BULLETIN DE LA S. M. F.

P. BOUTROUX

Remarques sur les singularités transcendantes des fonctions de deux variables

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 296-304

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__296_0>

REMARQUES SUR LES SINGULARITÉS TRANSCENDANTES DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES;

PAR M. P. BOUTROUX.

L'étude des fonctions entières de deux variables soulève un problème fort intéressant : *Si l'on connaît les singularités de* $F(x, y)$ *dans certaines régions, que peut-on dire des singularités présentées par cette fonction dans des régions plus étendues?* Dans le cas des fonctions d'une variable, la question ainsi posée ne comporte aucune réponse, car il est clair qu'une fonction de x peut être holomorphe à l'intérieur d'un contour donné et présenter hors de ce contour des singularités de toutes natures. Il en va autrement des fonctions de deux variables, ainsi qu'en fait foi, par exemple, le théorème suivant dû à M. Hartogs : *Soit dans le plan* y *un domaine* B *contenant le point* $y = y_1$, *et limité par une courbe* Γ; *soit, d'autre part,* $F(x, y)$ *une fonction uniforme pour* x *voisin de* x_1, y *intérieure à* Γ (*frontière comprise*); *je suppose que* F *présente une singularité au point* $x = x_1$, $y = y_1$ *tandis que* $F(x_1, y_1)$ *est fonction holomorphe de* y *sur le contour* Γ; *dans ces conditions il existe un cercle* c, *fini, de centre* x_1, *tel que pour toute valeur* x' *de* x *intérieur à* c, *la fonction* $F(x', y)$ *soit singulière en un point au moins de* B. A ce théorème M. Hartogs ajoute une série de propositions remarquables que l'on trouvera dans son Inaugural-Dissertation (Munich, 1903) et dans ses Mémoires postérieurs[1], et il y a certainement encore, dans ce domaine, d'intéressantes recherches à faire [2].

Je voudrais, à ce propos, présenter quelques remarques relatives à deux types fondamentaux de singularités transcendantes qui appartiennent aux fonctions uniformes $F(x, y)$: 1° *singula-*

(1) *Sitzungsbericht der Kgl. Bayer. Ak. d. Wissensch.*, t. XXXVI, 1906, p. 233; *Mathem. Ann.*, t. LXXII.

(2) M. Dulac a traité un cas particulier du problème énoncé plus haut; il établit l'holomorphisme de $F(x, y)$ au voisinage de l'origine en partant des propriétés de la fonction qu'il suppose connues pour *les seules valeurs réelles* (voisines de o) de x et y (*Acta mathematica*, t. XXXI, p. 95).

rités qui se propagent le long d'une courbe isolée(1) (je me bornerai au cas où la *courbe est algébroïde*); 2° *singularités qui se présentent pour une valeur déterminée de x, y étant quelconque*. Il y a entre ces singularités et certaines propriétés des équations différentielles, une analogie qu'il n'est peut-être pas sans intérêt de signaler.

I.

Considérons une fonction uniforme $F(x,y)$ présentant une *singularité transcendante qui se propage le long d'une courbe algébroïde isolée*.

Je remarque d'abord que tout point (x_1, y_1) de la courbe singulière se trouve être pour F point d'indétermination complète (au voisinage duquel F prend toutes les valeurs possibles sauf deux au plus). En effet, — laissant (2) par exemple x égal à x_1, — considérons la fonction de y, $F(x_1, y)$. Cette fonction uniforme est, par hypothèse, méromorphe lorsque y est voisin de y_1 : elle présente dès lors, pour $y = y_1$, une singularité transcendante isolée qui ne peut être qu'essentielle.

Portons maintenant notre attention sur la fonction multiforme (3) y_a de x qui est définie par l'égalité.

$$(1) \qquad F(x, y) = a,$$

où a est une constante arbitraire. Nous constatons que, pour $x = x_1$, la fonction y_a admet une infinité de déterminations qui convergent vers la valeur-limite y_1. Nous voyons ainsi que la courbe singulière est, pour les branches de la fonction $y_a(x)$, une *fonction-limite* ou *branche-limite*(4). La singularité x_1, y_1) est donc

(1) L'étude de la courbe le long de laquelle se propage une singularité a été l'objet de nombreux travaux. Outre le dernier Mémoire de M. Hartogs, cité ci-dessus, on pourra consulter un Mémoire de M. Faber (*Mathem. Annalen*, t. 71).

