BULLETIN DE LA S. M. F.

J. CERF

Homologie des simplexes plongés : une preuve nouvelle du théorème de Lalonde

Bulletin de la S. M. F., tome 118, nº 1 (1990), p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_1_1_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 1–25.

HOMOLOGIE DES SIMPLEXES PLONGÉS : UNE PREUVE NOUVELLE DU THÉORÈME DE LALONDE

PAR

J. CERF (*)

RÉSUMÉ. — On donne une preuve plus simple et de nature plus combinatoire du théorème de F. LALONDE : l'homologie des simplexes plongés d'une variété différentiable V est isomorphe à l'homologie singulière en toute dimension strictement plus petite que celle de V.

ABSTRACT. — We give a simpler, more combinatorial proof of F. LALONDE's theorem about homology groups built with embedded simplexes of a differentiable n-manifold : these groups coïncide with the usual ones for every dimension less than n.

Introduction.

Soit V une variété différentiable de dimension n, de classe C^∞. Pour tout entier k $(1 \le k \le \infty)$, on note $\mathcal{S}^k(V)$ le sous-complexe du complexe des chaînes singulières $\mathcal{S}(V)$ engendré en toute dimension $p \ge 0$ par les simplexes qui sont des applications différentiables $\Delta^p \to V$ de classe C^k, où Δ^p désigne le p-simplexe type. Tout ce qui suit est indépendant du choix de k ; celui-ci sera donc sous-entendu, en particulier $\mathcal{S}^k(V)$ sera simplement noté $\mathcal{S}(V)$.

L'ensemble des simplexes de $\mathcal{S}(V)$ qui sont des *plongements* est stable pour les opérateurs de face ; il engendre dans $\mathcal{S}(V)$ un sous-complexe (sans opérateurs de dégénérescence) qu'on note $\mathcal{S}^P(V)$. Les groupes d'homologie de $\mathcal{S}^P(V)$, notés $H_p^P(V)$ $(p \ge 0)$, sont appelés *groupes d'homologie des simplexes plongés de* V (il est sous-entendu que les coefficients sont entiers).

(*) Texte reçu le 21 Novembre 1988, révisé le 7 décembre 1989.
J. CERF, Université Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, 91405, Orsay Cedex, France.
L'auteur remercie Bernadette Barbichon qui a effectué la saisie du texte à l'aide du préprocesseur Sweet TEX.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1990/1/$ 5.00

Pour $p > n$, il n'y a pas de p-simplexe plongé, donc $H_p^P(V) = 0$. Puisque V peut être muni d'une triangulation différentiable (théorème de J.H.C. WHITEHEAD [5]), le morphisme naturel $H_p^P(V) \to H_p(V)$ est surjectif pour $0 \leq p \leq n$: c'est immédiat pour $p = n$; pour $p < n$, cela résulte de l'isomorphisme classique entre homologie simpliciale et homologie singulière d'un complexe simplicial.

Dans [3], F. LALONDE démontre la conjecture de J.H.C. WHITEHEAD :

Le morphisme naturel $H_p^P(V) \to H_p(V)$ *est bijectif pour* $0 \leq p \leq n-1$.

F. LALONDE démontre un énoncé plus général, suggéré par SHIH WEISHU : "l'homologie sectionnelle" d'une submersion $V_2 \to V_1$ est isomorphe à l'homologie de V_2 en toute dimension inférieure à celle de V_1.

Le but de cet article est de donner (en se limitant au cas de WHITEHEAD) une preuve plus simple, et de caractère plus combinatoire, du théorème de LALONDE. Voici les grandes lignes de cette preuve.

Le problème se ramène aisément au cas $V = \mathbb{R}^n$, la meilleure méthode pour effectuer cette réduction semblant celle utilisée par LALONDE, qui est due à MILNOR, et fondée sur la suite exacte de Mayer-Vietoris (*cf.* § 5, LEMME 9). Mais il est indispensable d'avoir auparavant prouvé, pour toute variété V, *l'invariance par subdivision linéaire*, c'est-à-dire :

> *Pour toute subdivision linéaire s, tout entier* $p \leq n - 1$ *et tout cycle* γ *de p-simplexes plongés, le cycle* $s(\gamma) - \gamma$ *est un bord* (en homologie plongée).

Dans $\mathbb{R}^n$, un lemme de C^1-approximation polyédrale dû à J.H.C. WHITEHEAD (*cf.* § 5, LEMME 10) montre que toute chaîne plongée est, après une subdivision convenable, linéarisable par isotopie. On est ainsi ramené à prouver, outre l'invariance par subdivision linéaire, la propriété suivante d'*invariance locale* :

> *Pour tout* $p \leq n - 1$, *tout cycle* γ *de p-simplexes plongés, et tout cycle* γ' *proche de* γ *et respectant ses relations d'incidence, le cycle* $\gamma' - \gamma$ *est un bord* (en homologie plongée).

La méthode suivie ici pour prouver l'invariance par subdivision linéaire est fondée sur un *lemme de décomposition* (PROPOSITION 1) qui donne, pour les cycles $s(\gamma) - \gamma$, un système de générateurs, appelés "cycles stellaires", qui sont portés par des "I-étoiles" : pour $I \subsetneq \{0, 1, \ldots, p\}$, une I-étoile de dimension p est une p-chaîne ζ telle que $d_i\zeta = 0$ pour tout $i \in I$ et que l'opérateur face itéré d_I prenne la même valeur (appelée "noyau" de ζ) sur tous les simplexes de ζ. Les cycles stellaires portés par une I-étoile sont des bords dès lors que celle-ci "est une base" (*cf.* § 3; "être une base" est la généralisation adéquate de "être base d'un cône de simplexes plongés"). Toute I-étoile est linéarisable par isotopie (PROPOSITION 2); le fait que toute I-étoile soit une base, et par conséquent l'invariance par subdivision linéaire, découlent donc de la propriété suivante : "si ζ' est une I-étoile de même noyau que l'I-étoile ζ, proche de ζ, et respectant ses relations d'incidence relatives à $i \in I$, alors $\zeta' - \zeta$ est une base". Cet énoncé, qui est celui de la PROPOSITION 3, garde un sens dans le cas, jusqu'ici exclu, où $I = \{0, 1, \ldots, p\}$, et ce cas se démontre dans la foulée : c'est la dernière étape d'une récurrence sur le nombre d'éléments de I. Il se trouve que la PROPOSITION 3, dans ce cas limite, implique la propriété d'invariance locale restreinte au cas où γ est un *super-cycle*, c'est-à-dire un cycle annulant tous les d_i. Mais cette restriction est sans importance dès lors que l'invariance par subdivision linéaire est déjà prouvée, et que le passage à la subdivision barycentrique fait de tout cycle un super-cycle (*cf.* LEMME 2).

1. Préliminaires

Notations. — Pour tout entier p positif ou nul, on note :

Δ^p le p-simplexe type et x_p l'application identique de Δ^p ;

$\langle p \rangle$ l'ensemble $\{0, 1, \ldots, p\}$, qui s'identifie à celui des sommets de Δ^p ;

$\mathcal{S}_p(V)$ le groupe abélien des p-chaînes singulières de V.

Tout $\gamma \in \mathcal{S}_p(V)$ définit un morphisme de groupes gradués $\mathcal{S}(\Delta^p) \to \mathcal{S}(V)$; ce morphisme est noté γ_*.

Pour $i \in \langle p \rangle$, on définit comme suit l'opérateur face d_i sur $\mathcal{S}_p(V)$. On définit $d_i x_p$ comme le $(p-1)$-simplexe affine de Δ^p tel que

$$(0, 1, \ldots, p-1) \longmapsto (0, 1, \ldots, \widehat{\imath}, \ldots, p);$$

puis on pose, pour tout $\gamma \in \mathcal{S}_p(V)$

$$d_i \gamma = \gamma_* \cdot d_i x_p.$$

La relation $d_i \sigma = d_i \sigma'$ entre simplexes singuliers est appelée *relation d'incidence relative à i*.

Soit I une partie de $\langle p \rangle$ ayant $p - q$ éléments (avec $q \geq 0$). L'*opérateur face itéré d_I* de $\mathcal{S}_p(V)$ est par définition le composé $d_{i_0} \circ d_{i_1} \circ \ldots \circ d_{i_{p-q-1}}$

où $(i_0, i_1, \cdots, i_{p-q-1})$ est l'écriture ordonnée de I. L'opérateur d_I est de degré $q-p$; la q-face $|d_I x_p|$ de Δ^p est notée $\partial_I \Delta^p$. Si $q = p$, c'est-à-dire si $I = \emptyset$, d_I est l'application identique de $\mathcal{S}_p(V)$.

Pour tout convexe A d'un espace affine, et pour tout $a \in A$, on note k_a l'*opérateur cône au point* a de $\mathcal{S}(A)$; il vérifie $d_0 \circ k_a =$ identité. Exemples : si $A = \Delta^p$, on note k_i le cône au sommet i et k_{β_p} le cône au barycentre.

Soit I comme ci-dessus, l'*opérateur cône itéré* k_I de $\mathcal{S}(\Delta^p)$ est par définition le composé $k_{i_0} \circ k_{i_1} \circ \cdots \circ k_{i_{p-q-1}}$; il est de degré $p-q$. Si $q = p$, c'est l'application identique de $\mathcal{S}(\Delta^p)$.

Définition. — Une *subdivision linéaire* (sous-entendu : affine) est une suite $s_0, s_1, \ldots, s_p, \ldots$ de chaînes affines de $\Delta^0, \Delta^1, \ldots, \Delta^p, \ldots$ telles que :

(1) $s_0 = x_0$;

(2) Pour tout $p > 0$, les images des simplexes de s_p forment une triangulation de Δ^p ;

(3) Pour tout $p > 0$, $ds_p = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i (d_i x_p)_* \cdot s_{p-1}$.

