

# BULLETIN DE LA S. M. F.

T. LALESCO

## L'étude des noyaux résolvants

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 39 (1911), p. 85-103

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1911\\_\\_39\\_\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__85_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## L'ÉTUDE DES NOYAUX RÉSOVANTS;

PAR M. T. LALESCO.

1. HISTORIQUE. — L'étude approfondie des noyaux résolvents a été commencée immédiatement après l'apparition des Mémoires de M. J. Fredholm dans un travail remarquable de M. J. Plemelj<sup>(1)</sup> qui est parvenu à la découverte des fonctions biorthogonales que nous appellerons *fondamentales* et qui constitue un des éléments essentiels du problème.

Un second élément important et utile aussi comme instrument de recherche, la notion des noyaux orthogonaux, a été introduit et utilisé simultanément par MM. E. Goursat<sup>(2)</sup> et B. Heywood<sup>(3)</sup>. Dans le Mémoire de M. E. Goursat, la question se trouve élucidée définitivement. M. B. Heywood, par une méthode d'identification directe, étudie d'une façon complète la représentation de la partie caractéristique à l'aide d'un groupe de fonctions biorthogonales que nous appellerons *principales* et qui sont en général distinctes des fonctions fondamentales. Mais, comme l'a déjà montré M. E. Goursat, les fonctions principales sont seulement intermédiaires; ce sont les fonctions fondamentales qu'il faut mettre en évidence, parce qu'elles apparaissent comme fonctions principales canoniques et qu'elles contiennent aussi le système des solutions fondamentales.

Dans ce Mémoire, je me propose de reprendre la méthode très simple de M. B. Heywood et montrer comment on peut la compléter pour résoudre définitivement le problème; la question des constantes *arbitraires* figurant dans l'expression générale de la partie d'un noyau relative à une valeur caractéristique, y est aussi

---

(1) J. PLEMELJ, *Fredholmsche Functionalgleichung in der Potentialtheorie* (*Sitzb. d. k. Akad. der Wissenschaften*, Wien, mars 1903) et *Zur Theorie der Fredholmschen Functionalgleichung* (*Monatshefte für Math. und Physik*, t. XV, p. 93-128).

(2) E. GOURSAT, *Recherches sur les équations intégrales linéaires* (*Ann. de la Fac. de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. X, 1908, p. 5-98).

(3) B. HEYWOOD, *Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908).

résolue. J'ajoute enfin un criterium pour reconnaître si un pôle est simple et quelques remarques nouvelles.

On ne supposera connu que le théorème fondamental de Fredholm relatif au caractère analytique en  $\lambda$  de la solution d'une équation intégrale, dont on a à présent des démonstrations intuitives (1) et la formule donnant  $\log D(\lambda)$ . Le second théorème de Fredholm relatif à l'équation homogène ne sera pas postulé; on en trouvera au contraire une démonstration très simple valable aussi pour le troisième théorème de Fredholm.

2. LEMME. — Nous aurons besoin du lemme suivant :

Toute fonction  $\varphi(xy)$  à trace finie (2) qui vérifie l'équation

$$(1) \quad \varphi(xy) = \int_a^b \varphi(xs) \varphi(sy) ds$$

est nécessairement de la forme

$$\varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y),$$

les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  formant les deux groupes d'un système biorthogonal.

Remarquons d'abord que la trace est nécessairement un nombre entier et positif. En effet, considérons  $\varphi(xy)$  comme noyau d'une équation intégrale de Fredholm; en vertu de la relation (1), les traces de tous ses noyaux itérés sont égales entre elles et égales à

$$\varphi_1 = \int_a^b \varphi(ss) ds.$$

On aura donc

$$\log D(\lambda) = \varphi_1 \left[ \frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\lambda^n}{n} + \dots \right] = \varphi_1 \log(1 + \lambda);$$

d'où

$$(2) \quad D(\lambda) = (1 + \lambda)^{\varphi_1},$$

ce qui montre bien que  $\varphi_1$  est un nombre entier et positif  $n$ .

---

(1) E. GOURSAT, *Sur quelques points de la théorie des équations intégrales* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXVII, 1910, p. 197-202).

(2) La trace d'une fonction  $N(xy)$  est, par définition,  $\int_a^b N(ss) ds$  (allemand, Spur).

