BULLETIN DE LA S. M. F.

Z. DE GEÖCZE

Sur la fonction semi-continue

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 256-295

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__256_1>

SUR LA FONCTION SEMI-CONTINUE;

PAR M. ZOARD DE GEÖCZE.

Dans un travail antérieur (1), j'ai exposé la quadrature de deux classes de la surface $z=f(x,y)$ et j'ai indiqué la quadrature de la surface générale $z=f(x,y)$. Dans ces recherches, il était nécessaire de faire usage de certaines propriétés de la fonction semi-continue. Ces propriétés furent établies d'une manière qu'on ne peut considérer comme assez satisfaisante au point de vue de la méthode, car dans les démonstrations, il n'était pas fait abstraction de la surface. De plus, dans les recherches relatives à la surface générale $z=f(x,y)$, on ne pourrait suivre que très difficilement le même chemin. La nécessité s'impose donc d'établir les propriétés en question, en ne considérant que la fonction en elle-même.

Le but de ce travail est de donner ces propriétés de la fonction en faisant abstraction de la surface. Nous remarquons que, selon toute probabilité, les mêmes propriétés suffiront pour la quadrature d'une surface quelconque.

---

(1) *Quadrature des surfaces courbes* (*Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, t. XXVI, 1910).

Dans ces recherches, j'ai été obligé d'introduire un nouveau signe au lieu du signe $\sum$ de la sommation. Nous allons exposer l'emploi de ce signe.

Soit x une variable réelle dans l'intervalle (α, β), $(\alpha < \beta)$. Nous disons que les points

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{l-1} < x_l = \beta$$

forment une division $X_l^{(\alpha,\beta)}$ de (α, β).

Étant donnée une suite de divisions X_{l_r} $(r = 1, 2, \ldots)$ (¹), nous supposons que $x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, l_r - 1)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Nous disons que la suite X_{l_r} $(r = 1, 2, \ldots)$ est de première espèce lorsque les points de sa $r^{\text{ième}}$ division se trouvent parmi les points de sa $(r+1)^{\text{ième}}$ division (pour chaque $r = 1, 2, \ldots$).

Soit $[i]$ une valeur formée pour l'intervalle (x_i, x_{i+1}) de X_l : nous écrivons $X_l[i]$ au lieu de $\sum_0^{l-1} i[i]$.

Lorsque $\lim_{r=\infty} X_{l_r}[i]$ existe, nous désignons cette valeur par $X_{l_\infty}[i]$. De plus, lorsque cette valeur ne dépend pas de la suite X_{l_r}, nous la désignons par $X[i]$.

Soit (u, v) un intervalle partiel de (α, β). Désignons par $X_l'^{(u,v)}[i]$ la somme des $[i]$ tels que (x_i, x_{i+1}) soit compris dans (u, v) et désignons par $X_l''^{(u,v)}[i]$ la somme des $[i]$ tels que (x_i, x_{i+1}) ait au moins un point commun avec (u, v). Lorsque

$$\lim_{r=\infty} X_{l_r}'^{(u,v)}[i] = \lim_{r=\infty} X_{l_r}''^{(u,v)}[i],$$

nous désignons cette limite par $X_{l_\infty}^{(u,v)}[i]$. De plus, lorsque cette valeur est indépendante de la suite X_{l_r}, nous la désignerons par $X^{(u,v)}[i]$.

Nous disons que X_l a le quotient u lorsque

$$u \leqq \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{j+1} - x_j} \leqq \frac{1}{u} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, l-1, i \neq j),$$

u est nécessairement compris entre zéro et un.

(¹) Lorsqu'on ne considère que les divisions de (α, β), on peut écrire X au lieu de $X_l^{(\alpha,\beta)}$.

Nous disons qu'une suite de divisions $X_{l_r} (r = 1, 2, \ldots)$ a un quotient fini lorsqu'il existe un nombre u de manière que chaque division de la suite ait le quotient u.

Dans le Chapitre I, nous établissons quelques propriétés simples de la fonction semi-continue; les propriétés les plus nécessaires dans la quadrature des surfaces courbes seront exposées dans le Chapitre II.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA FONCTION.

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle, définie pour les points d'un ensemble Q de points situés dans $(0, a)$. Bien entendu, $\varphi(x)$ n'est pas nécessairement uniforme et bornée, et pour quelques points x de Q on peut avoir

$$|\varphi(x)| = +\infty.$$

Nous désignons dans tout ce qui suit par ε et η des valeurs positives.

(u, v) étant un intervalle de $(0, a)$, nous désignerons par $g^\varphi(u, v)$ la limite inférieure des valeurs de $\varphi(x)$ dont l'argument x (appartenant à Q) se trouve dans (u, v).

On sait que, x étant un point ou un point limite de Q,

$$\lim_{\varepsilon + \eta = 0} g^\varphi(x - \varepsilon, x + \eta)$$

existe et que de plus cette valeur est indépendante du mode de variation de ε et de η. Nous désignerons cette valeur par $g^\varphi(x)$.

Lorsque pour chaque point x de Q

$$\varphi(x) = g^\varphi(x),$$

nous dirons que la fonction est semi-continue (inférieurement) [1].

Dans tout ce qui suit, nous désignons par $\psi(x)$ une fonction

---

[1] La plus grande partie des théorèmes de ce Chapitre et la définition de la fonction semi-continue sont dues à M. Baire.

qui est définie pour tous les points de (o, a), qui est semi-continue et qui n'a pas de valeurs négatives.

THÉORÈME I. — $\psi(x)$ *est uniforme.* Car $g^{\Psi}(x)$ l'est et l'on a

$$\psi(x) = g^{\Psi}(x).$$

THÉORÈME II. — *Soit* δ *positif et donné à l'avance. Pour chaque point* x' *de* (o, a) *on peut trouver* ε *et* η *tels que pour les points* x *de* $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ *compris dans* (o, a), *on ait*

$$\text{(1)} \qquad \psi(x') - \psi(x) < \delta \quad (^1).$$

On a

$$\psi(x') = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g^{\Psi}(x' - \varepsilon, x' + \eta). \qquad \psi(x) \geqq g^{\Psi}(x' - \varepsilon, x' + \eta),$$

et ainsi

$$\psi(x') - \psi(x) \leqq \lim_{\varepsilon+\eta=0} g^{\Psi}(x' - \varepsilon, x' + \eta) - g^{\Psi}(x' - \varepsilon, x' + \eta).$$

On a de plus pour ε, η assez petits

$$\lim_{\varepsilon+\eta=0} g^{\Psi}(x' - \varepsilon, x' + \eta) - g^{\Psi}(x' - \varepsilon, x' + \eta) < \delta;$$

donc

$$\psi(x') - \psi(x) < \delta.$$

Inversement : lorsque, pour une fonction $\psi(x)$ *définie dans* (o, a), *non négative et uniforme, la condition signalée est remplie, la fonction est semi-continue.*

D'après un théorème de Weierstrass, il existe dans $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ au moins un point x'' tel que

$$\psi(x'') < g^{\Psi}(x' - \varepsilon, x' + \eta) + \delta;$$

donc on déduit de (1), en posant $x = x''$,

$$\psi(x') < g^{\Psi}(x' - \varepsilon, x' + \eta) + 2\delta.$$

---

(1) On pose

$$\psi(x') - (+\infty) = \frac{1}{\psi(x')}, \qquad \frac{1}{0} = +\infty, \qquad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

A la limite $\delta = 0$, on peut prendre $\varepsilon + \eta = 0$; donc

$$\psi(x') \leqq \lim_{\varepsilon+\eta=0} g\Psi(x'-\varepsilon, x'+\eta).$$

Mais ayant

$$\psi(x') \geqq \lim_{\varepsilon+\eta=0} g\Psi(x'-\varepsilon, x'+\eta),$$

on aura

$$\psi(x') = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g\Psi(x'-\varepsilon, x'+\eta),$$

c'est-à-dire que $\psi(x)$ est semi-continue.

Théorème III. — *Dans chaque intervalle partiel* (u, v) *de* $(0, a)$, *il existe au moins un point* x' *tel que*

$$\psi(x') = g\Psi(u, v),$$

c'est-à-dire que ψ *a un minimum absolu dans chaque intervalle.*

On prouve facilement que x étant un point de $(0, a)$ et (ξ, η) un intervalle quelconque qui contient x

$$\psi(x) = \lim_{\eta=\xi} g\Psi(\xi, \eta).$$

D'après un théorème de Weierstrass, il existe dans (u, v) au moins un point x' tel que pour chaque intervalle (ξ, η) compris dans (u, v) et contenant x', on ait

$$g\Psi(\xi, \eta) = g\Psi(u, v),$$

ainsi

$$\psi(x') = \lim_{\eta=\xi} g\Psi(\xi, \eta) = g\Psi(u, v).$$

Remarque. — La deuxième partie du théorème II peut aussi servir comme définition de la fonction semi-continue. En prenant au lieu de (1) les inégalités suivantes

$$\psi(x') - \psi(x) < \delta, \qquad \psi(x) - \psi(x') < \delta,$$

la définition sera celle de la fonction continue.

