BULLETIN DE LA S. M. F.

LAURENT MANIVEL

Sur la cohomologie des fibrés associés au fibré quotient universel sur la grassmannienne

Bulletin de la S. M. F., tome 118, n° 1 (1990), p. 67-84

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_1_67_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 67–84.

SUR LA COHOMOLOGIE DES FIBRÉS ASSOCIÉS AU FIBRÉ QUOTIENT UNIVERSEL SUR LA GRASSMANNIENNE

PAR

LAURENT MANIVEL (*)

RÉSUMÉ. — Une filtration convenable de l'image réciproque du fibré tangent de la grassmannienne d'un espace vectoriel complexe, sur la variété de ses drapeaux complets, nous permet de calculer, dans la lignée d'un travail de J.P. DEMAILLY, certains groupes de cohomologie de Dolbeault des fibrés associés au fibré quotient universel sur la grassmannienne. En particulier, nous établissons un résultat d'annulation de la cohomologie des puissances tensorielles de ce fibré tensorisées par une puissance assez grande de son déterminant. Le cas de ses puissances symétriques donne enfin de nouveaux contre-exemples à un énoncé de FALTINGS et une question de LE POTIER, tous deux infirmés par PETERNELL, LE POTIER et SCHNEIDER.

ABSTRACT. — Using a suitable filtration of the inverse image of the tangent bundle of the grassmannian of a complex vector space, on the variety of its complete flags, we determine, in the continuation of one of J.P. DEMAILLY's works, some cohomology groups of the vector bundles associated to the universal quotient bundle on the grassmannian. In particular, we obtain a vanishing property of the cohomology of the tensor powers of that bundle tensorized with large enough powers of its determinant. Lastly, the case of symmetric powers leads us to new counter-examples to a proposition of FALTINGS and a question raised by LE POTIER, both invalidated by PETERNELL, LE POTIER and SCHNEIDER.

1. Introduction

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension d, soient $G_r(V)$ la grassmannienne des sous-espaces de codimension r de V et $n = r(d-r)$ sa dimension, et soit E le fibré quotient universel sur la grassmannienne : E est un fibré holomorphe de rang r globalement engendré, donc semi-ample, et son fibré déterminant est ample. On se propose de calculer certains groupes de cohomologie de Dolbeault des fibrés associés au fibré

(*) Texte reçu le 30 mai 1989, révisé le 13 février 1990.
L. MANIVEL , Institut Fourrier, Univ. de Grenoble I, B.P. 74, 38402 St-Martin-d'Hères Cedex, France.

© Société mathématique de France

universel, calculs qui généralisent partiellement des résultats de LE POTIER [7] et de SNOW [9]. On utilisera principalement, pour cela, une filtration convenable de l'image réciproque du fibré $\eta^* \bigwedge^p T^* G_r(V)$ au-dessus de la variété $M(V)$ des drapeaux de V, dont les quotients sont des fibrés en droites de cohomologie connue et particulièrement simple, puisque donnée par le théorème de Bott. On établit en particulier l'annulation des groupes suivants :

PROPOSITION. — *Si $k \geq 0$ et $q \geq 1$, lorsque $\ell \geq \min(p, d-1)$, on a*

$$H^{p,q}\big(G_r(V), E^{\otimes k} \otimes (\det E)^{\ell}\big) = 0.$$

On pourra comparer ce résultat avec celui qu'implique le théorème d'annulation de DEMAILLY ([3, théorème 0.3]), d'après lequel

$$H^{p,q}\big(G_r(V), E^{\otimes k} \otimes (\det E)^{\ell}\big) = 0,$$

lorsque $k \geq 1$, $p + q \geq n + 1$, $\ell \geq n - p + r$.

On obtient également de nouveaux exemples de non-annulation des groupes $H^{p,q}(X, S^k F \otimes L)$ pour $p+q \geq n+r$ et $k \geq 0$, où X est une variété projective de dimension n, où F est un fibré de rang r sur X globalement engendré, et L un fibré en droites ample sur X ([8], Introduction, au sujet d'une proposition de Faltings) :

COROLLAIRE. — *Si $k \geq d - r$ et $0 \leq i \leq 2$, alors*

$$H^{n-i, n-d+r-i}\big(G_r(V), S^k E \otimes \det E\big) \neq 0.$$

Enfin, l'on peut déduire de ce COROLLAIRE de nouveaux exemples confirmant la réponse négative apportée par PETERNELL, LE POTIER et SCHNEIDER à une question posée par LE POTIER ([8, Introduction]) : a-t-on

$$H^{p,q}(X, S^k F) = 0 \quad \text{pour } p + q \geq n + r, \text{ et } k \geq 1,$$

lorsque F est un fibré ample de rang r sur une variété projective X de dimension n ?

PROPOSITION. — *Pour tout entier $k \geq d - r$, il existe une variété projective X de dimension $n = r(d-r)$ et un fibré vectoriel F ample de rang r sur X, tels que, lorsque $0 \leq i \leq 2$,*

$$H^{n-i, n-d+r-i}(X, S^k F) \neq 0.$$

Que le rapporteur de ce travail soit remercié de ses suggestions judicieuses, qui nous ont permis de l'améliorer très substantiellement.

2. Fibrés associés au fibré universel

Si W est un espace vectoriel complexe de dimension s, les représentations irréductibles du groupe réductif $\mathrm{Gl}(W)$ sont en correspondance univoque avec les suites décroissantes de s entiers relatifs : on notera $\Gamma^a W$ le $\mathrm{Gl}(W)$-module irréductible associé à la suite $a = (a_1, \dots, a_s)$ (on considérera de telles suites comme des éléments de $\mathbb{Z}^s$, dont on notera $(\mathbf{1}_1, \dots, \mathbf{1}_s)$ la base canonique, et l'on posera $\mathbf{1}_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} \mathbf{1}_k$ et $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{1,s}$). En particulier,

$$\begin{aligned} \Gamma^{k\mathbf{1}_1} W &= S^k W, \\ \Gamma^{\mathbf{1}_{1,k}} W &= \wedge^k W, \\ \Gamma^{a+\ell\mathbf{1}} W &= \Gamma^a W \otimes (\det W)^\ell. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité permet de noter les représentations iréductibles de $\mathrm{Gl}(W)$ sous la forme $\Gamma^a W \otimes (\det W)^\ell$, où a est une suite décroissante de s entiers naturels et ℓ un entier relatif. D'autre part, si a est une suite non décroissante d'entiers, on posera $\Gamma^a W = 0$.