On définit une application linéaire $s : \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(V)$, en posant pour toute p-chaîne γ de V :

$$s(\gamma) = \gamma_* \cdot s_p.$$

La formule (3) prend alors la forme :

$$(3') \qquad d\big(s(x_p)\big) = s(dx_p) \, ;$$

d'où on déduit que s est un morphisme de groupes différentiels :

$$d\big(s(\gamma)\big) = s(d\gamma) \quad \text{pour toute chaîne singulière } \gamma.$$

2. Décomposition de $\gamma - s(\gamma)$ en somme de cycles stellaires

Soit s une subdivision linéaire. Pour tout entier $q \geq 0$, on pose :

$$s^{(q)}(x_p) = \begin{cases} s(x_p) & \text{pour } 0 \leq p \leq q\,; \\ k_{\beta_p} \cdot s^{(q)}(dx_p) & \text{pour } p > q. \end{cases}$$

LEMME 1. — *Pour tout s et pour tout $q \geq 0$, $s^{(q)}$ est une subdivision linéaire.*

Démonstration. — Pour $p \geq q+1$, on a :

$$d\big(s^{(q)}(x_p)\big) = -k_{\beta_p} \cdot d\big(s^{(q)}(dx_p)\big) + s^{(q)}(dx_p);$$

si (3′) est vrai en dimension $(p-1)$, on a $d\big(s^{(q)}(dx_p)\big) = 0$, donc (3′) est vrai en dimension p. Puisque (3′) est vrai pour $p \leq q$ par hypothèse sur s, par récurrence (3′) est vrai pour tout p.

On dit que $s^{(q)}$ est la q-ème *déviation barycentrique de* s.

Propriétés de $s^{(q)}$.

1) Pour $p > q$, on a $(s^{(q)})^{(p)} = s^{(q)}$;

2) Pour tout s, $s^{(0)}$ est la subdivision barycentrique. Ceci s'applique en particulier pour $s = e$ (subdivision identique). Donc, pour toute p-chaîne singulière γ, on a :

$$s(\gamma) - \gamma = \sum_{q=1}^{q=p} \Big[\big(s^{(q)}(\gamma) - s^{(q-1)}(\gamma)\big) - \big(e^{(q)}(\gamma) - e^{(q-1)}(\gamma)\big) \Big]. \tag{4}$$

3. Propriétés particulières de $e^{(q)}$.

LEMME 2. — *Soit γ une p-chaîne singulière. Si $q \leq p - 1$:*

1) $d\big(e^{(q)}(\gamma)\big) = d_0(e^{(q)}(\gamma))$ *;*

2) $d_i\big(e^{(q)}(\gamma)\big) = 0$ *pour tout entier i tel que $i \geq 1$ et $i \leq p - q - 1$.*

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du* LEMME *2, il y a équivalence entre les quatre affirmations :*

(a) $d\gamma = 0$ *;*

(b) $d(e^{(q)}(\gamma)) = 0$ *;*

(c) $d_0\big(e^{(q)}(\gamma)\big) = 0$ *;*

(d) $d_i\big(e^{(q)}(\gamma)\big) = 0$ *pour tout $i \in \langle p - q - 1 \rangle$.*

Cas particulier $q = 0$. — Pour tout cycle γ, la barycentrique de γ est un "super-cycle", c'est-à-dire un cycle sur lequel tous les d_i sont nuls.

Démonstration du corollaire. — Le LEMME 2 entraîne l'équivalence de (b), (c) et (d). Il est clair que (a) entraîne (b). L'implication (b) $\Rightarrow$ (a) découle du classique théorème d'invariance par subdivision pour l'homologie singulière; mais en fait cette implication n'intervient pas dans la suite de l'article (lequel ne fait jamais usage du théorème classique d'invariance).

Démonstration du lemme 2. — Il suffit de traiter le cas $\gamma = x_p$.

1) $d\big(e^{(q)}(x_p)\big)$ est une chaîne du bord de Δ^p. Si $q \leq p - 1$, pour tout p-simplexe σ de $e^{(q)}(x_p)$, l'image de $d_i\sigma$ est contenue dans $\partial\Delta^p$ dans le seul cas $i = 0$. Donc

$$\sum_{i=1}^{i=p} (-1)^i \; d_i\big(e^{(q)}(x_p)\big) = 0;$$

d'où le 1).

2) On a

$$e^{(q)}(x_p) = k_{\beta_p} \circ (dx_p)_* \circ \cdots \circ k_{\beta_{q+1}} \cdot dx_{q+1};$$

donc, pour $1 \leq i \leq p-q-1$:

$$d_i\big(e^{(q)}(x_p)\big) = k_{\beta_p} \circ (dx_p)_* \circ \ldots \circ k_{\beta_{p-i+1}} \circ (dx_{p-i+1})_* \cdot d_0\big(e^{(q)}(x_{p-i})\big).$$

D'après le 1)

$$d_0\big(e^{(q)}(x_{p-i})\big) = d\big(e^{(q)}(x_{p-i})\big).$$

Or

$$d\big(e^{(q)}(x_{p-i})\big) = e^{(q)}(dx_{p-i}) = (dx_{p-i})_* \circ e^{(q)}(x_{p-i-1}).$$

Donc

$$(dx_{p-i+1})_* \circ (dx_{p-i})_* = (ddx_{p-i+1})_* = 0.$$

D'où le 2).

4. Décomposition de $e^{(q)}(\gamma)$ en somme de $\langle p-q-1\rangle$-étoiles.

Soit γ une p-chaîne écrite sous la forme :

$$\gamma = \sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j \qquad (J \text{ fini}, \ \lambda_j \in \mathbb{Z}).$$

Pour tout I contenu dans $\langle p\rangle$ et ayant $p-q$ éléments ($q \geq 0$), on note f_I l'application $j \mapsto d_I \sigma_j$ de J dans $\mathcal{S}_q(V)$.

LEMME 3. — *Pour tout γ comme ci-dessus, et pour tout z appartenant à l'image de $f_{\langle p-q-1\rangle}$, on note :*

$$\sum_{j \in f^{-1}_{\langle p-q-1\rangle}(z)} \lambda_j \sigma_j = \mathcal{S}t_{\langle p-q-1\rangle}(z).$$

On a :

1) $\gamma = \displaystyle\sum_{z \in \mathrm{Image} f_{\langle p-q-1\rangle}} \mathcal{S}t_{\langle p-q-1\rangle}(z)$;

2) *Pour tout $i \in \langle p-q-1\rangle$ tel que $d_i\gamma = 0$, on a :*

$$d_i \mathcal{S}t_{\langle p-q-1\rangle}(z) = 0$$

pour tout $z \in$ $\mathrm{Image} f_{\langle p-q-1\rangle}$.

Démonstration. — Le 1) est clair. Pour le 2), on observe que $f_{\langle p-q-1\rangle} = d_{\langle p-q-2\rangle} \circ f_i$; donc toute classe de la relation d'équivalence définie sur J par $f_{\langle p-q-1\rangle}$ est réunion de classes définies par f_i. L'hypothèse $d_i\gamma = 0$ s'écrit

$$\sum_{j\in J} \lambda_j f_i(j) = 0.$$

Donc la somme des λ_j est nulle sur toute classe définie par f_i.

Définition. — Soit q tel que $0 \leq q \leq p$. Soit I une partie de $\langle p\rangle$ ayant $p-q$ éléments. Soit ζ une p-chaîne écrite sous forme minimale

$$\zeta = \sum_{j\in J} \lambda_j \sigma_j \qquad (J \text{ fini}, \ \lambda_j \in \mathbb{Z}).$$

On dit que ζ est une *I-étoile* si

1) $d_i\zeta = 0$ pour tout $i \in I$;
2) Il existe un q-simplexe y tel que $d_I\sigma_j = y$ pour tout $j \in J$.

Sauf si J est vide (auquel cas ζ est la chaîne nulle et y arbitraire), le q-simplexe y est unique et est appelé *noyau* de l'I-étoile ζ. Les I-étoiles ayant un noyau donné forment un $\mathbb{Z}$-module.

Lorsque $q = p$, la partie I est vide, et ζ est multiple entier d'un simplexe, qui est son noyau.

COROLLAIRE du LEMME 3. — *Pour tout p-cycle γ et tout entier q tel que $0 \leq q \leq p$, le cycle $e^{(q)}(\gamma)$ admet une décomposition en somme de $\langle p-q-1\rangle$-étoiles, qui sont formées de simplexes plongés s'il en est ainsi de γ.*

Démonstration. — Si $q = p$, c'est une tautologie. Si $q \leq p-1$, il résulte des LEMMES 2 et 3 que l'application $f_{\langle p-q-1\rangle}$ relative à $e^{(q)}(\gamma)$ définit une décomposition du type désiré.

5. Relations entre les déviations barycentriques d'une subdivision linéaire et celles de la subdivision identique.

Notation. — Pour $0 \leq q \leq p$, on note $K(p,q)$ l'opérateur "suspension itérée" $\mathcal{S}(\Delta^q) \to \mathcal{S}(\Delta^p)$ de degré $p-q$, défini par :

$$K(p,q) = k_{\langle p-q-1\rangle} \circ \left(d_{\langle p-q-1\rangle} x_p\right)_*.$$

LEMME 4. — *Pour toute subdivision linéaire s et toute p-chaîne singulière γ, on a :*

$$(5) \qquad s^{(q)}(\gamma) = \left(e^{(q)}(\gamma)\right)_* \circ K(p,q) \cdot s(x_q) \quad \text{pour } 0 \leq q \leq p\,;$$

$$(5') \qquad s^{(q-1)}(\gamma) = \big(e^{(q)}(\gamma)\big)_* \circ K(p,q) \cdot s^{(q-1)}(x_q) \quad \text{pour } 1 \le q \le p.$$

Démonstration. — D'après la propriété 1) ci-dessus (5′) s'obtient en remplaçant s par $s^{(q-1)}$ dans (5) pour $q \neq 0$.