(2) On peut, plus généralement, supposer que (x,y) tend vers (x_1, y_1) le long d'une courbe algébrique.

(3) $y_a(x)$ se décomposera parfois en plusieurs fonctions; mais il est toujours loisible de considérer ces fonctions comme n'en faisant qu'une.

(4) Cette propriété caractérisera en même temps les branches-limites de $y_a(x)$, et celles de $x_a(y)$, à moins que la courbe singulière ne réduise à une droite d'équation $y = y_0$ ou $x = x_0$. Nous avons toujours le droit d'exclure ce dernier cas après avoir effectué, au besoin, un changement de variable rationnel.

caractérisée par ce fait que la fonction multiforme $y_a(x)$ admet une branche-limite passant par le point (x_1, y_1), *algébroïde au voisinage de* (x_1, y_1) *et indépendante de* a. D'ailleurs, l'ensemble des branches de $y_a(x)$ converge uniformément vers la branche-limite en tout point x où cette dernière est continue (¹).

Remarque. — Nous avons supposé que la singularité (x_1, y_1) se propageait le long d'une courbe algébroïde isolée. Nous aurions pu nous contenter de supposer que *la singularité* (x_1, y_1) *se propage le long d'une courbe continue.* En effet, nous aurions encore déduit de cette hypothèse que la courbe singulière est une branche-limite vers laquelle convergent uniformément les branches des $y_a(x)$, et de ce que ces branches sont algébroïdes et bornées au voisinage de tout point où elles tendent vers une limite finie, nous aurions conclu que la branche-limite, supposée continue, est, par surcroît, algébroïde.

Ces remarques faites, je vais démontrer que F *peut être regardée comme fonction d'une variable unique*, u, *laquelle est fonction algébroïde de* x *et* y *au voisinage de* x_1, y_1.

Considérons en effet une région Σ contenant un arc algébroïde de la courbe singulière, et ne contenant pas d'autres singularités transcendantes de F. Appelons x_0 et $\bar{x}$ deux abscisses fixes quelconques intérieures à Σ, et joignons x_0 et $\bar{x}$ par un chemin quelconque. Il n'y a par hypothèse (dans Σ) qu'un nombre fini de points de la courbe singulière qui aient pour abscisse x_0 ou $\bar{x}$: nous appellerons $Y_{(0)1}, \ldots, Y_{(0)k}$ et $\bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_k$ les ordonnées respectives de ces points; nous désignerons, d'autre part, par S la région du plan des y formée par l'ensemble des ordonnées des points de Σ qui ont pour abscisse $\bar{x}$. Cela posé, appelons a la valeur de $F(\bar{x}, \bar{y})$ pour une valeur arbitraire de $\bar{y}$, et suivons, le long du chemin invariable $\bar{x}x_0$, la branche de la fonction $y_a(x)$ qui prend

(¹) *Cf.* P. Montel, *Sur les suites infinies de fonctions* (thèse de doctorat), Chapitre V. Lorsque j'ai écrit moi-même sur les fonctions-limites des fonctions multiformes (*Ann. scient. de l'École Norm.*, septembre 1905; *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, 1907), je n'étais pas instruit des théorèmes qui, dès cette époque, étaient connus de M. Montel. On devra désormais s'y référer lorsque l'on fera appel à la notion de fonction-limite.

en $\overline{x}$ la valeur $\overline{y}$; cette branche prend en x_0 une ou plusieurs valeurs y_0; je dis que, si l'on considère y_0 comme fonction de $\overline{y}$, cette fonction est algébroïde pour les valeurs de $\overline{y}$ intérieures à S.

