BULLETIN DE LA S. M. F.

MOSTAFA KRACHNI

Prolongement d’applications holomorphes

Bulletin de la S. M. F., tome 118, nº 2 (1990), p. 229-240

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_2_229_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 229–240.

PROLONGEMENT D'APPLICATIONS HOLOMORPHES

PAR

MOSTAFA KRACHNI (*)

RÉSUMÉ. — On dit qu'une variété complexe X est holomorphiquement extensifère (resp. méromorphiquement extensifère, resp. holomorphiquement extensifère en dehors de la codimension au moins 2), si toute application holomorphe définie sur l'ouvert de Hartogs T contenu dans le polydisque Δ^n et à valeurs dans X, se prolonge holomorphiquement à Δ^n (resp. méromorphiquement à Δ^n, resp. holomorphiquement au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension au moins 2). Soient X et Y deux variétés complexes et $\phi : X \to Y$ une application holomorphe. On démontre que si Y admet un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ tel que :

1) Y est holomorphiquement extensifère et pour tout $i \in I$, $\phi^{-1}(U_i)$ est holomorphiquement extensifère (resp. méromorphiquement extensifère) alors X est holomorphiquement extensifère, (resp. méromorphiquement extensifère).

2) Y est projective et pour tout $i \in I$, $\phi^{-1}(U_i)$ est holomorphiquement extensifère alors X est holomorphiquement extensifère en dehors de la codimension au moins 2.

Comme conséquences de ces résultats, on montre que toute variété homogène compacte est holomorphiquement extensifère en dehors de la codimension au moins 2 et que toute variété presque homogène compacte kählerienne est méromorphiquement extensifère.

ABSTRACT. — We shall say that a complex manifold is holomorphically extensifer (resp. meromorphically extensifer, resp. holomorphically extensifer outside the codimension at least 2) if any holomorphic mapping defined on the Hartogs domain T contained in polydisc Δ^n, to X, extends holomorphically to Δ^n (resp. meromorphically to Δ^n, resp. holomorphically in the complementary of an analytic subset of Δ^n of codimension at least 2). Let X and Y be two complex manifolds and $\phi : X \to Y$ a holomorphic mapping. We prove that if Y admits an open covering $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ such that :

1) Y is holomorphically extensifer and for every $i \in I$, $\phi^{-1}(U_i)$ is holomorphically extensifer (resp. meromorphically extensifer) then X is holomorphically extensifer (resp. meromorphically extensifer).

2) Y is a projective manifold and for every $i \in I$, $\phi^{-1}(U_i)$ is holomorphically extensifer then X is holomorphically extensifer outside the codimension at least two.

As consequences of these results. We obtain any compact homogeneous manifold is holomorphically extensifer outside the codimension at least 2, and any compact almost homogeneous Kähler manifold is meromorphically extensifer.

(*) Texte reçu le 20 juillet 1989, révisé le 11 mai 1990.
M. KRACHNI, Univ. de Provence, UFR de Mathématiques, URA 225 du CNRS, 3 Place Victor Hugo, 13331 Marseille Cedex 3, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1990/229/$ 5.00

Nous démontrons dans cet article, que toute application holomorphe $f : T \to X$ de l'ouvert de Hartogs T de $\mathbb{C}^n$, à valeurs dans une variété homogène compacte X, se prolonge holomorphiquement au complémentaire dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$ d'un sous-ensemble analytique de codim ≥ 2.

Je remercie G. Dloussky pour l'aide qu'il m'a donnée au cours de ce travail.

1. Définitions et préliminaires

Soit M une variété complexe. Un domaine étalé (Ω, π) au-dessus de M est la donnée d'une variété complexe et connexe Ω et d'une application localement biholomorphe π de Ω dans M.

Soient (Ω, π) et (Ω', π') deux domaines étalés au-dessus d'une variété M ; une application holomorphe λ de Ω dans Ω' telle que $\pi' \circ \lambda = \pi$ s'appelle *morphisme de domaines étalés.*

Considérons deux domaines étalés $(\Omega; \pi)$ et $(\Omega'; \pi')$ au-dessus d'une variété M et $\lambda : \Omega \to \Omega'$ un morphisme de domaines étalés.