Cela posé, formons la fonction

$$\varphi(xy) - \frac{\varphi(x_1 y) \varphi(x_1 y_1)}{\varphi(x_1 y_1)} = \varphi_1(xy).$$

Elle vérifie aussi (1), mais sa trace est  $n - 1$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} & \int_a^b \varphi_1(xs) \varphi_1(sy) ds \\ &= \int_a^b \left[ \varphi(xs) - \frac{\varphi(x_1 y_1) \varphi(x_1 s)}{\varphi(x_1 y_1)} \right] \left[ \varphi(sy) - \frac{\varphi(s y_1) \varphi(x_1 y)}{\varphi(x_1 y_1)} \right] ds \\ &= \varphi(xy) - \frac{\varphi(x_1 y) \varphi(x_1 y)}{\varphi(x_1 y_1)} - \frac{\varphi(x_1 y_1) \varphi(x_1 y)}{\varphi(x_1 y_1)} + \frac{\varphi(x_1 y_1) \varphi(x_1 y)}{\varphi(x_1 y_1)} \\ &= \varphi(xy) - \frac{\varphi(x_1 y_1) \varphi(x_1 y)}{\varphi(x_1 y_1)} = \varphi_1(xy). \end{aligned}$$

La trace est

$$\int_a^b \varphi_1(ss) ds = \int_a^b \varphi(ss) ds - \frac{\int_a^b \varphi(x_1 s) \varphi(s y_1) ds}{\varphi(x_1 y_1)} = n - 1.$$

On peut alors appliquer à la fonction  $\varphi_1(xy)$  le même procédé qu'à  $\varphi(xy)$ , de sorte qu'on pourra écrire  $\varphi(xy)$  sous la forme

$$(3) \quad \varphi(xy) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y) + \chi(xy),$$

$\chi(xy)$  étant une fonction vérifiant la relation (6) mais ayant sa trace nulle; je dis maintenant que  $\chi(xy)$  est identiquement nulle.

En effet, son noyau résolvant serait  $\frac{\chi(xy)}{1 + \lambda}$ , ce qui est impossible, car  $D(\lambda) \equiv 1$ , comme cela résulte de (2) en faisant  $\varphi_1 = 0$ .

Les conditions de biorthogonalité résultent dès lors en écrivant que l'expression (3) vérifie l'équation (1). On doit avoir

$$\sum_{p=1}^n \varphi_p(x) \psi_p(y) = \sum \varphi_i(x) \psi_k(y) \int_a^b \varphi_i(s) \varphi_k(s) ds,$$

ce qui met bien en évidence les relations de biorthogonalité demandées.

**3. LA PARTIE CARACTÉRISTIQUE D'UN NOYAU RÉSOVANT RELATIVE A UN PÔLE.** — Soit  $\lambda$ , un pôle d'ordre  $m$  du noyau résolvant  $\mathcal{R}(xy\lambda)$  de l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b N(xs) \varphi(s) ds = f(x).$$

Dans le voisinage de  $\lambda_1$  le développement de  $\mathfrak{K}(xy\lambda)$  sera de la forme

$$(4) \quad \frac{\varphi_1(xy)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_2(xy)}{(\lambda_1 - \lambda)^2} + \dots + \frac{\varphi_m(xy)}{(\lambda_1 - \lambda)^m} + \sum_{p=0} \psi_p(xy) (\lambda_1 - \lambda)^p \\ = G(xy\lambda) + P(xy\lambda).$$

Il s'agit d'étudier la forme des fonctions  $\varphi_p(xy)$ . Remplaçons pour cela le développement (4), dans l'équation générale des noyaux résolvants,

$$(5) \quad \mathfrak{K}(xy\lambda) - \mathfrak{K}(xy\mu) = (\lambda - \mu) \int_a^b \mathfrak{K}(xs\lambda) \mathfrak{K}(sy\mu) ds,$$

et posons pour abréger  $\lambda_1 - \lambda = h$  et  $\lambda_1 - \mu = k$ ; on obtient en écrivant tout au long

$$\varphi_m(xy) \left( \frac{1}{hm} - \frac{1}{km} \right) + \dots + \varphi_1(xy) \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{k} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(xy) (h^p - k^p) \\ = (k - h) \int \left[ \frac{\varphi_m(xs)}{h^m} + \dots + \frac{\varphi_1(xs)}{h} + \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p(xs) h^p \right] \\ \times \left[ \frac{\varphi_m(sy)}{k^m} + \dots + \frac{\varphi_1(sy)}{k} + \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p(sy) k^p \right] ds,$$

ou, après simplification par  $k - h$ ,

$$(6) \quad \frac{\varphi_1(xy)}{hk} + \dots + \frac{\varphi_m(xy)}{h^m k^m} (h^{m-1} + kh^{m-2} + \dots + k^{m-1}) \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(xy) [h^{p-1} + kh^{p-2} + \dots + k^{p-1}] \\ = \sum_{p,q=1}^m \frac{1}{h^p k^q} \int_a^b \varphi_p(xs) \varphi_q(sy) ds \\ + \sum_{p,q} \frac{h^p}{k^q} \int_a^b \psi_p(xs) \varphi_q(sy) ds \\ + \sum_{p,q} \frac{k^p}{h^q} \int \varphi_q(xs) \psi_p(sy) ds \\ + \sum_{p,q} h^p k^q \int \psi_p(xs) \psi_p(sy) ds.$$

