\sum_{k \geq 0} \phi(x 2^{-k})$ quand x tend vers zéro. Ce résultat montre que, pour toute variable aléatoire bornée U définie sur Ω θ-invariante, la fonction $x \mapsto \mathbb{E}_x(U)$ est une fonction harmonique continue.

D'où le résultat :

THÉORÈME 5.3. — *Si la fonction u vérifie la condition* (R_ϕ), *la dimension de l'espace* $\mathcal{H}$ *des fonctions* P_u*-harmoniques continues est égale au nombre maximal de compacts invariants disjoints, et est égale à* 1, *si et seulement si, u est proximale. Dans le cas où u possède un nombre fini de zéros, cette dimension est égale au nombre de cycles périodiques invariants disjoints.*

Probabilités P_u*-invariantes.*

Nous avons défini en II, l'opérateur P_u comme opérant sur l'espace E des fonctions continues sur $[0,1]$. Notons $\mathcal{P}([0,1])$ l'ensemble des mesures de probabilité sur les boréliens de $[0,1]$. Par dualité, P_u opère sur les éléments de $\mathcal{P}([0,1])$ suivant la formule :

$$\int f(x)\mathrm{d}(\mu P_u)(x) = \int P_u f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Un argument simple sur des moyennes de type ergodique montre que, dans le cas où il existe une unique mesure de probabilité μ P_u-invariante, la suite des moyennes

$$\frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n}\delta_x P_u^k$$

converge étroitement vers μ. En effet, on montre aisément que, dans ce cas, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, la suite des moyennes

$$\frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n}P_u^k f(x)$$

converge vers $\mu(f)$. Cette convergence est de plus uniforme en x, et elle implique que les fonctions P_u-harmoniques sont constantes.

L'unicité de la mesure de probabilité P_u-invariante équivaut, sous l'hypothèse de régularité (R_ϕ), au fait que l'espace $\mathcal{H}$ est réduit aux constantes, et donc équivaut à la proximalité de u.

Montrons plus généralement comment les mesures invariantes sont reliées aux compacts invariants.

THÉORÈME 5.4. — *Si la fonction u vérifie la condition* (R_ϕ), *l'opérateur* P_u *possède un nombre fini, égal au nombre maximal de compacts invariants disjoints, de probabilités invariantes extrémales, portées par des compacts invariants disjoints.*

Preuve. — Soit f un élément de E. De la relation

$$P^n f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(Z_n(x,\cdot)\right] = \mathbb{E}_x\left[f(Z_n(0,\cdot)+x/2^n)\right],$$

pour tout $n \geq 1$ et de la PROPOSITION 5.2, on déduit que la suite de fonctions

$$\left\{M_n(f) = \frac{1}{n}\left(f + P_u f + \cdots + P_u^{n-1} f\right),\ n \geq 1\right\}$$

est équicontinue.

Soit $\{f_p,\ p \geq 1\}$ une suite dense dans E. Par le procédé diagonal, on construit une suite strictement croissante d'entiers $\{\phi(n),\ n \geq 1\}$ telle que, pour tout $p \geq 1$, la suite de fonctions $\{M_{\phi(n)}(f_p),\ n \geq 1\}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Il en résulte que, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, la suite $\{M_{\phi(n)}(f),\ n \geq 1\}$ converge uniformément vers une fonction h_f appartenant à $\mathcal{H}$, qui s'écrit (section IV) :

$$h_f(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(f) p_k(x),$$

où $p_k(x) = \mathbb{P}_x\big[\{\omega : A(\omega) \subset F(y_k)\}\big]$.

Soit k un élément de $\{1, \cdots m\}$. Il est clair que l'application $f \mapsto \lambda_k(f) = h_f(y_k)$ définit une mesure de probabilité λ_k qui est P_u- invariante.

Pour $l \in \{1, \ldots, m\}$, on a $\lambda_k(p_l) = \delta_k^l$ (symbole de Kronecker), et donc λ_k est portée par

$$\left\{x \in [0,1] : \forall l \in \{1, \ldots, m\},\ p_l(x) = \delta_k^l\right\}.$$

Si ν est une mesure de probabilité P_u-invariante, nous avons

$$\nu(f) = \nu\big(M_{\phi(n)}(f)\big) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(f) \int p_k(x) \nu(\mathrm{d}x),$$

autrement dit, ν est une combinaison linéaire des probabilités λ_k, avec $1 \leq k \leq m$.

Comme tout compact invariant porte une mesure de probabilité P_u-invariante, λ_k est portée par $F(y_k)$ et même par l'intersection des compacts invariants contenus dans $F(y_k)$. □

On trouvera dans la section VII une série d'exemples illustrant les résultats précédents. Nous abordons maintenant le comportement des itérés de l'opérateur P_u.

VI. Convergence de la suite $(P_u^n,\ n \in \mathbb{N})$

Nous voudrions maintenant renforcer les résultats précédents en considérant le comportement de la suite des itérés, et non pas seulement de leurs moyennes. Classiquement, cette étude est faite sous des hypothèses de régularité sur u plus fortes que celles que nous envisageons ici et s'appuie sur le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (cf. [9]) (voir aussi JAMISON [4]). Nous allons voir que l'hypothèse de régularité plus faible (R_ϕ) de la section V suffit pour cette étude.

Reprenant une méthode standard (voir par exemple [11]), nous sommes conduits à considérer la chaîne 'espace-temps' et donc à introduire l'opérateur de transition défini sur $[0,1] \times \mathbb{N}$ par :

$$Q_u F(x,p) = u\Big(\frac{x}{2}\Big) F\Big(\frac{x}{2}, p+1\Big) + u\Big(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Big) F\Big(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}, p+1\Big).$$

Nous nous intéresserons aux fonctions Q_u-harmoniques, *i.e.* aux fonctions H sur $[0,1] \times \mathbb{N}$ telles que $Q_u H = H$, soit encore, en posant $h_n = H(\cdot, n)$, aux suites de fonctions $(h_n,\ n \geq 0)$ telles que, pour tout $n \geq 0$, $P_u h_{n+1} = h_n$.

Notation. — Nous appelons $\mathcal{A}$ l'espace des fonctions continues Q_u-harmoniques bornées H telles que la famille de fonctions

$$\{h_n = H(\cdot, n),\ \ n \geq 0\}$$

soit *équicontinue.*

Fonctions Q_u-harmoniques et martingales.

D'une manière analogue à la PROPOSITION 4.1, on démontre la

PROPOSITION 6.1. — *Soit H une fonction borélienne bornée sur $[0,1]\times\mathbb{N}$ vérifiant $Q_u H = H$. Alors, pour tout $(x,p) \in [0,1] \times \mathbb{N}$, le processus $\{H(Z_n(x,\cdot), n+p),\ n \geq 0\}$ défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ est une martingale bornée relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_n,\ n \geq 0\}$. Ce processus converge donc $\mathbb{P}_x$-p.s. et l'on a*

$$H(x,p) = \mathbb{E}_x\Big[H\big(Z_n(x,\cdot), n+p\big)\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\lim_{n\to\infty} H\big(Z_n(x,\cdot), n+p\big)\Big].$$

En outre, pour tout entier $r \geq 1$, et tous $\xi_1, \ldots, \xi_r \in \{S_0, S_1\}$, on a, $\mathbb{P}_x$-p.s.,

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\big(H(\xi_r \cdots \xi_1 Z_n(x,\cdot), n+r+p) - H\big(Z_n(x,\cdot), n+p)\big)^2 u\big(\xi_r \cdots \xi_1 Z_n(x,\cdot)\big) \cdots u\big(\xi_1 Z_n(x,\cdot)\big)\Big] = 0.$$

THÉORÈME 6.2. — *L'espace vectoriel $\mathcal{A}$ est de dimension finie. Il existe un entier d tel que*

$$H(x,p+d) = H(x,p), \quad \textit{pour tout } H \in \mathcal{A}, \textit{ et tout } x \textit{ dans } [0,1].$$

Si la fonction u vérifie une condition de régularité (R_ϕ), alors P_u^d possède un nombre fini de probabilités invariantes extrémales $\{\nu_k,\ 0 \le k \le q\}$ portées par des compacts disjoints.