Soit alors V un espace vectoriel complexe de dimension d; un instrument essentiel de cette étude sera le cas particulier suivant d'un théorème de Bott : introduisons sur $M(V)$, variété des drapeaux complets $(V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_d = 0)$ de V la famille des fibrés quotients canoniques

$$\begin{aligned} Q_i &= V_{i-1}/V_i, \quad 1 \leq i \leq d, \\ Q^a &= Q_1^{a_1} \otimes \cdots \otimes Q_d^{a_d}, \quad a = (a_1, \dots, a_d). \end{aligned}$$

THÉORÈME 1 (BOTT). — *Soient $a \in \mathbb{Z}^d$ et $c(d) = (1, 2, \dots, d) \in \mathbb{Z}^d$; posons $\widehat{a} = (a - c(d))^{\geq} + c(d)$, où $(a - c(d))^{\geq}$ est la suite décroissante d'entiers associée à la suite $(a - c(d))$, et soit $\ell(a - c(d))$ le nombre d'inversions strictes de cette suite. Alors*

$$H^q(M(V), Q^a) = \begin{cases} \Gamma^{\widehat{a}} V & \text{si } q = \ell(a - c(d)), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, la cohomologie de Q^a est nulle si et seulement si $(a - c(d))^{\geq}$ n'est pas régulier (on dira que a est régulier *si ses éléments sont deux à deux distincts).*

Soit a une suite décroissante de r entiers, soient ℓ un entier naturel et $\Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell$ le fibré associé au fibré universel correspondant. Soit Σ_s le groupe des permutations de $\{1, \dots, s\}$ qui agit naturellement sur $\mathbb{Z}^s$ et qui s'identifie pour cette action au groupe de Weyl de $\mathrm{Gl}(s, \mathbb{C})$. Le point de départ des calculs de cohomologie annoncés sera la famille d'isomorphismes suivante :

LEMME 1. — *Soit a une famille décroissante de r entiers, $\sigma \in \Sigma_r$, soient $a^\sigma = \sigma(a - c(r)) + c(r)$ et $i(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ. Soient de même $\tau \in \Sigma_{d-r}$ et $b^\tau = \tau(-c(d-r)) + c(d-r)$; soit enfin η l'application naturelle $M(V) \to G_r(V)$, alors*

$$H^{p,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\big) = H^{q+i(\sigma)+i(\tau)}\big(M(V), \eta^* \textstyle\bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau)}\big).$$

En particulier, si σ et τ se réduisent à l'identité,

$$H^{p,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\big) = H^{q}\big(M(V), \eta^* \textstyle\bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, 0)}\big).$$

Preuve. — Considérons la fibre au-dessus d'un point $V_r \in G_r(V)$, du k-ième fibré image directe par η du fibré $\eta^* \bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau)}$ au-dessus de $M(V)$:

$$R^k_{\eta_*}\big(\eta^* \textstyle\bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau)}\big)_{V_r} = H^k\big(\eta^{-1}(V_r), \textstyle\bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau)}_{|\eta^{-1}(V_r)}\big) ;$$

$\eta^{-1}(V_r)$ s'identifie à $M(V/V_r) \times M(V_r)$, le fibré $Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau)}_{|\eta^{-1}(V_r)}$ au produit des fibrés $Q_1^{a_1^\sigma + \ell} \otimes \cdots \otimes Q_r^{a_r^\sigma + \ell}$ et $Q_{r+1}^{b_1^\tau} \otimes \cdots \otimes Q_d^{b_{d-r}^\tau}$ respectivement définis au-dessus des variétés $M(V/V_r)$ et $M(V_r)$. La formule de Künneth donne donc

$$\begin{aligned} R^k_{\eta_*}&\big(\eta^* \textstyle\bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau)}\big)_{V_r} \\ &= \textstyle\bigwedge^p T^* G_r(V)|_{V_r} \\ &\qquad \otimes \sum_{i+j=k} H^i\big(M(V/V_r), Q^{a^\sigma + \ell\mathbf{1}}\big) \otimes H^j\big(M(V_r), Q^{b^\tau}\big), \end{aligned}$$

et, d'après le théorème de Bott,

$$R^k_{\eta_*}\big(\eta^* \textstyle\bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau)}\big) = \begin{cases} \bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell & \text{si } k = i(\sigma) + i(\tau), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite spectale de Leray associée dégénère donc en E_2, et

$$H^{q+i(\sigma)+i(\tau)}\Big(M(V), \eta^* \textstyle\bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau)}\Big)$$

s'identifie à l'unique $\mathrm{Gl}(V)$-module

$$E_2^{q+i(\sigma)+i(\tau)-k,k} = H^{q+i(\sigma)+i(\tau)-k}\Big(M(V), R^k_{\eta_*}\big(\eta^*{\textstyle\bigwedge}^p T^*G_r(V)\otimes Q^{(a^\sigma+\ell\mathbf{1},b^\tau)}\big)\Big)$$

non nul, c'est-à-dire à $H^{p,q}(G_r(V),\Gamma^a E\otimes(\det E)^\ell)$.

L'action de $\mathrm{Gl}(V)$ sur $G_r(V)$ induit l'isomorphisme usuel

$$TG_r(V) = \mathrm{End}\, V/W$$

où W est le sous-fibré du fibré trivial $\mathrm{End}\, V$ dont la fibre au-dessus de $V_r\in G_r(V)$ est l'espace des endomorphismes g tels que $g(V_r)\subset V_r$. La forme de Killing sur $\mathrm{End}\, V$: $(g_1,g_2)\mapsto \mathrm{tr}(g_1g_2)$ permet alors d'indentifier $T^*G_r(V)$ au sous-fibré de $\mathrm{End}\, V$ des endomorphismes g tels que $g(V)\subset V_r$ et $g(V_r)=0$. Le fibré $\eta^*T^*G_r(V)$ est donc filtré par les fibrés

$$F_{s(d-r)+t} = \big\{g\in\mathrm{End}\, V \mid g(V_{r-s})=0,\quad g(V_{r-s-1})\subset V_{r+t}\big\},$$

avec $1\le t\le d-r$, et $0\le s\le r-1$: $\eta^*T^*G_r(V)\supset F_1\supset\cdots\supset F_n=0$. Le fibré gradué correspondant est donné par