Le second membre de (6) contient quatre sommes de termes. Si nous considérons d'abord la première somme dont les termes contiennent  $h$  et  $k$  à la fois au dénominateur, elle nous donne par identification avec le premier membre les relations

$$(7) \quad \varphi_{p+q-1}(xy) = \int_a^b \varphi_p(xs) \varphi_q(sy) ds \quad (p+q \leq m+1),$$

tant que l'indice  $p+q-1$  existe, c'est-à-dire tant que  $p+q-1 \leq m$ , et

$$(8) \quad \int_a^b \varphi_p(xs) \varphi_q(sy) ds = 0 \quad (p+q > m+1)$$

pour le reste.

Les termes des secondes et troisièmes sommes du deuxième membre n'existant pas dans le premier, on aura pour tous les indices

$$(9) \quad \int \varphi_p(xs) \psi_q(sy) ds = \int \psi_p(xs) \varphi_q(sy) ds = 0,$$

ce qui montre dès le début que *les fonctions*  $G(xy\lambda)$  *et*  $P(xy\lambda)$  *sont orthogonales pour toute valeur de*  $\lambda$ .

Enfin la quatrième somme nous donne les relations

$$\psi_{p+q+1}(xy) = \int_a^b \psi_p(xs) \psi_q(sy) ds.$$

*Inversement*, les relations (7) et (8) étant remplies,  $G(xy\lambda)$  est un noyau résolvant à lui seul, car il vérifie dans ces conditions l'équation générale des noyaux résolvants; il est par conséquent le noyau résolvant de

$$G(xy0) = \frac{\varphi_m(xy)}{\lambda_1^m} + \frac{\varphi_{m-1}(xy)}{\lambda_1^{m-1}} + \dots + \frac{\varphi_1(xy)}{\lambda_1},$$

qu'on appelle *la partie du noyau relative au pôle*  $\lambda_1$ . Le reste  $P(xy0)$  a son noyau résolvant  $P(xy\lambda)$  régulier pour  $\lambda = \lambda_1$ , et d'après une remarque précédente ces deux parties sont orthogonales entre elles.

Nous avons ainsi introduit la notion importante de *partie d'un noyau relative à un pôle*  $\lambda_1$  et montré son orthogonalité avec le reste.

Nous avons maintenant à étudier spécialement cette partie.

4. FONCTIONS PRINCIPALES. — Pour trouver l'expression générale des fonctions  $\varphi_p(xy)$  il suffira donc de résoudre le système d'équations (7) et (8) qui, d'après ce que nous venons de voir, les caractérisent.

Faisons-y d'abord  $p = q = 1$  ; ceci nous donne l'équation

$$\varphi_1(xy) = \int_a^b \varphi_1(xs) \varphi_1(sy) ds.$$

Or, puisque la trace de  $G(xy\lambda)$  est finie, celle de  $\varphi_1(xy)$  le sera aussi ; en vertu de notre lemme, cette fonction sera donc nécessairement de la forme

$$\varphi(xy) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y),$$

les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  formant les deux groupes d'un système biorthogonal. Faisons ensuite  $q = 2$  et  $p$  quelconque, et inversement ; on obtient les relations

$$(10) \quad \varphi_{p+1}(xy) = \int_a^b \varphi_p(xs) \varphi_2(sy) ds = \int_a^b \varphi_2(xs) \varphi_p(sy) ds,$$

dont la première pour  $p = 1$

$$\varphi_2(xy) = \int_a^b \varphi_1(xs) \varphi_2(sy) ds = \int_a^b \varphi_2(xs) \varphi_1(sy) ds$$

nous montre que  $\varphi_2(xy)$  est aussi fonction linéaire des  $\varphi$  et  $\psi$  séparément. On aura donc nécessairement

$$(11) \quad \varphi_2(xy) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \varphi_i(x) \psi_k(y).$$

Les relations (10) nous donnent alors les valeurs des autres fonctions

$$(11') \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_3(xy) &= \int_a^b \varphi_2(xs) \varphi_2(sy) ds, \\ \varphi_4(xy) &= \int_a^b \varphi_3(xs) \varphi_2(sy) ds = \int_a^b \varphi_2(xs) \varphi_3(sy) ds, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_m(xy) &= \int_a^b \varphi_{m-1}(xs) \varphi_2(sy) ds = \int_a^b \varphi_2(xs) \varphi_{m-1}(sy) ds. \end{aligned} \right.$$

Je dis maintenant que les autres relations (7) sont *des conséquences de celles-ci*. En effet, considérons la relation

$$\varphi_{p+q-1}(xy) = \int_a^b \varphi_p(xs) \varphi_q(sy) ds.$$

Si nous remplaçons  $\varphi_p(xy)$  par sa valeur  $\int_a^b \varphi_{p-1}(xs) \varphi_2(sy) ds$  tirée de (11'), on obtient

$$\varphi_{p+q-1}(xy) = \int_a^b \varphi_p(xs) \varphi_2(st) \varphi_q(ty) ds dt = \int_a^b \varphi_{p-1}(xs) \varphi_{q+1}(sy) ds.$$

On peut donc *augmenter ou diminuer d'une unité les indices p et q*; l'application répétée de cette opération réduira donc toute relation (7) à l'une quelconque des relations (11').

