BULLETIN DE LA S. M. F.

W. B. FORD

Conditions suffisantes pour qu'une fonction admette un développement asymptotique

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 347-352
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__347_0>

CONDITIONS SUFFISANTES POUR QU'UNE FONCTION ADMETTE UN DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE;

PAR M. WALTER-B. FORD.

INTRODUCTION.

Dans la théorie habituelle des séries asymptotiques on écrit

$$(1) \qquad f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots,$$

lorsque

$$(2) \qquad \lim_{x=+\infty} x^n \left[f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \ldots - \frac{a_n}{x^n} \right] = 0.$$

Dans le cas où la variable x est complexe au lieu d'être réelle et positive, mais représente un point d'une certaine région T qui s'étend indéfiniment, on écrit la relation (1) pour toutes les valeurs x de T si pour ces mêmes valeurs de x la relation (2) est satisfaite, mais alors le symbole $\lim x = +\infty$ est remplacé par $\lim |x| = +\infty$.

Considérant le cas plus général où x est complexe et supposant $f(x)$ et T donnés, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit développable sous la forme (1) est qu'il existe une suite illimitée de constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(3) \qquad \begin{gathered} \lim_{|x|=\infty} f(x) = a_0, \\ \lim_{|x|=\infty} x[f(x) - a_0] = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lim_{|x|=\infty} x^n \left[f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \ldots - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} \right] = a_n. \end{gathered}$$

Et en effet on voit immédiatement que si les constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, définies par (3), existent, (2) existe et réciproquement.

Les relations (3) toutefois, quoique employées comme conditions suffisantes pour déterminer s'il existe un développement de la forme (1), sont souvent difficiles à appliquer comme il arrive dans les cas usuels (par exemple, ceux qu'on rencontre dans la discussion des solutions asymptotiques d'une équation différentielle linéaire); la fonction $f(x)$ est d'ordinaire donnée sous une forme peu commode pour appliquer les limites indiquées (représentant a_0, a_1, a_2, ...).

Dans cette Note nous essayerons donc de fournir un critère suffisant, et qui nous le croyons s'applique plus largement. Les résultats sont résumés dans les théorèmes I et II et seront suivis d'un exemple destiné à montrer comment les mêmes théorèmes peuvent être appliqués dans la pratique.

Théorème I. — *Soit $f(x)$ une fonction de la variable complexe x, analytique à l'intérieur et sur la frontière d'une région* T *du plan des x qui s'étend indéfiniment, le point $x=0$ toutefois étant exclu. De plus, soit $\varphi(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ et soit* T′ *la région (ayant le point $x=0$ sur sa frontière) provenant de* T *par la transformation $x=\frac{1}{x'}$.*

Si alors, pour des valeurs de x dans T′, *les limites suivantes*

$$\lim_{x=0}\varphi(x),\quad \lim_{x=0}\varphi'(x),\quad \ldots,\quad \lim_{x=0}\varphi^{(n)}(x),$$

existent et sont représentées respectivement par

$$\varphi(0),\quad \varphi'(0),\quad \ldots,\quad \varphi^{n}(0)$$

(ces valeurs étant supposées indépendantes de la façon dont x s'approche de 0 *dans* T′) *nous pourrons écrire pour les valeurs de x dans* T

$$f(x)\sim a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\ldots,$$

où

$$a_k=\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\qquad (k=0,1,2,3,\ldots,n).$$

Lemme I. — Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable complexe x analytique à l'intérieur et sur la frontière d'une certaine région T′ du plan des x, excepté toutefois pour le point $x=0$ situé sur cette frontière, $\varphi(x)$ ayant en ce point un caractère quelconque. Alors si, pour des valeurs x de la région T′, les $n+2$ limites suivantes

$$\lim_{x=0}\varphi(x),\quad \lim_{x=0}\varphi'(x),\quad \lim_{x=0}\varphi''(x),\quad \ldots,\quad \lim_{x=0}\varphi^{(n+1)}(x),$$

existent et sont représentées par

$$\varphi(0),\quad \varphi'(0),\quad \varphi''(0),\quad \ldots,\quad \varphi^{(n+1)}(0)$$