Preuve de (5). — Pour tout q fixé, on prouve (5) par récurrence sur p. La formule est trivialement vraie pour $p = q$. Soit $p > q$; on suppose la formule démontrée pour toute p'-chaîne, $q \le p' \le p-1$; par linéarité, on peut se borner au cas $\gamma = x_p$.

D'après la définition de $s^{(q)}$ pour $p > q$, et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$s^{(q)}(x_p) = k_{\beta_p} \cdot s^{(q)}(dx_p) = k_{\beta_p} \circ \big(e^{(q)}(dx_p)\big)_* \circ K(p-1,q) \cdot s(x_q).$$

On doit donc montrer :

$$\begin{aligned} k_{\beta_p} \circ \big(e^{(q)}(dx_p)\big)_* \circ K(p-1,q) \cdot s(x_q) \\ = \big(k_{\beta_p} \cdot e^{(q)}(dx_p)\big)_* \circ K(p,q) \cdot s(x_q), \end{aligned}$$

égalité qui équivaut à :

$$k_{\beta_p} \circ \big(e^{(q)}(dx_p)\big)_* = (k_{\beta_p} \cdot e^{(q)}(dx_p))_* \circ K(p,p-1),$$

compte tenu de la formule immédiate $K(p,q) = K(p,p-1) \circ K(p-1,q)$.

Par linéarité, on est ramené à montrer que, pour tout $(p-1)$-simplexe singulier τ de Δ^{p-1}, et pour tout $(p-1)$-simplexe singulier σ de Δ^p, on a :

$$(k_{\beta_p} \circ \sigma_*) \cdot \tau = (k_{\beta_p} \cdot \sigma)_* \circ K(p,p-1) \cdot \tau\,;$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(6) \qquad k_{\beta_p} \cdot (\sigma \circ \tau) = (k_{\beta_p} \cdot \sigma)_* \circ K(p,p-1) \cdot \tau.$$

Chacun des deux membres de (6) est une application $\Delta^p \to \Delta^p$ qui envoie le sommet 0 en β_p et qui coïncide sur $\partial_0 \Delta^p$ avec l'application $\sigma \circ \tau \circ (d_0 x_p)^{-1}$. En plus, chacune de ces applications est linéaire sur tout segment d'origine le sommet 0 ; donc elles coïncident.

COROLLAIRE. — *Pour tout p-cycle singulier γ et toute subdivision linéaire s, le cycle $s(\gamma) - \gamma$ est somme de p-chaînes du type $\zeta_* \circ K(p,q) \cdot \theta$, où q est un entier tel que $1 \le q \le p$, où ζ est une $(p-q-1)$-étoile et θ un q-cycle de simplexes affines plongés de Δ^q. Si γ est formé de simplexes plongés, il en est de même de chacune des chaînes de cette décomposition.*

Démonstration. — D'après (4), on est ramené à décomposer les chaînes du type $s^{(q)}(\gamma) - s^{(q-1)}(\gamma)$, pour $1 \leq q \leq p$.

D'après (5) et (5′), on a :

$$s^{(q)}(\gamma) - s^{(q-1)}(\gamma) = \big(e^{(q)}(\gamma)\big)_* \circ K(p,q) \cdot \big(s(x_q) - s^{(q-1)}(x_q)\big).$$

Puisque s et $s^{(q-1)}$ coïncident sur les $(q-1)$-simplexes, $s(x_q) - s^{(q-1)}(x_q)$ est un q-cycle de simplexes affines plongés de Δ^q ; et d'après le COROLLAIRE du LEMME 3, $e^{(q)}(\gamma)$ est somme de $\langle p-q-1\rangle$-étoiles, formées de simplexes plongés s'il en est ainsi de γ.

Faces et bord d'une suspension itérée.

LEMME 5. — *On a les égalités suivantes entre opérateurs :*

$$d_i \circ K(p,q) = (d_i\, x_p)_* \circ K(p-1,q) \tag{7}$$

pour $0 \leq q \leq p,\ 0 \leq i \leq p-q-1$;

$$d_i \circ K(p,q) = K(p,q) \circ d_{i-p+q} \tag{7′}$$

pour $1 \leq q \leq p,\ p-q \leq i \leq p$.

Démonstration. — L'égalité (7′) est immédiate. Sous les hypothèses de (7), on a :

$$d_i \circ K(p,q) = k_{(0,\ldots,\widehat{\imath},\ldots,p-q-1)} \circ (d_{\langle p-q-1\rangle}\, x_p)_* ;$$

de sorte que (7) résulte des deux égalités suivantes :

$$d_{\langle p-q-1\rangle} \cdot x_p = \big(d_0\, x_p\big)_* \circ d_{\langle p-q-2\rangle} \cdot x_{p-1}\ ; \tag{8}$$

$$k_{(0,1,\ldots,\hat{\imath},\ldots,p-q-1)} \circ \big(d_0 x_p\big)_* \cdot \sigma = \big(d_i x_p\big)_* \circ k_{\langle p-q-2\rangle} \cdot \sigma \tag{9}$$

pour tout q'-simplexe σ de Δ^{p-1}. L'égalité (8) est immédiate. Chacun des membres de (9) est une application $\Delta^{p-1} \to \Delta^p$; on vérifie l'égalité de ces applications aux sommets $0, 1, \ldots, p-q-2$ et sur la face $\partial_{\langle p-q-2\rangle}\Delta^{p-1}$.

COROLLAIRE. — *Soit ζ une p-chaîne singulière et soit θ une q-chaîne de Δ^q. Si $1 \leq q \leq p$, on a :*

$$d\big(\zeta_* \circ K(p,q) \cdot \theta\big) = \zeta_* \circ K(p,q) \cdot d\theta + \sum_{i=0}^{i=p-q-1} (d_i\zeta)_* \circ K(p-1,q) \cdot \theta. \tag{10}$$

Si ζ est une $\langle p-q-1\rangle$-étoile, la formule (10) *se réduit à :*

$$(10') \qquad d\big(\zeta_* \circ K(p,q)\cdot\theta\big) = \zeta_* \circ K(p,q)\cdot d\theta.$$

En particulier, si ζ est une $\langle p-q-1\rangle$-étoile (avec $q \geq 1$) et si θ est un q-cycle de Δ^q, alors $\zeta_* \circ K(p,q)\cdot\theta$ est un cycle. Un tel cycle sera appelé *cycle q-stellaire*; il a la propriété d'annuler d_i pour $0 \leq i \leq p-q-1$.

Le COROLLAIRE du LEMME 5 peut dès lors s'énoncer comme suit :

PROPOSITION 1. — *Pour tout p-cycle singulier γ et toute subdivision linéaire s, $s(\gamma)-\gamma$ se décompose en somme de cycles q-stellaires engendrés par des cycles affines, $1 \leq q \leq p$. Si γ est formé de simplexes plongés, il en est de même de chacun des cycles de cette décomposition.*

3. Linéarisation des I-étoiles

Tubes définis par les faces itérées d'un simplexe plongé.

Soient p et q tels que $0 \leq q \leq p$ et $I = (i_0,\ldots,i_{p-q-1})$. On note τ_I l'application $\Delta^q \times \Delta^{p-q} \to \Delta^p$ qui est linéaire affine sur toute "fibre" $\{u\}\times\Delta^{p-q}$ et qui vérifie

$$\tau_I(u,h) = \begin{cases} i_h & \text{pour } h \in \langle p-q-1\rangle\,; \\ d_I x_p \cdot u & \text{pour } h = p-q. \end{cases}$$

Pour tout $\varepsilon \in \,]0,1]$, on note φ_ε la "contraction" de $\Delta^q\times\Delta^{p-q}$ induisant sur chaque $\{u\}\times\Delta^{p-q}$ l'homothétie de rapport ε par rapport à $(u,p-q)$. On note $\tau_{I,\varepsilon}$ le composé $\tau_I \circ \varphi_\varepsilon$. On vérifie, pour tout $h \in \langle p-q-1\rangle$, la commutativité du diagramme

$$(11) \qquad \begin{array}{ccc} \Delta^q \times \Delta^{p-q} & \xrightarrow{\tau_{I,\varepsilon}} & \Delta^p \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\times d_h x_{p-q}}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle d_{i_h} x_p} \\ \Delta^q \times \Delta^{p-q-1} & \xrightarrow{\tau_{I_h,\varepsilon}} & \Delta^{p-1} \end{array}$$

où I_h est la partie de $\langle p-1\rangle$ définie par

$$(12) \qquad I_h = (i_0,\ldots,i_{h-1},i_{h+1}-1,\ldots,i_{p-q-1}-1).$$

En outre, $\tau_{I,\varepsilon}$ est un plongement dès que $\varepsilon\neq 1$, de sorte que pour tout p-simplexe plongé σ, le composé $\sigma\circ\tau_{I,\varepsilon}$ est un plongement $\Delta^q\times\Delta^{p-q}\to V$

dont la restriction à $\Delta^q \times \{p-q\}$ s'identifie à $d_I\sigma$. On dit que $\sigma \circ \tau_{I,\varepsilon}$ est l'(I,ε)-*tube* de σ. Tout plongement $\Delta^q \times \Delta^{p-q} \to V$ définissant naturellement un $(p-q)$-simplexe de l'espace $\sum_q^P(V)$ des q-simplexes plongés de V, on a ainsi défini le foncteur "(I,ε)-tube" de $\mathcal{S}_p^P(V)$ dans $\mathcal{S}_{p-q}(\sum_q^P(V))$.