Soit f une application holomorphe (resp. méromorphe) de Ω dans une variété complexe X et f' une application holomorphe (resp. méromorphe) de Ω' dans X. On dit que $(\lambda, \Omega', \pi', f')$ est un *prolongement holomorphe* (resp. *méromorphe*) de f si $f' \circ \lambda = f$. Et on dit que $(\lambda, \Omega', \pi', f')$ est un *prolongement maximal holomorphe* (resp. *méromorphe*) de f si :

i) $(\lambda, \Omega', \pi', f')$ est un prolongement holomorphe (resp. méromorphe) de f ;

ii) si $(\lambda'', \Omega'', \pi'', f'')$ est un autre prolongement holomorphe (resp. méromorphe) de f, il existe un unique morphisme de domaines étalés $\Psi : \Omega'' \to \Omega'$ tel que :

$$f' \circ \Psi = f'' \quad \text{et} \quad \Psi \circ \lambda'' = \lambda.$$

Dans ce cas (Ω', π') s'appelle le *domaine d'existence holomorphe* (resp. *méromorphe*) de f.

La théorie élémentaire des faisceaux (Malgrange [11]) montre le résultat suivant :

Lemme 1.0. — *Soit (Ω, π) un domaine étalé au-dessus d'une variété complexe M et f une application holomorphe (resp. méromorphe) de Ω dans une variété complexe X. Alors il existe un unique domaine d'existence holomorphe (resp. méromorphe) de f.*

On note T l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$\begin{aligned} T = T_{\rho,\tau} = &\{Z \in \mathbb{C}^n : |Z_i| < \rho,\ i = 1, \ldots, n-1\ ; |Z_n| < 1\} \\ &\cup \{Z \in \mathbb{C}^n : |Z_i| < 1,\ i = 1, \ldots, n-1\ ;\ \tau < |Z_n| < 1\} \end{aligned}$$

avec $0 < \rho < 1$ et $0 < \tau < 1$..

Pour tout domaine étalé (Ω, π) on note $(\tilde{\lambda}; \tilde{\Omega}; \tilde{\pi})$ son enveloppe d'holomorphie. L'enveloppe d'holomorphie $\tilde{T}$ de T est égale au polydisque Δ^n.

Définition 1.1. (voir [13]). — Soient X et Y deux variétés complexes. On appelle *application méromorphe* $\bar{f} : X \to Y$ de X dans Y la donnée d'une application holomorphe $f : A \to Y$ définie sur un ouvert de X tel que :

i) $X \setminus A$ est mince;

ii) la fermeture $\overline{G}_f$ du graphe de f dans $X \times Y$ soit un sous-ensemble analytique de $X \times Y$ tel que la projection canonique $\pi : \overline{G}_f \to X$ soit propre.

Il en résulte immédiatement de la définition que π est surjective. On dit que $x \in X$ est un point régulier s'il existe un voisinage U de x dans X tel que $\overline{G}_f \cap (U \times Y)$ soit le graphe d'une application holomorphe.

REMMERT [13, paragraphe 6 et Théorème 26] montre que l'ensemble des points non régulier d'une application méromorphe est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2.

Définition 1.2. — Soit X une variété complexe. On dit que X est *holomorphiquement* (resp. *méromorphiquement*) extensifère si toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement (resp. méromorphiquement) à Δ^n.

Exemples.

1) Les variétés de Stein sont holomorphiquement extensifère [2].

2) Un groupe de Lie complexe connexe et simplement connexe est une variété de Stein [4b]; et par conséquent les groupes de Lie complexes et les variétés parallélisables compactes sont holomorphiquement extensifère. En effet, une variété complexe est holomorphiquement extensifère si et seulement si son revêtement universel est holomorphiquement extensifère [10]; et le revêtement universel d'une variété parallélisable compacte est un groupe de Lie complexe [14].

3) $P^n(\mathbb{C})$ et les variétés projectives sont méromorphiquement extensifère [6, 9].

Définition 1.3. — Soit (Ω, π) un domaine étalé au-dessus d'une variété de Stein M.

1) On appelle *T-application* une application holomorphe $\varphi : T \to \Omega$, biholomorphe sur son image telle que $\pi \circ \varphi$ se prolonge en une application biholomorphe de Δ^n dans M.

2) On dit que (Ω, π) est *T-convexe* si toute T-application φ de T

dans Ω se prolonge en une application biholomorphe $\tilde{\varphi}$ de Δ^n dans Ω.