$$F_{i-1}/F_i = Q_{r+t}\otimes Q_{r-s}^{-1} = Q^{\mathbf{1}_{r+t}-\mathbf{1}_{r-s}},$$

lorsque $i=s(d-r)+t$. En général, plusieurs filtrations distinctes de $\eta^*T^*G_r(V)$ sont associées à la filtration précédente : si $\eta^*T^*G_r(V)\supset\mathcal{F}_1\supset\cdots\supset\mathcal{F}_N=0$ est l'une d'entre elles, on a

$$\mathcal{F}_{i-1}/\mathcal{F}_i = Q^u \quad\text{avec}\quad u=\sum_{\ell=1}^{p}(\mathbf{1}_{r+p_\ell}-\mathbf{1}_{r-q_\ell}\in\mathbb{Z}^d),$$

les couples (p_ℓ,q_ℓ) étant deux à deux distincts. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 1. — *Si $k\ge 0$ et $q\ge 1$, lorsque $\ell\ge\min(p,d-1)$, on a*

$$H^{p,q}\big(G_r(V),E^{\otimes k}(\det E)^\ell\big)=0.$$

Preuve. — Le module $E^{\otimes k}$ étant somme de modules Γ^aE tels que $a_1+\cdots+a_r=k$, il suffit de montrer que pour toute suite a de r entiers naturels, $H^{p,q}(G_r(V),\Gamma^aE\otimes(\det E)^\ell)=0$ lorsque $q\ge 1$ et $\ell\ge\min(p,d-1)$.

Soient $\sigma \in \Sigma_r$ et $\tau \in \Sigma_{d-r}$ les permutations de nombre d'inversions maximal définies par $\sigma(i) = r+1-i$ et $\tau(j) = d-r+1-j$; d'après ce qui précède, le fibré $\eta^* \bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell \mathbf{1}, b^\tau)}$ admet une filtration $(\mathcal{F}_i^a)$ dont les quotients sont les fibrés en droites Q^v, avec $v = (a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau) + u$, où $u = -\sum_{i=1}^r u_i' \mathbf{1}_i + \sum_{j=1}^{d-r} u_i'' \mathbf{1}_{r+j}$ est somme de p racines positives $\mathbf{1}_{r+p_\ell} - \mathbf{1}_{r+q_\ell}$ deux à deux distinctes. Or

$$
\begin{aligned}
v_i &= a_{r+1-i} - r - 1 + 2i - u_i' + \ell, \\
v_{r+j} &= -d + r - 1 + 2j + u_j'',
\end{aligned}
$$

et on vérifie aisément que pour tout couple d'indices (i,j)

$$u_i' + u_j'' \leq \min(p+1, d).$$

Il s'ensuit que si $\ell \geq \min(p, d-1)$, on a $v_i - i \geq v_{r+j} - r - j$ pour tout couple (i,j) ; donc $\ell(v - c(d)) \leq i(\sigma) + i(\tau)$. Par conséquent, d'après le théorème de Bott et les suites exactes en cohomologie associées aux suites exactes de fibrés

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1}^a \longrightarrow \mathcal{F}_i^a \longrightarrow Q^v \longrightarrow 0,$$

on a $H^q(M(V), \mathcal{F}_i^a) = 0$ lorsque $q > i(\sigma) + i(\tau)$; donc

$$H^{q+i(\sigma)+i(\tau)}\Big(M(V), \eta^* \textstyle\bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell\mathbf{1}, b^\tau)}\Big) = 0$$

si $q \geq 1$. Le Lemme 1 permet de conclure.

3. Calcul des groupes de cohomologie pour $\mathbf{p = n, n-1}$

Le fait que l'image réciproque par η sur $M(V)$ du fibré déterminant de $G_r(V)$ s'identifie à un fibré canonique permet un calcul direct des groupes $H^{n,q}(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell)$; cependant la complexité des poids associés à $\eta^* \bigwedge^p T^* G_r(V)$ augmente rapidement avec $n - p$ (lorsque p est proche de n) : si les extensions de modules induites par la filtration précédemment définie de ce fibré sont encore sans ambiguïté pour $p = n-1$, il n'en sera plus de même pour $p = n-2$. On supposera ici que $d - r \geq 2$: le cas de l'espace projectif sera traité en détails au paragraphe suivant.

Proposition 2. — *Soient a une suite décroissante de r entiers naturels, ℓ un entier relatif :*

1) *s'il n'existe pas d'entier i tel que $d-r+i-a_i \leq \ell \leq i - a_{i+1}$, alors*

$$H^{n,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\big) = 0\,;$$

2) *si* $d-r+i-a_i \leq \ell \leq i-a_{i+1}$, *alors*

$$H^{n,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\big) = \begin{cases} \Gamma^\alpha V \otimes (\det V)^\ell & \textit{si } q=(d-r)(r-i), \\ 0 & \textit{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$\alpha = \sum_{k=1}^{i}(a_k+r-d)\mathbf{1}_k + (k-\ell)\mathbf{1}_{i+1,d-r+i} + \sum_{k=i+1}^{r} a_k \mathbf{1}_{d-r+k}.$$

Preuve. — D'après ce qui précède, $\eta^* \bigwedge^n T^* G_r(V) = Q^{(r-d,r)}$, et la Proposition 1 donne

$$H^{n,q}\Big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\Big) = H^q\big(M(V), Q^{(a,d-\ell)+(\ell+r-d)\mathbf{1}}\big).$$

$(a,d-\ell)-c(d) = (a_1-1,\dots,a_r-r, d-\ell-r-1,\dots,-\ell)$ est régulier si et seulement si il existe un entier i tel que $a_i - i \geq d-\ell-r$ et $-\ell \geq a_{i+1}-i$, auquel cas le nombre d'inversions de la suite ci-dessus est $(d-r)(r-i)$. Enfin, dans ce cas

$$\widehat{(a,d-\ell)} = \big(a_1,\dots,a_i, d-\ell-r+i,\dots,d-\ell-r+i, \\ a_{i+1}+d-r,\dots,a_r+d-r\big),$$

est, d'après le théorème de Bott, le poids du $\mathrm{Gl}(V)$-module correspondant.