Entourons en effet les points $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k$ de petits cercles $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ et faisons décrire à $\overline{y}$ (dans Σ) un chemin quelconque extérieur à ces cercles. Lorsque $\overline{y}$ variera avec continuité, y_0 engendrera une fonction continue de $\overline{y}$ qui, pour toutes les valeurs considérées de $\overline{y}$, sera algébroïde et aura un nombre limité de déterminations : autrement la fonction $y_0(\overline{y})$ devrait avoir des déterminations arbitrairement rapprochées de $Y_{(0)1}, \ldots$ ou $Y_{(0)k}$, et à ces déterminations (suivies le long du chemin $x_0\overline{x}$) devraient correspondre inversement des valeurs de $\overline{y}$ situées dans les cercles γ, ce qui n'est pas, par hypothèse. On conclut de là : 1° que la fonction $y_0(\overline{y})$ ne possède, *pour toute valeur de* $\overline{y}$, qu'un nombre limité de branches; 2° qu'elle ne peut admettre, en fait de singularités transcendantes, que les points isolés $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k$; il en résulte que si ces points étaient effectivement transcendants, ce devraient être des points (weierstrassiens) d'indétermination complète; mais nous savons que, lorsque $\overline{y}$ tend vers $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k$, y_0 tend nécessairement vers les valeurs déterminées $Y_{(0)1}, \ldots, Y_{(0)k}$: donc la fonction $y_0(\overline{y})$ ne cesse pas d'être algébroïde aux points $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k$.

Supposons maintenant, que l'abscisse $\overline{x}$ varie, tout en restant dans Σ; quel que soit $\overline{x}$, la fonction y_0 n'aura jamais qu'un nombre limité de branches et restera algébroïde pour tous les points $(\overline{x}, \overline{y})$ intérieur à Σ. D'où cette conclusion, dans l'énoncé de laquelle nous remplaçons $\overline{x}$ et $\overline{y}$ par x et y : Soient (x,y) un point quelconque de Σ, a la valeur de $F(x,y)$ et x_0 une abscisse fixe (intérieure à Σ). Appelons y_0 l'une quelconque des déterminations que peut acquérir en x_0 la fonction $y_a(x)$ lorsque (x,y) varie d'une manière quelconque sans sortir de Σ : *y_0 est, pour toutes les valeurs considérées de x et y, une fonction algébroïde de ces deux variables* (1).

(1) En vertu de la convergence uniforme des branches de $y_a(x)$ vers leur fonction-limite.

D'ailleurs F est une fonction uniforme de y_0 puisqu'à une valeur de y_0 correspond une valeur unique de $F(x_0, y_0)$ et que $F(x, y) = F(x_1, y_0)$. *La proposition énoncée est donc démontrée.*

A titre d'exemple, considérons la fonction

$$F(x, y) = e^{\frac{f(x)}{P(x, y)}},$$

f étant une fonction entière de x, et P un polynome en x et y. La fonction F présente des singularités transcendantes tout le long de la ligne $P(x, y) = 0$, Or posons

$$\frac{P(x, y)}{f(x)} = \frac{P(0, u)}{f(0)},$$

égalité qui définit u comme fonction algébroïde de x et y pour y quelconque et x situé dans un domaine quelconque à distance finie : la fonction de u

$$e^{\frac{f(0)}{P(0, u)}} = F(x, y)$$

sera holomorphe pour toutes les valeurs de u, excepté celles qui annulent $P(0, u)$.

Ainsi, le type de singularité transcendante que nous venons d'étudier se laisse définir par ce caractère que F est fonction d'une variable u qui est elle-même fonction algébroïde de x et y. On peut donc poser $F(x, y) = F_1(u)$, et les singularités de F sont celles de la fonction $F_1(u)$.

Revenons maintenant aux branches des fonctions $y_a(x)$ définies plus haut. Nous avons vu que, pour toute valeur de a, $y_a(x)$ a (dans le domaine Σ) une infinité de branches convergeant vers l'arc de courbe singulière algébroïde que nous appellerons $Y(x)$. Ces branches se comportent exactement comme les intégrales d'une équation différentielle

$$y' = \varphi(x, y)$$

satisfaite pour $y = Y(x)$ et telle que $\varphi(x, y)$ soit algébroïde dans Σ. Soit, en particulier, $(\bar{x}, \bar{y})$ un point voisin d'un point de la courbe $y = Y(x)$. A ce point correspond une valeur de a [égale à $F(\bar{x}, \bar{y})$], et, par conséquent, une branche $y_a(x)$, que nous regarderons comme déterminée par la valeur donnée à la *constante arbi-*

traire $\overline{y}$ (constante d'intégration) : soit, maintenant, y la valeur de la branche en un point quelconque x de Σ; y est, d'après ce que nous avons vu, *fonction algébroïde de la constante* $\overline{y}$. On reconnaît, dans cette proposition, le théorème fondamental de M. Painlevé sur l'intégrale fonction de la constante d'intégration.