Pour tout $0 \le i \le d-1$ et pour tout $x \in [0,1]$, la suite de mesures de probabilités $\{P_u^{nd+i}(x,\cdot),\ n \ge 1\}$ converge étroitement vers une combinaison linéaire des mesures ν_k.

Preuve. — Soit H un élément de $\mathcal{A}$ et $\{\varphi(n), n \ge 0\}$ une suite d'entiers telle que, pour tout entier $p \ge 0$, la suite $\{H(\cdot, \varphi(n)+p),\ n \ge 0\}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction notée $\tau_H(\cdot,p)$.

Nous avons alors

$$H(x,p) = \mathbb{E}_x\Big[\lim_{n\to\infty} \tau_H\big(Z_{\varphi(n)}(0,\cdot),p\big)\Big], \tag{1}$$

pour tout $(x,p) \in [0,1] \times \mathbb{N}$, et, pour tout $r \ge 1$, pour tout $\xi_1,\dots,\xi_r \in \{S_0, S_1\}$, $\mathbb{P}_x$-p.s.

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\Big(\tau_H\big(\xi_r\cdots\xi_1 Z_{\varphi(n)}(0,\cdot), r+p\big) - \tau_H\big(Z_{\varphi(n)}(0,\cdot),p\big)\Big)^2 \times u\big(\xi_r\cdots\xi_1 Z_{\varphi(n)}(0,\cdot)\big)\cdots u\big(\xi_1 Z_{\varphi(n)}(0,\cdot)\big)\Big] = 0.$$

Soit $\Omega_1(H)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui vérifient les deux propriétés :

- pour tout $p \ge 0$, $\lim_{n\to\infty} \tau_H(Z_{\varphi(n)}(0,\omega),p)$ existe;
- pour tout $r \ge 1$ et pour tout $\xi_1,\dots,\xi_r \in \{S_0,S_1\}$,

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\Big(\tau_H\big(\xi_r\cdots\xi_1 Z_{\varphi(n)}(0,\omega), r+p\big) - \tau_H\big(Z_{\varphi(n)}(0,\omega),p\big)\Big)^2 \times u\big(\xi_r\cdots\xi_1 Z_{\varphi(n)}(0,\omega)\big)\cdots u\big(\xi_1 Z_{\varphi(n)}(0,\omega)\big)\Big] = 0.$$

D'après la PROPOSITION 6.1, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathbb{P}_x[\Omega_1(H)] = 1$.

Pour tout élément ω de Ω, notons $B(\omega)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\{Z_{\varphi(n)}(0,\omega),\ n \ge 0\}$. Rappelons que $A(\omega)$ désigne l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $\{Z_n(0,\omega),\ n \ge 1\}$.

On a $B(\omega) \subset A(\omega)$, et, puisque la suite $\{\tau_H(Z_{\varphi(n)}(0,\omega),p),\ n \geq 0\}$ converge pour tout entier $p \geq 0$, la fonction $\tau_H(\cdot,p)$ est nécessairement constante sur $B(\omega)$.

Considérons le sous-ensemble $G(H)$ des $(y,p) \in [0,1] \times \mathbb{N}$ tels que, pour tout $r \geq 1$ et pour tout $\xi_1,\ldots,\xi_r \in \{S_0,S_1\}$

$$\Big(\tau_H(\xi_r\cdots\xi_1 y, p+r) - \tau_H(y,p)\Big)^2 u(\xi_r\cdots\xi_1)\cdots u(\xi_1) = 0.$$

L'ensemble $G(H)$ est formé des points x de $[0,1] \times \mathbb{N}$ tels que τ_H soit constant sur l'orbite (de la chaîne espace-temps) de (y,p). Posons

$$M(H) = \bigcup_{\omega\in\Omega_1(H)} B(\omega).$$

L'ensemble $G(H)$ contient $M(H)\times\mathbb{N}$ et la fonction H est, compte-tenu de la formule (1), déterminée par la restriction de τ_H à $G(H)$ ou seulement à $M(H) \times \mathbb{N}$.

Étude des fonctions $\{\tau_H(z,\cdot), z \in M(H)\}$.

Nous allons montrer que cette famille est finie et formée de fonctions de périodes inférieures à $\left[\dfrac{1}{2\delta}\right] + 1$.

Soient (y,p) et (z,p) deux éléments de $G(H)$. Si y et z possèdent des trajectoires $\{\xi_n\cdots\xi_1 y,\ n \geq 1\}$ et $\{\eta_n\cdots\eta_1 z,\ n \geq 1\}$ pour lesquelles il existe une suite d'entiers $\{\psi(n),\ n \geq 1\}$ telle que les suites $\{\xi_{\psi(n)}\cdots\xi_1 y,\ n \geq 1\}$ et $\{\eta_{\psi(n)}\cdots\eta_1 y,\ n \geq 1\}$ convergent vers une même limite, alors il est clair que $\tau_H(y,p) = \tau_H(z,p)$. En particulier, d'après le point a) de la preuve de la PROPOSITION 3.1, pour x et y dans $M(H)$, nous avons $\tau_H(y,p) = \tau_H(z,p)$, dès que $|y-z| < 2\delta$. La famille de fonctions sur $\mathbb{N}$, $\{\tau_H(z,\cdot), z \in M(H)\}$, est donc finie.

Soit $z \in M(H)$. Nous posons $l = [1/2\delta] + 1$. Pour toute trajectoire $\{\xi_n\cdots\xi_1 z, n \geq 1\}$ de z, l'ensemble $\{z,\xi_1 z,\ldots,\xi_l\cdots\xi_1 z\}$ possède deux points dont la distance est strictement inférieure à 2δ. Autrement dit, il existe deux entiers r et s, $0 \leq r < s \leq l$, tels que :

$$\left|\xi_r\cdots\xi_1 z - \xi_s\cdots\xi_1 z\right| < 2\delta.$$

Nous avons alors, pour tout $p \geq 0$,

$$\begin{gathered}\tau_H(z,p) = \tau_H(\xi_r\cdots\xi_1 z, p+r) = \tau_H(\xi_s\cdots\xi_1 z, p+s), \quad \text{et} \\ \tau_H(\xi_r\cdots\xi_1 z, p+s) = \tau_H(\xi_s\cdots\xi_1 z, p+s).\end{gathered}$$

D'où l'on déduit que, pour tout $p \geq 0$, $\tau_H(z,p) = \tau_H(z,p+s-r)$.

Pour tout $z \in M(H)$, la fonction $\tau_H(z,\cdot)$ est donc périodique, de période inférieure à l, et il existe un plus petit entier $d > 0$ $(1 \leq d \leq l\,!)$ tel que, pour tout $z \in M(H)$, pour tout $p \geq 0$, $\tau_H(z,p) = \tau_H(z,p+d)$. On en déduit, d'après (1), que

$$\text{pour tout } x \in [0,1], \text{ et tout } p \geq 0, \; H(x,p) = H(x,p+d).$$

En outre, la sous-suite $\{\varphi(n),\ n \geq 0\}$ peut être choisie de la forme $\{nd,\ n \geq 0\}$.