Proposition 3. — *Soient a une suite décroissante de r entiers naturels et ℓ un entier relatif*;

1) *s'il existe un entier i tel que $\ell = i+1-a_{i+1}$, $a_i - a_{i+1} \geq d-r-2$ et $a_{i+1}-a_{i+2} \geq 1$, alors*

$$H^{n-1,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\big) = \begin{cases} \bigotimes_{\lambda \neq i} \Gamma^{\alpha_{i,\lambda}} V & \textit{si } q=(d-r)(r-i)-1, \\ 0 & \textit{sinon,} \end{cases}$$

où

$$\alpha_{i,\lambda} = \sum_{k=1}^{i}(a_k+\ell-d+r+\delta_{k,\lambda})\mathbf{1}_k + i\mathbf{1}_{i+1,d-r+i+1} \\ + \sum_{k=i+2}^{r}(a_k+\ell+\delta_{k,\lambda})\mathbf{1}_{d-r+k}\,;$$

2) *s'il existe un entier i tel que $\ell = i - a_{i+1}$ et $a_i - a_{i+1} \geq d-r$, alors*

$$H^{n-1,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\big) = \begin{cases} \Gamma^{\beta_i} V & si\ q = (d-r)(r-i)-1, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

où

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{i} (a_k + \ell - d + r)\mathbf{1}_k + i\mathbf{1}_{i+1,d-r+i+1} + \sum_{k=i+2}^{r} (a_k + \ell)\mathbf{1}_{d-r+k}\ ;$$

3) *s'il existe un entier i tel que $d - r + i - a_i \leq \ell \leq i - a_{i+1} - 1$ et $a_i - a_{i+1} \geq d - r$, alors*

$$H^{n-1,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\big) = \begin{cases} \bigoplus_\lambda \Gamma^{\gamma_{i,\lambda}} V & si\ q = (d-r)(r-i), \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

où

$$\gamma_{i,\lambda} = \sum_{k=1}^{i} (a_k + \ell - d + r + \delta_{k,\lambda})\mathbf{1}_k + i\mathbf{1}_{i+1,d-r+i-1} + (i-1)\mathbf{1}_{d-r+i} + \sum_{k=i+1}^{r} (a_k + \ell + \delta_{k,\lambda})\mathbf{1}_{d-r+k}\ ;$$

4) *sinon, pour tout entier q,*

$$H^{n-1,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\big) = 0.$$

Preuve. — Le fibré $\eta^* \bigwedge^{n-1} T^* G_r(V)$ admet une filtration de module gradué associé $\bigoplus_{\lambda \le r < \mu} Q^{u_{\lambda,\mu}}$, avec

$$u_{\lambda,\mu} = (r-d)\mathbf{1}_{1,r} + r\mathbf{1}_{r+1,d} + \mathbf{1}_\lambda - \mathbf{1}_\mu.$$

$(a + \ell\mathbf{1}, 0) + u_{\lambda,\mu} - c(d)$ ne peut être régulier que si $\mu = d$, auquel cas il est égal à

$$\begin{aligned}\big(a_1 + \ell - d + r + \delta_{1,\lambda} - 1, \dots, a_r + \ell - d + \delta_{r,\lambda},\\ -1, \dots, -d + r + 1, -d + r - 1\big).\end{aligned}$$

D'après le théorème de Bott, pour que la cohomologie sur $M(V)$ de $Q^{u_{\lambda,d}}$ soit non nulle, le r-uplet formé des r premières composantes du poids précédent doit être décroissant, et la condition de régularité de ce dernier implique de surcroît que l'on soit dans l'une des situations suivantes :

- il existe un entier i tel que

$$\begin{cases} a_i + \ell - d + r - i + \delta_{i,\lambda} \ge 0, \\ a_{i+1} + \ell - d + r - i - 1 + \delta_{i+1,\lambda} = -d + r, \\ a_{i+2} + \ell - d + r - i - 2 + \delta_{i+2,\lambda} \le -d + r - 2, \end{cases}$$

le nombre d'inversions correspondant étant $(d-r)(r-i) - 1$ et le d-uplet ordonné associé

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{i} (a_k + \ell - d + r + \delta_{k,\lambda})\mathbf{1}_k \\ + i\mathbf{1}_{i+1,d-r+i+1} + \sum_{k=i+2}^{r} (a_k + \ell)\mathbf{1}_{d-r+k}.\end{aligned}$$

La seconde des équations précédentes s'écrit $\ell = i + 1 - a_{i+1} - \delta_{i+1,\lambda} = i + 1 - a_{i+1}$ ou $i - a_{i+1}$ (auquel cas $\delta_{j,\lambda} = 0$ si $j \ne i + 1$), ce qui correspondra aux cas 1) et 2) (remarquons que si l'on obtient effectivement une contribution non nulle, il ne peut exister qu'un seul entier i tel que $\ell = i + 1 - a_{i+1}$ ou $i - a_{i+1}$).

- il existe un entier i tel que

$$\begin{cases} a_i + \ell - d + r - i + \delta_{i,\lambda} \ge 0, \\ a_{i+1} + \ell - d + r - i - 1 + \delta_{i+1,\lambda} \ge -d + r - 2, \end{cases}$$

le nombre d'inversions correspondant étant $(d-r)(r-i)$ et le d-uplet ordonné associé n'étant autre que $\gamma_{i,\lambda}$, ce qui correspondra au cas 3).

Notons que ces différents cas sont disjoints et que, a et ℓ étant donnés, on n'obtient de contribution non nulle qu'en un seul degré q_0 ; de plus, il est facile de vérifier que, dans chaque cas, les différents $\mathrm{Gl}(V)$-modules irréductibles obtenus sont deux à deux non isomorphes.