A toute singularité présentée dans Σ par la branche algébroïde $y = Y(x)$ correspond une singularité semblable des branches voisines $y_a(x)$. Ainsi les branches $y_a(x)$ présentent dans Σ des singularités *algébriques* qui varient en fonction continue de la constante $\overline{y}$: ce sont les *singularités algébriques mobiles* de M. Painlevé (*voir*, par exemple : *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Stockholm).

II.

Je vais me placer maintenant dans l'hypothèse suivante : *la fonction* F *ne présente aucune singularité transcendante lorsque x est à l'intérieur d'une certaine aire* C *et y à l'intérieur d'une certaine aire* Γ (¹); *elle est, en revanche, singulière transcendante en un point x_1 du contour* C, *pour des valeurs de y intérieures à* Γ.

Je dis que, s'il en est ainsi, la fonction F *est singulière transcendante pour $x = x_1$ et y quelconque.*

Appelons y_1 une valeur quelconque de y intérieure à Γ telle que la fonction F soit singulière transcendante au point (x_1, y_1). L'ensemble des valeurs y_1 ainsi définies constitue un certain domaine que j'appellerai (frontière exclue) *domaine de singularité* D. *A priori* on peut concevoir que le domaine D se réduise à un ensemble de points ou à une aire limitée, ou embrasse, au contraire, toute l'aire Γ. Nous allons établir que le *domaine* D *comprend nécessairement l'aire* Γ tout entière. En raisonnant

---

(¹) La fonction F est donc supposée algébroïde dans la partie commune aux cylindres de l'espace à quatre dimensions qui comprennent l'un tous les points (x, y) d'abscisse de x intérieure à C, l'autre tous les points (x, y) d'ordonnée y intérieure à Γ. Il serait facile de modifier la démonstration qui va suivre de façon à l'appliquer au cas où F serait algébroïde dans une région de forme quelconque.

semblablement sur toutes les aires du plan y où $F(x, y)$ est méromorphe au voisinage de $x = x_1$, on constatera que *le domaine de singularité, pour* $x = x_1$, *s'étend nécessairement à tout le plan de la variable* y.

Supposons, pour un moment, que le domaine D ne comprenne pas toute l'aire Γ et montrons que cette hypothèse est inadmissible.

Soit la fonction $F(x,y)$ singulière transcendante pour $x = x_1$, $y = y_1$ à l'intérieur de Γ. Si l'on peut entourer y_1 d'un cercle γ, intérieur à Γ, sur le contour duquel $F(x_1, y)$ soit holomorphe, il résulte du théorème de M. Hartogs, cité au début du présent Mémoire, que $F(x, y)$ présente des singularités transcendantes pour x *quelconque* au voisinage de x_1, y intérieur à γ : conclusion inacceptable, puisque F est, par hypothèse, méromorphe pour y intérieur à Γ, x intérieur à C. Ainsi le domaine de singularité, pour $x = x_1$, comprend nécessairement une aire qui déborde à l'extérieur de Γ.

Pour nous placer dans les conditions les plus générales nous supposerons que (si D ne comprend pas toute l'aire Γ) la frontière de D se compose d'une portion de la frontière de Γ et d'une ou plusieurs lignes L intérieure à Γ. Il s'agit de montrer que cette hypothèse est absurde. Pour cela, on pourra, au lieu de s'appuyer sur les théorèmes de M. Hartogs, raisonner comme il suit :

Nous pouvons, d'après nos hypothèses, tracer à l'intérieur de Γ un contour Γ' jouissant des propriétés suivantes; ce contour est divisé par une ligne L en deux aires partielles, D_1, D_2 respectivement limitées par les demi-contours Γ_1', Γ_2' et par L : la fonction $F(x_1, y)$ de y est singulière transcendante dans D_1 et méromorphe dans D_2. Je dis que lorsque y tend vers L à *l'intérieur de* D_2, $F(x_1, y)$ reste nécessairement déterminée.