Le théorème présent est l'un de ceux qui montrent une certaine analogie avec les théorèmes sur les fonctions continues. Nous en allons communiquer quelques-uns :

a. L'ensemble des valeurs des minima de $\psi(x)$ est au plus dénombrable.

b. L'ensemble des points x' pour lesquels il existe un intervalle

$(x' - \varepsilon, x' + \eta)$, de manière que pour les $x \neq x'$ de l'intervalle $\psi(x) > \psi(x')$, est, s'il existe, au plus dénombrable.

c. On peut trouver un ensemble dénombrable de points, partout dense dans $(0, a)$ et tel qu'en désignant par $g_1^\psi(x - \varepsilon, x + \eta)$ la limite inférieure des valeurs de $\psi(x)$ pour les points de l'ensemble qui se trouvent dans $(x - \varepsilon, x + \eta)$, on ait pour chaque point x de $(0, a)$

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g_1^\psi(x - \varepsilon, x + \eta).$$

d. La somme d'un nombre limité de fonctions semi-continues est aussi une fonction semi-continue.

Théorème IV. — *Désignons par* $\varphi_h(x)$ $(h = 1, 2, \ldots)$ *des fonctions définies dans* $(0, a)$, *uniformes*, *non négatives*, *bornées* (¹) *et continues*, $\psi(x)$ *étant la fonction considérée au début*, *on peut trouver des* φ_h *telles que*

$$\psi(x) = \sum_1^\infty {}^h \varphi_h(x).$$

Inversement, soient $\varphi_h(x)$ *des fonctions comme ci-dessus*, *d'ailleurs quelconques*, *la fonction* $\sum_1^\infty {}^h \varphi_h(x)$ *sera semi-continue*.

Corollaire. — ψ est donc la limite de la fonction uniforme, bornée et continue $\sum_1^n {}^h \varphi_h(x)$ pour $n = \infty$. D'après la classification de M. Baire, c'est donc une fonction de première classe.

Nous ne démontrerons que la deuxième partie de l'énoncé.

Soit $\delta > 0$ et soit x' un point de $(0, a)$.

On a

$$\sum_1^n {}^h \varphi_h(x) \leqq \sum_1^{n+1} {}^h \varphi_h(x) \leqq \psi(x) = \sum_1^\infty {}^h \varphi_h(x).$$

Choisissons n assez grand pour que nous ayons

$$0 \leqq \psi(x') - \sum_1^n {}^h \varphi_h(x') < \frac{\delta}{2}.$$

(¹) Nous remarquons qu'en désignant par G_h la limite supérieure de φ_h, la limite supérieure des G_h peut être égale à $+\infty$.

La fonction $\sum_1^n h\,\varphi_h(x)$ est bornée et continue, donc il existe un $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$ tel que pour ses points x on aura

$$\left|\sum_1^n h\,\varphi_h(x') - \sum_1^n h\,\varphi_h(x)\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Donc dans $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$

$$\psi(x') - \sum_1^n h\,\varphi_h(x) < \delta,$$

et à plus forte raison

$$\psi(x') - \psi(x) < \delta,$$

et par là (*voir* théorème II) le théorème est démontré.

Théorème V. — *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction définie dans* $(0, a)$, *non négative, d'ailleurs quelconque, uniforme ou non, bornée ou non. La quantité*

$$\mathrm{X}\, g^{\varphi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

existe.

Son nom est l'intégrale par défaut de φ dans $(0, a)$ (1).

Son symbole est

$$\underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx.$$

Remarque I. — Lorsque X_{l_1} contient X_l on aura

$$\mathrm{X}_{l_1}\, g^{\varphi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) \geqq \mathrm{X}_l\, g^{\varphi}(x_l, x_{l+1})(x_{i+1} - x_i),$$

car lorsque (u, v) est compris dans (t, w), $g^{\varphi}(u, v) \geqq g^{\varphi}(t, w)$.

Remarque II. — Lorsque

$$\underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx < +\infty,$$

(1) Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale*, 1875).

il existe nécessairement dans chaque intervalle partiel (u, v) de (o, a) des points x tels que $\varphi(x) < +\infty$.

Remarque III. — On a par définition

$$\underline{\int_u^v} \varphi(x)\,dx = X^{(u,v)} g\varphi(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i).$$

Théorème VI. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction comme ci-dessus et soit*

$$\underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx < +\infty.$$

Dans ce cas, pour un intervalle partiel quelconque (u, v) de (o, a)

$$X^{(u,v)} g\varphi(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) = \underline{\int_u^v} \varphi(x)\,dx.$$

De plus la fonction $w(x)$ qui est définie par

$$w(o) = o, \qquad w(x) = \underline{\int_0^x} \varphi(x)\,dx \qquad (o < x \leqq a)$$

est uniforme, bornée, continue et non décroissante.

On a encore, pour un t compris dans (u, v),

$$\underline{\int_u^v} \varphi(x)\,dx = \underline{\int_u^t} \varphi(x)\,dx + \underline{\int_t^v} \varphi(x)\,dx.$$

Théorème VII. — *Il existe des fonctions semi-continues $\psi(x)$, telles que dans chaque intervalle partiel de (o, a) il existe des points x' pour lesquels $\psi(x') = +\infty$ et que*

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx$$

ait néanmoins une valeur finie.

Théorème VIII. — *Soit $K > g\psi(o, a)$. L'ensemble des x pour lesquels $\psi(x) \leqq K$ est relativement parfait.*

L'ensemble des x pour lesquels $\psi(x) > K$ est formé par les points intérieurs de certains intervalles (u_h, v_h) $(u_h \leqq v_h,$

$h = 1, 2, \ldots$) (1), *qui, pris deux à deux, n'ont aucun point intérieur commun.*

Nous appelons ces intervalles, intervalles adjoints à ψ *par* K.

Par définition, un ensemble est relativement parfait (fermé) lorsqu'il contient son dérivé (l'ensemble de ses points limites).

Désignons par ξ un point limite de l'ensemble des x pour lesquels $\psi(x) \leqq K$.

ξ étant un point limite de l'ensemble, quel que soit $(\xi - \varepsilon, \xi + \eta)$, il existe dans $(\xi - \varepsilon, \xi + \eta)$ des points x' de l'ensemble et ainsi

$$g\psi(\xi - \varepsilon, \xi + \eta) \leqq \psi(x') \leqq K;$$

donc

$$\psi(\xi) = \lim_{\varepsilon + \eta = 0} g\psi(\xi - \varepsilon, \xi + \eta) \leqq K.$$

Ainsi ξ appartient à l'ensemble, donc l'ensemble est relativement parfait.

L'ensemble des x pour lesquels $\psi(x) > K$ est l'ensemble complémentaire (2) de l'ensemble ci-dessus. Mais le complémentaire d'un ensemble relativement parfait est formé par l'ensemble des points intérieurs de tels intervalles que nous avons signalé.

THÉORÈME IX. — *Lorsque*

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\, dx < +\infty,$$

---

(1) Toutes les propriétés de ψ que nous allons établir seront telles, que lorsqu'elles sont valables pour $(0, a)$ elles le seront aussi pour un intervalle partiel quelconque de $(0, a)$.

Nous pouvons donc supposer que ψ n'est jamais bornée, car dans l'autre cas on peut prendre $b > a$ et définir ψ dans (a, b) de manière que dans $(0, b)$ elle soit non bornée, non négative, semi-continue et que

$$\underline{\int_0^b} \psi(x)\, dx < +\infty,$$

et l'on peut changer b en a.

Le nombre des intervalles (u_h, v_h) tels que $u_h < v_h$ sera donc au moins un. Pour faire disparaître la distinction qui est causée par le fait que le nombre des intervalles (u_h, v_h) tels que $u_h < v_h$ peut être limité ou non, nous disons que le nombre des intervalles (u_h, v_h) tels que $u_h \leqq v_h$ est illimité.

(2) Le complémentaire d'un ensemble E compris dans $(0, a)$ est l'ensemble des points de $(0, a)$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble E.

en prenant K *assez grand, les quantités*

$$\sum_1^\infty h(v_h - u_h), \qquad \sum_1^\infty h \underline{\int}_{u_h}^{v_h} \psi(x)\,dx$$

sont aussi petites qu'on le veut.