De même prenons le second groupe (8); par l'application répétée de la même opération, on pourra rendre toujours un des indices égal à  $m$ ; nous aurons alors les  $m - 1$  identités

$$\int_a^b \varphi_m(xs) \varphi_k(sy) ds = 0 \quad (k = 2, \dots, m),$$

dont la première seule

$$(12) \quad \int \varphi_m(xs) \varphi_2(sy) ds = 0$$

est distincte; les autres en sont des conséquences. En effet,

$$\int_a^b \varphi_m(xs) \varphi_k(sy) ds = \int_a^b \varphi_m(xs) \varphi_2(st) \varphi_{k-1}(sy) dt ds \equiv 0.$$

Pour énoncer simplement les résultats auxquels nous sommes parvenus, nous dirons d'abord que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  forment un système de *fonctions principales*, et nous remarquerons ensuite que les formules (11') expriment que les noyaux  $\varphi_k(xy)$  ( $k > 2$ ) s'obtiennent à partir de  $\varphi_2(xy)$  par itérations successives; la condition (12) peut enfin s'énoncer en disant que le  $(m - 1)^{\text{ième}}$  noyau itéré de  $\varphi_2(xy)$  est identiquement nul.

On peut alors résumer les résultats obtenus, sous la forme suivante :

a. La fonction  $\varphi_1(xy)$  est une somme de produits de fon-



tions associées nommées principales et appartenant à un système biorthogonal fini; on a

$$\varphi_1(xy) = \sum_{p=1}^n \varphi_p(x) \psi_p(y).$$

b. La fonction  $\varphi_2(xy)$  est une forme bilinéaire des fonctions principales; on a

$$\varphi_2(xy) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \varphi_i(x) \psi_k(y).$$

c. Les autres fonctions  $\varphi_k(xy)$  s'obtiennent à partir de  $\varphi_2(xy)$  par des itérations successives; si le pôle est d'ordre  $m$ , le  $(m-1)^{\text{ième}}$  noyau itéré de  $\varphi_2(xy)$  est identiquement nul.

Réciproquement, la méthode suivie nous montre que étant donné un système biorthogonal de  $2p$  fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ , un tableau de constantes  $|a_{ik}|$  tel que le  $(n-1)^{\text{ième}}$  noyau itéré ( $m \leq n$ ) de

$$\sum a_{ik} \varphi_i(x) \psi_k(y)$$

soit nul identiquement, la fonction  $G(xy)$  formée avec ces éléments d'après la formule (4) sera bien la partie caractéristique d'un noyau relative à un pôle d'ordre  $m$ .

### 5. L'ÉTUDE DIRECTE DES NOYAUX DE LA FORME $\sum_{p=1}^n a_p(x) b_p(y)$ ;

RANG D'UNE VALEUR CARACTÉRISTIQUE. — Nous laisserons pour le moment la question des fonctions principales, et nous résumerons l'étude directe faite par MM. E. Goursat (1) et E. Schmidt (2) des noyaux de la forme

$$(13) \quad N(xy) = a_1(x) b_1(y) + \dots + a_p(x) b_p(y) + \dots + a_n(x) b_n(y),$$

pour l'utiliser à l'étude du noyau  $G_1(xy)$  qui est de cette forme.

(1) E. GOURSAT, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXV, 1907, p. 163-173).

(2) E. SCHMIDT, *Entwickl. willk. Functionen*, II. Teil (Math. Annalen, Bd., LXIV, p. 161-174).