Exemple. — Soit $\zeta = \sum_{j\in J}\lambda_j\sigma_j$ une I-étoile de dimension p, de noyau y. Fixant $\varepsilon > 0$, on note simplement $\tau_{j,\varepsilon}$ les (I,ε)-tubes $\sigma_j \circ \tau_{I,\varepsilon}$. Il résulte de (11) que l'opérateur face d_h hérité de celui de $\mathcal{S}_{p-q}(\sum_q(V))$ vérifie pour tout $h \in \langle p-q-1\rangle$

$$(13)\qquad (d_{i_h}\sigma_{j'} = d_{i_h}\sigma_j) \implies (d_h\tau_{j',\varepsilon} = d_h\tau_{j,\varepsilon}).$$

Donc *la $(p-q)$-chaîne de $\sum_q(V)$ associée à ζ par le foncteur (I,ε)-tube est une $\langle p-q-1\rangle$-étoile* (dont le noyau est le 0-simplexe de $\sum_q(V)$ défini par y).

Application à la linéarisation des I-étoiles.

Notations. — On note $\mathcal{F}_{J,I,y}$ (resp. $\mathcal{F}_{J,I,y}^P$) l'espace des familles $(\sigma_j)_{j\in J}$ de p-simplexes (resp. de p-simplexes plongés) de V telles que

$$d_I\sigma_j = y \quad \text{pour tout} \quad j \in J.$$

La topologie est celle déduite de la topologie C^k ; elle fait du second espace un ouvert du premier. Par extension de la définition usuelle, on appelle *isotopies* les chemins continus dans $\mathcal{F}_{J,I,y}^P$. On s'intéresse aux isotopies $((\sigma_{j,t}))$ qui "respectent les relations d'incidence relatives à $i \in I$", ce qui signifie

$$(d_i\sigma_{j,0} = d_i\sigma_{j',0} \ \text{ et } \ i \in I) \implies (d_i\sigma_{j,t} = d_i\sigma_{j',t} \ \text{ pour tout } \ t \in [0,1]).$$

Exemple : les contractions. — On note σ_I le plongement linéaire $\Delta^p \hookrightarrow \Delta^q \times \Delta^{p-q}$ défini sur $\partial_I\Delta^p$ par $(d_Ix_p)^{-1} \times \{p-q\}$, et sur la face opposée par

$$i_h \longmapsto (\beta_q, h) \qquad \text{pour} \quad h \in \langle p-q-1\rangle\,.$$

On a la propriété d'hérédité

$$(14)\qquad d_{i_h}\sigma_I = (id \times d_h x_{p-q}) \circ \sigma_{I_h},$$

où la notation I_h est celle de (12). On note

$$\tau_{I,\varepsilon} \circ \sigma_I = \psi_{I,\varepsilon}.$$

Cette "contraction" $\psi_{I,\varepsilon}$ de Δ^p dans son (I,ε)-tube est l'extrémité d'une isotopie $(\psi_{I,\varepsilon,t})$ d'origine x_p qu'on définit comme suit. On a

$$\psi_{I,\varepsilon} = (\tau_I \circ \sigma_I) \circ (\sigma_I^{-1} \circ \varphi_\varepsilon \circ \sigma_I);$$

$(\psi_{I,\varepsilon,t})$ est le composé de l'isotopie $(\sigma_I^{-1} \circ \varphi_{1-t+\varepsilon t} \circ \sigma_I)$ et de l'isotopie $(\tau_I \circ \sigma_I)_t \circ (\sigma_I^{-1} \circ \varphi_\varepsilon \circ \sigma_I)$, où $(\tau_I \circ \sigma_I)_t$ est le chemin joignant linéairement x_p à $\tau_I \circ \sigma_I$.

Soit alors $(\sigma_j) \in \mathcal{F}^P_{J,I,y}$; pour tout $\varepsilon > 0$, la famille $((\sigma_j \circ \psi_{I,\varepsilon,t}))$ est une isotopie qui, d'après (13) et (14), conserve les relations d'incidence relatives à $i \in I$. L'intérêt de cette isotopie est que, pour ε assez petit, les images finales de tous les simplexes sont contenues dans un voisinage arbitrairement petit de $|y|$.

PROPOSITION 2. — *Soit $\mathcal{F}^P_{J,I,y}$ l'espace de familles de p-simplexes plongés de V défini ci-dessus. Tout $(\sigma_j) \in \mathcal{F}^P_{J,I,y}$ est origine d'une isotopie $((\sigma_{j,t}))$ respectant les relations d'incidence relatives à tout $i \in I$, et telle qu'il existe une carte locale d'un voisinage U de $|y|$, difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, dans laquelle, pour tout $j \in J$, $\sigma_{j,1}$ soit un plongement linéaire affine $\Delta^p \hookrightarrow U$. Si en plus $p \leq n-1$, il existe $a \in U$ tel que, pour tout $j \in J$, $k_a \cdot \sigma_{j,1}$ soit un cône plongé.*

En particulier, si $\zeta = \sum_{j\in J} \lambda_j \sigma_j$ est une I-étoile, alors $\zeta_t = \sum_{j\in J} \lambda_j \sigma_{j,t}$ est pour tout t une I-étoile de noyau y ; ζ_1 est une I-étoile linéaire affine d'une carte locale de V difféomorphe à $\mathbb{R}^n$; et si $p \leq n-1$, ζ_1 est base d'un cône de simplexes affines non dégénérés.

Démonstration. — On choisit une carte locale de source $\mathbb{R}^n$, d'image notée U, telle que y s'identifie à un plongement affine $\Delta^q \hookrightarrow \mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^n$ envoyant le sommet 0 de Δ^q à l'origine. On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que les images de tous les (I,ε)-tubes $\tau_{j,\varepsilon}$ soient contenues dans U.

On linéarise les $\tau_{j,\varepsilon}$ en deux temps :

1) *Déroulement.* On pose, pour $j \in J$, $(u,v) \in \Delta^q \times \Delta^{p-q}$ et $t \in [0,1]$

$$\tau'_{j,\varepsilon,t}(u,v) = \tau_{j,\varepsilon}\big((1-t)u, v\big) + y(tu),$$

où le produit par t d'un élément de Δ^q est son homothétique par rapport au sommet 0, et où l'addition est celle de U. Les $\tau'_{j,\varepsilon,t}$ sont fixes sur $\Delta^q \times \{p-q\}$; ils ne sont pas *a priori* des plongements, mais ils sont de rang maximum en tout point de $\Delta^q \times \{p-q\}$, de sorte que leur restriction à un voisinage assez petit de $\Delta^q \times \{p-q\}$ (indépendant de j et de t) est un plongement (*cf.* [1], LEMME 3.3.1, p. 311). Il en résulte, compte tenu de la formule (immédiate)

$$\tau'_{j,\varepsilon,t} = \tau'_{j,\varepsilon',t} \circ \varphi_{\varepsilon/\varepsilon'} \quad \text{pour } \varepsilon \text{ et } \varepsilon' > 0, \tag{15}$$

que $(\tau'_{j,\varepsilon,t})$ est une isotopie dès que ε est assez petit. En outre, $((\tau'_{j,\varepsilon,t}))$ conserve les relations d'incidence relatives à tout $h \in \langle p-q-1\rangle$, et, en fin d'isotopie, on a

$$\tau'_{j,\varepsilon,1}(u,v) = \tau_{j,\varepsilon}(0,v) + y(u). \tag{16}$$

2) *Mise à plat.* D'après (16), il existe pour tout $j \in J$ une application linéaire $\tau^{\ell}_{j,\varepsilon,1} : \Delta^q \times \Delta^{p-q} \to U$, tangente à $\tau'_{j,\varepsilon,1}$ le long de $\Delta^q \times \{p-q\}$. Le chemin $(\tau''_{j,\varepsilon,t})$ joignant linéairement (au sens de U) $\tau'_{j,\varepsilon,1}$ à $\tau^{\ell}_{j,\varepsilon,1}$ conserve les relations d'incidence relatives à tout $h \in \langle p-q-1\rangle$ et c'est un résultat classique (*cf.* par exemple [1], p. 328) que sa restriction à un voisinage assez petit de $\Delta^q \times \{p-q\}$ est une isotopie; il en résulte compte tenu de (15) (vrai pour $\tau'_{j,\varepsilon,1}$, donc pour $\tau^{\ell}_{j,\varepsilon,1}$, donc pour $\tau''_{j,\varepsilon,t}$) que $(\tau''_{j,\varepsilon,t})$ est une isotopie dès que ε est assez petit.

L'*isotopie de linéarisation des voisinages tubulaires* $((\tau_{j,\varepsilon,t}))$ est la composée (au sens des espaces de chemins) des isotopies 1) et 2); elle conserve les relations d'incidence relatives à tout $h \in \langle p-q-1\rangle$.

On définit alors l'*isotopie de linéarisation* $((\sigma_{j,t}))$ comme composée des deux isotopies suivantes, pour lesquelles ε est choisi assez petit :

1) *Contraction.* On pose

$$\sigma'_{j,t} = \sigma_j \circ \psi_{I,\varepsilon,t},$$

ce qui, on l'a vu, respecte les relations d'incidence relatives à tout $i \in I$.

2) *Linéarisation.* On pose

$$\sigma''_{j,t} = \tau_{j,\varepsilon,t} \circ \sigma_I.$$

Les relations d'incidence relatives à $i \in I$ sont conservées par $((\sigma''_{j,t}))$: compte tenu de (13) et de la propriété de conservation des relations d'incidence de $((\tau_{j,\varepsilon,t}))$, cela résulte de la formule

$$d_{i_h}\sigma''_{j,t} = d_h\tau_{j,\varepsilon,t} \circ \sigma_{I_h} \quad \text{pour tout} \quad h \in \langle p-q-1\rangle\,.$$

Les isotopies 1) et 2) se composent car

$$\sigma''_{j,0} = \sigma_j \circ \tau_{I,\varepsilon} \circ \sigma_I = \sigma_j \circ \psi_{I,\varepsilon} = \sigma'_{j,1}.$$

Enfin, $\sigma''_{j,1}$ est *linéaire*, car $\tau_{j,\varepsilon,1}$ et σ_I le sont.