Soit $\lambda > 0$ et donné à l'avance. On a d'après la définition de l'intégrale par défaut pour un n quelconque

$$K\sum_1^n h(v_h - u_h) \leqq \underline{\int}_0^a \psi(x)\,dx,$$

donc

$$K\sum_1^\infty h(v_h - u_h) \leqq \underline{\int}_0^a \psi(x)\,dx;$$

ainsi, en prenant

$$K > \frac{1}{\lambda}\underline{\int}_0^a \psi(x)\,dx,$$

nous aurons

$$\sum_1^\infty h(v_h - u_h) < \lambda.$$

Soit $\varepsilon > 0$. L'intégrale par défaut de ψ ayant une valeur finie, on peut choisir une suite X_{l_r} telle qu'on ait

$$\psi(x_i) < +\infty \qquad (i = 1, \ldots, l_r - 1, \quad r = 1, 2, \ldots).$$

Prenons un r assez grand pour que nous ayons

$$\underline{\int}_0^a \psi(x)\,dx - X_{l_r}g\varphi(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit L une valeur finie plus grande que $\psi(x_i)$, $(i = 1, \ldots, l_r - 1)$. Soit $K > L$ et prenons K assez grand pour que nous ayons

$$L\sum_1^\infty h(v_h - u_h) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Prenons n assez grand pour que nous ayons

$$\sum_1^n h(v_h - u_h) > \frac{1}{2}\sum_1^\infty h(v_h - u_h).$$

K étant plus grand que L, chacun des (u_h, v_h) est compris dans les (x_i, x_{i+1}).

Supposons par exemple que (x_4, x_5) contienne quelques-uns par exemple (u_3, v_3), (u_8, v_8) des n premiers (u_h, v_h). Supposons de plus que $v_3 < u_8$.

On aura

$$\begin{aligned}\underline{\int}_{u_3}^{v_3} + \underline{\int}_{u_8}^{v_8} &\leqq \left[\underline{\int}_{x_4}^{u_3} - g\psi(x_4, u_3)(u_3 - x_4)\right] \\ &\quad + \underline{\int}_{u_3}^{v_3} + \left[\underline{\int}_{v_3}^{u_8} - g\psi(v_3, u_8)(u_8 - v_3)\right] \\ &\quad + \underline{\int}_{u_8}^{v_3} + \left[\underline{\int}_{v_8}^{x_5} - g\psi(v_8, x_5)(x_5 - v_8)\right] \\ &\leqq \underline{\int}_{x_4}^{x_5} - g\psi(x_4 x_5)[(u_3 - x_4) + (u_8 - v_3) + (x_5 - v_8)],\end{aligned}$$

car les trois termes entre parenthèses du membre au milieu ne sont pas négatifs et $g\psi(x_4, x_5)$ n'est pas plus grand que chacun des $g\psi(x_4, u_3)$, $g\psi(v_3, u_8)$, $g\psi(v_8, x_5)$.

En considérant que $g\psi(x_4, x_5) \leqq L$, on obtient

$$\underline{\int}_{u_3}^{v_3} + \underline{\int}_{u_8}^{v_8} \leqq \underline{\int}_{x_4}^{x_5} - g\psi(x_4, x_5)(x_5 - x_4) + L[(v_3 - u_3) + (v_8 - u_8)].$$

En faisant la somme des inégalités analogues pour $i = 0, \ldots, l_r - 1$, on aura

$$\sum_1^n{}_h \underline{\int}_{u_h}^{v_h} \leqq \underline{\int}_0^a - X_{l_r} g\psi(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + L \sum_1^n{}_h (v_h - u_h) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et, par là,

$$\sum_1^\infty{}_h \underline{\int}_{u_h}^{v_h} \psi(x)\, dx < \varepsilon.$$

Corollaire. — Ayant

$$K(v_h - u_h) \leqq \underline{\int}_{u_h}^{v_h} \psi(x)\, dx,$$

on aura pour les K assez grands

$$\mathrm{K}\sum_{1}^{\infty}{}_{h}(v_h - u_h) < \varepsilon.$$

Théorème X. — Convenons de dire qu'un ensemble de points de $(0, a)$ est de première catégorie lorsqu'on peut enfermer ses points dans une infinité dénombrable d'intervalles, dont la somme de leurs longueurs est aussi petite qu'on le veut. Nous dirons que l'ensemble complémentaire d'un ensemble de première catégorie est un ensemble de seconde catégorie. Il est évidemment partout dense dans $(0, a)$.

L'ensemble formé par la réunion d'ensembles de première catégorie est de première catégorie, même dans le cas où l'ensemble de ces ensembles est dénombrable. La partie commune à des ensembles de seconde catégorie en nombre dénombrable est un ensemble de seconde catégorie.

Ayant

$$\underline{\int_{0}^{a}} \psi(x)\,dx < +\infty,$$

l'ensemble des x pour lesquels $\psi(x) = +\infty$ est de première catégorie.

Car ses points x sont évidemment situés à l'intérieur des intervalles (u_h, v_h) adjoints à ψ par un K quelconque et, en prenant K assez grand,

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{h}(v_h - u_h)$$

est aussi petite qu'on le veut.

Soit P *un ensemble de première catégorie. Soit $\lambda > 0$, donné à l'avance. On peut enfermer* P *dans certains intervalles (t_k, w_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ n'ayant pas, pris deux à deux, de point intérieur commun, de manière que*

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{k}\underline{\int_{t_k}^{w_k}} \psi(x)\,dx < \lambda.$$

Prenons un K assez grand pour que nous ayons

$$\sum_1^\infty {}_h \underline{\int_{u_h}^{v_h}} \psi(x)\,dx < \frac{\lambda}{2}.$$

Renfermons l'ensemble P dans des intervalles (t_k, w_k) tels que

$$\mathrm{K}\sum_1^\infty {}_h (w_k - t_k) < \frac{\lambda}{2},$$

et l'on peut évidemment supposer que ces intervalles n'ont pas, deux à deux, de point intérieur commun.

On aura pour un (t_k, w_k)

$$\underline{\int_{t_k}^{w_k}} \psi(x)\,dx < \mathrm{K}(w_k - t_k) + \sum_{(k)} \underline{\int_{u'_h}^{v'_h}} \psi(x)\,dx,$$

en désignant par $\sum_{(k)} \underline{\int_{u'_h}^{v'_h}} \psi(x)\,dx$ la somme des intégrales par défaut pour les intervalles qui sont la partie commune des (u_h, v_h) et du (t_k, w_k) considéré.

Donc

$$\sum_1^\infty {}_k \underline{\int_{t_k}^{w_k}} < \mathrm{K}\sum_1^\infty {}_k (w_k - t_k) + \sum_1^\infty {}_h \underline{\int_{u_h}^{v_h}} < \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda.$$

Théorème XI. — *Soient $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ des fonctions définies dans $(0, a)$ non négatives, et d'ailleurs quelconques. On a, en général,*

$$\underline{\int_0^a} [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx \geqq \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx + \underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx.$$

Lorsque ψ et φ sont semi-continues, on aura

$$\underline{\int_0^a} [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx = \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx + \underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx \quad (^1).$$

Il est évident que nous n'avons à faire la démonstration que

---

(1) On peut démontrer ce théorème à l'aide des intégrales de M. Lebesgue (*voir* théorème XIII, corollaire II).

dans le cas où les deux intégrales par défaut du second membre ont une valeur finie; dans l'autre cas, le théorème est évident.

Lemme [1]. — *Soit* P *un ensemble de points de* (o, a). *Supposons qu'il soit tel, qu'on puisse construire des intervalles situés dans* (o, a) *qui le renferment dans leurs intérieurs (excepté les points* o *et* a *qui, lorsqu'ils appartiennent à l'ensemble, ne peuvent être situés qu'à l'extrémité d'un tel intervalle) et qui n'ont pas, deux à deux, de point intérieur commun.*

De plus, nous supposons qu'on puisse rendre la longueur de chacun de ces intervalles aussi petite qu'on le veut et que la somme de leurs longueurs puisse être rendue plus petite que $d + \varepsilon$, d étant une constante telle que $o \leqq d \leqq a$, $\varepsilon > o$ d'ailleurs arbitraire.

Nous appellerons ces intervalles *intervalles* I.

L'ensemble complémentaire Q de P contient les extrémités des I (excepté éventuellement les points o et a).

Nous supposons que, par un certain procédé, on adjoigne à chaque point x de Q un intervalle (t, w) situé dans (o, a) qui le renferme dans son intérieur (excepté, comme ci-dessus, les points o et a). Soit $t \leqq t_1 < x < w_1 \leqq w$, nous considérons les intervalles (t_1, x), (t_1, w_1), (x, w_1) aussi comme adjoints à x. Nous appellerons ces intervalles *intervalles* II.

Soit $\lambda > o$ et donné à l'avance.

Il existe une division X_l *de* (o, a), *telle que ses intervalles sont intervalles* I *et* II, *la longueur de chacun d'eux est plus petite que* λ, *la somme des longueurs de ses intervalles qui sont de l'ensemble* I *est plus petite que* $d + \lambda$.

Démonstration. — Choisissons les intervalles I de manière que la longueur de chacun d'eux soit plus petite que λ et que la somme de leurs longueurs soit plus petite que $d + \lambda$. Il existe

(1) Ce lemme est une généralisation formelle d'un théorème de M. Borel généralisé par M. Lebesgue.

quelques intervalles (o, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., tels qu'ils peuvent former les intervalles de la division.