L'équation de Fredholm s'écrira dans ce cas

$$(14) \quad \varphi(x) - \lambda \left[ a_1(x) \int_a^b b_1(s) \varphi(s) ds + a_2(x) \int_a^b b_2(s) \varphi(s) ds + \dots + a_n(x) \int_a^b b_n(s) \varphi(s) ds \right] = f(x).$$

En posant

$$(15) \quad k_p = \int_a^b b_p(s) \varphi(s) ds$$

nous voyons que  $\varphi(x)$  est de la forme

$$(16) \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda [k_1 a_1(x) + k_2 a_2(x) + \dots + k_n a_n(x)].$$

Pour déterminer les constantes  $k_p$ , remplaçons la valeur (16) de  $\varphi(x)$  dans les équations (15); ceci nous donne les  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues

$$(17) \quad k_p - \lambda \left[ k_1 \int_a^b a_1(s) b_p(s) ds + k_2 \int_a^b a_2(s) b_p(s) ds + \dots + k_n \int_a^b a_n(s) b_p(s) ds \right] = \int_a^b f(s) b_p(s) ds,$$

dont le déterminant est

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

en posant

$$\alpha_{pq} = \int_a^b a_p(s) b_q(s) ds.$$

La théorie des équations linéaires appliquée au système (17) nous permet donc d'énoncer les résultats suivants :

a. Si le déterminant caractéristique  $D(\lambda)$  est  $\neq 0$ , le système (17) admet un seul système de solutions; donc dans ce cas l'équation de Fredholm admet une solution et une seule donnée par l'expression (16).

b. Si  $D(\lambda_1) = 0$ , ce sont les équations linéaires (17) homogènes qui admettent des solutions. Si l'ordre du mineur principal du système (17) est pour  $\lambda = \lambda_1$  égal à  $r$ , les constantes  $k$  s'expriment linéairement à l'aide de  $r$  constantes arbitraires  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ , de sorte que (16) donnera pour  $\varphi(x)$  une expression de la forme

$$\varphi(x) = \rho_1 \varphi_1(x) + \rho_2 \varphi_2(x) + \dots + \rho_r \varphi_r(x),$$

et les fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)$  sont linéairement indépendantes.

Dans ce cas, donc, c'est l'équation homogène, sans second membre, qui admet  $r$  solutions linéairement indépendantes.

Les fonctions  $\varphi_p(x)$ , ( $p = 1, \dots, r$ ) s'appellent des solutions fondamentales, et  $r$  le rang de  $\lambda_1$ .

c. L'équation associée

$$\psi(x) - \lambda \int [a_1(s) b_1(x) + \dots + a_n(s) b_n(x)] \psi(s) ds = f(x)$$

se déduit de (14) en échangeant les fonctions  $a_q(x)$  et  $b_q(x)$  entre elles. Le terme général du déterminant caractéristique de (14) étant

$$a_{ik} = \int_a^b a_i(s) b_k(s) ds;$$

pour l'équation associée ce sera  $\int_a^b b_i(s) a_k(s) ds = a_{ki}$ .

Les déterminants caractéristiques sont donc identiques. *L'équation associée a donc les mêmes valeurs caractéristiques, chacune avec la même multiplicité et le même rang.*

d. Considérons maintenant l'équation (14) avec second membre  $f(x)$  pour une valeur caractéristique  $\lambda_1$ . Pour que les équations (17) soient compatibles, il faut et il suffit que les déterminants bordés du mineur principal soient tous nuls, ce qui donne au plus  $r$  conditions indépendantes. Au lieu de les obtenir directement par la méthode algébrique, remarquons que, si l'on multiplie par  $\psi_p(x) dx$  l'équation

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda_1 \int_a^b N(xs) \varphi(s) ds,$$

on obtient par intégration

$$\begin{aligned} \int_a^b f(s) \psi_p(s) ds &= \int_a^b \varphi(s) \psi_p(s) ds - \lambda_1 \int_a^b \psi_p(s) N(xs) \varphi(s) ds dx \\ &= \int_a^b \varphi(s) \psi_p(s) ds - \lambda_1 \int_a^b \frac{\psi_p(s) \varphi(s) ds}{\lambda_1} = 0 \\ &\quad (p = 1, \dots, r), \end{aligned}$$

ce qui nous donne  $r$  conditions nécessaires distinctes; elles sont aussi suffisantes parce que les conditions données par les déterminants bordés sont exactement de la même forme et ne sont pas plus nombreuses.

6. FONCTIONS FONDAMENTALES, NOYAU CANONIQUE. — Reprenons maintenant l'étude du noyau  $G_1(xy)$ . Les fonctions principales ne sont définies évidemment qu'à une substitution biorthogonale près <sup>(1)</sup>; une question qui se pose à présent est de profiter de cette indétermination pour rendre le système particulièrement simple. Or cette question, d'après un artifice à présent classique, revient au problème de la réduction à la forme canonique de la forme bilinéaire <sup>(2)</sup>

$$(18) \quad \lambda \varphi_1(xy) - \varphi_2(xy).$$

(1) Nous dirons qu'une double substitution linéaire

$$\begin{aligned} x'_p &= \sum_1^n a_{pr} x_r \\ y'_p &= \sum_1^n b_{pr} y_r \end{aligned} \quad (p = 1, \dots, n)$$

est biorthogonale si elle remplit les conditions  $\sum_{r=1}^n a_{ir} b_{kr} = \delta_{ik}$ ,  $\delta_{ik}$  étant le symbole d'orthogonalité (0 ou 1) bien connu.