(ces valeurs étant supposées indépendantes de la direction suivant laquelle x s'approche de o dans T′), nous pourrons écrire pour les valeurs de x situées dans T′

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + [a_n + r_n(x)] x^n;$$
$$\lim_{x=0} r_n(x) = 0,$$

les coefficients a_0, a_1, a_2, ..., a_n étant déterminés par les formules

$$a_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

En effet, étant données les hypothèses précédentes, nous pouvons écrire pour toute valeur x dans T′

$$(4)\qquad \varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi'(x_1)(x - x_1) + \frac{\varphi''(x_1)}{1.2}(x - x_1)^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_1}^{x} (x - t)^n \varphi^{(n+1)}(t)\, dt,$$

où x_1 représente une valeur déterminée de x prise dans T′ aussi voisine de zéro que l'on veut et où (au moins si x et x_1 sont pris tous deux suffisamment voisins de zéro) l'intégration doit être faite le long de la ligne droite qui joint le point $x = x_1$ au point $x = 0$.

L'existence de (4) peut être réellement vérifiée en effectuant n fois de suite une intégration par parties sur le dernier terme du second membre ([1]).

Supposons maintenant que dans (4) x_1 s'approche de la limite zéro, en ne prenant que des valeurs situées dans T′ (x ayant une valeur déterminée) et introduisons en même temps nos hypothèses concernant l'existence et le sens de $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ..., $\varphi^n(0)$; nous obtenons

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \frac{\varphi^n(0) + r_n(x)}{n!}x^n,$$

où

$$(5)\qquad r_n(x) = \int_0^x \left(\frac{x-t}{x}\right)^n \varphi^{(n+1)}(t)\, dt.$$

([1]) Goursat, *Cours d'Analyse*, t. I, 1902, § 86.

Pour achever de démontrer le lemme, il ne nous reste plus qu'à démontrer que $r_n(x)$ étant défini par (5) nous aurons $\lim r_n(x) = 0$ à la condition que x demeure dans T'.

Mais pour toutes les valeurs de t situées sur la ligne d'intégration de (5) nous avons

$$\left|\frac{x-t}{x}\right| < 1.$$

De plus, il résulte de nos hypothèses que nous pouvons trouver une valeur positive constante M indépendante de x telle que pour toute valeur de x dans T' nous avons

$$|\varphi^{(n+1)}(x)| < \mathrm{M}.$$

D'où, en posant $|x| = \rho$, nous avons pour la valeur donnée de x,

$$|r_n(x)| < \mathrm{M}\int_0^\rho d\rho = \mathrm{M}\rho,$$

ce qui rend évident le résultat demandé.

Le théorème I découle comme une conséquence immédiate du lemme en soumettant la fonction et la région mentionnées dans le théorème à la transformation $x = \frac{1}{x'}$.

Si, au lieu d'une fonction $f(x)$ définie à l'intérieur d'une région complexe T, on considère une fonction d'une variable réelle x à l'intérieur d'un intervalle infini $(a, +\infty)$, nous obtenons de la même manière le lemme suivant et le théorème correspondant :

Lemme II. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable réelle x qui est continue en même temps que ses $n+1$ premières dérivées à l'intérieur de l'intervalle $(0, b)$, l'extrémité de l'intervalle, $x = 0$, étant exceptée. Si les limites $\varphi(+0)$, $\varphi'(+0)$, $\varphi''(+0)$, ..., $\varphi^{n+1}(+0)$ existent, on peut écrire pour toute valeur de x de l'intervalle*