THÉORÈME 1.4. — *Soit* (Ω, π) *un domaine étalé au-dessus d'une variété de Stein* M, *on a équivalence des relations suivantes :*

i) X *est méromorphiquement extensifère.*

ii) *Toute application méromorphe de* T *dans* X *se prolonge méromorphiquement à* Δ^n.

iii) *Toute application holomorphe de* Ω *dans* X *se prolonge méromorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie* $(\tilde{\lambda}, \widetilde{\Omega}, \tilde{\pi})$ *de* (Ω, π).

iv) *Toute application méromorphe de* Ω *dans* X *se prolonge méromorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie* $(\tilde{\lambda}, \widetilde{\Omega}, \tilde{\pi})$ *de* (Ω, π).

v) *Le domaine d'existence méromorphe de toute application holomorphe de* Ω *dans* X *est de Stein.*

vi) *Le domaine d'existence méromorphe de toute application méromorphe de* Ω *dans* X *est de Stein.*

Démonstration. — Les implications ii) $\Rightarrow$ i) ; iv) $\Rightarrow$ iii) et vi) $\Rightarrow$ v) sont évidentes.

iii) $\Rightarrow$ ii). Soit $f : T \to X$ une application méromorphe ; $A := \operatorname{sing} f$ est un sous-ensemble analytique et $\operatorname{codim} A \geq 2$. $f : T \setminus A \to X$ étant une application holomorphe elle se prolonge méromorphiquement à $\widetilde{T \setminus A} = \Delta^n$.

v) $\Rightarrow$ iv). Soit $f : \Omega \to X$ une application méromorphe ; f est holomorphe en dehors d'un sous-ensemble analytique A avec $\operatorname{codim} A \geq 2$; et par hypothèse le domaine d'existence méromorphe que l'on note $(\lambda, \Omega', \pi', f')$ de $f : \Omega \setminus A \to X$ est de Stein. L'application λ étant à valeurs dans Ω' elle se prolonge holomorphiquement en $\widetilde{\lambda}'$ à $\widetilde{\Omega \setminus A} = \widetilde{\Omega}$ et $f' \circ \widetilde{\lambda}'$ est un prolongement méromorphe de f à $(\tilde{\lambda}, \widetilde{\Omega}, \tilde{\pi})$.

ii) $\Rightarrow$ vi). Soit $f : \Omega \to X$ une application méromorphe ; on peut supposer que le domaine d'existence méromorphe de f au-dessus de M est (Ω, π). D'après le théorème de DOCQUIER–GRAUERT [5], il suffit de montrer que (Ω, π) est localement pseudoconvexe au-dessus de M.

Soit $\varphi : T \to \Omega$ une T-application ; notons $\tilde{k}$ le prolongement biholomorphe de $\pi \circ \varphi$ à Δ^n ; par hypothèse $f \circ \varphi$ se prolonge en une application méromorphe qu'on note $\widetilde{F}$ (voir la Figure 1 page suivante).

On recolle Ω et Δ^n de la façon suivante :

Soit U la composante connexe de $\pi^{-1}(\tilde{k}(\Delta^n))$ contenant $\varphi(T)$ et $U' := \tilde{k}^{-1}(\pi(U))$, l'application $\pi_{|\varphi(T)}$ étant injective ; $\pi_{|U}$ reste injective et $\tilde{k}^{-1} \circ \pi : U \to U'$ est un isomorphisme, ce qui permet de recoller Ω et Δ^n le long de U et U'.

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \arrow[dd, "\widetilde{k}"'] \arrow[drrr, "\widetilde{F}"] & & & \\
& T \arrow[ul, hook'] \arrow[r, "\varphi"] & \Omega \arrow[r, "f"'] \arrow[dll, "\pi"] & X \\
M & & &
\end{tikzcd}$$

Figure 1.

Soit V la variété obtenue munie de la topologie quotient ; par construction V est munie d'un homéomorphisme local

$$\pi' : V \longrightarrow M \quad \text{tel que} \quad \pi'_{|\Omega} = \pi \quad \text{et} \quad \pi'_{|\Delta^n} = \tilde{k}.$$

De plus V est séparé. En effet, soient $x_1, x_2 \in V$. Le seul cas non évident est celui où x_1 est dans l'adhérence de U dans Ω et x_2 dans l'adhérence de $U' = U$ dans Δ^n.