Dans une substitution biorthogonale, un déterminant  $|a_{ik}| \neq 0$  est arbitraire; le déterminant  $|b_{ik}|$  résulte alors nécessairement.

(2) Cette théorie est magistralement exposée suivant les idées de M. G. Darboux dans le Mémoire : L. SAUVAGE, *La théorie des systèmes des équations différentielles linéaires* (Annales de la Faculté de Toulouse, 1894).

Or il est facile de montrer que son *discriminant*

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{21} & \dots & -a_{n1} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

est identiquement égal à  $\lambda^n$ .

En effet, si l'on prend  $\varphi_2(xy)$  comme noyau d'une équation intégrale, son déterminant caractéristique, d'après §, aura pour terme général

$$\alpha_{ik} = \int_a^b \varphi_i(s) [a_{k1} \psi_1(s) + \dots + a_{kp} \psi_p(s) + \dots + a_{kn} \psi_n(s)] ds = \alpha_{ki}.$$

Le déterminant caractéristique de  $\varphi_2(xy)$  est donc  $\lambda^n \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ; or il est identiquement égal à 1, puisque  $\varphi_2(xy)$  est un noyau sans constante caractéristique, son  $(r-1)^{\text{ième}}$  noyau itéré étant identiquement nul. On a donc bien  $\Delta(\lambda) = \lambda^n$ .

Le cas le plus simple est celui où le déterminant  $\Delta(\lambda)$  n'a qu'un seul diviseur élémentaire; le déterminant canonique à un seul diviseur élémentaire est

$$(19) \quad \begin{vmatrix} \lambda & a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{vmatrix}.$$

Il existera donc dans ce cas une double substitution linéaire qui transforme (18) en

$$\lambda [\Phi_1(x) \Psi_1(y) + \dots + \Phi_n(x) \Psi_n(y)] - [a_1 \Phi_1(x) \Psi_2(y) + \dots + a_{n-1} \Phi_{n-1}(x) \Psi_n(y)].$$

Les nouvelles fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  forment aussi un système bi-orthogonal, puisque  $\varphi_1(xy)$  a conservé exactement la même forme; quant à  $\varphi_2(xy)$ , elle a pris la forme canonique

$$(20) \quad \varphi_2(xy) = \sum_1^{n-1} \alpha_p \Phi_p(x) \Psi_{p+1}(y),$$



canonique d'ordre  $n$  jouit donc, en résumé, des propriétés suivantes :

*L'ordre de la valeur caractéristique comme pôle est égal à sa multiplicité <sup>(1)</sup>; le rang est égal à 1. Son expression à l'aide des fonctions fondamentales contient  $n - 1$  constantes arbitraires.*

Ainsi le noyau canonique du premier ordre est  $\frac{\varphi_1(x)\psi_1(y)}{\lambda_1 - \lambda}$ , celui du second ordre

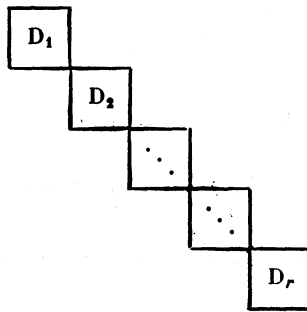
$$\frac{\varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\alpha_1 \varphi_1(x)\psi_2(y)}{(\lambda_1 - \lambda)^2}, \dots$$

Pour trouver son expression générale à l'aide d'un système de fonctions principales, on n'a qu'à appliquer aux fonctions fondamentales une substitution biorthogonale quelconque.

**7. FONCTIONS FONDAMENTALES; CAS GÉNÉRAL.** — Il est maintenant facile de passer au cas général. Supposons que le déterminant ait  $r$  diviseurs élémentaires

$$\lambda^n = \lambda^{n_1} \lambda^{n_2} \dots \lambda^{n_r}.$$

Dans ce cas, le déterminant canonique est



$D_1, D_2, \dots, D_r$  désignant les déterminants canoniques de la forme (19) aux seuls diviseurs élémentaires  $\lambda^{n_1}, \lambda^{n_2}, \dots, \lambda^{n_r}$  res-

<sup>(1)</sup> Rappelons que la *multiplicité* d'une valeur caractéristique est le nombre des fonctions principales correspondantes.

pectivement. On aura ainsi

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & & & \\ & \lambda a_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda a_{n_1-1} \\ & & & & \lambda \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda b_1 & & & \\ & \lambda b_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda b_{n_2-1} \\ & & & & \lambda \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_r = \begin{vmatrix} \lambda l_1 & & & \\ & \lambda l_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda l_{n_r-1} \\ & & & & \lambda \end{vmatrix}.$$