Si l'on note à nouveau $(\mathcal{F}_k^a = \mathcal{F}_k \otimes Q^{(a+\ell\mathbf{1},0)})$ la filtration de $\eta^* \bigwedge^p T^* G_r(V) \otimes Q^{(a+\ell\mathbf{1},b^\tau)}$ considérée, les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{k+1}^a \longrightarrow \mathcal{F}_k^a \longrightarrow Q^{(a+\ell\mathbf{1},0)+u_{\lambda.\mu}} \longrightarrow 0$$

induisent des suites exactes longues en cohomologie

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^q\big(M(V), \mathcal{F}_{k+1}^a\big) \longrightarrow H^q\big(M(V), \mathcal{F}_k^a\big) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^q\big(M(V), Q^{(a+\ell\mathbf{1},0)+u_{\lambda.\mu}}\big) \longrightarrow H^{q+1}\big(M(V), \mathcal{F}_{k+1}^a\big) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Comme $H^q(M(V), Q^{(a+\ell\mathbf{1},0)+u_{\lambda.\mu}}) = 0$ si $q \neq q_0$ et comme ces $\mathrm{Gl}(V)$-modules sont irréductibles et non isomorphes deux à deux lorsqu'ils ne sont pas nuls, le lemme de Schur implique que tous les homomorphismes cobords des suites exactes ci-dessus sont nuls. Il vient

$$\begin{aligned} &H^q\big(M(V), \mathcal{F}_k^a\big) = 0 \quad \text{si } q \neq q_0, \\ &H^{q_0}\big(M(V), \mathcal{F}_k^a\big) = H^q\big(M(V), \mathcal{F}_{k+1}^a\big) \oplus H^q\big(M(V), Q^{(a+\ell\mathbf{1},0)+u_{\lambda.\mu}}\big), \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} H^{n-1,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E(\det E)^\ell\big) = \delta_{q,q_0} \\ \bigoplus_{\lambda \leq r < \mu} H^{q_0}\big(M(V), Q^{(a+\ell\mathbf{1},0)+u_{\lambda.\mu}}\big), \end{aligned}$$

modules que nous avons déjà calculés.

4. Cas de l'espace projectif

Si $d - r = 1$, les extensions de modules du type précédent sont triviales pour toutes valeurs de p, ce qui permet d'effectuer un calcul complet des $H^{p,q}(\mathbb{P}(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell)$. On sait a priori, $\det E$ étant ample, que ces modules sont non nuls pour $q = 0$ lorsque ℓ est assez grand, ce que met en évidence le COROLLAIRE 1. Le COROLLAIRE 2 précise le cas des puissances extérieures et symétriques de E pour $q \geq 1$ et $\ell \geq 0$.

PROPOSITION 4

$$H^{p,q}\big(\mathbb{P}(V),\Gamma^a E\otimes(\det E)^\ell\big) = \bigoplus_{1\le i_1\le\cdots\le i_p\le d-r} H^q\big(M(V),Q^{(a+\ell\mathbf{1},p)-\mathbf{1}_{i_1}-\cdots-\mathbf{1}_{i_p}}\big)$$

Preuve. — $\eta^*\bigwedge^p T^*\mathbb{P}(V)$ admet une filtration de module gradué associé

$$\bigoplus_{1\le i_1\le\cdots\le i_p\le d-1} Q^{u_{i_1,\dots,i_p}},$$

avec $u_{i_1,\dots,i_p} = p\mathbf{1}_d - \mathbf{1}_{i_1} - \cdots - \mathbf{1}_{i_p}$, et l'on vérifie aisément que, ℓ et p étant fixés, les modules $H^p(M(V),Q^{(a+\ell\mathbf{1},p)-\mathbf{1}_{i_1}-\cdots-\mathbf{1}_{i_p}})$ non nuls sont deux à deux distincts. On conclut comme à la PROPOSITION précédente.

COROLLAIRE 1. — *Si $\ell\ge p$, alors*

$$H^{p,q}\big(\mathbb{P}(V),\Gamma^a E\otimes(\det E)^\ell\big) = \delta_{q,0} \bigoplus_{1\le i_1\le\cdots\le i_p\le r} \Gamma^{\sum_{k=1}^r(a_k+\ell)\mathbf{1}_k+p\mathbf{1}_d-\sum_{j=1}^p\mathbf{1}_{i_j}}V.$$

Preuve. — Si $\ell\le p$, soit $(a+\ell\mathbf{1},p)-\mathbf{1}_{i_1}-\cdots-\mathbf{1}_{i_p}$ est décroissante, soit sa différence avec $c(d)$ n'est pas régulière : un tel poids ne peut donc contribuer à un module de $H^{p,q}(\mathbb{P}(V),\Gamma^a E\otimes(\det E)^\ell)$ qu'en degré $q=0$, et contribue effectivement s'il décroît.

COROLLAIRE 2

1) $H^{p+1,p}(\mathbb{P}(V),S^kE\otimes\det E) = S^{k-1}V\otimes\det V$ *si l'on a* $k\ge 1$ *et* $1\le p\le d-1$;

2) $H^{p,p}(\mathbb{P}(V),S^kE)=S^kV$ *si l'on a* $k\ge 0$ *et* $1\le p\le d$;

3) $H^{p,q}(\mathbb{P}(V),\bigwedge^k E\otimes(\det E)^{p-q}) = \bigwedge^{k-p+q}V\otimes(\det V)^{p-q}$ *si l'on a* $0\le p-q\le k\le r$;

4) *Exceptés les précédents, tous les modules*

$$H^{p,q}(\mathbb{P}(V),S^kE\otimes(\det E)^\ell)$$

et $H^{p,q}(\mathbb{P}(V),\bigwedge^k E\otimes(\det E)^\ell)$, *avec* $\ell\ge 0$ *et* $q\ge 1$, *sont nuls.*

Preuve. — Si $a=k\mathbf{1}_1$, on a $\Gamma^aE=S^kE$. Donc, par la PROPOSITION précédente,

$$H^{p,q}(\mathbb{P}(V),S^kE\otimes(\det E)^\ell) = \bigoplus_{1\le i_1\le\cdots\le i_p\le d-1} H^q\big(M(V),Q^{(k+\ell)\mathbf{1}_1+\ell\mathbf{1}_{2,r}+p\mathbf{1}_d-\mathbf{1}_{i_1}-\cdots-\mathbf{1}_{i_p}}\big).$$

$(k+\ell)\mathbf{1}_1+\ell\mathbf{1}_{2,r}+p\mathbf{1}_d-\mathbf{1}_{i_1}-\cdots-\mathbf{1}_{i_p}-c(d)$ ne peut être régulier que si $i_1 = 1$ et $i_j = r-p+j$ pour $2 \leq j \leq p$, ou $i_j = r-p+j$ pour $1 \leq j \leq p$, ces deux possibilités étant confondues lorsque $p = r$. De plus, si $\ell \geq 0$, on vérifie aisément que l'on obtient un poids régulier de nombre d'inversions non nul uniquement, dans le premier cas, pour $\ell = 1$ (le nombre d'inversions et la suite décroissante associée étant $p-1$ et $k\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_{2,d}$ respectivement) et, dans le second cas, pour $\ell = 0$ (le nombre d'inversions et la suite décroissante associés étant p et $k\mathbf{1}_1$). On conclut par le théorème de Bott et l'on procède de même pour les puissances extérieures du fibré universel avec $a = \mathbf{1}_{1,k}$.