Si $p \leq n-1$, il existe des droites (de U) transversales en l'origine à tous les $|\sigma''_{j,1}|$; on peut choisir a arbitrairement (origine exceptée) sur l'une quelconque de ces transversales.

Étoiles et pseudo-cônes.

Définition. — Soient p et q tels que $0 \leq q \leq p$. Soit I une partie de $\langle p \rangle$ ayant $p-q$ éléments, d'écriture ordonnée $(i_0, i_1, \dots, i_{p-q-1})$. L'ensemble $\{0, 1+i_0, \dots, 1+i_{p-q-1}\}$ est noté $\widetilde{I}$.

Soit ξ une $(p+1)$-chaîne s'écrivant sous forme minimale

$$\xi = \sum_{\ell \in L} \mu_\ell \tau_\ell \qquad (L \text{ fini}, \ \mu_\ell \in \mathbb{Z}).$$

On dit que ξ est un *$\widetilde{I}$-pseudo-cône* si

1) $d_i \xi = 0$ pour $i = 1+i_0, \dots, 1+i_{p-q-1}$;

2) Il existe un q-simplexe y tel que $d_{\widetilde{I}} \tau_\ell = y$ pour tout $\ell \in L$.

Si $L \neq \emptyset$, le q-simplexe y est unique et est appelé *noyau* de ξ.

Les $\widetilde{I}$-pseudo-cônes de noyau y forment un $\mathbb{Z}$-module que l'application d_0 (appelée application *base*) envoie linéairement sur le $\mathbb{Z}$-module des I-étoiles de noyau y. Lorsqu'une I-étoile ζ formée de simplexes plongés est l'image par d_0 d'un $\widetilde{I}$-pseudo-cône de simplexes plongés, on dit simplement que ζ *est une base*.

Exemple. — Dans un espace affine, tout cône dont la base est une I-étoile est un $\widetilde{I}$-pseudo-cône.

LEMME 6. — *Soit ζ une $\langle p-q-1 \rangle$-étoile de p-simplexes plongés. Si $q \neq 0$, et si ζ est une base, les cycles q-stellaires portés par ζ et engendrés par des cycles affines de Δ^q sont des bords.*

Démonstration. — Si ζ est base du $\langle p-q \rangle$-pseudo-cône ξ, il résulte de la formule (10) que, pour tout q-cycle θ de Δ^q, le cycle q-stellaire $\zeta_* \circ K(p,q) \cdot \theta$ est bord de la $(p+1)$-chaîne $\xi_* \circ K(p+1,q) \cdot \theta$.

Définitions. — Soit $(\sigma_j)_{j \in J}$ une famille de p-simplexes de V. Un *système de relations d'incidence* de la famille (σ_j) est une famille $(e_i)_{i \in \langle p \rangle}$ de relations d'équivalence sur J telles que

$$e_i(j,j') \implies d_i \sigma_j = d_i \sigma_{j'}.$$

On peut évidemment oublier les e_i qui se réduisent à la relation d'égalité.

Si $(\sigma_j) \in \mathcal{F}_{J,I,y}$ et si $(\lambda_j)_{j \in J}$ est une famille de coefficients, la condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j$ soit une I-étoile est que le système de relations d'incidence $(e_i)_{i \in I}$ défini par

$$e_i(j,j') \iff d_i \sigma_j = d_i \sigma_{j'} \tag{17}$$

vérifie la condition

$$(*)\qquad \text{Pour tout } i \in I \text{ et toute classe } J' \text{ de } e_i, \text{ on a } \sum_{j \in J'} \lambda_j = 0.$$

Un système $(e_i)_{i \in I}$ de relations d'incidence de (σ_j) qui vérifie (*) est dit (λ_j)-*suffisant* pour (σ_j).

PROPOSITION 3. — *Soit $p \leq n-1$ et soit $I \subsetneq \langle p \rangle$. Soit $\zeta = \sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j$ une I-étoile de p-simplexes plongés, de noyau y. Soit $(e_i)_{i \in I}$ un système λ_j-suffisant de relations d'incidence de (σ_j). Soit $(\sigma'_j)_{j \in J}$ une famille de p-simplexes plongés vérifiant tous $d_I \sigma'_j = y$.*

Si (σ'_j) est assez voisine de (σ_j) et respecte le système (e_i), alors l'I-étoile $\sum_{j \in J} \lambda_j (\sigma'_j - \sigma_j)$ est une base.

Cet énoncé, étendu de façon à inclure le cas $I = \langle p \rangle$, sera démontré au § 4. Dans le cas $I \neq \langle p \rangle$ considéré ici, il a les conséquences suivantes, dont la seconde constitue l'*invariance par subdivision linéaire* :

COROLLAIRE. — *Pour $p \leq n-1$ et $I \subsetneq \langle p \rangle$:*

1) *Toute I-étoile de p-simplexes plongés est une base.*

2) *Pour tout cycle γ de p-simplexes plongés et toute subdivision linéaire s, le cycle $s(\gamma) - \gamma$ est un bord en homologie plongée.*

Remarque. — Le 1) est en fait un COROLLAIRE de la PROPOSITION 3 *restreinte au seul I considéré*; cette remarque est utilisée au § 4.

Démonstration du corollaire. — La PROPOSITION 2 fournit une isotopie de linéarisation de ζ; appliquant la PROPOSITION 3 pour tout $t \in [0,1]$ à ζ_t et au système de relations d'incidence (17) (système de toutes les relations d'incidence relatives à $i \in I$ en l'origine de l'isotopie), on obtient le 1) par compacité de $[0,1]$ et linéarité de d_0. Le 2) résulte du 1), de la PROPOSITION 1, et du LEMME 6.

4. Démonstration de la proposition 3

On a jusqu'ici (notamment pour la PROPOSITION 2) supposé $I \neq \langle p \rangle$. On cesse désormais de faire cette restriction. La définition d'une I-étoile et celle d'un $\widetilde{I}$-pseudo-cône gardent un sens pour $I = \langle p \rangle$: le noyau est alors vide et la condition 2) également. Une $\langle p \rangle$-étoile de dimension p n'est autre qu'un super-cycle (un exemple de super-cycle a été donné ci-dessus, *cf.* COROLLAIRE du LEMME 2); pour un super-cycle, être base d'un $\widetilde{\langle p \rangle}$-pseudo-cône, c'est en être le bord. La PROPOSITION 3 va être prouvée pour tout $I \subset \langle p \rangle$; le cas $I = \langle p \rangle$ constitue l'étape finale de la récurrence; voici la formulation sous laquelle il sera utilisé au § 5 :

PROPOSITION 3 (Cas $I = \langle p\rangle$). — *Soit $\zeta = \sum_{j\in J}\lambda_j\sigma_j$ un super-cycle de p-simplexes plongés, $0 \le p \le n-1$. Soit $(e_i)_{i\in\langle p\rangle}$ un système λ_j-suffisant de relations d'incidence de (σ_j). Si $(\sigma'_j)_{j\in J}$ est une famille de p-simplexes plongés suffisamment voisine de (σ_j) et respectant le système (e_i), alors le super-cycle $\sum_{j\in J}\lambda_j(\sigma'_j - \sigma_j)$ est un bord en homologie plongée.*

Décomposition des I-étoiles ($I \subset \langle p\rangle$).

Notation. — Soit $(e_i)_{i\in\langle p\rangle}$ un système de relations d'incidence d'une famille $(\sigma_j)_{j\in J}$ de p-simplexes.

Pour $I' \subset \langle p\rangle$, on note $e_{I'}$ la relation suivante sur J :

- si $I' = \emptyset$, la relation d'égalité;
- si $I' \neq \emptyset$, la relation transitive engendrée par la relation "*il existe $i \in I'$ tel que $e_i(j,j')$*".

Il est clair que $e_{I'}$ est une relation d'équivalence, que

$$(e_i(j,j') \text{ et } i\in I') \implies e_{I'}(j,j')\,; \tag{18}$$

et que

$$e_{I'}(j,j') \implies d_{I'}\sigma_j = d_{I'}\sigma_{j'}. \tag{19}$$

LEMME 7. — *Soit $\zeta = \sum_{j\in J}\lambda_j\sigma_j$ une I-étoile , et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système (λ_j)-suffisant de relations d'incidence de (σ_j). Pour tout $I' \subsetneqq I$, et pour toute classe J' de la relation $e_{I'}$, la chaîne $\sum_{j\in J'}\lambda_j\sigma_j$ est une I'-étoile, et le système $(e_i)_{i\in I'}$ est un système (λ_j)-suffisant de relations d'incidence de la famille $(\sigma_j)_{j\in J'}$.*

Démonstration. — D'une part, il résulte de (19) que $d_{I'}\sigma_j$ est indépendant de j pour $j \in J'$. D'autre part, pour tout $i \in I'$, il résulte de (18) que J' est réunion de classes de e_i, sur chacune desquelles la somme des λ_j est nulle d'après (*).

Sections locales pour les opérateurs de face itérés.

Soit $I' \subsetneqq \langle p\rangle$, ayant $p-q'$ éléments; soit $\omega_{I'}$ une fonction différentiable $\Delta^p \to [0,1]$, égale à 1 sur $\partial_{I'}\Delta^p$, dont le support, noté $\Omega_{I'}$, soit disjoint de la face opposée; la donnée d'une telle fonction définit I' sans ambiguïté. On note $\mathrm{pr}_{I'}$ la projection de Δ^p sur $\partial_{I'}\Delta^p$, définie en tout point du complémentaire de la face opposée : soit a un tel point, $\mathrm{pr}_{I'}\cdot a$ est l'unique point où $\partial_{I'}\Delta^p$ est rencontré par le $(p-q')$-plan engendré par a et la face opposée à $\partial_{I'}\Delta^p$.