La forme canonique de  $\varphi_2(xy)$  sera donc, dans ce cas,

$$\varphi_2(xy) = \sum_{p=1}^r \varphi_2^p(xy),$$

en posant

$$\varphi_2^1(xy) = \sum_1^{n_1-1} a_p \Phi_p^1(x) \Psi_{p+1}(y),$$

$$\varphi_2^2(xy) = \sum_1^{n_2-1} b_p \Phi_p^2(x) \Psi_{p+1}(y),$$

.....

$$\varphi_2^r(xy) = \sum_1^{n_r-1} l_p \Phi_p^r(x) \Psi_{p+1}(y).$$

Nous obtenons donc, dans ce cas,  $2n$  fonctions principales spéciales, que nous appellerons aussi fonctions fondamentales, qui se séparent en  $r$  groupes de  $2n_1, 2n_2, \dots, 2n_r$ , chaque groupe fournissant la forme génératrice d'un noyau canonique d'ordre  $n_1, n_2, \dots, n_r$  respectivement. En effet, si nous formons  $\varphi_3(xy)$ , on a

$$\varphi_3(xy) = \varphi_3^1(xy) + \varphi_3^2(xy) + \dots + \varphi_3^r(xy),$$

puisque toutes les fonctions d'un groupe sont orthogonales aux fonctions associées des autres groupes.

Dans le cas général, le noyau  $G_i(xy)$  est la somme d'un nombre fini de noyaux canoniques, orthogonaux entre eux, d'ordres  $n_1, n_2, \dots, n_r$ . On a

$$(23) \quad \begin{cases} n = n_1 + n_2 + \dots + n_r, \\ G_i(xy) = G_i^1(xy) + G_i^2(xy) + \dots + G_i^r(xy). \end{cases}$$

(1) Les fonctions associées sont celles qui ont les deux indices respectivement égaux.



L'ordre de  $\lambda_1$  comme pôle est égal au plus grand des nombres  $n_1, n_2, \dots, n_r$ ; si  $m$  est cet ordre, on a évidemment, d'après (23), l'inégalité

$$n_1 \leq m + r - 1.$$

L'égalité n'a lieu que dans deux cas : si le pôle est du premier ordre ou s'il n'y a qu'un seul noyau canonique d'ordre  $m$ , les autres étant tous du premier ordre.

*Solutions fondamentales.* — Chaque noyau canonique composant a un seul groupe de solutions fondamentales distinctes. La solution  $\Phi_1^p(x)$  étant orthogonale à toutes les fonctions  $\psi$  des autres noyaux, on aura

$$\int_a^b G_1^q(xs) \Phi_1^p(s) ds = 0$$

pour toutes les valeurs de  $q$ , sauf  $p$ . Par conséquent, puisque l'on a

$$\Phi_1^p(x) - \lambda_1 \int_a^b G_1^p(xs) \Phi_1^p(s) ds = 0,$$

on aura aussi

$$\Phi_1^p(x) - \lambda_1 \int_a^b G_1(xs) \Phi_1^p(s) ds = 0.$$

Même raisonnement pour  $\Phi_n^p(y)$ .

*L'équation homogène a donc, dans le cas général,  $r$  solutions linéairement distinctes; ce sont les premières fonctions fondamentales de chaque groupe. Il en est de même de l'équation associée; ce sont les dernières fonctions  $\psi$  de chaque groupe.*

Il existe donc, parmi les fonctions fondamentales, un système de  $2r$  fonctions qui sont des solutions fondamentales,  $r$  pour l'équation intégrale donnée et  $r$  pour son associée.

Faisons encore la remarque :

*Le rang de la valeur caractéristique est égal au nombre des noyaux canoniques composants.*

**8. LE CAS DU PÔLE SIMPLE.** — Lorsque le pôle  $\lambda_1$  est simple, la partie caractéristique du noyau est simplement

$$\Phi_1(xy\lambda) = \frac{\varphi_1(xy)}{\lambda_1 - \lambda},$$

où l'on a

$$\varphi_1(xy) = \sum_1^n \varphi_p(x) \psi_p(y).$$

Le noyau est, dans ce cas, la somme de  $n$  noyaux canoniques du premier ordre; les fonctions  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  sont donc des solutions fondamentales de l'équation intégrale donnée et  $\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_n(y)$  de l'équation associée.

Dans le cas d'un pôle simple, *les solutions fondamentales coïncident avec les fonctions fondamentales.*

Cette propriété très importante, qui caractérise d'ailleurs le cas du pôle simple, rend utile un criterium permettant de distinguer ce cas.