Si x_1 et x_2 ne peuvent être séparés, il existe une suite $(Z_n)_n$ dans $U = U'$ tel que (Z_n) converge vers x_1 dans Ω et vers x_2 dans Δ^n. Mais alors

$$\pi(x_1) = \lim\big(\pi_{|U}\big)(Z_n) = \lim\big(\tilde{k}_{|U'}\big)(Z_n) = \tilde{k}(x_2).$$

Donc $x_1 \in \overline{U} \cap \pi^{-1}(\tilde{k}(\Delta^n))$, c'est-à-dire $x_1 \in U$. Mais puisque x_1 et x_2 sont dans Δ^n, $x_1 = x_2$.

Soit g l'application méromorphe de V dans X définie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \quad \text{pour } x \in \Omega\,; \\ g(x) &= \widetilde{F}(x) \quad \text{pour } x \in \Delta^n. \end{aligned}$$

g est bien définie sur $\varphi(T)$ et, puisque U est connexe, g est bien définie sur V.

L'injection de Ω dans $\Omega \cup \Delta^n$ induit une application biholomorphe sur son image $i : \Omega \to V$. On a $g \circ i = f$ et donc (i, V, π', g) est un prolongement méromorphe de f et, comme (Ω, π) est le domaine d'existence méromorphe de f, il existe un morphisme de domaine étalé $j : V \to \Omega$ tel que :

$$j \circ i = \mathrm{id}_\Omega \quad (1)\,; \qquad \pi \circ j = \pi' \quad (2)\,; \qquad f \circ j = g \quad (3)$$

$$\begin{tikzcd} & {} & \\ V \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, shift left, "j"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \Omega \arrow[ul, "f"'] \arrow[ll, shift left, "i"] \arrow[dl, "\pi"] \\ & M\,. & \end{tikzcd}$$

D'autre part, si $x = i(y) \in i(\Omega) \subset V$

$$i \circ j(x) = i \circ j(i(y)) = i(y) = x.$$

On a :

$$i \circ j_{|i(\Omega)} = (\mathrm{id}_V)_{|i(\Omega)}$$

et, d'après le théorème d'identité, $i \circ j = \mathrm{id}_V$. Finalement $V \cong \Omega$ et donc φ se prolonge biholomorphiquement à Δ^n ; d'où Ω est T-convexe, donc p_7-convexe, et, d'après [5], (Ω, π) est localement pseudoconvexe au-dessus de M.

L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est un cas particulier de iii) $\Rightarrow$ iv) en posant $\Omega = T$. Et avec la même méthode on démontre le résultat suivant :

PROPOSITION 1.5. — *Soit (Ω, π) un domaine étalé au-dessus d'une variété de Stein M. On a équivalence des relations suivantes*

i) *X est holomorphiquement extensifère.*

ii) *Toute application holomorphe de Ω dans X se prolonge holomorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie $(\tilde{\lambda}, \widetilde{\Omega}, \tilde{\pi})$ de (Ω, π).*

iii) *Le domaine d'existence holomorphe de toute application holomorphe de Ω dans X est de Stein.*

LEMME 1.6. — *Soient X et Y deux variétés complexes et $\phi : X \to Y$ une application holomorphe. On a équivalence des relations suivantes :*

i) *Il existe un recouvrement $\mathcal{V} = (U_i)_{i \in I}$ de Y tel que $\Phi^{-1}(U_i)$ est holomorphiquement extensifère pour tout $i \in I$.*

ii) *Pour tout $y \in Y$, il existe un système fondamental de voisinage $\mathcal{V}(y)$ de y tel que, pour tout $V \in \mathcal{V}(y)$, $\phi^{-1}(V)$ est holomorphiquement extensifère.*

Démonstration. — L'implication ii) $\Rightarrow$ i) est évidente.

i) $\Rightarrow$ ii).

Soit $V \subset U_i$ un ouvert de Stein et soit $f : T \to \phi^{-1}(V)$ une application holomorphe; f se prolonge holomorphiquement en $\tilde{f}$ à Δ^n à valeurs dans $\phi^{-1}(U_i)$.

D'autre part $\phi \circ f : T \to V$ se prolonge holomorphiquement en $\tilde{g} : \Delta^n \to V$ car V est de Stein.

On a $\phi \circ \tilde{f}_{|T} = \tilde{g}_{|T}$ et, par le théorème d'identité, $\tilde{g} = \phi \circ \tilde{f}$ et donc $\tilde{f}$ est à valeurs dans $\phi^{-1}(V)$.