Car le point o appartient ou à P ou à Q. Il existe donc un intervalle (o, x_1) de I ou de II tel que $x_1 - o < \lambda$ et x_1 est un point de Q. Il existe donc un intervalle (x_1, x_2) de II tel que $x_2 - x_1 < \lambda$, et ainsi de suite.

Nous allons voir qu'en choisissant convenablement les (x_2, x_3), ..., (x_n, x_{n+1}), ..., et en en prenant quelques-uns de l'ensemble I, nous atteignons le point a à l'aide d'un nombre fini de points x_n, et le théorème sera démontré.

Supposons qu'il y ait une infinité de points x_n. On aura $\lim_{n=\infty} x_n = \xi \leqq a$. Supposons $\xi < a$. ξ appartient ou à P ou à Q. Il existe donc un intervalle $(\xi - \varepsilon, \xi + \eta)$ de I ou de II de longueur moindre que λ. Soit m le nombre pour lequel $x_m < \xi - \varepsilon \leqq x_{m+1}$. On prend

$$x_{m+1} = \xi - \varepsilon, \qquad x_{m+2} = \xi + \eta,$$

et ainsi $\lim_{n=\infty} x_n > \xi$. On démontre de la même manière qu'on peut éviter qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} x_n = a.$$

En considérant que, en général, on n'utilise pas tous les I, on voit que la somme des intervalles de la division qui sont pris de l'ensemble I est plus petite que $d + \lambda$.

Soit $\lambda > o$. Soit K assez grand pour que, en désignant par (u'_h, v'_h), (u''_k, v''_k) les intervalles adjoints à ψ respectivement à φ par K, on ait

$$K \sum_1^\infty {}^h (v'_h - u'_h) < \frac{\lambda}{4}, \qquad K \sum_1^\infty {}^k (v''_k - u''_k) < \frac{\lambda}{4},$$

$$\sum_1^\infty {}^h (v'_h - u'_h) + \sum_1^\infty {}^k (v''_k - u''_k) < \lambda.$$

Considérons l'ensemble formé par les points intérieurs des (u'_h, v'_h), (u''_k, v''_k). Cet ensemble est évidemment formé par les points intérieurs de certains intervalles (u_s, v_s) n'ayant pas, deux à deux, de point intérieur commun. On a donc

$$\sum_1^\infty {}^s (v_s - u_s) \leqq \sum_1^\infty {}^h (v'_h - u'_h) + \sum_1^\infty {}^k (v''_k - u''_k) < \lambda,$$

et

$$2\mathrm{K}\sum_{1}^{\infty}{}_{s}(v_s - u_s) < \lambda.$$

De plus u_s et v_s ne peuvent être compris dans aucun des (u'_h, v'_h), (u''_k, v''_k). On aura donc

$$\psi(u_s) + \varphi(u_s) \leqq 2\mathrm{K}, \qquad \psi(v_s) + \varphi(v_s) \leqq 2\mathrm{K}.$$

Soit P l'ensemble des x pour lesquels $\psi(x) + \varphi(x) = +\infty$, P est évidemment compris dans les (u_s, v_s).

Pour chaque point x de l'ensemble Q complémentaire de P, on a

$$\psi(x) + \varphi(x) < +\infty.$$

On peut donc trouver (théorème II) ε et η tels que

$$\varepsilon + \eta < \lambda, \qquad \psi(x) < g^{\psi}(x-\varepsilon, x+\eta) + \lambda,$$
$$\varphi(x) < g^{\varphi}(x-\varepsilon, x+\eta) + \lambda$$

et, par suite,

$$g^{\psi+\varphi}(x-\varepsilon, x+\eta)$$
$$\leqq \psi(x) + \varphi(x) < g^{\psi}(x-\varepsilon, x+\eta) + g^{\varphi}(x-\varepsilon, x+\eta) + 2\lambda.$$

D'après le lemme, on peut construire une division X_l, telle que les longueurs de ses intervalles soient plus petites que λ et que, pour ses intervalles, on ait en général

$$g^{\psi+\varphi}(x_i, x_{i+1}) \leqq g^{\psi}(x_i, x_{i+1}) + g^{\varphi}(x_i, x_{i+1}) + 2\lambda,$$

et pour les intervalles qui ne satisfont pas à cette inégalité

$$g^{\psi+\varphi}(x_i, x_{i+1}) \leqq 2\mathrm{K},$$

et la somme des valeurs de $2\mathrm{K}(x_{i+1} - x_i)$ pour ces derniers intervalles est plus petite que λ.

On aura donc

$$\mathrm{X}_l\, g^{\psi+\varphi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$
$$\leqq \mathrm{X}_l\, g^{\psi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + \mathrm{X}_l\, g^{\varphi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + 2\lambda a + \lambda.$$

Faisons tendre λ vers zéro, nous aurons

$$\underline{\int_0^a} [\psi(x) + \varphi(x)]\, dx \leqq \underline{\int_0^a} \psi(x)\, dx + \underline{\int_0^a} \varphi(x)\, dx,$$

En considérant donc l'inégalité du début, le théorème est démontré.

Remarque. — Le théorème est évidemment vrai pour un nombre limité de fonctions.

CHAPITRE I.

A. — Suites normales.

Théorème XII. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction définie dans $(0, a)$ telle que $\varphi(x) \geqq 0$, d'ailleurs quelconque. Soit, de plus, X_{l_r} une suite quelconque de divisions.*

Aucune valeur limite de la suite des valeurs

$$\frac{1}{2} X_{l_r}[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \quad (^1)$$

n'est plus petite que

$$\underline{\int}_0^a \varphi(x)\,dx.$$

On a

$$\varphi(x_i) \geqq g^{\varphi}(x_i, x_{i+1}), \qquad \varphi(x_{i+1}) \geqq g^{\varphi}(x_i, x_{i+1});$$

donc

$$\frac{1}{2}[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})] \geqq g^{\varphi}(x_i, x_{i+1}),$$

$$\frac{1}{2} X_{l_r}[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) \geqq X_{l_r} g^{\varphi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

et l'on a

$$X_{l_\infty} g^{\varphi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) = \underline{\int}_0^a \varphi(x)\,dx.$$

Remarque. — Considérons dans le plan xy la figure $x = x$, $y = \varphi(x)$.

$\frac{1}{2}[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i)$ est l'aire d'un trapèze qui est, dans un certain sens, inscrit dans la figure (fonction).

On a

$$\frac{1}{2} X_{l_r}[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2} X_{l_r} \varphi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})$$
$$(x_{-1} = 0, x_{l_r+1} = a).$$

---

(1) Lorsque $\varphi(0) = +\infty$, on pose $\varphi(0) = 0$; de même, lorsque $\varphi(a) = +\infty$, on pose $\varphi(a) = 0$.

THÉORÈME XIII. — *ψ étant comme toujours une fonction définie dans* $(0, a)$, *non négative, semi-continue; de plus, telle que*

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx < +\infty,$$

il existe une suite X_{l_r} *de divisions de première espèce de quotient* $\geqq \frac{1}{6}$ *telle que*

$$\frac{1}{2} X_{l_\infty}[\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) = \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx,$$

en remarquant que lorsque $\psi(0) = +\infty$, *on prend* $\psi(0) = 0$ *et de même pour* $\psi(a)$.

Démonstration. — *a.* Soit $g^\psi(0, a) = c$. Soit $K > c$ et $\theta > 0$. Divisons l'intervalle (c, K) par des points en nombre fini

$$c = c_0 < c_1 < \ldots < c_h < c_{h+1} < \ldots < c_k = K,$$

de manière que

$$c_1 - c_0, \quad \ldots, \quad c_h - c_{h-1}, \quad \ldots, \quad c_k - c_{k-1}$$

soient plus petits que θ.

Désignons par S_1 l'ensemble de ces x pour lesquels $\psi(x) \leqq c_1$. D'après III et VIII, cet ensemble existe et il est relativement parfait. Soit d_1 sa mesure extérieure au sens de M. Jordan.

On a (*voir* VIII)

$$0 \leqq d_1 < \alpha.$$

Enfermons S_1 dans des intervalles en nombre fini situés sur $(0, a)$ de manière que la somme de leurs longueurs soit $d_1 + \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$, $d_1 + \varepsilon_1 < a$) et que les extrémités de ces intervalles ne soient pas points de S_1 (exception pour 0 et a), et que pour ces extrémités on ait

$$\psi(x) < +\infty.$$

Soit d'_1 le nom collectif de ces intervalles. On peut, de plus, choisir les d'_1 de manière qu'à l'extérieur des d'_1 il existe au moins un intervalle dans lequel $\psi(x) > K$ [1]. Nous faisons un tel choix.

---

[1] *Voir* la note du théorème VIII.