Pour cela remarquons simplement que si l'un des noyaux  $G_1^p(xy)$  est d'ordre plus grand que l'unité, les solutions  $\Phi_1^p(x)$  et  $\Phi_{n_p}^p(y)$  sont orthogonales, puisqu'elles ne sont pas des fonctions fondamentales associées ( $n_p > 1$ ). Il en résulte que  $\Phi_1^p(x)$  est orthogonale à *toutes* les solutions fondamentales de l'équation associée. Dans le cas d'un pôle multiple il existe donc des solutions fondamentales orthogonales à toutes les solutions fondamentales de l'équation associée. Or ceci n'a pas lieu pour le noyau à pôle simple, car, pour chaque solution  $\Phi_p(x)$ , on a la solution associée  $\Psi_p(x)$  telle que

$$\int_a^b \Phi_p(s) \Psi_p(s) ds = 1.$$

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un pôle soit simple est que, pour chaque solution fondamentale  $\Phi(x)$  de l'équation correspondante à ce pôle, il existe une solution de l'équation associée telle que*

$$\int_a^b \Phi(s) \Psi(s) ds \neq 0.$$

**9. LE CAS DES PÔLES MULTIPLES.** — Dans le cas d'un pôle multiple, nous avons vu que la forme générale d'un noyau canonique d'ordre  $n$  est

$$\frac{\varphi_1(xy)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(xy)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{\varphi_n(xy)}{\lambda_1^n} = \Phi_1(xy) + \Phi_2(xy),$$

en désignant par  $\Phi_1(xy)$  la partie  $\frac{\varphi_1(xy)}{\lambda_1}$  qui se présente aussi dans le cas d'un pôle simple.

La remarque que nous voulons faire maintenant est que  $\Phi_2(xy)$  est un noyau sans constante caractéristique.

En effet, si l'on prend les divers noyaux itérés de  $\Phi_2(xy)$ , il est évident que le  $(n - 1)^{\text{ième}}$  noyau itéré sera nul, parce que ses divers termes seront des noyaux itérés de  $\varphi_2(xy)$  d'ordre  $\geq n - 1$ , d'après les propriétés des fonctions  $\varphi_p(xy)$ .

Comme, dans le cas général, le noyau est une somme de noyaux canoniques, nous voyons que la partie qui s'ajoute à  $\Phi_1(xy)$  dans le cas d'un pôle multiple est un noyau sans constante caractéristique.

Une conséquence de cette remarque est la suivante :

*Si un noyau a un nombre fini  $n$  de valeurs caractéristiques de multiplicités quelconques on pourra toujours l'écrire sous la forme*

$$\sum_{p=1}^n \frac{\varphi_p(x)\psi_p(y)}{\lambda_p} + E(xy),$$

$E(xy)$  étant un noyau sans valeur caractéristique.

Pour établir ce résultat, il suffit de remarquer encore que les diverses parties  $\Phi_2(xy)$  sont orthogonales au noyau sans constante caractéristique ajouté à la forme normale.

**10. LE DEUXIÈME ET LE TROISIÈME THÉORÈME DE FREDHOLM.** — Ces théorèmes sont pour ainsi dire déjà démontrés dans ce qui précède. Il suffit encore de montrer que les équations

$$(24) \quad \varphi(x) - \lambda_1 \int_a^b N(xs) \varphi(s) ds = 0$$

et

$$(25) \quad \varphi(x) - \lambda_1 \int_a^b G_1(xs) \varphi(s) ds = 0$$

sont réciproques.

En effet, remarquons d'abord que pour une solution  $\varphi(x)$  de (25)

on a

$$\int_a^b P_1(xs) \varphi(s) ds = 0,$$

comme cela résulte de (25), en multipliant par  $P_1(yx) dx$  et intégrant, puisque les noyaux  $G_1(xy)$  et  $P_1(xy)$  sont orthogonaux. On aura donc aussi

$$\varphi(x) - \lambda_1 \int_a^b [G_1(xs) + P_1(xs)] \varphi(s) ds = 0,$$

ce qui est justement (24).

Inversement, écrivons (24) sous la forme

$$\varphi(x) - \lambda_1 \int_a^b P_1(xs) \varphi(s) ds = + \lambda_1 \int_a^b G_1(xs) \varphi(s) ds.$$

Puisque  $\lambda_1$  n'est plus valeur caractéristique pour  $P_1(xy)$ , on peut résoudre cette équation, ce qui nous donne

$$\varphi(x) = + \lambda_1 \int_a^b G_1(xs) \varphi(s) ds + \lambda_1 \int_a^b P_1(xs\lambda) G_1(st) \varphi(t) ds dt,$$

c'est-à-dire justement (25), puisque le second terme du second membre est nul, en vertu de la relation

$$\int_a^b P_1(xs\lambda) G_1(st) ds \equiv 0.$$


---