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + [a_n + r_n(x)]x^n$$
$$\lim_{x=+0} r_n(x) = 0,$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant déterminés par les équations

$$a_k = \frac{\varphi^k(+0)}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n).$$

THÉORÈME II [1]. — *Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, qui, en même temps que ses dérivées de tous ordres, est continue dans l'intervalle infini $(a, +\infty)$, et posons $\varphi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Si les limites suivantes existent*

$$\varphi(+0), \quad \varphi'(+0), \quad \ldots, \quad \varphi^{(n)}(+0), \quad \ldots,$$

on peut écrire pour les valeurs de x de l'intervalle $(a, +\infty)$

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots$$

où

$$a_k = \frac{\varphi^{(k)}(+0)}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

3. *Application.* — On se rendra bien compte, par un exemple, de la valeur pratique des théorèmes I et II.

Reprenons la discussion qu'on rencontre dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. III, 1896, p. 372-379), où, suivant la méthode de M. Poincaré, l'auteur considère l'existence des solutions asymptotiques de l'équation différentielle

$$P_0 y^{(m)} + P_1 y^{(m-1)} + \ldots + P_{m-1} y' + P_m y = 0,$$

les coefficients P_0, P_1, P_2, ..., P_m étant des polynomes de degré p en x.

Tenons-nous-en au cas où $p = 1$ et adoptons la notation de l'auteur ; nous avons alors à considérer la solution (*loc. cit.*, p. 375)

$$y_1 = \int z^{\lambda_1}(z - \alpha_2)^{\lambda_2} \ldots (z - \alpha_m)^{\lambda_m} e^{zx}\, dz,$$

λ_1 n'étant pas un entier positif. La ligne d'intégration est celle indiquée par l'auteur (*fig.* 24). Dans le texte, après une étude détaillée de cette fonction y_1, il est montré que $x^{\lambda_1+1} y_1$ est susceptible d'un développement asymptotique de la forme (1) lorsque x est positif et grand. Pour nous assurer de la vérité de ce résultat au moyen du théorème II, il suffit d'adopter la marche suivante :

Nous avons $f(x) = x^{\lambda_1+1} y_1$ de telle sorte que

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^{\lambda_1+1}} \int z^{\lambda_1}(z - \alpha_2)^{\lambda_2} \ldots (z - \alpha_m)^{\lambda_m} e^{\frac{z}{x}}\, dz. \tag{6}$$

[1] Les résultats de ce théorème ont déjà été énoncés implicitement par M. Van Vleck (*Boston Colloquium Lectures*, 1905, p. 79).

Posons $z = xy$. Il vient

$$\varphi(x) = \int y^{\lambda_1}(yx - \alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(yx - \alpha_m)^{\lambda_m} e^y \, dy, \tag{6}$$

où, au moins si $x < 1$, la ligne d'intégration peut être la même que précédemment.

L'examen de (6) nous montre d'abord que cette intégrale converge uniformément pour toutes les valeurs de x prises dans un intervalle du type $(0, b)$, b étant fini et supposé ici < 1 et que la même propriété appartient à l'intégrale résultant de la différentiation sous le signe de l'intégrale (6) par rapport à x.

Nous en déduirons qu'on obtient la dérivée $\varphi'(x)$ $(0 < x < b)$ en différentiant (6) sous le signe somme.

D'une manière générale, il apparaît que $\varphi^{(n)}(x)$ peut être obtenue en différentiant (6) n fois de suite sous le signe somme. De plus, comme les intégrales ainsi obtenues représentant $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, ..., $\varphi^{(n)}(x)$, $(0 < x < b)$ sont toutes uniformément convergentes, comme nous l'avons fait remarquer, les limites $\varphi(+0)$, $\varphi'(+0)$, ..., $\varphi^n(+0)$ s'obtiendront en passant à la limite $x = 0$ sous le signe d'intégration.

On voit donc que les limites en question existent, et que le théorème II nous permet alors d'établir les résultats désirés.