Classes cycliques.

a) De ce qui précède, il résulte qu'il existe un entier, noté encore d, commun à toutes les fonctions de $\mathcal{A}$, tel que

$$\forall H \in \mathcal{A},\ \forall x \in [0,1],\ \forall p \geq 0, \quad H(x,p) = H(x,p+d).$$

Ceci implique en particulier que l'espace $\mathcal{A}$ est séparable. Posons

$$\Omega_1 = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} \Omega_1(H), \quad G = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} G(H),$$
$$M = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} M(H) = \bigcap_{\omega \in \Omega_1} B(\omega).$$

Nous avons, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathbb{P}_x[\Omega_1] = 1$.

Soit $z \in M$. Appelons $d(z)$ la plus petite période commune aux fonctions $\{\tau_H(z,\cdot), H \in \mathcal{A}\}$ et pour tout entier $j \geq 0$, posons

$$L(j,z) = \Big\{ y \in M : \tau_H(y,p) = \tau_H(z,p+j),\ \forall p \geq 0,\ \forall H \in \mathcal{A} \Big\}.$$

Ces ensembles possèdent les propriétés suivantes :

(i) $\forall j \geq 0$, $L(j,z) = L(j+d(z),z)$;

(ii) les ensembles $L(j,z)$, $0 \leq j < d(z)$ sont disjoints;

(iii) $\forall y \in L(j,z)$ et $\forall \xi \in \{S_0, S_1\}$ tels que $u(\xi y) > 0$ et $\xi y \in M$, $\xi x \in L(j+d(z)-1,z)$.

b) Nous avons en outre la propriété suivante : si t est un élément de M tel que les orbites fermées de t et de z aient un point commun, alors t appartient à l'ensemble $\bigcup_{1 \leq j \leq d(z)} L(j,z)$.

En effet, l'hypothèse sur t implique qu'il existe des trajectoires $\{\xi_n \cdots \xi_1 z,\ n \geq 1\}$ et $\{\eta_n \cdots \eta_1 z,\ n \geq 1\}$ de t et de z, et des suites d'entiers $\{\varphi(n),\ n \geq 1\}$ et $\{\psi(n),\ n \geq 1\}$ telles que les sous-suites $\{\xi_{\varphi(n)} \cdots \xi_1 z,\ n \geq 1\}$ et $\{\eta_{\psi(n)} \cdots \eta_1 z,\ n \geq 1\}$ convergent vers la même limite. Quitte à prendre des sous-suites, nous pouvons supposer les suites considérées de la forme $\varphi(n) = \Phi(n)d + k$ et $\psi(n) = \Psi(n)d + l$, avec $k, l \in \{0, \ldots, d-1\}$, et pour tout $n \geq 0, \Phi(n) \geq \Psi(n)$. Pour tout $H \in \mathcal{A}$ et tout $p \geq 0$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}\tau_H(z, p+l) &= \tau_H(\xi_{\varphi(n)} \cdots \xi_1 z, p + d\Phi(n) + k + l),\\ \tau_H(t, p+k) &= \tau_H(t, p + k + d(\Phi(n) - \Psi(n)))\\ &= \tau_H(\eta_{\psi(n)} \cdots \xi_1 t, p + d\Phi(n) + l + k).\end{aligned}$$

De l'équicontinuité de la famille de fonctions $\{\tau_H(\cdot, n),\ n \geq 0\}$, il résulte alors que, pour tout $p \geq 0$, $\tau_H(z, p+l) = \tau(t, p+k)$. D'où la propriété annoncée.

c) Reprenons les notations de la section IV. Soit k un entier appartenant à $\{1, \ldots, m\}$. Choisissons un élément $z(k)$ de $L_k = M \cap F(y_k)$. Sous les hypothèses du théorème, nous avons :

$$L_k = \bigcup_{1 \leq j \leq d(z(k))} L(j, z(k)).$$

[En effet, dans $F(y_k)$, il ne peut exister deux éléments d'orbites fermées disjointes, car alors il existerait des fonctions harmoniques continues non constantes sur $F(y_k)$.]

Dans le cas général, il existe des éléments $z(k,1), \ldots, z(k, s(k))$ de L_k dont les orbites fermées sont disjointes tels que

$$L_k = \bigcup_{1 \leq i \leq s(k)} \bigcup_{1 \leq j \leq d(z(k,i))} L(j, z(k,i)).$$

d) Ce qui précède montre que nous pouvons représenter chaque élément H de $\mathcal{A}$ sous la forme suivante

$$H(x,p) = \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{1 \leq j \leq d(z(k))} \tau_H(z(k), p+j) \mathbb{P}_x \Big[\Big\{ \omega \in \Omega_1 : B(\omega) \subset L\big(j, z(k)\big) \Big\} \Big].$$

Dans le cas général, cette formule s'écrit :

$$H(x,p) = \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{1 \leq i \leq s(k)} \sum_{1 \leq j \leq d(z(k,i))} \tau_H(z(k,i), p+j) \mathbb{P}_x \Big[\Big\{ \omega \in \Omega_1 : B(\omega) \subset L\big(j, z(k,i)\big) \Big\} \Big].$$

Comportement des itérés de P_u.

L'hypothèse du théorème, compte-tenu de la PROPOSITION 5.2, assure que, pour toute fonction continue f, la suite de fonctions $\{P_u^n f,\ n \geq 0\}$ est équicontinue. Il existe donc une suite d'entiers $\{\varphi(n),\ n \geq 0\}$ telle que, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, et pour tout entier $p \geq 0$, la suite de fonctions $\{P_u^{\varphi(n)d-p} f,\ n \geq 0\}$ converge uniformément sur $[0,1]$. La limite, notée $H_f(\cdot,p)$ définit un élément H_f de $\mathcal{A}$.

Pour tous entiers n, k tels que $nd \geq \varphi(k)d + p$, nous avons

$$\begin{aligned}\left\|P_u^{nd-p} f - H_f(\cdot,p)\right\|_\infty &= \left\|P_u^{nd-\varphi(k)d-p}\big(P_u^{\varphi(k)d} f - H_f(\cdot,0)\big)\right\|_\infty \\ &\leq \left\|P_u^{\varphi(k)d} f - H_f(\cdot,0)\right\|_\infty .\end{aligned}$$

On en déduit que la suite de fonctions $\{P_u^{nd-p} f,\ n \geq 0\}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $H_f(\cdot,p)$, et donc, en reprenant les notations précédentes, vers la fonction

$$\sum_{1\leq k\leq m}\ \sum_{1\leq j\leq d(z(k))} \tau_H(z(k),p+j)\mathbb{P}_x\Big[\Big\{\omega \in \Omega_1 : B(\omega) \subset L\big(j,z(k)\big)\Big\}\Big].$$

En posant

$$\int f(x)\nu_{k,j}(\mathrm{d}x) = \tau_{H_f}\big(z(k),p+j\big),$$

on définit une mesure de probabilité $\nu_{k,j}$, qui est la limite pour la convergence étroite de la suite de probabilités $\{P_u^{nd-p}(z(k),\cdot),\ n \geq 0\}$.

Pour tout $x \in [0,1]$, la suite de probabilités $\{P_u^{nd-p}(x,\cdot),\ n \geq 0\}$ converge étroitement vers

$$\sum_{1\leq k\leq m}\ \sum_{1\leq j\leq d(z(k))} \mathbb{P}_x\Big[\Big\{\omega \in \Omega_1 : B(\omega) \subset L\big(j,z(k)\big)\Big\}\Big]\nu_{k,j}.$$

Le théorème s'en déduit.

Remarques.

1) Il résulte du théorème précédent que l'espace $\mathcal{A}$ est engendré par les fonctions propres de P_u, associées à des valeurs propres racines d-ièmes de l'unité. (Pour une autre approche de ce type de résultat, voir JAMISON [4].)