Désignons par S_2 l'ensemble des points pour lesquels $\psi(x) \leqq c_2$ et lesquels ne sont pas situés dans l'intérieur des d'_1 et dont les points o et a ne font pas partie lorsqu'ils forment l'extrémité de l'un des d'_1. Pour les points de S_2, on a encore

$$\psi(x) > c_1.$$

S_2 n'existe pas nécessairement. Mais, lorsqu'il existe, il est relativement parfait, soit d_2 sa mesure. On a

$$d_1 + \varepsilon_1 + d_2 < a.$$

Enfermons S_2 dans des intervalles situés sur (o, a), en nombre fini, qui n'ont aucun point intérieur commun avec les d'_1, de manière qu'à l'extérieur de ces intervalles et à l'extérieur des d'_1 il existe au moins un intervalle, dans lequel $\psi(x) > K$. Soit $d_2 + \varepsilon_2$ la somme de leurs longueurs

$$(\varepsilon_2 > o,\ d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 < a).$$

Soit d'_2 le nom collectif de ces intervalles. Il faut, de plus, que les extrémités des d'_2, s'ils ne sont pas extrémités des d'_1 ou de (o, a), ne soient pas points de S_2, et que, pour ces extrémités, on ait

$$\psi(x) < +\infty.$$

Si S_2 n'existe pas, soient les d'_2 des intervalles tels qu'on obtient lorsque S_2 existe et $d_2 = o$, d'ailleurs quelconques.

Soit S_3 l'ensemble des x qui ne sont pas situés à l'intérieur des d'_1, d'_2 et aux extrémités communes des d'_1, d'_2 et dont o et a ne font pas partie quand ils appartiennent à des d'_1 ou à des d'_2, et qui satisfont à la condition $\psi(x) \leqq c_3$. On a encore pour les points de S_3

$$\psi(x) > c_2.$$

Si S_3 existe, il est aussi relativement parfait. Soit d_3 sa mesure.

Enfermons S_3 dans des intervalles de nom collectif d'_3 situés dans (o, a), n'ayant aucun point intérieur commun avec les d'_1, d'_2 et dont le nombre est fini. De plus, nous choisissons les d'_3 de manière qu'à l'extérieur des d'_1, d'_2, d'_3 il existe au moins un intervalle dans lequel $\psi(x) > K$; que les extrémités des d'_1, qui ne sont pas extrémités de (o, a) et des d'_1, d'_2, ne soient pas points de S_3; que de plus, pour ces extrémités on ait

$$\psi(x) < +\infty.$$

Soit $d_3 + \varepsilon_3$ la somme de leurs longueurs, on a

$$\varepsilon_3 > 0, \qquad d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 + d_3 + \varepsilon_3 < a.$$

Lorsque S_3 n'existe pas, les d'_3 seront des intervalles arbitraires, d'ailleurs tels qu'on obtient lorsque S_3 existe et $d_3 = 0$. Et ainsi de suite.

Nous obtenons un nombre entier positif $p \leqq k$ de manière que

$$(d_1 + \varepsilon_1) + \ldots + (d_h + \varepsilon_h) + \ldots + (d_p + \varepsilon_p) < a,$$

et à l'extérieur des $d'_1, \ldots, d'_n, \ldots, d'_p$, on a $\psi > K$. (On voit d'ailleurs qu'on peut prendre $p = k$.)

b. Soit X_n une division arbitraire, mais telle qu'on ait

$$\psi(x_i) < +\infty \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Soit X_L la division qui est formée par les extrémités des d'_h $(h = 1, 2, \ldots, p)$ et par les points de X_n.

Formons une division $X_{l'}$, qui contienne X_L et qui ait le quotient $\frac{1}{2}$ (¹).

On observe qu'un intervalle de $X_{l'}$ ne peut contenir plus d'un point de X_L, et ce point sera une extrémité de l'intervalle de $X_{l'}$.

Nous choisissons, dans chacun des intervalles (x'_{2j}, x'_{2j+1}) $(i = 1, \ldots, t,\ 2t + 1 \leqq l' - 1 < 2t + 3)$ de X_l, un point, de manière que lorsque x'_{2j} ou x'_{2j+1} appartient à X_L le point choisi soit le point de X_L, et que lorsque (x'_{2j}, x'_{2j+1}) ne contient aucun point de X_L le point choisi ξ de (x'_{2j}, x'_{2j+1}) soit tel que

$$\psi(\xi) = g\psi(x'_{2j}, x'_{2j+1}).$$

(¹) On peut former une suite de divisions $X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots$, de quotient $\frac{1}{2}$, telle que X_{l_1} contient X_L. Partageons l'intervalle $(0, a)$ en parties égales, de manière qu'entre deux points quelconques voisins de X_L il y ait au moins dix points. Les points de X_{l_1} seront les points de X_L et les extrémités des intervalles égaux, sauf ceux qui sont voisins des points de X_L. X_{l_2} se construit de la même manière à l'aide de X_{l_1}.

La division X_l formée par les points choisis (et par o et a) a évidemment le quotient $\frac{1}{6}$.

Choisissons une valeur finie M, qui est plus grande que les valeurs de ψ pour les points de X_L.

Soient, de plus, (u_s, v_s) $(s = 1, 2, \ldots)$ les intervalles adjoints à ψ par K.

Posons

$$\frac{1}{2} X_l [\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2} X_l \psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) = (l).$$

Je dis qu'on aura les inégalités suivantes :

$$(a) \qquad c_0 d_1 + \ldots + c_{h-1} d_h + \ldots + c_{p-1} d_p \leqq (l),$$

$$(b) \qquad \begin{aligned}(l) \leqq [& c_1(d_1 + \varepsilon_1) + \ldots + c_h(d_h + \varepsilon_h) + \ldots \\ & + c_p(d_p + \varepsilon_p) + 48\mathrm{K}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_h + \ldots + \varepsilon_p)] \\ & + 48 \sum_1^\infty {}_s \underline{\int_{u_s}^{v_s}} \psi(x)\, dx + (\mathrm{L} + 1)\mathrm{M} \frac{24}{l'},\end{aligned}$$

$$(c) \qquad c_0 d_1 + \ldots + c_{h-1} d_h + \ldots + c_{p-1} d_p \leqq \underline{\int_0^a} \psi(x)\, dx.$$

Admettons ces inégalités.

Soit $\lambda > 0$ et donné à l'avance. Je dis que la différence des valeurs entre lesquelles, d'après (a) et (b), (l) est compris peut être rendue plus petite que λ.

La différence positive en question est

$$\begin{aligned}[& c_1\varepsilon_1 + \ldots + c_h\varepsilon_h + \ldots + c_p\varepsilon_p + (c_1 - c_0)d_1 + \ldots \\ & + (c_h - c_{h-1})d_h + \ldots + (c_p - c_{p-1})d_p] \\ & + 48\,\mathrm{K}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_h + \ldots + \varepsilon_p) + 48 \sum_1^\infty {}_s \underline{\int_{u_s}^{v_s}} \psi(x)\, dx + (\mathrm{L} + 1)\mathrm{M} \frac{24}{l'}.\end{aligned}$$

En considérant que

$$c_h \leqq \mathrm{K}, \quad c_h - c_{h-1} < \theta \quad (h = 1, \ldots, p), \quad d_1 + \ldots + d_h + \ldots + d_p < a,$$

différence est plus petite que

$$a\theta + 48 \sum_1^\infty {}_s \underline{\int_{u_s}^{v_s}} \psi(x)\, dx + 49\mathrm{K}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_h + \ldots \varepsilon_p) + (\mathrm{L} + 1)\mathrm{M} \frac{24}{l'},$$

θ et K sont arbitraires.

On prend d'abord $\theta < \frac{\lambda}{4a}$.

D'après cela, on prend un $K > \theta$ et tel que

$$48 \sum_1^\infty s \int_{u_s}^{v_s} \psi(x)\, dx < \frac{\lambda}{4}.$$

On prend un $k > \frac{K}{\theta}$, et l'on prend $\varepsilon_h < \frac{\lambda}{4 \cdot 49 k K}$ et, d'après cela, on construit les $d'_1, \ldots, d'_p$.

Ainsi p, L, M seront déterminés.

On prend enfin l' assez grand pour qu'on ait

$$(L+1)M \frac{24}{l'} < \frac{\lambda}{4}.$$

Ainsi, la différence en question sera plus petite que λ. Donc à l'aide de (c) on conclut que

$$(l) \leqq \int_0^a \psi(x)\, dx + \lambda.$$

En prenant donc $X_{l_1} \equiv X_l$ au lieu de X_n, et en prenant $\frac{\lambda}{2}$ au lieu de λ, et en continuant le procédé, on aura pour la suite $X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots$, ainsi obtenue

$$\frac{1}{2} X_{l_r} [\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) \leqq \int_0^a \psi(x)\, dx + \frac{\lambda}{2^{r-1}}.$$

On aura donc, d'après XIII,

$$\frac{1}{2} X_{l_\infty} [\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) = \int_0^a \psi(x)\, dx,$$

et la suite X_{l_r} a le quotient $\frac{1}{6}$.