Montrons, en effet, que F ne saurait prendre une même valeur a en un nombre infini de points situés dans D_2 et arbitrairement rapprochés de L. Appelons x' un point arbitrairement rapproché de x_1 *à l'intérieur de* C et faisons tendre x' vers x_1, à partir d'une valeur donnée x_0'. Pour $x' = x_0'$, $F(x', y)$ est méromorphe dans Γ et n'y prend par conséquent la valeur a qu'en un nombre fini de points. Appelons $y_a^{(1)}(x')$, $y_a^{(2)}(x')$, ... ces points. Lorsque x' tend vers x_1, il se peut qu'un nombre arbitrairement grand de points

$y_a^{(i)}(x')$ pénètrent dans D_1 en traversant le demi-contour Γ'_1 ; mais il n'y a toujours qu'un nombre fini de ces points susceptibles de traverser Γ'_2. Donc, si l'on avait dans D_2 une infinité de points $y_a^{(i)}(x')$, ces points ne pourraient y pénétrer (lorsque x' tend vers x_1) qu'en traversant la ligne L. Supposons qu'il en soit ainsi, et que les points $y_a^{(1)}(x'), \ldots, y_a^{(n)}(x'), \ldots$ pénètrent dans D_2 pour $x' = x_1$. Les fonctions $y_a^{(1)}(x'), \ldots$ sont algébroïdes tant que x' n'a pas atteint x_1 ; et elles resteront algébroïdes pour $x' = x_1$ puisqu'elles prennent des valeurs y situées hors du domaine de singularité D_1 ; conclusion absurde : car s'il y a, dans D_2, une infinité de points $y_a^{(i)}(x')$, fonctions algébroïdes de x' pour $x' = x_1$, la fonction $F(x, y)$ doit nécessairement présenter une singularité transcendante pour une valeur x arbitrairement rapprochée de x_1 et une valeur y intérieure à D_2. J'en conclus que, *lorsque x' tend vers x_1*, une infinité de points $y_a^{(i)}(x')$ peuvent tendre vers la ligne L à l'intérieur de D_1, mais non point traverser la ligne L.

Ce point établi, revenons à la fonction de y, $F(x_1, y)$. Cette fonction, méromorphe dans D_2, est déterminée sur la ligne frontière L de D_2 et elle est, par conséquent, bornée sur certains arcs de L tout au moins. On peut déduire de là que l'existence d'une ligne séparant un domaine de singularité D_1 d'un domaine de méromorphisme D_2 est chose impossible.

Prenons en effet, à l'intérieur de C dans le plan x, une suite de points $x'_0, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$ convergeant vers x_1 et considérons les fonctions de y

$$F(x'_0, y), \quad \ldots, \quad F(x'_n, y), \quad \ldots.$$

Ces fonctions (ou leurs inverses) sont toutes holomorphes sur la ligne L. Si, de plus, elles sont bornées sur un arc de L, on peut démontrer qu'elles admettent pour limite (¹) une fonction $F(x_1, y)$ qui est holomorphe sur cet arc de L. Or cette conclusion est en contradiction avec nos hypothèses.

Ainsi, nous constatons que *le domaine de singularité de la fonction $F(x_1, y)$ comprend nécessairement toute l'aire Γ.*

D'ailleurs, le mode de raisonnement que nous avons employé nous conduira également à la conclusion suivante : *Lorsque x*

(¹) MONTEL, *loc. cit.*, Chap. V.

tend vers x_1 *à l'intérieur de* C, *et* y *vers un point arbitraire de l'aire* Γ, *la fonction* $F(x, y)$ *devient indéterminée.*

Son indétermination ne peut être que complète.

Considérons alors les fonctions $y_a(x)$ définies au paragraphe I de la présente Note. Ces fonctions ont toutes, — c'est-à-dire pour toute valeur de a, — une singularité transcendante en $x = x_1$. Elles se comportent comme les intégrales d'une équation différentielle

$$y' = \varphi(x, y)$$

pour laquelle x_1 serait, d'après la terminologie de M. Painlevé, un *point singulier fixe*. Ce point fixe est un point singulier transcendant, ce qui le distingue des points singuliers mobiles des $y_a(x)$: c'est là, on se rappelle, précisément ce qui arrive pour les équations différentielles du premier ordre étudiées par M. Painlevé.