2. Variétés extensifères

THÉORÈME 2.1. — *Soient X et Y deux variétés complexes et $\phi : X \to Y$ une application holomorphe. On suppose :*

a) *Y est holomorphiquement extensifère.*

b) *Il existe un recouvrement $\mathcal{V} = (U_i)_{i \in I}$ de Y tel que : $\phi^{-1}(U_i)$ est holomorphiquement extensifère (resp. méromorphiquement extensifère) pour tout $i \in I$.*

Alors X est holomorphiquement extensifère (resp. méromorphiquement extensifère).

Notons que dans le cas particulier où (X, ϕ, Y) est une fibration, ce résultat a été démontré par une autre méthode dans [8].

Démonstration du THÉORÈME 2.1. — Soit (Ω, π) un domaine étalé au-dessus d'une variété de Stein M et soit $f : \Omega \to X$ une application holomorphe.

Posons $g := \phi \circ f$; g étant à valeurs dans Y se prolonge holomorphiquement en $\tilde{g}$ à l'enveloppe d'holomorphie $(\tilde{\lambda}, \widetilde{\Omega}, \tilde{\pi})$ de (Ω, π).

Le morphisme de domaine étalé $\tilde{\lambda}$ permet de considérer Ω comme domaine étalé au-dessus de la variété de Stein $\widetilde{\Omega}$. L'application f possède un domaine d'existence holomorphe (resp. méromorphe) au-dessus de $\widetilde{\Omega}$ qu'on peut supposer $(\Omega, \tilde{\lambda})$.

Il suffit de montrer que ce domaine est de Stein et donc $\widetilde{\Omega} \cong \Omega$.

En utilisant le théorème de DOCQUIER–GRAUERT [5], il suffit de montrer que $(\Omega, \tilde{\lambda})$ est localement pseudoconvexe au-dessus de $\widetilde{\Omega}$.

Soit $z \in \widetilde{\Omega}$, par hypothèse il existe un voisinage U de $\tilde{g}(z)$ tel que $\phi^{-1}(U)$ est holomorphiquement extensifère (resp. méromorphiquement extensifère).

Soit $B(z)$ une boule centrée en z telle que $\tilde{g}(B(z)) \subset U$; il suffit de montrer que $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ est de Stein.

On a $f(\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))) \subset \phi^{-1}(U)$.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle\tilde{\lambda}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ \widetilde{\Omega} & \xrightarrow{\tilde{g}} & Y. \end{array}$$

Si $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z)) \neq \phi$, on se restreint à $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ et on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\lambda}^{-1}(B(z)) & \xrightarrow{f} & \phi^{-1}(U) \\ \downarrow{\scriptstyle\tilde{\lambda}} & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ B(z) & \xrightarrow[\tilde{g}]{} & U. \end{array}$$

$\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ est étalé au-dessus de $B(z)$; or $\phi^{-1}(U)$ est holomorphiquement extensifère (resp. méromorphiquement extensifère) ; donc d'après la PROPOSITION 1.5 (resp. le THÉORÈME 1.4) le domaine d'existence holomorphe (resp. méromorphe) de $f_{|\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))}$ au dessus de $B(z)$ est de Stein. Notons ce domaine $(\psi, \Omega', \pi', f')$.

On a $\Omega' \cong \tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$. En effet, Ω' est étalé au-dessus de $\widetilde{\Omega}$ par π' et puisque le domaine d'existence holomorphe (resp. méromorphe) au dessus de $\widetilde{\Omega}$ de $f_{|\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))}$ est $(i, \Omega, \tilde{\lambda}, f)$ où i est l'injection $i : \tilde{\lambda}^{-1}(B(z)) \to \Omega$; il existe un morphisme étalé de domaine $\varphi : \Omega' \to \Omega$ tel que $\varphi \circ \psi = i$; φ étant un morphisme de domaine étalé on a $\tilde{\lambda} \circ \varphi = \pi'$ et donc $\tilde{\lambda} \circ \varphi(\Omega') = \pi'(\Omega') \subseteq B(z)$ d'où φ est à valeurs dans $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$. Si $x \in \psi(\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ on a $\psi \circ \varphi(x) = x$ car $\psi \circ \varphi \circ \psi = \psi$. Donc $\psi \circ \varphi : \Omega' \to \Omega'$ est l'identité sur l'ouvert $\psi(\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ et par le théorème d'identité $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\Omega'}$ et donc $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z)) \cong \Omega'$ d'où $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ est de Stein.