Définition. — *Nous dirons que la suite X_{l_r} ci-après est normale à ψ.*

c. Nous allons démontrer les inégalités (a), (b), (c). On démontre facilement (a) en tenant compte de la signification géométrique de $\frac{1}{2}\psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})$ et de $c_{h-1} d_h$ et en considérant que dans les d'_h on a

$$\psi(x_i) > c_{h-1}.$$

On démontre immédiatement (c), en considérant la définition de l'intégrale par défaut.

Démonstration de (b).

On peut considérer $\frac{1}{2}\psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})$ comme la contribution du point x_i de X_l à (l).

Nous partageons les x_i en trois groupes, I, II, III :

I. x_i n'appartient pas à X_l et $\psi(x_i) \leqq K$. Un tel x_i est évidemment situé à l'intérieur d'un d'_h.

II. x_i n'appartient pas à X_l et l'on a

$$\psi(x_i) > K.$$

III. x_i appartient à X_l.

Nous allons considérer les contributions des points de ces groupes à (l).

On peut diviser les x_i de I compris dans les d'_h ($h =$ const.) en deux classes, α, β :

$$\alpha.\quad \psi(x_i) \leqq c_h; \qquad \beta.\quad \psi(x_i) > c_h.$$

La contribution des α est $\leqq c_h(d_h + \varepsilon_h)$. On prouve facilement ce fait en supposant que β n'existe pas et en considérant la signification géométrique (XII) de $\frac{1}{2}\cdot\psi(x_i)$, $(x_{i+1} - x_{i-1})$.

Désignons par e_h le nombre des intervalles de $X_{l'}$, qui, étant compris dans les d'_h ($h =$ const.), ne contiennent aucun point x tel que $\psi(x) \leqq c_h$.

La somme des longueurs de ces intervalles est $< \varepsilon_h$. Car, pour les points de S_h on a

$$\psi(x) \leqq c_h,$$

la mesure de S_h est d_h, la somme des longueurs des d'_h est $d_h + \varepsilon_h$.

L'intervalle le plus petit de $X_{l'}$ a une longueur au moins égale à $\frac{a}{2l'}$ (¹). Donc

$$e_h < \varepsilon_h : \frac{a}{2l'} = \frac{2\varepsilon_h l'}{a}.$$

(¹) Soit u le quotient de $X_{l'}$, et désignons par x la longueur de son intervalle

Il peut arriver qu'en formant X_l, on doive choisir dans chacun de ces intervalles de $X_{l'}$ un point. L'intervalle le plus grand de X_l ayant une longueur au plus égale à $\frac{24a}{l'}$ (¹), la contribution des points β est

$$\leqq \frac{2\varepsilon_h l'}{a}\,\frac{1}{2}\,K\left(\frac{24a}{l'}+\frac{24a}{l'}\right)=48K\varepsilon_h.$$

Donc la contribution des points de I ($h=\text{const.}$) est

$$\leqq c_h(d_h+\varepsilon_h)+48K\varepsilon_h.$$

En faisant donc la somme de ces quantités pour $h=1,\dots,p$, on trouve que la contribution des points I est plus petite que le premier terme du second membre de (b).

Chaque point x_i de II est évidemment situé dans un intervalle (x'_{2j}, x'_{2j+1}) de $X_{l'}$, et l'on a pour ces points

$$\psi(x_i)=g(x'_{2j}, x'_{2j+1}).$$

Pour les x_i de II, on a $\psi(x_i)>K$. Donc (x'_{2j}, x'_{2j+1}) est compris à l'intérieur d'un (u_s, v_s). On a

$$g\psi(x'_{2j}, x'_{2j+1})(x'_{2j+1}-x'_{2j})\leqq \underline{\int_{x'_{2j}}^{x'_{2j+1}}}\psi(x)\,dx$$

et

$$x_{i+1}-x_{i-1}\leqq 96(x'_{2j+1}-x'_{2j})\quad (^2).$$

---

minimum, on a

$$x+(l'-1)x\frac{1}{u}\geqq a,\qquad x\geqq\frac{a}{1+\dfrac{l'-1}{u}}.$$

Pour $u=\frac{1}{2}$, on aura

$$x\geqq\frac{a}{2l'-1}>\frac{a}{2l'}.$$

(¹) Soit u le quotient de la division X_l, et désignons par x la longueur de son intervalle maximum, on a

$$x+(l-1)ux\leqq a,\qquad x\leqq\frac{a}{1+(l-1)u};$$

pour $u=\frac{1}{6}$,

$$x\leqq\frac{6a}{l+5}<\frac{6a}{l}.$$

On a de plus

$$\frac{l}{l'}\geqq\frac{1}{4}.$$

(²) On a

$$x_{i+1}-x_i\leqq\frac{24a}{l'},\qquad x_{i+1}-x_{i-1}\leqq\frac{48a}{l'},\qquad x'_{2j+1}-x_{2j}\geqq\frac{a}{2l'}.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\psi(x_i)(x_{i+1}-x_{i-1}) \leqq 48\, g\psi(x'_{2j}, x'_{2j+1})(x'_{2j+1}+x'_{2j}) \leqq 48 \underline{\int_{x'_{2j}}^{x'_{2j+1}}} \psi(x)\,dx.$$

La contribution de tous les points de II est ainsi plus petite que

$$48 \sum_{1}^{\infty}{}_s \underline{\int_{u_s}^{v_s}} \psi(x)\,dx,$$

et c'est le deuxième terme du second membre de (b).

Enfin la contribution d'un point de III est évidemment plus petite que

$$\frac{1}{2} \mathrm{M}\left(\frac{24a}{l'} + \frac{24a}{l'}\right) = \mathrm{M}\frac{24a}{l'}.$$

Le nombre des points de III étant $(\mathrm{L}+1)$, on obtient enfin le troisième terme du second membre de (b).

Corollaires.

I.

$$\lim[c_0 d_1 + \ldots + c_{h-1} d_h + \ldots + c_{p-1} d_p]$$
$$= \lim[c_1(d_1+\varepsilon_1) + \ldots + c_h(d_h+\varepsilon_h) + \ldots + c_p(d_p+\varepsilon_p)] = \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx,$$
$$[\mathrm{K}=\infty,\ \theta \Rightarrow 0,\ \mathrm{K}(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_h+\ldots+\varepsilon_p)=0].$$

II. Désignons par $(\mathrm{L})\int_0^a \psi(x)\,dx$ l'intégrale de $\psi(x)$, formée d'après la méthode de M. Lebesgue. On a

$$(\mathrm{L})\int_0^a \psi(x)\,dx = \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx \quad (^1).$$

---

(1) Soit $\varphi(x)$ non négative semi-continue et telle que $\underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx < +\infty$. On a, d'après un théorème de M. Lebesgue,

$$(\mathrm{L})\int_0^a \psi(x)\,dx + (\mathrm{L})\int_0^a \varphi(x)\,dx = (\mathrm{L})\int_0^a [\psi(x)+\varphi(x)]\,dx.$$

Donc

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx + \underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx = \underline{\int_0^a} [\psi(x)+\varphi(x)]\,dx.$$

Voir XI.

III. K étant invariable

$$\lim[c_0 d_1 + \ldots + c_{h-1} d_h + \ldots + c_{p-1} d_p]$$
$$= \lim[c_1(d_1 + \varepsilon_1) + \ldots + c_h(d_h + \varepsilon_h) + \ldots + c_p(d_p + \varepsilon_p)]$$
$$= \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx - \sum_1^\infty {}_s \underline{\int_{u_s}^{v_s}} \psi(x)\,dx \qquad (\theta = 0, \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_h + \ldots + \varepsilon_p = 0).$$

IV. Pour une suite X_{l_r} normale à ψ on aura

$$\lim_{r=\infty} [\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) = 0 \qquad (x_i = \text{const.}).$$

V.

$$\frac{1}{2} X_{l_\infty}^{(u,v)} \psi[(x_i) + \psi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) = \underline{\int_u^v} \psi(x)\,dx,$$

la suite X_{l_r} étant, bien entendu, normale à ψ.

Théorème XIV. — Soit ψ la fonction du théorème XIII. Désignons par (ξ, η) l'un quelconque des intervalles d'_h [*voir* (a) de XIII].

Soit $\lambda > 0$, un nombre arbitraire.

X_l étant une division, posons $(\lambda)_i = 1$, lorsque x_i est compris dans un (ξ, η) et $\psi(x_i) - g^\psi(\xi, \eta) \geqq \lambda$. Posons $(\lambda)_i = 0$ dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque x_i est ou situé à l'extérieur des (ξ, η), ou quoique compris dans un (ξ, η), lorsqu'on a

$$\psi(x_i) - g^\psi(\xi, \eta) < \lambda.$$

K *étant choisi arbitrairement au delà de* $g^\psi(0, a)$, λ *et* ω *étant des nombres positifs donnés à l'avance, on peut choisir* θ *et les* $d'_1, \ldots, d'_p$ *une fois pour toutes, de manière que pour une suite normale à* ψ, *d'ailleurs quelconque, on ait*

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{2} K X_{l_r} (\lambda)_i (x_{i+1} - x_{i-1}) < \omega,$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{2} X_{l_r} (\lambda)_i \psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) < \omega,$$

dès que r dépasse une certaine limite qui ($K, \theta, d'_1, \ldots, d'_p$ *étant fixés*) *ne dépend que de la suite.*

Démonstration. — a. Nous supposons que θ et $d'_1, \ldots, d'_p$ sont choisis. Choisissons dans chacun des (ξ, η) un (ξ_1, η_1), $(\xi < \xi_1 < \eta_1 < \eta)$.