2) Sous l'hypothèse (R_ϕ), la convergence de la suite $\{P_u^n,\ n \geq 1\}$ est équivalente au fait que l'espace $\mathcal{A}$ est réduit aux constantes. Par analogie avec les définitions données en II, nous dirons qu'un compact F de $[0,1]$ est *d-invariant* si, pour tout $x \in F$ et tout mot $(\sigma_d,\dots,\sigma_1)$ de $\{S_0,S_1\}^d$

tels que $u(\sigma_d \cdots \sigma_1 x) \cdots u(\sigma_1 x) > 0$, on a $\sigma_d \cdots \sigma_1 x \in F$. Nous dirons que u est *d-proximale* s'il n'existe pas deux compacts d-invariants disjoints.

Il résulte alors du point a) de la preuve de la PROPOSITION 3.1 que la distance entre deux compacts d-invariants disjoints est $\geq 2\delta$. La dimension de $\mathcal{A}$ est égale au nombre maximal de compacts d-invariants disjoints, où d est la plus petite période commune aux éléments de $\mathcal{A}$. Il en résulte que l'espace $\mathcal{A}$ est réduit aux constantes si et seulement si u est d-proximale pour tout entier $d \geq 1$.

3) Supposons que u n'ait qu'un nombre fini de zéros. Alors, si u est proximale, ou bien il existe une unique mesure invariante qui est diffuse, ou bien il existe un unique cycle périodique de période d invariant et différent de $\{0\}$ et de $\{1\}$. Dans ce deuxième cas, u n'est évidemment pas d-proximale. Si, au contraire, u n'est pas proximale, il existe des cycles périodiques invariants disjoints, et les mesures invariantes sont discrètes, portées par ces cycles périodiques.

VII. Exemples et applications

Les résultats précédents vont nous permettre de construire des exemples de fonctions u pour lesquelles l'espace $\mathcal{H}$ n'est pas réduit aux constantes.

Exemple 1.
Considérons les sous ensembles de $\{S_0, S_1\}^3$ définis par

$$A = \{(0,0,0)\} \quad \text{et} \quad B = \{S_0, S_1\}^3 - \{(0,0,0),(1,1,1)\}.$$

Appelons F l'ensemble des réels $v = \sum_{k\geq 1} i_k(v) 2^{-k}$ de $[0,1]$ tels que, pour tout $k \geq 1$, le triplet $(i_k(v), i_{k+1}(v), i_{k+2}(v))$ appartienne à B. Le compact F est formé de réels dont le développement dyadique ne comporte pas trois '0' ou trois '1' consécutifs. Il est de mesure de Lebesgue nulle. Posons

$$F_0 = \{v \in F : i_1(v) = 0\} \quad \text{et} \quad F_1 = \{v \in F : i_1(v) = 1\}.$$

Soit u une fonction höldérienne sur $[0,1]$ s'annulant sur les sous-ensembles $S_1 S_1 S_1 F_0$ et $S_0 S_0 S_0 F_1$ de $[0,1]$, ainsi qu'au point $\frac{1}{2}$. Les compacts F, $\{0\}$ et $\{1\}$ de $[0,1]$ sont invariants, et l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions P_u-harmoniques continues est de dimension ≥ 3 d'après le THÉORÈME 5.3.

On peut également choisir une fonction u de classe C^∞ s'annulant sur

$$\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{1}{14}, \frac{3}{28}\right] \cup \left[\frac{25}{28}, \frac{13}{14}\right]$$

et ne s'annulant pas ailleurs. Comme on a les inclusions :

$$S_1 S_1 S_1 F_0 \subset \Big[\frac{1}{14}, \frac{3}{28}\Big] \quad \text{et} \quad S_0 S_0 S_0 F_1 \subset \Big[\frac{25}{28}, \frac{13}{14}\Big],$$

l'espace $\mathcal{H}$ est de dimension supérieure ou égale à 3; mais on peut vérifier que $\{0\}$ et $\{1\}$ sont les seules orbites périodiques invariantes.

Exemple 2.

Considérons maintenant les sous-ensembles de $\{S_0, S_1\}^3$ définis par

$$A = \Big\{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\Big\},$$
$$B = \Big\{(1,1,1),(0,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\Big\}.$$

Appelons F [resp. G] l'ensemble des réels $v = \sum_{k\geq 1} i_k(v) 2^{-k}$ de $[0,1]$ tels que, pour tout $k \geq 1$, le triplet $(i_k(v), i_{k+1}(v), i_{k+2}(v))$ appartienne à A [resp. à B]. Comme précédemment, les compacts F et G sont de mesure de Lebesgue nulle.Posons

$$F_0 = \big\{v \in F : i_1(v) = 0\big\} \quad \text{et} \quad G_1 = \big\{v \in G : i_1(v) = 1\big\}.$$

Soit u une fonction höldérienne sur $[0,1]$ s'annulant sur les sous-ensembles $S_1 S_1 F_0$ et $S_0 S_0 G_1$ de $[0,1]$. Les compacts F et G de $[0,1]$ sont invariants, et l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions P_u-harmoniques continues est de dimension ≥ 2 d'après le THÉORÈME 5.3. Comme ci-dessus, nous pouvons même choisir une fonction u de classe C^∞ s'annulant sur

$$\Big[\frac{1}{8}, \frac{1}{7}\Big] \cup \Big[\frac{6}{7}, \frac{7}{8}\Big].$$

On vérifie que, si u ne s'annule pas ailleurs, il n'existe aucune orbite périodique invariante.

Exemple 3.

a) Soit $u(x) = \cos^2(\pi x)$.

Il existe alors deux cycles périodiques $\{0\}$ et $\{1\}$. L'espace $\mathcal{H}$ est donc de dimension 2. Une base de $\mathcal{H}$ est constituée par les fonctions h_0 et h_1 définies par

$$h_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad h_1(x) = \mathbb{P}_x\big[\lim_{n\to+\infty} Z_n(0,\cdot) = 0\big].$$

On note que la fonction h_1 est symétrique par rapport au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: $h_1(x) + h_1(1-x) = 1$.

b) Soit $u(x) = \cos^2(3\pi x)$.

Il existe trois cycles périodiques $\{0\}$, $\{1\}$, et $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$. L'espace $\mathcal{H}$ est de dimension 3. Une base de $\mathcal{H}$ est constituée par les fonctions h_0, $h_2(x) = \sin^2(3\pi x)/\sin^2(\pi x)$ et $h_2 h_1$.

On note que l'on obtient, par exemple, que la probabilité que la chaîne de Markov s'approche de l'ensemble invariant $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ est donnée par

$$\mathbb{P}_x\Big[\lim_n d\Big(Z_n(0,\cdot), \Big\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big\}\Big) = 0\Big] = 1 - \frac{h_2(x)}{9}.$$

c) Soit $u(x) = \cos^2(5\pi x)$.

Il existe trois cycles périodiques $\{0\}$, $\{1\}$, et $\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$. L'espace $\mathcal{H}$ est de dimension 3. Une base de $\mathcal{H}$ est constituée par les fonctions h_0, $h_3(x) = \sin^2(5\pi x)/\sin^2(\pi x)$ et $h_3 h_1$.

Application à une équation fonctionnelle.

On vérifie facilement que les fonctions $1/\sin^2(\pi x)$ et $h_1(x)/\sin^2(\pi x)$ vérifient l'équation fonctionnelle suivante

$$(*) \qquad \forall x \in\,]0,1[, \quad f(x) = \frac{1}{4}\Big[f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big)\Big],$$

Ces fonctions constituent une base de l'espace vectoriel des fonctions continues f sur $]0,1[$, solutions de l'équation fonctionnelle (*) et telles que $f(x)\sin^2(\pi x)$ soit prolongeable par continuité en 0 et en 1.