Et finalement Ω est localement pseudoconnexe au-dessus de $\widetilde{\Omega}$.

THÉORÈME 2.2. — *Soit $\phi : X \to Y$ une application holomorphe. On suppose :*

a) *Y projective ;*

b) *il existe un recouvrement $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de Y tel que $\phi^{-1}(U_\alpha)$ est holomorphiquement extensifère pour tout $\alpha \in I$.*

Alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique Z de Δ^n tel que $\operatorname{codim} Z \geq 2$.

Démonstration. — Soit n le plus petit entier m pour lequel on a un plongement $Y \to \mathbb{P}^m$. Soit $H_i = \{[Z_0 : \cdots : Z_n]; Z_i = 0\}$; le complémentaire dans Y de H_i est de Stein.

On démontre le résultat par récurrence sur $\dim Y$; par BERTINI [1, page 45] on peut choisir le système de coordonnée $(Z_0, \ldots, Z_n)$ tel que $Y \cap H_i$ est lisse.

Si on remplace Y par $Y' := Y \cap H_i$, on peut supposer par l'hypothèse de récurrence que $\phi(X) \not\subset Y \cap H_i$.

Soit $f : T \to X$ une application holomorphe. Par le même argument on peut supposer que $f(T) \not\subset \phi^{-1}(H_i \cap Y)$.

On peut donc supposer que $\operatorname{codim} f^{-1}(\phi^{-1}(H_i)) \geq 1$. D'après le THÉORÈME 2.1 et le LEMME 1.6,

$$f : T \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(H_i)) \to X \setminus \phi^{-1}(H_i)$$

se prolonge holomorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie

$$[T \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(H_i))]^{\sim} \text{ de } T \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(H_i)).$$

Soient E_i et F_i les parties de $f^{-1}(\phi^{-1}(H_i))$ telles que E_i est de codimension pure 1 et $\operatorname{codim} F_i \geq 2$. On a :

$$[T \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(H_i))]^{\sim} = [(T \setminus E_i) \setminus F_i]^{\sim} = [T \setminus E_i]^{\sim}.$$

E_i étant une hypersurface de T ; d'après [4] $[T \setminus E_i]^{\sim}$ est isomorphe à $\Delta^n \setminus \widetilde{E}_i$ où $\widetilde{E}_i$ est une hypersurface de Δ^n telle que $E_i = \widetilde{E}_i \cap T$.

Posons $Z := \bigcap_{i=0}^n \widetilde{E}_i$; finalement f se prolonge holomorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$. Or

$$\begin{aligned} Z \cap T &= \bigcap_{i=0}^{n} (\widetilde{E}_i \cap T) = \bigcap_{i=0}^{n} E_i \\ &\subset \bigcap_{i=0}^{n} f^{-1}(\phi^{-1}(H_i)) \subset f^{-1}(\phi^{-1}(\bigcap_{i=0}^{n} H_i)) \\ &= \phi. \end{aligned}$$

Donc Codim $Z \geq 2$.

Remarque. — $X \setminus \phi^{-1}(H_i)$ est recouvert par des images réciproques holomorphiquement extensifères : cela se déduit immédiatement du LEMME 1.6 ; C. GELHAUS m'a proposé une autre démonstration que voici :

Les ouverts $\widetilde{U}_\alpha := U_\alpha \setminus H_i$ forment un recouvrement de $Y \setminus H_i$ et $\phi^{-1}(\widetilde{U}_\alpha) = \phi^{-1}(U_\alpha) \setminus \phi^{-1}(H_i)$ est holomorphiquement extensifère par le lemme suivant :

LEMME (C. GELHAUS). — *Soit X une variété complexe et $H \subset X$ une hypersurface analytique fermée. Si X est holomorphiquement extensifère alors $X \setminus H$ est holomorphiquement extensifère.*

Démonstration. — Soit $f : T \to X \setminus H$ une application holomorphe, f se prolonge holomorphiquement en $\tilde{f} : \Delta^n \to X$.

On a $\tilde{f}(\Delta^n) \cap H = \phi$. En effet, si $\tilde{f}(\Delta^n) \cap H \neq \phi$ alors $\tilde{f}^{-1}(H) \subset \Delta^n \setminus T$ est une hypersurface analytique fermée donc $\tilde{f}^{-1}(H) = \{g = 0\} \subset \Delta^n \setminus T$ où g est une fonction holomorphe sur Δ^n. Or la fonction $1/g$ définie sur T devrait se prolonger à Δ^n ce qui est impossible.