Soit U l'image d'une carte locale de V, de source $\mathbb{R}^n$. Pour tout p-simplexe σ de V tel que

$$\sigma(\Omega_{I'}) \subset U \tag{20}$$

et pour tout q'-simplexe z' de U, on définit un p-simplexe en posant :

$$(\Phi_{U,\omega_{I'}}(\sigma, z')) \cdot a \;= \begin{cases} \sigma \cdot a + (\omega_{I'} \cdot a) \times \big((z' - d_{I'}\sigma) \circ (d_{I'}x_p)^{-1} \circ pr_{I'}\big) \cdot a \\ \hfill \text{pour } a \in \Omega_{I'} \\ \sigma \cdot a \qquad \text{pour } a \in \Delta^p \setminus \Omega_{I'}. \end{cases} \tag{21}$$

où les opérations $+$, $-$ et $\times$ sont celles de U, puis on prolonge cette définition par linéarité (formelle) à toute p-chaîne ζ dont tous les simplexes vérifient (20). On utilise la notation $\Phi_{\omega_{I'}}$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur U.

LEMME 8.

1) *Pour tout p-simplexe σ vérifiant* (20), *on a*

$$d_{I'}\Phi_{\omega_{I'}}(\sigma, z') = z'; \tag{22}$$

$$d_i\Phi_{\omega_{I'}}(\sigma, z') = \Phi_{\omega_{I'} \circ d_i x_p}(d_i\sigma, z') \quad \text{si} \quad i \in I'; \tag{23}$$

$$d_i\Phi_{\omega_{I'}}(\sigma, z') = \Phi_{\omega_{I'} \circ d_i x_p}(d_i\sigma, d_{i-i(I')}z') \quad \text{si} \quad i \notin I'; \tag{23'}$$

avec

$$i(I') = \text{nombre d'éléments de } I' \text{ inférieurs à } i. \tag{24}$$

2) *Pour toute p-chaîne ζ dont tous les simplexes vérifient* (20), *et pour tout couple (z', z'') de q'-simplexes de U, on a*

$$\Phi_{\omega_{I'}}(\Phi_{\omega_{I'}}(\zeta, z'), z'') = \Phi_{\omega_{I'}}(\zeta, z''). \tag{25}$$

Démonstration. — On se borne à prouver (23′). Puisque $i \notin I'$, on a avec les notations (12) et (24)

$$d_{I' \cup \{i\}} = d_{i-i(I')} \circ d_{I'} = d_{(I' \cup \{i\})_{i(I')}} \circ d_i. \tag{26}$$

La formule (23′) résulte de (26) et de la commutativité

$$pr_{I'} \circ d_i x_p = d_i x_p \circ pr_{(I' \cup \{i\})_{i(I')}}.$$

COROLLAIRE.

1) *Pour tout z', l'application $\sigma \mapsto \Phi_{\omega_{I'}}(\sigma, z')$ respecte les relations d'incidence.*

Si ζ est une I'-étoile dont tous les simplexes vérifient (20), $\Phi_{\omega_{I'}}(\zeta, z')$ *est une I'-étoile de noyau z'.*

Si ξ est un $\widetilde{I}'$-pseudo-cône de base ζ dont tous les simplexes vérifient

$$\tau(\Omega_{\widetilde{I}'}) \subset U, \tag{20'}$$

et si $\omega_{\widetilde{I}'}$ vérifie

$$\omega_{\widetilde{I}'} \circ d_0 x_{p+1} = \omega_{I'}, \tag{27}$$

alors $\Phi_{\omega_{\widetilde{I}'}}(\xi, z')$ est un $\widetilde{I}'$-pseudo-cône de base $\Phi_{\omega_{I'}}(\zeta, z')$.

2) *Soit I tel que*

$$I' \subsetneqq I \subset \langle p \rangle\,. \tag{28}$$

On note z le noyau de l'I'-étoile ζ. Soit σ un simplexe de ζ ; si $I \neq \langle p \rangle$, $d_I \sigma$ (qui ne dépend pas du choix de ce σ) est une face itérée de z qu'on note y ; si $I = \langle p \rangle$, $d_I \sigma_j$ est vide ; pour $i \in I \setminus I'$, la relation

$$d_{i-i(I')} z' = d_{i-i(I')} z \tag{29}$$

entraîne

$$d_i \Phi_{\omega_{I'}}(\sigma, z') = d_i \sigma. \tag{30}$$

Si (29) *a lieu pour tout $i \in I \setminus I'$, alors $\Phi_{\omega_{I'}}(\zeta, z') - \zeta$ est une I-étoile de noyau y, et $\Phi_{\omega_{\widetilde{I}'}}(\xi, z') - \xi$ est un $\widetilde{I}$-pseudo-cône de base cette I-étoile.*

3) *Soient I', I, ζ, z comme au 2). Soit (z_t) un chemin d'origine z dans $\sum_{q'}(U)$; on note $\Phi_{\omega_{I'}}(\zeta, z_t) = \zeta_t$; on suppose :*

a) *z_t vérifie* (29) *pour tout $t \in [0,1]$ et tout $i \in I \setminus I'$;*

b) *il existe pour tout $t \in [0,1]$ un $\widetilde{I}'$-pseudo-cône de simplexes plongés ξ_t ayant pour base ζ_t.*

Alors l'I-étoile $\zeta_1 - \zeta$ est une base ; si $I = \langle p \rangle$, c'est un bord.

Démonstration. — Le 1) et le 2) découlent immédiatement du lemme. Preuve du 3) : Tout pseudo-cône peut se contracter par une isotopie laissant fixe sa base, sur un voisinage arbitrairement petit de celle-ci (*cf.* Appendice) ; on peut donc supposer, pour tout $t \in [0,1]$, que tous les simplexes de ξ_t vérifient (20′). Pour tout $t' \in [0,1]$, il résulte alors du 2) du COROLLAIRE que $\Phi_{\omega_{\widetilde{I'}}}(\xi_t, z_{t'}) - \xi_t$ est un $\widetilde{I}$-pseudo-cône de noyau y, de base $\Phi_{\omega_{I'}}(\zeta_t, z_{t'}) - \zeta_t$, qui n'est autre d'après (25) que $\zeta_{t'} - \zeta_t$. Pour tout t fixé, $\Phi_{\omega_{\widetilde{I'}}}(\xi_t, z_{t'}) - \xi_t$ est formé de simplexes plongés dès que t' est assez voisin de t. On termine par compacité de l'intervalle $[0,1]$ et linéarité de d_0.

Démonstration de la proposition 3.

L'entier p étant fixé ($0 \leq p \leq n-1$), on procède par récurrence sur le nombre r d'éléments de I (où $0 \leq r \leq p+1$). Tout p-simplexe plongé étant base d'un cône plongé, l'énoncé est vrai pour $r = 0$; on suppose désormais $r \geq 1$, et on suppose l'énoncé vrai pour $0, 1, \ldots, r-1$; il en résulte d'après le 1) du COROLLAIRE de la PROPOSITION 3 (applicable en vertu de la remarque qui suit ce COROLLAIRE) que, pour ces valeurs de $\# I$, toute I-étoile de p-simplexes plongés est une base. On va montrer qu'il en est de même, lorsque $\# I = r$, pour les I-étoiles du type “petite différence” considéré dans l'énoncé.

La méthode consiste à “grimper sur le I-squelette”. On choisit sur le produit $\{$parties de I distinctes de $I\} \times J$ un ordre noté $(I_1, j_1), \ldots, (I_N, j_N)$ tel que

$$\# I_1 \geq \# I_2 \geq \ldots \geq \# I_N. \tag{31}$$

On suppose satisfaite pour un certain M ($1 \leq M \leq N$) la condition

$$d_{I_{M'}} \sigma'_{j_{M'}} = d_{I_{M'}} \sigma_{j_{M'}} \quad \text{pour} \quad 1 \leq M' \leq M-1, \tag{$32_{\mathrm{M}-1}$}$$

et l'on va construire $(\sigma''_j) \in \mathcal{F}^P_{J,I,y}$ proche de (σ'_j), respectant (e_i), telle que l'I-étoile $\sum_{j \in J} \lambda_j (\sigma''_j - \sigma'_j)$ soit une base, et que le couple $((\sigma''_j), (\sigma_j))$ vérifie (32_{M}). Puisque la condition (32_0) est vide et que (32_{N}) implique $(\sigma'_j) = (\sigma_j)$, cette construction achèvera la démonstration.

On note J_M la classe de j_M pour la relation e_{I_M}. On choisit une carte locale de V, de source $\mathbb{R}^n$, d'image un voisinage U_M de $|d_{I_M} \sigma_{j_M}|$, puis une fonction ω_{I_M} dont le support Ω_{I_M} vérifie

$$\sigma_j(\Omega_{I_M}) \subset U_M \qquad \text{pour tout} \quad j \in J_M.$$

Il résulte du LEMME 7 que $\sum_{j \in J_M} \lambda_j \sigma'_j$ est une I_M-étoile. Les hypothèses du 3) du COROLLAIRE du LEMME 8 sont satisfaites par I_M, I, $\sum_{j \in J_M} \lambda_j \sigma'_j$, $d_{I_M} \sigma'_{j_M}$ et par le chemin (z_t) joignant linéairement (au sens de U_M) $d_{I_M} \sigma'_{j_M}$ à $d_{I_M} \sigma_{j_M}$: l'hypothèse b) en vertu de l'hypothèse de récurrence;

l'hypothèse a), par linéarité de (z_t), doit être vérifiée uniquement pour $t = 1$, où d'après (26) elle s'écrit

$$d_{I_M \cup \{i\}} \sigma'_{j_M} = d_{I_M \cup \{i\}} \sigma_{j_M} \qquad \text{pour tout} \quad i \in I \setminus I_M; \tag{33}$$

si $I_M \cup \{i\} = I$, les deux membres de (33) valent y, et sinon, d'après (31), $(I_M \cup \{i\}, j_M)$ est de la forme $(I_{M'}, j_{M'})$ avec $M' < M$, de sorte que (33) résulte de $(32_{\mathrm{M}-1})$. Il résulte du COROLLAIRE cité que si l'on pose

$$\sigma''_j = \begin{cases} \Phi_{\omega_{I_M}}(\sigma'_j, z_1) & \text{pour } j \in J_M\,; \\ \sigma'_j & \text{pour } j \in J \setminus J_M\,; \end{cases}$$

l'I-étoile $\sum_{j \in J} \lambda_j (\sigma''_j - \sigma'_j)$ est une base. Deux points sont à vérifier :

- *La famille $(\sigma''_j)_{j \in J}$ respecte le système $(e_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire*

$$e_i(j, j') \quad \text{et} \quad i \in I \implies d_i \sigma''_j = d_i \sigma''_{j'}.$$

C'est clair pour j et $j' \notin J_M$ et pour j et $j' \in J_M$; si $j \in J_M$ et $j' \notin J_M$, on remarque que $i \in I \setminus I_M$ et on applique (30).