Désignons par

$$x_l < x_{l+1} < \ldots < x_m,$$

les points de la division X_{l_r} tels que

$$x_l \leqq \xi_1 < x_{l+1} < \ldots < x_{m-1} < \eta_1 \leqq x_m.$$

Les (ξ, η) et les (ξ_1, η_1) étant choisis, il est évident qu'en prenant r assez grand on aura

$$x_{l-1} > \xi, \qquad x_{m+1} < \eta_1$$

(première condition pour r).

Posons $(1)_i = 1$ lorsque $i = l, \ldots, m$, et posons $(1)_i = 0$ dans le cas contraire. Bien entendu, nous avons autant de couples l, m que d'intervalles (ξ, η).

Posons $(2)_i = 1$ lorsque x_i est compris dans un (ξ, ξ_1) ou dans un (η_1, η) et posons $(2)_i = 0$ dans le cas contraire.

Posons, pour les x_i compris dans d'_h $(h = 1, \ldots, p)$, $\alpha_i = \psi(x_i) - c_{h-1}$.

On a, d'après (a) de XIII, $\alpha_i > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Je dis que par un choix convenable de θ, des $d'_1, \ldots, d'_p$, et des (ξ_1, η_1) on aura, en prenant r assez grand,

$$(1) \qquad \frac{1}{2} X_{l_r} (1)_i \, \alpha_i (x_{i+1} - x_{i-1}) < \varepsilon,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2} K X_{l_r} (2)_i (x_{i+1} - x_{i-1}) < \varepsilon,$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2} X_{l_r} (2)_i \, \psi(x_i) (x_{i+1} - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Admettons ces inégalités. Les points pour lesquels $(1)_i (\lambda)_i = 1$ sont évidemment compris parmi les points pour lesquels $(1)_i = 1$, donc d'après (1)

$$\frac{1}{2} X_{l_r} (1)_i (\lambda)_i \alpha_i (x_{i+1} - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

De même, de (2) et (3) on tire

$$\frac{1}{2} K X_{l_r} (2)_i (\lambda)_i (x_{i+1} - x_{i-1}) < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{2} X_{l_r} (2)_i (\lambda)_i \, \psi(x_i) (x_{i+1} - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Lorsque pour un x_i de (ξ, η), $\psi(x_i) - g^{\psi}(\xi, \eta) \geqq \lambda$, on a $\alpha_i > \lambda$, car $\alpha_i = \psi(x_i) - c_{h-1}$ et $g^{\psi}(\xi, \eta) > c_{h-1}$. Donc

$$\frac{\lambda}{2} X_{l_r}(1)_i(\lambda)_i(x_{i+1} - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Par suite

$$\frac{1}{2} K X_{l_r}(1)_i(\lambda)_i(x_{i+1} - x_{i-1}) < \frac{K\varepsilon}{\lambda}.$$

On a donc

$$\frac{1}{2} K X_{l_r}(\lambda)_i(x_{i+1} - x_{i-1}) \leqq \frac{1}{2} K X_{l_r}[(1)_i + (2)_i](\lambda)_i(x_{i+1} - x_{i-1}) < \frac{K\varepsilon}{\lambda} + \varepsilon.$$

En prenant donc $\varepsilon < \frac{\omega.\lambda}{K+\lambda}$, (A) est démontré.

On a

$$K \geqq c_h,$$

donc $\psi(x_i) < K + \alpha_i$ (pour les x_i compris dans les d'_h), on aura ainsi

$$\frac{1}{2} X_{l_r}(1)_i(\lambda)_i \psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})$$
$$< \frac{1}{2} K X_{l_r}(1)_i(\lambda_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) + \frac{1}{2} X_{l_r}(1)_i(\lambda)_i \alpha_i(x_{i+1} - x_{i-1}) < \frac{K\varepsilon}{\lambda} + \varepsilon.$$

On aura donc

$$\frac{1}{2} X_{l_r}(\lambda)_i \psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})$$
$$\leqq \frac{1}{2} X_{l_r}[(1)_i + (2)_i](\lambda)_i \psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) \leqq \frac{K\varepsilon}{\lambda} + \varepsilon + \varepsilon.$$

En prenant donc $\varepsilon < \frac{\omega\lambda}{K + 2\lambda}$, (B) est démontré.

b. Nous allons maintenant montrer comment on peut satisfaire à (1), (2), (3).

Désignons par I la somme des intégrales par défaut de ψ pour les d'_h $(h = 1, \ldots, p)$, c'est-à-dire pour les (ξ, η).

Nous choisissons les d'_h de manière qu'on ait

$$(a) \qquad \left| I - \left(\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx - \sum_1^{\infty}{}_s \underline{\int_{u_s}^{v_s}} \psi(x)\,dx \right) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (^1),$$

$$(b) \qquad 0 \leqq I - (c_0 d_1 + \ldots + c_{h-1} d_h + \ldots + c_{p-1} d_p) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

---

[1] (u_s, v_s) sont les intervalles adjoints à ψ par K.

Par ces deux conditions, le choix de θ et des $d'_1, \ldots, d'_p$ est réglé.

Nous choisissons les (ξ_1, η_1) de manière que :

1° La somme des longueurs des (ξ, ξ_1) et (η_1, η), qui se trouvent dans les d'_h ($h =$ const.), soit plus petite que ε_h (*voir* XIII *a*);

2° La somme de tous les $\frac{1}{2}K(\xi_1 - \xi + \eta - \eta_1)$ soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$;

3° La somme II des intégrales par défaut de ψ pour tous les (ξ, ξ_1), (η_1, η) soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$.

En prenant r assez grand (deuxième condition), on aura

$$\left|(\mathrm{I}-\mathrm{II}) - \frac{1}{2}\mathrm{X}_{l_r}(1)_i\,\psi(x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

(*Voir* corollaire V du théorème XIII.)

On aura donc de (b)

$$\begin{aligned}\Big|[(c_0 d_1 + \ldots + c_{h-1} d_h + \ldots + c_{p-1} d_p) - \mathrm{II}]&\\ - \frac{1}{2}\mathrm{X}_{l_r}(1)_i\,\psi(x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})\Big| &< \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

et comme $\mathrm{II} < \frac{\varepsilon}{2}$, on aura

$$(c)\qquad \begin{aligned}\Big|\frac{1}{2}\mathrm{X}_{l_r}(1)_i\,\psi(x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})&\\ -(c_0 d_1 + \ldots + c_{h-1} d_h + \ldots + c_{p-1} d_p)\Big| &< \varepsilon.\end{aligned}$$

On a encore

$$\begin{aligned}(d)\qquad &\frac{1}{2}\mathrm{X}_{l_r}(1)_i\,\psi(x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{X}_{l_r}(1)_i\,c_{h-1}(x_{i+1}-x_{i-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{X}_{l_r}(1)_i\,\alpha_i(x_{i+1}-x_{i-1})\\ &\geqq c_0 d_1 + \ldots + c_{h-1} d_h + \ldots + c_{p-1} d_p + \frac{1}{2}\mathrm{X}_{l_r}(1)_i\,\alpha_i(x_{i+1}-x_{i-1}),\end{aligned}$$

car les termes $\frac{1}{2}c_{h-1}(x_{i+1}-x_{i-1})$ de la somme

$$\mathrm{X}_{l_r}\frac{1}{2}\cdot(1)_i c_{h-1}(x_{i+1}-x_{i-1}),$$

pour lesquels $h = \text{const.}$, correspondent à un i tel que $l \leqq i \leqq m$. [On a autant de couples l, m que de d'_h ($h = \text{const.}$).]

La contribution de ces points à la somme est $> c_{h-1}\,(x_m - x_l)$ et la somme des $(x_m - x_l)$ ($h = \text{const.}$) est $> d_h$, car

$$x_m - x_l \geqq \eta_1 - \xi_1$$

et la somme des $\eta_1 - \xi_1$ ($h = \text{const.}$) est $> d_h$ (*voir* 1°).

De (c) et (d) on tire que

$$\frac{1}{2} \mathrm{X}_{l_r}(1)_i\, \alpha_i (x_{i+1} - x_{i-1}) < \varepsilon,$$

et par là (1) est démontré.

(2) et (3) sont valables au fond de 2° et 3°, tout en prenant r assez grand (*voir* corollaire V du théorème XIII) et c'est la dernière condition pour r.