3. Variétés homogènes et presque homogènes

COROLLAIRE 3.1. — *Soit X une variété homogène compacte. Alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique Z de Δ^n tel que* codim $Z \geq 2$.

Démonstration. — D'après [3, page 435] ; X est un fibré localement trivial à base projective et à fibres connexes parallelisable et on conclut par le THÉORÈME 2.2.

L'exemple suivant montre que sous les hypothèses du THÉORÈME 2.2, le résultat obtenu ne peut être amélioré.

Exemple. — Soit X une surface de Hopf ; $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \,/\, G$ où G est engendré par la contraction γ ;

$$\gamma(Z_1, Z_2) = (\alpha Z_1, \alpha Z_2) \qquad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}^* : |\alpha| \leq 1$$

X est homogène compacte et la projection canonique $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to X$ ne se prolonge pas en 0 (même méromorphiquement) puisque l'adhérence $\overline{G}_p$ du graphe de p dans $\mathbb{C}^2$ contient $\{0\} \times X$; [6].

PROPOSITION 3.2. — *Soit X une variété presque homogène compacte Kählerienne. Alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge méromorphiquement à Δ^n.*

Démonstration. — Il existe un tore $A(X)$ (la variété d'Albanèse associée à X) et une application holomorphe $\alpha : X \to A(X)$ tels que $(X, \alpha, A(X))$ est un fibré localement trivial à fibres connexes F ([12], [7] page 83). Et puisque X est Kählerienne, F est projective algébrique [7, page 83] ;

la base étant un tore donc holomorphiquement extensifère et d'après THÉORÈME 2.1, X est méromorphiquement extensifère.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARTH (W.), PETERS (G.) and VAN DE VEN (A.). — *Compact complex surfaces*. — Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo, 1984.

[2] BENKHE (H.) und THULLEN (P.). — *Theorie der Funktionen mehrerer Komplexen Veränderlishen*. — Springer-Verlag, 1970.

[3] BOREL (A.) und REMMERT (R.). — Uber kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten, *Math. Annal.*, t. **145**, 1962, p. 429–439.

[4] DLOUSSKY (G.). — Enveloppes d'holomorphie et prolongements d'hypersurfaces, *Séminaire* Pierre LELONG, p. 217–235, 1975–76, *Lectures notes in Math.*, **578**, Springer, 1977.

[4b] DLOUSSKY (G.). — Prolongements d'applications analytiques, *Séminaire* Pierre LELONG, Henri SKODA p. 42–95, 1976–77, *Lectures notes in Math.*, **694**, Springer, 1978.

[5] DOCQUIER (F.) und GRAUERT (H.). — Levisches Problem und Rungerscher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, *Math. Annal.*, t. **140**, 1960, p. 94–123.

[6] GRIFFITHS (P.A.). — Two Theorems on extensions of Holomorphic Mappings, *Invent. Math.*, t. **14**, 1971, p. 27–62.

[7] HUCKELBERRY (A.) and OELJEKLAUSS (E.). — *Classification theorems for Almost Homogeneous spaces.* — Institut Elie Cartan, 1984.

[8] IVASHKOVICH (S.M.). — Extension of locally biholomorphic mappings into product of complex manifolds, *Math. USSR Izvestiya*, t. **27**, n° 1, 1986, p. 193–199.

[9] IVASHKOVICH (S.M.). — Extension of locally biholomorphic mappings of domains into complex projective space, *Math. USSR Izvestiya*, t. **22**, n° 1, 1984, p. 181–189.

[10] IVASHKOVICH (S.M.). — The Hartogs phenomen for holomorphically convex Kähler manifolds, *Math. USSR Izvestiya*, t. **29**, n° 1, 1987, p. 225–232.

[11] MALGRANGE (B.). — *Lectures on the theory of fonction of several complex variables.* — Tata Institute of fundamental Research Bombay, 1958.

[12] POTTERS (J.). — On almost homogeneous compact complex surfaces, *Invent. Math.*, t. **8**, 1969, p. 244–266.

[13] REMMERT (R.). — Holomorphe und meromorphe abbildungen komplexer Räume, *Math. Annalen*, t. **133**, 1957, p. 328–370.

[14] WANG (H.C.). — Complex parallelisable manifolds, *Proc. AMS*, t. **5**, 1954, p. 771–776.