Par intégration, on obtient ainsi que l'espace vectoriel des fonctions f de classe C^1 sur $]0,1[$, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(**) \qquad \forall x \in\,]0,1[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big)\Big],$$

et telles que $f'(x)\sin^2(\pi x)$ soit prolongeable par continuité en 0 et en 1 est de dimension trois, une base en étant donnée par la fonction constante égale à 1, la fonction $\operatorname{cotg}(\pi x)$, et une primitive de la fonction $h_1(x)/\sin^2(\pi x)$ sur $]0,1[$.

A l'aide de la fonction h_1 nous avons ainsi construit une solution non évidente de l'équation (**). (Nous remercions G. LETAC qui a attiré notre attention sur cette équation.)

A première vue, il ne paraît pas possible d'exprimer la fonction h_1 de façon élémentaire à l'aide de fonctions 'classiques'. On remarque que la fonction u étant ici de classe C^∞, h_1 est également de classe C^∞, d'après la proposition suivante :

PROPOSITION 7.1. — *Si u est de classe C^p, les fonctions P_u-harmoniques continues sont de classe C^p.*

Preuve. — Supposons u de classe C^1. Soit h une fonction P_u-harmonique. Montrons que h est de classe C^1. Un raisonnement analogue montrerait que h est de classe C^p si u est de classe C^p.

Si l'on dérive formellement l'équation fonctionnelle vérifiée par h, on obtient pour h' une équation fonctionnelle de la forme :

$$\tfrac{1}{2}P_u h'(x) + \gamma(x) = h'(x),$$

où γ est définie par $\gamma = \frac{1}{2}P_{u'}h$. Il en résulte que la dérivée h', si elle existe, est de la forme $h' = \sum_0^\infty 2^{-k}P_u^k\gamma$.

Inversement, nous définissons une fonction g continue en posant :

$$g = \sum_0^\infty 2^{-k}P_u^k\gamma.$$

Sous l'hypothèse de différentiabilité sur u qui est faite ici, les fonctions harmoniques continues sont nécessairement lipschitziennes (PROPOSITION 5.2). L'existence d'une dérivée, en presque tout point, pour h en résulte. De plus, cette fonction est mesurable et bornée, et h en est une primitive. Il est alors clair que h' s'identifie à la fonction continue g. □

VIII. Une méthode de construction de fonctions P_u-harmoniques

Soit u une fonction de période 1 positive, vérifiant une condition (R_ϕ), telle que $u(x) + u(x + \frac{1}{2}) = 1$, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, et $u(0) = 1$.

Sous les conditions vérifiées par u dans ce paragraphe, nous pouvons préciser le comportement des itérés P_u^n.

THÉORÈME 8.1. — *L'espace des fonctions P_u-harmoniques continues et périodiques est réduit aux constantes si et seulement s'il n'existe pas de compact invariant disjoint de $\{0,1\}$. Dans ce cas, pour toute fonction f continue périodique de période 1, on a la convergence*

$$\lim_{n\to\infty} P_u^n f(x) = f(0).$$

Preuve. — Sous les hypothèses du théorème, nous savons (voir section IV) que la chaîne de Markov $\{Z_n(x,\cdot),\ n \geq 0\}$ converge $\mathbb{P}_x$-p.s. soit vers 0, soit vers 1. En particulier, il en résulte que la mesure de Dirac en 0 est l'unique probabilité invariante pour l'opérateur P_u opérant sur le cercle $\mathbb{T}^1$. Si f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$, il en résulte que

$$\lim_n P_u^n f(x) = \lim_n \mathbb{E}_x\big[f\big(Z_n(x,0)\big)\big] = f(0). \quad \square$$

Considérons maintenant la fonction V définie par le produit infini

$$V(x) = \prod_{j=1}^{\infty} u\Big(\frac{x}{2^j}\Big). \tag{1}$$

La condition (R_ϕ) assure la convergence de ce produit et la continuité de V. Plus précisément on a :

LEMME 8.2. — *Il existe une constante C telle que*

$$\big|V(x) - V(y)\big| \le C \sum_{k\ge 1} \phi\big(|x-y|/2^k\big).$$

Preuve. — Soit $c \in]0,1[$ tel que $m_\phi(u)\phi(c) < 1$. Pour tous $x, y \in [0,c]$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Log} u(x) - \operatorname{Log} u(y)| &= \Big|\sum_{k\ge 1} \frac{(-1)^k}{k}\Big[\big(u(x)-1\big)^k - \big(u(y)-1\big)^k\Big]\Big| \\
&\le \big|u(x)-u(y)\big| \sum_{k\ge 1} \frac{1}{k}\Big(\big|u(x)-1\big|^{k-1} + \cdots + \big|u(y)-1\big|^{k-1}\Big) \\
&\le m_\phi(u)\phi\big(|x-y|\big)\frac{1}{1-m_\phi(u)\phi(c)}.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit le résultat. $\square$

Par un argument employé dans la construction des ondelettes, on montre que V est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, d'intégrale au plus égale à 1. En effet, posons

$$V_n(x) = \prod_{j=1}^{n} u\Big(\frac{x}{2^j}\Big).$$

On vérifie les égalités

$$\int_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}} V_n(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \text{pour tout } n \ge 1,$$

et on en déduit, par le lemme de Fatou

$$\int_{\mathbf{R}} V(x)\,\mathrm{d}x \leq 1.$$

Formons maintenant à partir de V la fonction périodique h définie par

$$h(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} V(x+k).$$

La fonction est dans $L^1(\mathbb{T}^1)$ et est semi-continue inférieurement. Elle vérifie $h(0) = 1$ et $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x \leq 1$. D'autre part, de la relation fonctionnelle

$$V(x) = u\Big(\frac{x}{2}\Big)V\Big(\frac{x}{2}\Big),$$

il résulte que h est P_u-harmonique.

On peut ainsi utiliser les résultats sur les fonctions P_u-harmoniques pour étudier la fonction h.

THÉORÈME 8.3. — *S'il n'existe pas de fermé invariant disjoint de $\{0,1\}$, la fonction h est identiquement égale à 1. C'est en particulier le cas si u ne possède qu'un nombre fini de zéros et s'il n'existe pas de cycle périodique invariant autre que $\{0\}$ et $\{1\}$.*

Preuve. — Si la fonction h est continue, on conclut immédiatement, en appliquant le THÉORÈME 8.1.

L'exemple le plus simple de cette situation est celui où l'on prend $u(x) = \cos^2(\pi x)$. La fonction V est alors $V(x) = \sin^2(\pi x)/\pi^2 x^2$, et on obtient l'identité classique

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{\sin^2(\pi x)}{(x+k)^2} = \pi^2.$$

Dans le cas général, la continuité de h n'est pas assurée, du moins pas de façon évidente sous la seule hypothèse (R_ϕ). Nous pouvons raisonner de la manière suivante.

Soit f une fonction périodique continue, minorant la fonction h. D'après le THÉORÈME 8.1, on a $\lim_n P_u^n f(x) = f(0)$. Des inégalités $P_u^n f(x) \leq h(x)$, pour tout $n \geq 1$, on déduit que h est minorée par $f(0)$. On peut choisir pour f les fonctions périodiques coincidant sur $[0,1]$ avec $h_N(x) = \sum_{-N}^{N} V(x+k)$, pour $N \geq 1$. Il en résulte que h est minorée par 1 en tout point. Comme son intégrale est majorée par 1 et qu'elle est semi-continue inférieurement, elle est partout égale à 1. ☐

Remarques.

a) Si u possède une orbite périodique différente de $\{0\}$ et de $\{1\}$, il est facile de voir que la fonction h définie précédemment s'annule en certains points.

b) Nous allons voir que la condition du THÉORÈME 8.3 apparaît dans la construction des bases d'ondelettes orthogonales.