Il suit du théorème d'annulation de Demailly, qui n'est cependant pas optimal, que $H^{p,q}(\mathbb{P}(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell) = 0$ lorsque $p+q \geq r+1$, $k \geq 1$ et $\ell \geq 2r-p$. Le Corollaire précédent donne une borne inférieure de l'exposant minimal ℓ_0 tel que pour tout fibré holomorphe G de rang r et tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(V)$, tels que G soit ample et L semi-ample, ou G semi-ample et L ample, on ait $H^{p,q}(\mathbb{P}(V), \bigwedge^k G \otimes (\det G)^\ell \otimes L) = 0$ lorsque $\ell \geq \ell_0$ ([3], paragraphe 0, Problème) :

$$\ell_0 \geq p-q \quad \text{si} \quad p-k \leq q \leq \min(p, r-k).$$

5. Calcul des groupes de cohomologie pour $p = n - 2$

On supposera à nouveau, dans ce qui suit, que $d - r \geq 2$. Soient $\tau \in \Sigma_{d-r}$ et

$$u = \sum_{\ell=1}^{p} (\mathbf{1}_{r+p_\ell} - \mathbf{1}_{r-q_\ell}) = -\sum_{i=1}^{r} u'_i \mathbf{1}_i + \sum_{j=1}^{d-r} u''_j \mathbf{1}_{r+j},$$

les couples (p_ℓ, q_ℓ) étant deux à deux distincts. On peut associer à u le poids

$$u^\tau = \sum_{\ell=1}^{p} (\mathbf{1}_{r+\tau^{-1}(p_\ell)} - \mathbf{1}_{r-q_\ell}) = -\sum_{i=1}^{r} u'_i \mathbf{1}_i + \sum_{j=1}^{d-r} u''_{\tau(j)} \mathbf{1}_{r+j},$$

et si a et b sont des suites décroissantes de r et $d-r$ entiers respectivement, on vérifie que

$$\big(\widehat{(a, b^\tau) + u^\tau}\big) = \big(\widehat{(a, b) + u^\tau}\big),$$

et que si $\ell(u)$ (resp. $\ell^\tau(u)$) est le nombre d'inversions strictes de l'ordre dans $(a,b) + u - c(d)$ (resp. dans $(a, b^\tau) + u^\tau - c(d)$), alors

$$\ell^\tau(u) - \ell(u) = \ell\big(\tau(b + u'' - c(d-r))\big) - \ell\big(b + u'' - c(d-r)\big).$$

Ceci nous met en mesure de traiter le cas où $p = n-2$: le fibré $\eta^*\bigwedge^{n-2}T^*G_r(V)$ admet une filtration de module gradué associé

$$\bigoplus_{u\in\mathbf{Z}^r} \nu(u,n-2)Q^u,$$

les poids de multiplicité $\nu(u,n-2)$ non nulle étant de la forme $u = (r-d)\mathbf{1}_{1,r}+r\mathbf{1}_{r+1,d}+\mathbf{1}_i+\mathbf{1}_j-\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_l$, pour $i,j\le r\le k,\ell$ et $(i,k)\neq(j,\ell)$. De plus, la cohomologie associée à un tel poids est non nulle seulement si $k,\ell = d$ ou $d-1$. On peut répartir les poids restants en quatre types :

- type 1 : $u = (r-d)\mathbf{1}_{1,r}+r\mathbf{1}_{r+1,d}+\mathbf{1}_i+\mathbf{1}_j-2\mathbf{1}_{d-1}$, $\nu(u,n-2)=1$ avec $i<j$;
- type 2 : $u = (r-d)\mathbf{1}_{1,r}+r\mathbf{1}_{r+1,d}+\mathbf{1}_i+\mathbf{1}_j-2\mathbf{1}_{d}$, $\nu(u,n-2)=1$ avec $i<j$;
- type 3 : $u = (r-d)\mathbf{1}_{1,r}+r\mathbf{1}_{r+1,d}+2\mathbf{1}_i-\mathbf{1}_{d-1}-\mathbf{1}_d$, $\nu(u,n-2)=1$;
- type 4 : $u = (r-d)\mathbf{1}_{1,r}+r\mathbf{1}_{r+1,d}+\mathbf{1}_i+\mathbf{1}_j-\mathbf{1}_{d-1}-\mathbf{1}_d$, $\nu(u,n-2)=1$ avec $i<j$.

Proposition 5

$$H^{n-2,q}\big(G_r(V),\Gamma^aE\otimes(\det E)^\ell\big) = \bigoplus_{u\in\mathbf{Z}^r}\widehat{\nu}(u,n-2)H^q\big(M(V),Q^{(a+\ell\mathbf{1},0)+u}\big),$$

où

$$\widehat{\nu}(u,n-2)=\begin{cases}1 & \textit{si } u \textit{ est de type } 2,\\ 1 & \textit{si } u \textit{ est de type } 3 \textit{ avec } a_i\neq a_{i+1},\\ 1 & \textit{si } u \textit{ est de type } 4 \textit{ avec } j\neq i+1 \textit{ ou } a_i\neq a_{i+1},\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Preuve. — Considérons parmi les modules $H^q(M(V),Q^{(a+\ell\mathbf{1},0)})$ non nuls un Γ^bV, où b est une suite décroissante de d entiers, associé à un poids u. Remarquons tout d'abord que si l'on considère une filtration $(\mathcal{F}_s)$ de $\eta^*\bigwedge^{n-1}T^*G_r(V)$ telle que $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}=Q^u$, la suite exacte

$$0\longrightarrow\mathcal{F}_{k+1}\longrightarrow\mathcal{F}_k\longrightarrow Q^u\longrightarrow 0$$

donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie qui, puisque les $H^q(M(V),Q^{(a+\ell\mathbf{1},0)})$ sont tous nuls sauf un, se réduit à

$$\begin{aligned}0\longrightarrow H^{q_0}\big(M(V),\mathcal{F}^a_{k+1}\big)\longrightarrow H^{q_0}\big(M(V),\mathcal{F}^a_{k}\big)\longrightarrow\Gamma^bV\xrightarrow{\ \delta\ }\\ \xrightarrow{\ \delta\ } H^{q_0+1}\big(M(V),\mathcal{F}^a_{k+1}\big)\longrightarrow H^{q_0+1}\big(M(V),\mathcal{F}^a_{k}\big)\longrightarrow 0\end{aligned}$$

et à

$$H^q\big(M(V),\mathcal{F}^a_k\big)=H^q\big(M(V),\mathcal{F}^a_{k+1}\big)$$

si $q \neq q_0, q_0+1$, où $q_0 = \ell((a+\ell\mathbf{1},0)+u-c(d))$. Mais, par le lemme de Schur, δ est nul ou injectif; donc la suite exacte à cinq termes ci-dessus se scinde en