- *La famille $(\sigma''_j)_{j \in J}$ vérifie* (32_{M}). D'après (22), on a

$$d_{I_M} \sigma''_{j_M} = d_{I_M} \sigma_{j_M}\,; \tag{34}$$

il reste à s'assurer que $(32_{\mathrm{M}-1})$ est conservé quand on passe de (σ'_j) à (σ''_j). Soit $M' < M$; on suppose $j_{M'} \in J_M$ (c'est le seul cas non trivial) ; si $I_{M'} = I_M$, on utilise (34) et le fait que (σ_j) et (σ''_j) respectent les relations (e_i) ; si $I_{M'} \neq I_M$, il existe d'après (31) un élément i de $I_{M'}$ qui ne soit pas dans I_M ; d'après (30) on a $d_i \sigma''_{j_{M'}} = d_i \sigma'_{j_{M'}}$, d'où $d_{I_{M'}} \sigma''_{j_{M'}} = d_{I_{M'}} \sigma'_{j_{M'}} = d_{I_{M'}} \sigma_{j_{M'}}$.

5. Preuve du théorème

Réduction au cas $V = \mathbb{R}^n$.

LEMME 9. — *A tout couple d'ouverts d'une n-variété V est associée une "suite exacte de Mayer-Vietoris en homologie des simplexes plongés", limitée aux dimensions $p \le n - 1$; cette suite s'envoie de façon commutative dans la suite exacte de Mayer-Vietoris usuelle.*

Démonstration. — C'est celle du cas classique : l'invariance par subdivision linéaire en dimension $p \le n - 1$, appliquée à une itérée d'ordre assez élevé de la subdivision barycentrique, montre que, pour ces dimensions, l'homologie du sous-complexe de $\mathcal{S}(U_1 \cup U_2)$ engendré par la réunion de $\mathcal{S}^P(U_1)$ et $\mathcal{S}^P(U_2)$ s'envoie bijectivement sur $H_p^P(U_1 \cup U_2)$.

COROLLAIRE. — 1) *Soient U_1 et U_2 deux ouverts d'une n-variété différentiable V. Si la propriété "$H_p^P \approx H_p$ pour $p \leq n-1$" est vraie pour U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$, elle est vraie pour $U_1 \cup U_2$.*

2) *Si la conjecture de* WHITEHEAD *est vraie pour $\mathbb{R}^n$, elle est vraie pour toute n-variété différentiable V.*

Démonstration. — Le 1) résulte du LEMME 9 par application du lemme de 5. Le 2) découle du 1) par application de la remarque simple suivante due à MILNOR : si une classe $\mathcal{M}$ de n-variétés sans bord contient $\mathbb{R}^n$, est stable par difféomorphisme ainsi que par union dénombrable croissante, et si en plus, toutes les fois qu'elle contient deux ouverts d'une variété et leur intersection, elle contient aussi leur réunion, alors $\mathcal{M}$ contient toutes les n-variétés sans bord. [En effet, $\mathcal{M}$ contient toutes les réunions finies de pavés ouverts de $\mathbb{R}^n$, donc tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$; on passe de là au cas d'une variété V, supposée différentiable et de type dénombrable, à l'aide d'une suite d'ouverts difféomorphes à $\mathbb{R}^n$ recouvrant V.]

C^1-approximation d'un simplexe plongé de $\mathbb{R}^n$ par un simplexe PL.

Soit σ un p-simplexe de $\mathbb{R}^n$. Soit α un p-simplexe affine non dégénéré (non paramétré) de Δ^p ; on note $\ell_\alpha(\sigma)$ l'application affine $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ qui coïncide avec σ aux sommets de α. Soit s une subdivision linéaire ; on note $\ell_s(\sigma)$ le p-simplexe de $\mathbb{R}^n$ qui coïncide avec $\ell_\alpha(\sigma)$ sur tout p-simplexe α de $s(\Delta^p)$.

Soit (s_i) une suite de subdivisions linéaires ; si cette suite est *fine* c'est-à-dire si la borne supérieure des diamètres des simplexes de $s_i(\Delta^p)$ tend vers zéro lorsque $i \to \infty$, alors la suite $\ell_{s_i}(\sigma)$ tend uniformément vers σ.

En [6], p. 125, WHITNEY associe à tout p-simplexe affine α (non paramétré) de $\mathbb{R}^p$ le nombre

$$\theta(\alpha) = \frac{\text{volume de } \alpha}{(\text{diamètre de } \alpha)^p}.$$

Tout ensemble de p-simplexes affines de $\mathbb{R}^p$ sur lequel θ est minoré par un nombre positif est dit *régulier*. Une suite (s_i) de subdivisions linéaires est dite *régulière* si, pour tout $p > 0$, l'ensemble de tous les p-simplexes de tous les $s_i(\Delta^p)$ est régulier.

Il existe des suites fines et régulières de subdivisions linéaires : les itérées de la "subdivision standard" de WHITNEY (*cf.* [6], p. 359) forment une telle suite. D'autres procédés ont été donnés antérieurement par WHITEHEAD [5] et par FREUDENTHAL [2], ultérieurement par THURSTON [4] et par LALONDE [3].

LEMME 10. — (WHITEHEAD [5], THÉORÈME 1) *Soit σ un p-simplexe plongé de $\mathbb{R}^n$ $(0 \leq p \leq n)$. Si (s_i) est une suite fine et régulière de subdivisions linéaires, la suite $\ell_{s_i}(\sigma)$ tend vers σ au sens C^1.*

Démonstration. — Par compacité de Δ^p, on est ramené à montrer que, pour tout $u \in \Delta^p$, et toute suite régulière (α_i) de p-simplexes affines de Δ^p tendant vers u, la suite $\ell_{\alpha_i}(\sigma)$ tend vers l'application affine tangente en u à σ. Par changement de coordonnées affines dans Δ^p et dans $\mathbb{R}^n$ (et par prolongement si u est dans le bord de Δ^p), on remplace σ par un plongement local $\sigma' : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tangent en 0 à l'injection naturelle $\psi : \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^n$; (α_i) est alors une suite régulière de p-simplexes affines de $\mathbb{R}^p$ tendant vers 0; on doit montrer que $\ell_{\alpha_i}(\sigma')$ tend vers ψ.

On note η_i la distance de 0 au sommet de α_i le plus éloigné, et μ_λ la multiplication par λ dans $\mathbb{R}^p$ et dans $\mathbb{R}^n$. La suite (η_i) tendant vers zéro lorsque $i \to \infty$, il résulte d'un calcul facile (*cf.* [1], p. 324) que la suite $(\mu_{\eta_i})^{-1} \circ \sigma' \circ \mu_{\eta_i}$ tend vers ψ au sens C^1. On est ainsi ramené à l'énoncé suivant :

"Soit D la boule fermée de rayon 1 de $\mathbb{R}^p$. Soit (σ_i) une suite de plongements $D \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ tendant vers ψ au sens C^1 ; pour tout p-simplexe affine non dégénéré α de D, la suite $\ell_\alpha(\sigma_i)$ tend vers ψ, de façon uniforme par rapport à α sur tout ensemble régulier de tels simplexes."

Par projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses axes, on remplace (σ_i) par une suite (f_i) de fonctions réelles définies sur D, tendant au sens C^1 vers une fonction linéaire ℓ; on doit montrer que $\ell_\alpha(f_i)$ tend vers ℓ, avec la même condition d'uniformité que ci-dessus. Soit $\mathcal{B}$ une base affine de $\mathbb{R}^p$ portée par α (i.e. les extrémités des vecteurs unitaires de $\mathcal{B}$ sont les sommets de α), soit M la matrice de passage correspondante, et soit $|\ \ |$ une norme sur l'espace des matrices $p \times p$. On a :

$$|M| \leq \text{constante} \times \text{diamètre}\,\alpha;$$

donc

$$|{}^tM^{-1}| \leq \text{constante} \times \frac{(\text{diamètre}\,\alpha)^{p-1}}{\text{volume}\,\alpha}.$$

Soient λ_j et λ'_j $(j = 1, \dots, p)$ les coefficients de la partie linéaire de $\ell_\alpha(f_i) - \ell$ exprimée respectivement dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$. On a pour tout j

$$|\lambda'_j| \leq \text{diamètre}\,\alpha \times \|f_i - \ell\|,$$

où $\| \ \|$ désigne la norme C^1 ; par conséquent

$$|\lambda_j| \leq \text{constante} \times \frac{\|f_i - \ell\|}{\theta(\alpha)}.$$

La majoration du terme constant de $\ell_\alpha(f_i) - \ell$ est alors immédiate.