IX. Application aux ondelettes

Dans la construction des bases d'ondelettes orthogonales suivant la méthode de l'analyse multi-résolution (cf. [6, 7]), l'une des étapes revient à caractériser les suites réelles $w = (w_n,\ n \in \mathbb{Z})$ telles que les solutions Φ de l'équation fonctionnelle

$$\frac{1}{2}\Phi\Big(\frac{t}{2}\Big) = \sum w_n \Phi(t-n), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

soient des fonctions de carré intégrable dont les translatées entières sont deux à deux orthogonales (de fait ces solutions doivent vérifier des conditions de régularité plus fortes). Dans cette section, nous établissons des conditions qui assurent cette orthogonalité.

Nous supposons dans la suite de cette section, que $w = (w_n, n \in \mathbb{Z})$ est une suite réelle vérifiant les conditions (C) suivantes :

$$\sum w_n = 1, \qquad \sum \frac{|w_n|}{\phi(1/n)} < \infty, \tag{C}$$

pour une fonction ϕ continue sur $[0,1]$, positive, croissante, nulle en zéro, telle que la fonction $x \mapsto \phi(x)/x$ soit décroissante sur $[0,1]$, et telle que $\sum_{k\geq 1} \phi(2^{-k}) < \infty$.

On pourra prendre, par exemple, $\phi(x) = (1 + \log(x))^{-(1+\epsilon)}$, pour un $\epsilon > 0$.

Notons W la fonction de période 1, dans $L^2(\mathbb{T}^1)$, dont w est la suite des coefficients de Fourier

$$W(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n x}.$$

LEMME 9.1. — *Il existe une constante $C < \infty$ telle que*

$$\big|W(x) - W(y)\big| \leq C\phi\big(|x-y|\big).$$

Preuve. — En utilisant les hypothèses de croissance de ϕ et de décroissance de $x \mapsto \phi(x)/x$, on obtient

$$\begin{aligned}
2\big|W(x) - W(y)\big| &\leq 2\pi \sum_{1\leq|n|<1/|x-y|} |w_n|\,|n|\,|x-y| + 2 \sum_{|n|\geq 1/|x-y|} |w_n| \\
&\leq 2\pi \sum_{1\leq|n|<1/|x-y|} \frac{|w_n|}{\phi(1/n)}\,|n|\,\phi(1/n)\,|x-y| \\
&\qquad + 2 \sum_{|n|\geq 1/|x-y|} \frac{|w_n|}{\phi(1/n)}\phi(1/n) \\
&\leq \Big(C_1 \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{|w_n|}{\phi(1/n)}\Big)\phi(|x-y|). \quad \square
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier $\widehat{\Phi}$ d'une solution Φ de l'équation fonctionnelle (1) doit vérifier $\widehat{\Phi}(2x) = W(x)\widehat{\Phi}(x)$, soit

$$\widehat{\Phi}(x) = W\Big(\frac{x}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{x}{2}\Big), \tag{2}$$

et la condition d'orthogonalité des translatées entières de Φ s'écrit :

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \big|\widehat{\Phi}(x+k)\big|^2 = 1. \tag{3}$$

La relation (2) détermine $\widehat{\Phi}$ à partir de w :

$$\widehat{\Phi}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} W\Big(\frac{x}{2^j}\Big). \tag{4}$$

Compte-tenu du LEMME 9.1, les résultats de la section VIII montrent que la définition de $\widehat{\Phi}$ par (4) est valide sous les conditions vérifiées par la suite w.

Si on choisit $\phi(x) = x^\alpha$, pour un $\alpha > 0$, on obtient pour $\widehat{\Phi}$ une fonction höldérienne d'exposant α.

Considérons l'opérateur P_u associé à la fonction $u = |W|^2$ de $C(\mathbb{T}^1)$, défini par :

$$(P_u f)(x) = u\Big(\frac{x}{2}\Big)f\Big(\frac{x}{2}\Big) + u\Big(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Big)f\Big(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Big).$$

Formons la fonction θ périodisée de $|\widehat{\Phi}|^2$, c'est-à-dire

$$\theta(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\Phi}|^2(x+k).$$

La fonction θ est invariante par l'opérateur P_u. Pour que les translatées entières de Φ soient orthogonales, il faut que θ soit identiquement égale à 1, ce qui implique que W doit vérifier la condition nécessaire :

$$|W(x)|^2 + |W(x+\tfrac{1}{2})|^2 = 1. \tag{7}$$

La question se pose de déterminer dans quels cas cette condition implique, inversement, que les translatées entières de la fonction Φ solution de (1) engendre un système orthogonal dans $L^2(\mathbb{R})$.

Une condition équivalente au fait que la fonction θ est identiquement égale à 1 a été donnée par A. COHEN [1]. Les remarques précédentes montrent que cette question est reliée à l'étude des fonctions harmoniques de l'opérateur P_u. Grâce aux résultats précédents, nous pouvons donner une caractérisation simple du cas d'orthogonalité :

THÉORÈME 9.2. — *Soit $(w_n,\ n \in \mathbb{Z})$ une suite vérifiant les conditions (C) et telle que la fonction W associée vérifie (7). La fonction Φ solution de (1) engendre par translations entières un système orthogonal dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement s'il n'existe pas de compact invariant disjoint de $\{0,1\}$. Si W n'a qu'un nombre fini de zéros, par exemple si le vecteur w est de longueur finie, une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité est qu'il n'existe pas de cycle périodique invariant autre que $\{0\}$ ou $\{1\}$.*

X. Produit aléatoire d'opérateurs de transition

Considérons une fonction u définie sur $\mathbb{T}^1$, positive, vérifiant la condition

$$\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}],\ \ u(x) + u(x+\tfrac{1}{2}) = 1.$$

Dans cette section, nous considérons l'opérateur P_u associé à u comme agissant sur l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{T}^1$ muni de la norme uniforme (que nous noterons encore E).

Si nous supposons u höldérienne d'ordre $\alpha > 0$, l'opérateur P_u opère aussi sur l'espace des fonctions höldériennes sur $\mathbb{T}^1$ d'ordre α. Changeant légèrement les notations de la section V, nous notons L_α cet espace et nous le munissons de la norme $\|\ \|_\alpha$ définie par

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + m_\alpha(f).$$

où m_α est définie par

$$m_\alpha(f) = \sup\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha},\quad x,y \in [0,1],\ x \neq y \right\}.$$

Nous avons vu, section V, que P_u vérifie les hypothèses du THÉORÈME 5.1 (théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu). Il existe des réels ρ et C, avec $0 \le \rho < 1$ et $C > 0$, tels que :

$$\forall f \in L_\alpha, \quad \|P_u f\|_\alpha \le \rho \|f\|_\alpha + C\|f\|_\infty.$$

Nous supposons que les fonctions constantes sont les seules fonctions propres de module 1 de P_u. Notons que, dans le cas de la fonction u intervenant dans la construction des ondelettes orthogonales à support compact (voir section IX), cette condition est satisfaite.

Il existe alors une unique mesure de probabilité P_u-invariante ν sur $\mathbb{T}^1$ telle que

$$\forall f \in L_\alpha, \quad P_u f = \int f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) + Qf,$$

où Q est un opérateur sur L_α de rayon spectral strictement inférieur à 1. Le comportement des itérés de P_u est donc ici particulièrement simple à décrire. Nous allons dans cette section généraliser cette étude au cas d'un produit aléatoire de plusieurs contractions du type P_u.

Considérons maintenant une famille $\{u_k, 0 \le k \le N\}$ de fonctions définies sur $\mathbb{T}^1$, positives, höldériennes, vérifiant la condition

$$\forall x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right], \quad u_k(x) + u_k\left(x + \tfrac{1}{2}\right) = 1,$$

et telles que les opérateurs P_{u_k} n'aient que les constantes comme fonctions propres de valeur propre de module 1.