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} H^{q_0}\big(M(V),\mathcal{F}_k^a\big) &= H^{q_0}\big(M(V),\mathcal{F}_{k+1}^a\big) \oplus \Gamma^b V, \\ H^{q_0+1}\big(M(V),\mathcal{F}_k^a\big) &= H^{q_0+1}\big(M(V),\mathcal{F}_{k+1}^a\big), \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} H^{q_0}\big(M(V),\mathcal{F}_{k+1}^a\big) &= H^{q_0}\big(M(V),\mathcal{F}_k^a\big), \\ H^{q_0+1}\big(M(V),\mathcal{F}_{k+1}^a\big) &= H^{q_0+1}\big(M(V),\mathcal{F}_k^a\big) \oplus \Gamma^b V. \end{aligned}$$

Trois situations éventuelles doivent donc être distinguées :

1) $\Gamma^b V$ est associé à un unique poids u. On vérifie qu'alors u est de type 2 ou 3, donc de multiplicité 1. Dans le schéma ci-dessus, il est alors clair que $H^{q_0+1}(M(V),\mathcal{F}_{k+1}^a)$ ne peut contenir aucun sous-module isomorphe à $\Gamma^b V$: seul le premier cas est donc possible et $\bigoplus_q H^{n-1,q}(G_r(V),\Gamma^a E\otimes(\det E)^\ell)$ contient donc un unique sous-module isomorphe à $\Gamma^b V$, correspondant à $q=q_0$.

2) $\Gamma^b V$ est associé à deux poids u et v qu'on vérifie alors être de types 1 et 4 respectivement :

$$u = (r-d)\mathbf{1}_{1,r} + r\mathbf{1}_{r+1,d} + \mathbf{1}_i + \mathbf{1}_j - 2\mathbf{1}_{d-1},\ \nu(u,n-2)=1;$$
$$u = (r-d)\mathbf{1}_{1,r} + r\mathbf{1}_{r+1,d} + \mathbf{1}_i + \mathbf{1}_j - \mathbf{1}_{d-1} - \mathbf{1}_d,\ \nu(u,n-2)=2;$$

de sorte que

$$\begin{aligned} &(a+\ell\mathbf{1},0)+u-c(d) \\ &\quad= \big(a_1-1+\ell+r-d,\dots,a_i-i+\ell+r-d+1,\dots, \\ &\qquad\qquad a_j-j+\ell+r-d+1,\dots,a_r+\ell-d, \\ &\qquad\qquad\qquad -r-1,\dots,-d+2,-d-1,-d\big)\ ; \\ &(a+\ell\mathbf{1},0)+v-c(d) \\ &\quad= \big(a_1-1+\ell+r-d,\dots,a_i-i+\ell+r-d+1,\dots, \\ &\qquad\qquad a_j-j+\ell+r-d+1,\dots,a_r+\ell-d, \\ &\qquad\qquad\qquad -r-1,\dots,-d+2,-d,-d-1\big). \end{aligned}$$

Donc, si $\ell(u) = \ell((a+\ell\mathbf{1},0)+u-c(d))$ et $\ell(v) = \ell((a+\ell\mathbf{1},0)+v-c(d))$, on a $\ell(u) = \ell(v)+1$. Supposons que le cas (a) se produise $n_a(q_0)$ pour la valeur q_0 de q, et que le cas (b) se produise $n_b(q_0)$ fois : la multiplicité de $\Gamma^b V$ dans $H^{n-1,q}(G_r(V),\Gamma^a E\otimes(\det E)^\ell)$ est alors $m(q) = n_a(q)-n_b(q-1)$. On peut donc représenter la situation considérée sous la forme du tableau suivant, où $q_0 = \ell(v)$:

q	$\cdots$	$q_0 - 1$	q_0	$q_0 + 1$	$q_0 + 2$	$\cdots$
$n_a(q) + n_b(q)$		0	2	1	0	
$n_a(q)$		0	$n_a(q_0)$	1	0	
$n_b(q)$		0	$n_b(q_0)$	0	0	
$m(q)$		0	$n_a(q_0)$	$1 - n_b(q_0)$	0,	

et deux schémas sont a priori possibles

(S₁)

$q_0 - 1$	q_0	$q_0 + 1$	$q_0 + 2$	$\cdots$
0	2	1	0	
0	2	1	0	
0	0	0	0	
0	2	1	0	

et

(S₂)

$q_0 - 1$	q_0	$q_0 + 1$	$q_0 + 2$	$\cdots$
0	2	1	0	
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	1	0	0	

Utilisons alors la PROPOSITION 1, où σ est l'identité et τ la transposition $(d-1, d)$. On obtient

$$H^{n-1,q}\big(G_r(V), \Gamma^a E \otimes (\det E)^\ell\big) = H^{q+1}\Big(M(V), \eta^* \textstyle\bigwedge^{n-2} T^* G_r(V) \otimes Q^{(a^\sigma + \ell \mathbf{1}, b^\tau)}\Big)$$

et, d'après ce qui a été dit plus haut, le module $\Gamma^b V$ est à présent associé à u^τ et v^τ, avec

$$\ell^\tau(u) = \ell(u) - 1, \quad \ell^\tau(v) = \ell(v) + 1.$$

On obtient par conséquent un schéma du type suivant

q	$\cdots$	q_0-1	q_0	q_0+1	q_0+2	$\cdots$
$n_a^\tau(q+1)+n_b^\tau(q+1)$		1	2	0	0	
$n_a^\tau(q+1)$		$n_a^\tau(q_0)$	2	0	0	
$n_b^\tau(q+1)$		$n_b^\tau(q_0)$	0	0	0	
$m(q)$		$n_a^\tau(q_0)$	$2-n_b^\tau(q_0)$	0	$0,$	

qui n'est compatible qu'avec le schéma (S_2), et pour $n_a^\tau(q_0)=1$. La multiplicité de $\Gamma^b V$ dans $H^{n-1,q}(G_r(V),\Gamma^a E\otimes(\det E)^\ell)$ est donc égale à 1 pour $q=\ell(v)$, où v est de type 3, et à 0 sinon.