COROLLAIRE. — *Pour toute chaîne ζ de p-simplexes plongés de $\mathbb{R}^n$, il existe une subdivision linéaire s telle que $s(\zeta)$ soit linéarisable par une isotopie respectant les relations d'incidence.*

Démonstration. — Soit (s_i) une suite fine et régulière de subdivisions linéaires. Il résulte du THÉORÈME 3 de WHITEHEAD [5] et du LEMME 10 que, pour i grand, le chemin joignant linéairement ζ à $\ell_{s_i}(\zeta)$ induit sur $s_i(\zeta)$ une isotopie de linéarisation (qui, visiblement, respecte les relations d'incidence). On peut éviter le recours à ce théorème de WHITEHEAD en remplaçant s_i par une de ses subdivisions assez fines, remplaçant ainsi par une isotopie un chemin qui est *a priori* à valeurs dans les immersions.

Preuve du théorème dans le cas de $\mathbb{R}^n$.

Soit γ un cycle de p-simplexes plongés de $\mathbb{R}^n$; on doit montrer que pour $0 \leq p \leq n-1$, γ est un bord en homologie plongée. L'invariance par subdivision linéaire et le COROLLAIRE du LEMME 10 ramènent au cas où γ est linéarisable par une isotopie respectant les relations d'incidence; la subdivision barycentrique $b(\gamma)$ est en plus un super-cycle (*cf.* COROLLAIRE du LEMME 2). Il résulte de la PROPOSITION 3 (dans le cas $I = \langle p \rangle$) que, pour $b(\gamma)$, "isotopie implique homologie", de sorte que $b(\gamma)$ est homologue à un cycle de p-simplexes linéairement plongés; un tel cycle est base (et donc bord) d'un cône de $(p+1)$-simplexes linéairement plongés.

Appendice. Contraction isotopique d'un pseudo-cône sur un voisinage de sa base

Soit $\xi = \sum_{\ell \in L} \mu_\ell \tau_\ell$ un $\widetilde{I}$-pseudo-cône de $(p+1)$-simplexes plongés, de noyau le q-simplexe y. On identifie y à $d_{\widetilde{I}} \Delta^{p+1}$ au moyen d'un système de coordonnées locales défini sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $|y|$. On note $\langle p+1 \rangle \setminus \widetilde{I} = \widetilde{I}^*$; on note η la bijection croissante $\langle p-q \rangle \to \widetilde{I}$.

Le "link" de ξ est par définition la $(p-q)$-chaîne $d_{\widetilde{I}^*}\xi$. (Signalons que le link de ξ est un $\langle p-q \rangle$-pseudo-cône au sens du § 4; sa base, qui est aussi son bord, est le super-cycle link de $d_0\xi$.) On désignera par Link ξ la famille $(d_{\widetilde{I}^*}\tau_\ell)_{\ell \in L}$ munie du système de relations d'incidence (*cf.* § 3) défini par

$$e_h(\ell, \ell') \iff d_{\eta(h)}(\tau_{\ell'} - \tau_\ell) = 0 \quad \text{pour } h \in \langle p-q \rangle.$$

Une *fonction* sur Link ξ est une famille $(f_\ell)_{\ell\in L}$ de fonctions définies sur Δ^{p-q}, telle que pour tout $h \in \langle p-q\rangle$

$$e_h(\ell,\ell') \implies f_\ell = f_{\ell'} \quad \text{sur } \partial_h \Delta^{p-q}.$$

Un *sous-complexe* K de Link ξ est une famille $(K_\ell)_{\ell\in L}$ où les K_ℓ sont des sous-complexes du complexe des faces itérées de Δ^{p-q} tels que pour tout couple (ℓ,ℓ') et pour tout $h \in \langle p-q\rangle$

$$e_h(\ell,\ell') \Rightarrow K_\ell \cap \partial_h\Delta^{p-q} = K_{\ell'} \cap \partial_h \Delta^{p-q}.$$

On a une notion naturelle de *sous-complexe engendré* par une famille $(K'_\ell)_{\ell\in L}$ arbitraire de sous-complexes : c'est la famille (K_ℓ), où $d_{I'}\Delta^{p-q}$ est simplexe de K_ℓ si et seulement si il est simplexe d'un $K'_{\ell'}$ tel que $e_{I'}(\ell,\ell')$ (*cf.* § 4).

PROPOSITION. — *Pour tout sous-complexe K de* Link ξ, *il existe une famille $(\chi_\ell)_{\ell\in L}$ de plongements de Δ^{p+1} dans lui-même, respectant le système $(e_h)_{h\in\langle p-q\rangle}$, conservant la projection orthogonale sur $|y|$ et diminuant la distance à $|y|$, telle que l'ensemble des points fixes de χ_ℓ soit le joint $|H_\ell|$ de $|y|$ et de $|K_\ell|$, et que l'image de χ_ℓ soit contenue dans un voisinage arbitrairement petit de $|H_\ell|$.*

Démonstration. — On construit, pour tout $\varepsilon \in\,]0,1[$, une isotopie $(\chi_t)_{t\in[0,1-\varepsilon]}$ de Δ^{q+1} le long de ses projetantes orthogonales sur $\partial_{q+1}\Delta^{q+1}$ (identifié à $|y|$), fixe sur un voisinage de $|y|$, d'image finale contenue dans l'ε-voisinage tubulaire de $|y|$. On identifie $\Delta^{p+1}\setminus|y|$ à $\Delta^{p-q}\times(\Delta^{q+1}\setminus y)$ par l'application $\tau_{\widetilde{I}_*}$ (*cf.* § 3), puis pour toute fonction $f : \Delta^{p-q} \to [0,1-\varepsilon]$, on définit χ_f sur $|y|$ par l'identité, et sur $\Delta^{p+1}\setminus|y|$ par

$$\chi_f(v,w) = (v, \chi_{f(v)}\cdot w).$$

Pour tout $p \in \langle p-q\rangle$, la restriction de χ_f à $\partial_{\eta(h)}\Delta^{p+1}$ ne dépend que de la restriction de f à $\partial_h\Delta^{p-q}$; donc pour toute fonction (f_ℓ) sur Link ξ, la famille (χ_{f_ℓ}) respecte le système $(e_h)_{h\in\langle p-q\rangle}$; si en plus f_ℓ est nulle sur $|K_\ell|$, alors (χ_{f_ℓ}) fixe $|H_\ell|$.

Il reste à montrer qu'il existe une fonction f : Link $\xi \to [0,1[$ qui satisfasse aux deux conditions suivantes : être nulle exactement sur $|K|$, et être arbitrairement proche de 1 sur le complémentaire d'un voisinage arbitrairement petit de $|K|$. Si la première condition est remplie, alors $f^{1/n}$ (pour n assez grand) réalise la deuxième de surcroît. On est donc ramené à un lemme de prolongement, qu'on établit sous la forme un peu plus générale suivante : f étant prescrit (positif ou nul) sur le sous-complexe K, il existe un prolongement strictement positif en dehors de $|K|$.

Application. — Soit $\sum_{j\in J} \lambda_j \sigma_j$ une écriture réduite de $d_0\xi$. Soit $L' \subset L$ la réunion des classes de e_0 sur chacune desquelles la somme des μ_ℓ est non nulle; on note θ la surjection qui à tout $\ell' \in L'$ associe l'unique élément de J qui vérifie $d_0\tau_{\ell'} = \sigma_j$. Soit K le sous-complexe de $\operatorname{Link}\xi$ engendré par la famille $(K'_\ell)_{\ell\in L'}$, où K'_ℓ est le complexe des faces itérées de $d_0\Delta^{p-q}$.

Soit $\widetilde{\Omega}$ un fermé de Δ^{p+1} contenant $|y|$ et qui soit réunion de projetantes orthogonales sur $|y|$. On note

$$(d_0 x_{p+1})^{-1}(\widetilde{\Omega} \cap \partial_0 \Delta^{p+1}) = \Omega.$$

On suppose

$$\sigma_j(\Omega) \subset \mathcal{U} \qquad \text{pour tout } \ j \in J.$$

D'après la proposition ci-dessus, $\chi_\ell(\widetilde{\Omega})$ est contenu dans un voisinage arbitrairement petit de $\widetilde{\Omega} \cap |H_\ell|$. Les simplexes de H_ℓ sont les $d_{\eta(I')}\Delta^{p+1}$ tels que $0 \in I'$ et qu'il existe $\ell' \in L'$ vérifiant $e_{I'}(\ell, \ell')$, relation qui (d'après (19), *cf.* § 4) implique $d_{\eta(I')}(\tau_\ell - \tau_{\ell'}) = 0$. On a donc

$$\tau_\ell(\widetilde{\Omega} \cap \partial_{\eta(I')}\Delta^{p+1}) = \tau_{\ell'}(\widetilde{\Omega} \cap \partial_{\eta(I')}\Delta^{p+1}) \subset \sigma_{\theta(\ell')}(\Omega) \subset \mathcal{U}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CERF (J.). — Topologie de certains espaces de plongements, *Bull. Soc. Math. de France*, t. **89**, 1961, p. 227–380.

[2] FREUDENTHAL (H.). — Simplizialzerlegungen von beschränkter Flachheit, *Ann. of Math.*, t. **43**, 1942, p. 580–582.

[3] LALONDE (F.). — Homologie de Shih d'une submersion, *Mémoire (nouvelle série) n° 30, supplément au Bull. Soc. Math. de France*, t. **115**, 1987, p. 580–582.

[4] THURSTON (W.). — The theory of foliations of codimension greater than one, *Comment. Math. Helv.*, t. **49**, 1974, p. 214-231.

[5] WHITEHEAD (J. H. C.). — On C^1-complexes, *Ann. of Math.*, t. **41**, n° **4**, 1940, p. 809–824.

[6] WHITNEY (H.). — *Geometric integration theory.* — Princeton Math. Series 21, Princeton University Press, 1957.