Pour simplifier les notations, nous notons P_k l'opérateur P_{u_k} associé à u_k. L'opérateur P_k est donc défini par

$$P_k f(x) = u_k\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) + u_k\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Pour chaque $i \in \{0, \ldots, N\}$, il existe des réels $C_i > 0$ tels que

$$\forall f \in L_\alpha, \quad \|P_i f\|_\alpha \le \rho \|f\|_\alpha + C_i \|f\|_\infty,$$

avec $\rho = 2^{-\alpha}$. Soit C le plus grand des nombres C_i. Pour $i \in \{0, \ldots, N\}$, la décomposition donnée par le théorème Ionescu-Tulcea et Marinescu est notée : $P_i = \nu_i + Q_i$.

LEMME 10.1. — *Il existe une constante $D > 0$ telle que*

$$\forall f \in L_\alpha,\ \forall p \ge 1,\ \forall i_1, \ldots, i_p \in \{0, \ldots, N\}, \quad \|Q_{i_1} \cdots Q_{i_p} f\|_\alpha \le D \|f\|_\alpha.$$

Preuve. — L'inégalité résulte des majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\|Q_{i_1}Q_{i_2}\cdots Q_{i_p}f\|_\alpha &= \|Q_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_p}f\|_\alpha \\ &= \|Q_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_p}f\|_\infty + m_\alpha(Q_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_p}f) \\ &\le 2\|f\|_\infty + m_\alpha(P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_p}f) \\ &\le 2\|f\|_\infty + \rho\, m_\alpha(P_{i_2}\cdots P_{i_p}f) + C\|f\|_\infty \\ &\le \cdots \\ &\le (2 + C + C\rho + \cdots + C\rho^{p-1})\|f\|_\infty + \rho^p m_\alpha(f).\end{aligned}$$

THÉORÈME 10.2. — *Soient $\{Y_k,\ k \ge 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$. Alors, pour toute fonction f de L_α et pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite de fonctions $\{P_{Y_n(\omega)}\cdots P_{Y_1(\omega)}f, n \ge 1\}$ converge (avec une vitesse exponentielle) vers une fonction constante.*

Preuve. — Les opérateurs $\{Q_i, i \in \{0, \dots, N\}$ ayant des rayons spectraux strictement inférieurs à 1, pour tout réel $\tau > 0$, il existe un entier $p(\tau) \ge 1$, tel que

$$\|Q_i^{p(\tau)}f\|_\alpha \le \tau\|f\|_\alpha, \quad i = 0, \dots, N.$$

Fixons un réel $\tau < 1/D$ et notons p l'entier $p(\tau)$ correspondant.

Pour un ω dans Ω, découpons un intervalle d'entiers $\{1, \dots, np\}$ en n blocs de longueur p, et comptons combien de fois le p-uple $(Y_{kp+1}, \dots, Y_{(k+1)p})$ est constitué des mêmes valeurs. Plus précisément, pour $\omega \in \Omega$, et n entier ≥ 1, posons

$$l_n(\omega) = \sum_{0 \le k \le n-1} \mathbf{1}_{\{Y_{kp+1} = \cdots = Y_{(k+1)p}\}}.$$

D'après la loi des grands nombres, la suite $\{l_n(\cdot)/n,\ n \ge 1\}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers une limite $\gamma > 0$. En notant $[x]$ la partie entière d'un réel x, nous avons alors

$$\|Q_{Y_n}\cdots Q_{Y_1}f\|_\infty \le D(D\tau)^{l_{[n/p]}(\cdot)}\,\|f\|_\alpha,$$

avec $D\tau < 1$, et $\lim_n l_{[n/p]}/n = \gamma/p > 0$ $\mathbb{P}$-p.s.

Le théorème résulte alors de la décomposition

$$\begin{aligned}P_{Y_n}\cdots P_{Y_1}f = \nu_{Y_1}(f) + \nu_{Y_2}(Q_{Y_1}f) + \cdots \\ + \nu_{Y_n}(Q_{Y_{n-1}}\cdots Q_{Y_1}f) + Q_{Y_n}\cdots Q_{Y_1}f. \quad \square\end{aligned}$$

Remarque. — L'assertion du THÉORÈME 10.2 s'étend immédiatement au cas d'un processus stationnaire et ergodique. La loi des grands nombres est alors remplacée par le théorème ergodique, mais nous devons alors supposer qu'il existe des cylindres de longueur $\geq p$, de la forme $\{Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_p\}$ de probabilité non nulle.

XI. Application au filtrage

Algorithme pyramidal et signaux stationnaires.

Nous allons maintenant appliquer le résultat précédent à l'étude des processus obtenus par application de la décomposition pyramidale de la théorie des ondelettes. Partant d'un processus stationnaire, nous allons voir que l'application du schéma pyramidal fournit une famille arborescente de processus, dont le THÉORÈME 10.2 permet de décrire le comportement asymptotique : l'application du schéma pyramidal revient à effectuer une décomposition du processus initial en 2^n processus qui, dans le cas d'un processus régulier et pour n assez grand, sont assimilables à des bruits blancs. Nous donnons une description informelle de la méthode qui sera reprise ultérieurement.

Soit $X = (X_n,\ n \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire de mesure spectrale μ :

$$\mathbb{E}(X_n\overline{X}_0) = \int_0^1 \exp(i2\pi n\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda).$$

Soit $w = (w_n, n \in \mathbb{Z})$ une suite (dans l^2) , et considérons la transformation $X \mapsto T_0X$ appliquée au processus (X_n) consistant à filtrer par le filtre associé à w, puis à 'décimer' :

$$(T_0X)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k X_{2n-k}.$$

Notons W la fonction de transfert de w, $W(\lambda) = \sum_n w_n \exp(i2\pi n\lambda)$, et soit u définie par $u(\lambda) = |W(\lambda)|^2$. Le processus T_0X est encore stationnaire. Notons $P_0\mu$ sa mesure spectrale. Elle vérifie

$$\int_0^1 \exp(i2\pi n\lambda)\,\mathrm{d}(P_0\mu)(\lambda) = \int_0^1 \exp(i4\pi n\lambda)u(\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda).$$

Elle se déduit donc de μ par

$$\int_0^1 f(\lambda)\,\mathrm{d}(P_0\mu)(\lambda) = \int_0^1 f(2\lambda)u(\lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda), \quad \text{pour toute } f \in C(\mathbb{T}^1).$$

Dans le cas où μ a une densité g, $\mathrm{d}\mu(\lambda) = g(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, la mesure $P_0\mu$ est la mesure $(P_u g)\,\mathrm{d}\lambda$, où P_u est l'opérateur de transition associé à u défini en II.

Nous supposerons que la suite w est telle que la fonction u associée vérifie

$$u(\lambda) + u\big(\lambda + \tfrac{1}{2}\big) = 1,$$

ce qui revient à se placer dans le cadre des filtres associés à la construction des ondelettes orthogonales (cf. section IX). Notons que l'on peut cependant appliquer le raisonnement à des filtres plus généraux. De plus, pour pouvoir appliquer le THÉORÈME 10.2, nous ferons une hypothèse de régularité höldérienne ($\sum |w_n| n^{\epsilon} < \infty$, pour un $\epsilon > 0$), hypothèse qui sera évidemment satisfaite si w est à support fini.

En même temps que le filtre défini par w, considérons le filtre conjugué w^1 défini par $w^1_n = (-1)^n w_{1-n}$. Le couple (w, w^1) constitue un couple de filtres QMF (*quadrature mirror filtrers*). Nous pouvons alors définir une opération T_1 sur l'espace des processus stationnaires, $X \mapsto T_1 X$, en posant

$$(T_1 X)_n = \sum_{k\in\mathbf{Z}} w^1_k X_{2n-k}.$$

On obtient la mesure spectrale de $T_1 X$ en remplaçant dans les raisonnements précédents la fonction $u_0 = u$ par la fonction u_1 définie par $u_1(x) = u(x + \frac{1}{2})$.