3) $\Gamma^b V$ est associé à plus de deux poids : on vérifie que ce ne peut être qu'à trois poids u, v, w de types respectifs 1, 3, 4 et de la forme suivante :

$$u=(r-d)\mathbf{1}_{1,r}+r\mathbf{1}_{r+1,d}+\mathbf{1}_i+\mathbf{1}_{i+1}-2\mathbf{1}_{d-1},\ \nu(u,n-2)=1\,;$$
$$u=(r-d)\mathbf{1}_{1,r}+r\mathbf{1}_{r+1,d}+\mathbf{1}_i+\mathbf{1}_{i+1}-\mathbf{1}_{d-1}-\mathbf{1}_d,\ \nu(v,n-2)=2\,;$$
$$u=(r-d)\mathbf{1}_{1,r}+r\mathbf{1}_{r+1,d}+2\mathbf{1}_{i+1}-\mathbf{1}_{d-1}-\mathbf{1}_d,\ \nu(w,n-2)=1\,;$$

avec $a_i=a_{i+1}$, de sorte que $\ell(u)=\ell(w)=\ell(v)+1$. En utilisant la PROPOSITION 1 avec $\sigma=(i,i+1)$ et $\tau=(d-1,d)$, on montre comme ci-dessus que la multiplicité de $\Gamma^b V$ dans $H^{n-1,q}(G_r(V),\Gamma^a E\otimes(\det E)^\ell)$ est nulle.

COROLLAIRE 3. — *Posons* $Z^{j,k}V=\Gamma^{(k-j)\mathbf{1}_1+\mathbf{1}_{2,j+1}}V$ *pour* $0\le j\le k-1$.

1) *Si* $r,d-r\ge 5$, *les seuls* $\mathrm{Gl}(V)$*-modules* $H^{p,q}(G_r(V),S^kE\otimes\det E)$ *éventuellement non nuls sont, pour* $p\ge n-2$, $q\ge 1$, $k\ge 1$ *et* $\ell\ge 0$ *les suivants* :

$$H^{n,n-d+r}\big(G_r(V),S^kE\otimes\det E\big)=S^{k-d+r}V\otimes\det V,$$
$$H^{n-1,n-d+r-1}\big(G_r(V),S^kE\otimes\det E\big)=S^{k-d+r}V\otimes\det V,$$
$$H^{n-2,n-d+r-2}\big(G_r(V),S^kE\otimes\det E\big)=2S^{k-d+r}V\otimes\det V,$$
$$H^{n,n-d+r}\big(G_r(V),S^kE\big)=Z^{d-r,k}V,$$
$$H^{n-1,n-d+r}\big(G_r(V),S^kE\big)=Z^{d-r-1,k}V,$$
$$H^{n-2,n-d+r}\big(G_r(V),S^kE\big)=Z^{d-r-2,k}V,$$
$$H^{n-2,n-d+r-1}\big(G_r(V),S^kE\big)=Z^{d-r-1,k+1}V.$$

2) *Si* $r\ge 2$ *et* $d-r\ge 5$, *on a* $H^{p,q}(G_r(V),\bigwedge^kE\otimes(\det E)^\ell)=0$ *pour* $p\ge n-2$, $q\ge 1$ *et* $\ell\ge 0$.

Preuve. — On procède comme au COROLLAIRE 1 en recensant les poids qui interviennent dans les PROPOSITIONS 2, 3 et 5 et dont la contribution au groupe de cohomologie considérée est non nulle.

PROPOSITION 6. — *Pour tout entier* $k \geq d - r$, *il existe une variété projective* X *de dimension* $n = r(d - r)$ *et un fibré vectoriel* F *ample de rang* r *sur* X *tels que, lorsque* $0 \leq i \leq 2$,

$$H^{n-i,n-d+r-i}(X, S^k F) \neq 0.$$

Preuve. — Soit $k \geq d-r$. On sait ([8], proposition 3.6) qu'il existe une variété projective X, un morphisme fini $f : X \to G_r(V)$ et un fibré en droites L sur X tel que

$$f^*(\det E) = L^{\otimes k}.$$

Le fibré L est ample, $f^*(E)$ est globalement engendré, donc le fibré $F = f^*(E) \otimes L$ est ample et

$$H^{p,q}(X, S^k F) = H^{p,q}\big(X, f^*(S^k E \otimes \det E)\big).$$

Le morphisme f étant fini, et $H^{n-i,n-d+r-i}(G_r(V), S^k E \otimes \det E)$ étant non nul, le COROLLAIRE s'ensuit immédiatement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOTT (R.). — Homogeneous vector bundles, *Ann. of Math.*, t. **66**, 1957, p 203–248.

[2] DEMAILLY (J.P.). — Théorèmes d'annulation pour la cohomologie des puissances tensorielles d'un fibré positif, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série 1 Math.*, t. **305**, 1987, p 419–422.

[3] DEMAILLY (J.P.). — Vanishing theorems for tensor powers of an ample vector bundle, *Invent. Math.*, t. **91**, 1988, p 203–220.

[4] DEMAZURE (B.). — A very simple proof of Bott's theorem, *Invent. Math.*, t. **33**, 1976, p 271–272.

[5] GODEMENT (R.). — *Théorie des faisceaux.* — Hermann, 1958.

[6] GRIFFITHS (P.A.). — Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, in *Global analysis, papers in honour of K. Kodaira.* — Princeton Univ. Press, Princeton, 1969, p. 185–251.

[7] LE POTIER (J.). — Cohomologie de la Grassmanienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel, *Math. Ann.*, t. **266**, 1977, p 257–270.

[8] PETERNELL (Th.), LE POTIER (J.) et SCHNEIDER (M.). — Vanishing theorems, linear and quadratic normality, *Inv. Math.*, t. **87**, 1987, p 573–586.

[9] SNOW (D.). — Cohomology of twisted holomorphic forms on Grassmann manifolds and quadric hypersurfaces, *Math. Ann.*, t. **276**, 1986, p 159-176.