L'algorithme pyramidal [6] consiste à appliquer à un signal X les opérateurs T_0 et T_1, (correspondant à une décomposition en signal lissé et innovation, ou encore à l'application d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut), puis à itérer ce procédé sur les signaux transformés obtenus. Partant du processus stationnaire X, nous obtenons à la n-ième itération une collection de 2^n processus stationnaires,

$$T_{\omega_n} T_{\omega_{n-1}} \cdots T_{\omega_1} X,$$

indexés par les chemins $(\omega_n, \ldots, \omega_1) \in \{0,1\}^n$ de longueurs n formés de 0 et de 1, qui correspondent à chaque niveau au choix de la transformation T_0 ou T_1.

Mettons sur l'espace $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ des chemins infinis la probabilité produit équiprobable, et notons Y_n, $n \geq 1$, la suite des applications coordonnées. On obtient comme corollaire du THÉORÈME 10.2 :

THÉORÈME 11.1. — *Soit X un processus stationnaire dont la mesure spectrale a une densité continue. Alors, pour presque tout chemin ω, la* *densité de la mesure spectrale du processus $T_{Y_n} \cdots T_{Y_1} X$ converge vers une constante.*

Remarque. — La méthode probabiliste utilisée a permis d'établir simplement un résultat de convergence presque-sûre. Il doit être possible d'obtenir en fait une convergence pour toutes les trajectoires.

Effet de l'algorithme sur les mesures ponctuelles.

Nous venons de voir l'effet de l'algorithme pyramidal sur les processus stationnaires dont la mesure spectrale à une densité. A l'opposé, considérons un processus stationnaire dont les mesures spectrales sont assimilables à une combinaison de mesures ponctuelles. Dans le cas simple où la mesure spectrale est une masse de Dirac δ_α, l'application de la transformation T_0 au processus fournit un processus de mesure spectrale $u(\alpha)\delta_{\tau\alpha}$, où $\tau\alpha = 2\alpha \bmod 1$.

L'application de l'algorithme pyramidal le long d'un chemin $\omega_n, \ldots, \omega_1$, c'est-à-dire l'application au processus X du produit d'opérateurs $T_{\omega_n} T_{\omega_{n-1}} \cdots T_{\omega_1}$ fournit un processus dont la mesure spectrale est donnée par

$$\prod_1^n u_{\omega_i}(\tau^{i-1}\alpha)\delta_{\tau^n\alpha}$$

Compte-tenu de la forme des fonctions u_0 et u_1 (filtre passe-bas et filtre passe-haut), ce produit est proche de zéro pour tous les chemins, sauf pour deux chemins particuliers (quatre dans le cas où α est dyadique) associés à la représentation dyadique de α.

Une méthode de filtrage.

Pour un processus dont une composante a un spectre discret, le parcours, dans l'algorithme pyramidal, des chemins de plus grande énergie permet de localiser ce spectre discret. Le THÉORÈME 11.1 montre que, par contre, pour une composante régulière du processus (avec un spectre ayant une densité), l'algorithme pyramidal fournit une énergie répartie sur l'ensemble des 2^n chemins d'ordre n.

Une méthode non paramétrique d'analyse d'un signal stationnaire, basée sur la recherche de chemins particuliers à l'aide de critères d'énergie et de tests de bruits blancs peut être développée à partir de ces remarques.

XII. Applications à la théorie ergodique et généralisations

Dans l'étude des mesures invariantes des systèmes dynamiques définis par des transformations dilatantes, M. KEANE a introduit le formalisme des 'g-mesures'.

En considérant, pour simplifier, comme nous l'avons fait jusqu'ici, la transformation $\tau : x \mapsto 2x \bmod 1$ sur $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, les g-mesures peuvent être définies, avec nos notations, comme les mesures de probabilité sur X invariantes par un opérateur de la forme P_u introduit en II. (Ici u remplace g.) Ces mesures sont invariantes par la transformation τ.

Pour une fonction $u > 0$ et de classe C^1, la convergence de la suite $(P_u^n f(x),\ n \geq 1)$, pour toute f continue sur X est établie dans [5]. La limite est une constante de la forme $\mu(f)$, où μ est une mesure P_u-invariante, qui est l'unique g-mesure associée à u.

Certains cas particuliers où u peut s'annuler sont envisagés dans [5]. D'autres articles abordent des problèmes de convergence analogues (voir par exemple JAMISON [4], ou les travaux liés au formalisme des mesures de GIBBS, par exemple WALTERS [12]). Les résultats des sections IV,V et VI étendent ces différentes études au cas où u peut s'annuler, et au cas où u ne vérifie qu'une condition faible de régularité.

THÉORÈME 12.1. — *Si u vérifie une condition de régularité (R_ϕ), alors il existe un nombre fini de 'g-mesures' extrémales associées à u. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une unique 'g-mesure' associée à u est que u soit proximale. Si u ne possède qu'un nombre fini de zéros, cette condition est satisfaite si et seulement s'il n'existe pas deux cycles périodiques invariants disjoints.*

Généralisations.

Des situations plus générales que celles que nous venons de décrire peuvent être envisagées. Comme dans [5], nous pouvons par exemple considérer un espace métrique compact (X, d), un homéomorphisme local τ de X dans lui-même, qui soit partout $n \to 1$, et tel que, pour une constante $\rho > 1$, on ait $d(\tau x, \tau y) \geq \rho d(x, y)$, pour $d(x, y)$ assez petit. Si u est une fonction dans l'espace $C(X)$ des fonctions continues sur X telle que

$$\sum_{y:\tau(y)=x} u(y) = 1,$$

on peut considérer l'opérateur P_u défini sur $C(X)$ par

$$P_u f(x) = \sum_{y:\tau(y)=x} u(y) f(y).$$

Soit p un entier ≥ 2. La transformation définie par le 'shift' sur un espace produit de la forme $\{1,\ldots,p\}^{\mathbb{N}}$, pour un entier $p \geq 2$, les transformations définies sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par $x \mapsto px$ mod 1 rentrent dans ce cadre.

La transformation associée au développement en fraction continue, $x \mapsto \{1/x\}$ peut également être envisagée.

La plupart des résultats des sections IV,V et VI s'étendent sans difficulté à cette situation générale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COHEN (A.). — Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroirs en quadrature, 1989, *preprint*.

[2] DAUBECHIES (I.). — Orthonormal basis of compactly supported wavelets, *Communication in pure and applied mathematics*, t. **XLI**, n° 7, 1988, p. 909–996.

[3] IONESCU-TULCEA (C.T.) and MARINESCU (G.). — Théorie ergodique pour une classe d'opérations non complètement continues, *Annals of Math.*, t. **52**, 1950, p. 140–147.

[4] JAMISON (B.). — Asymptotic behaviour of successive iterates of continuous functions under a Markov operator, *J. of Math. Analysis and Applications*, t. **9**, 1964, p. 203–214.

[5] KEANE (M.). — Strongly mixing g-measures, *Inventiones Math.*, t. **16**, 1972, p. 309–324.

[6] MALLAT (S.). — Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$, *Trans. Amer. Math Soc.*, t. **315**, n° 1, 1989, p. 69–88.

[7] MEYER (Y.). — *Ondelettes et Opérateurs*. — Hermann, 1990.

[8] NEVEU (J.). — *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*. — Masson, 1964.

[9] NORMAN (M. F.). — *Markov Processes and Learning Models*. — Academic Press, 1972.

[10] RAUGI (A.). — Périodes des fonctions harmoniques bornées, *Séminaires de Rennes*, 1978.

[11] REVUZ (D.). — *Markov Chains*. — North Holland Pub. Comp., 1975.

[12] WALTERS (P.). — Ruelle's operator theorem and g-measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **214**, 1975, p. 375–387.