Remarque. — Posons $(3)_i = 1$ lorsque x_i est compris dans un des d'_h, et $\psi(x_i)$ est compris dans $(\mathrm{K} - \lambda, \mathrm{K} + \lambda)$ et soit $(3)_i = 0$ dans le cas contraire.

Soit q le nombre entier pour lequel $c_{q-1} < \mathrm{K} - \lambda \leqq c_q$. Soit ε' un nombre positif arbitraire. En prenant r assez grand,

$$\frac{1}{2} \mathrm{X}_{l_r}(3)_i\, \psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) \leqq (\mathrm{K} + \lambda)\,[(d_q + \varepsilon_q) + \ldots + (d_p + \varepsilon_p)] + \varepsilon'.$$

Soit $\mu > 0$ et donné à l'avance. En prenant K assez grand,

$$(\mathrm{K} + \lambda)\,[(d_q + \varepsilon_q) + \ldots + (d_p + \varepsilon_p)] < \mu,$$

λ étant, bien entendu, invariable.

Théorème XV. — *Soit ψ la fonction de* XIII *et soit X_{l_r} une suite normale à ψ.*

Posons $(\mathrm{K})_i = 1$ lorsque $\psi(x_i) > \mathrm{K}$ et posons $(\mathrm{K})_i = 0$ lorsque $\psi(x_i) \leqq \mathrm{K}$. Soit $\varkappa > 0$ et donné à l'avance.

On peut choisir K *arbitrairement au delà d'une certaine limite qui ne dépend que de $\varkappa$, de manière que pour les r assez grands (la grandeur de r dépend de la suite)*

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{2} \mathrm{X}_{l_r}(\mathrm{K})_i\, \psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) < \varkappa.$$

Nous choisissons $\lambda > 0$ arbitrairement, posons $w = \frac{\varkappa}{4}$ et employons le théorème XIV en prenant pour K une valeur telle que

$$1^\circ \qquad \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx - \mathrm{I} < \frac{\varkappa}{8},$$

$$2^\circ \qquad (\mathrm{K}+\lambda)\,[(d_q+\varepsilon_q)+\ldots+(d_p+\varepsilon_p)] < \frac{\varkappa}{8}$$

(*voir* la démonstration et la remarque du théorème XIV).

Un x_i pour lequel $(\mathrm{K})_i = 1$ est situé : (α) ou à l'extérieur des d'_h; (β) ou à l'intérieur des d'_h; (γ) ou il est une extrémité de l'un des d'_h.

La contribution $\left[\frac{1}{2}\psi(x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})\right]$ des (α) à (A) est d'après 1° et d'après le corollaire V du théorème XIII, $< \frac{\varkappa}{4}$ en prenant r assez grand (première condition pour r). Les points (β) sont de deux espèces, ils satisfont ou ils ne satisfont pas à

$$\psi(x_i) - g^{\psi}(\xi,\eta) \geqq \lambda.$$

La contribution de la première espèce de ces points à (A) est d'après le théorème XIV, (B), plus petite que $w = \frac{\varkappa}{4}$, en prenant r assez grand (deuxième condition pour r). Les points de la deuxième espèce sont évidemment compris dans les $d'_q, \ldots, d'_p$. Leur contribution à (A) est d'après 2° et d'après le corollaire V du théorème XIII, plus petite que $\frac{\varkappa}{4}$, en prenant r assez grand (troisième condition). Enfin les points (γ) sont indépendants de r, donc en prenant r assez grand, leur contribution sera $< \frac{\varkappa}{4}$. Donc la somme en question sera $< \varkappa$.

Théorème XVI. — *Soit Q un ensemble de seconde catégorie de* $(0, a)$. *Soit* $\psi(x)$ *une fonction définie sur* Q, *non négative semi-continue et telle que*

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx < +\infty \quad (1).$$

---

(1) On a par définition $\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx = \mathrm{X}\, g^{\psi}(x_i, x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i)$.

Le théorème XIII *conserve sa valeur mais* X_{l_r} *aura le quotient* $\frac{1}{7}$, *c'est-à-dire qu'il existe une suite de divisions* X_{l_r} *à quotient fini* $\left(\geqq \frac{1}{7}\right)$ *telle que*

$$\frac{1}{2} X_{l_n}[\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) = \underline{\int_0^a} \psi(x)\, dx,$$

les points de chacune des divisions de la suite étant, bien entendu, points de Q (¹).

Nous dirons que la suite X_{l_r} *est normale à* ψ.

Démonstration. — Nous définissons une fonction $\psi_1(x)$ pour chaque point de $(0, a)$ de la manière suivante. Lorsque x appartient à Q, nous posons

$$\psi_1(x) = \psi(x);$$

dans le cas contraire, nous posons

$$\psi_1(x) = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g\Psi(x-\varepsilon, x+\eta).$$

$\psi_1(x)$ est donc $\geqq 0$, de plus elle est semi-continue. Soit x' un point de $(0, a)$. Pour un point x quelconque de $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$, on a

$$\psi_1(x) \geqq g\Psi(x'-\varepsilon, x'+\eta),$$

donc

$$(a) \qquad g\Psi_1(x'-\varepsilon, x'+\eta) = g\Psi(x'-\varepsilon, x'+\eta),$$

et ainsi

$$(b) \qquad \psi_1(x') = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g\Psi(x'-\varepsilon, x'+\eta) = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g\Psi_1(x'-\varepsilon, x'+\eta),$$

ce qui démontre la proposition.

On conclut de plus de (a) que

$$\underline{\int_0^a} \psi_1(x)\, dx = \underline{\int_0^a} \psi(x)\, dx.$$

De (b) on conclut que, pour $\delta > 0$ et donné à l'avance et pour x' quelconque n'appartenant pas à Q, il existe dans chaque

(¹) On adjoint les points o et a à Q et l'on pose $\psi(0) = \psi(a) = 0$.

$(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ des x tels de Q que

$$|\psi(x') - \psi(x)| < \delta.$$

Soit X_n une division telle que ses points étant points de Q, on ait pour eux

$$\psi_1(x) = \psi(x) < +\infty.$$

D'après le théorème XIII il existe une division X_l de quotient $\frac{1}{6}$, contenant X_n telle que

$$\left| \int_0^a \psi_1(x)\, dx - \frac{1}{2} X_l [\psi_1(x_i) + \psi_1(x_{i+1})] (x_{i+1} - x_i) \right|$$

est aussi petite qu'on le veut.

Construisons pour chaque point x_i de X_l un voisinage tel que deux de ces voisinages soient séparés, et tel qu'en choisissant un point x'_i quelconque de l'un de ces voisinages, la division de $(0, a)$ formée par les x'_i ait le quotient $\frac{1}{7}$. Il suffit pour cela de prendre les voisinages assez petits.

Lorsque x_i est un point de Q, nous prenons $x'_i = x_i$. Dans l'autre cas, x'_i sera un point de Q tel que $|\psi(x_i) - \psi(x'_i)|$, soit assez petit pour que

$$\left| \frac{1}{2} X_l [\psi(x'_i) + \psi(x'_{i+1})] (x'_{i+1} - x'_i) - \frac{1}{2} X_l [\psi_1(x_i) + \psi_1(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) \right|,$$

soit aussi petite qu'on le veut.

Par là, en désignant par X_l la division qui est formée par les points x'_i

$$\left| \int_0^a \psi(x)\, dx - \frac{1}{2} X_l [\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})] (x_{i+1} - x_i) \right|$$

sera aussi petit qu'on le veut.

En prenant donc X_l au lieu de X_n on obtient, comme dans le théorème XIII, par itération, la suite normale.

Remarque. — Tous les théorèmes que nous avons établis pour la fonction semi-continue qui est définie dans $(0, a)$ sont valables pour la fonction semi-continue définie sur Q, si le théorème n'est pas fondé sur le fait que l'intervalle $(0, a)$ est un ensemble parfait.

B. — Fonction d'approximation. — Divisions semblables.

Théorème XVII. — *Soit ψ la fonction du théorème* XV. *Nous supposons qu'il existe une suite $m_1(x), m_2(x), \ldots, m_s(x), \ldots$, de fonctions, définies sur* Q, *non négatives et telles que*

1° $m_s(x) \leqq m_{s+1}(x) \leqq \psi(x)$, $\lim\limits_{s=\infty} m_s(x) = \psi(x)$;

2° *Soit $\mu > 0$ donné arbitrairement à l'avance et soit x' un point de* Q. *Pour chaque x' il existe un $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ tel que, lorsque s dépasse une certaine limite, on ait pour chaque point x de $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$*

$$\psi(x') - m_s(x) < \mu.$$

Bien entendu ε, η et s dépendent de μ et de x'.

Nous dirons que la fonction $m_s(x)$ [qui est un terme de la suite $m_s(x)$, $s = 1, 2, \ldots$] est une fonction d'approximation de ψ.

Soient δ, λ, $\varkappa$ des nombres positifs donnés à l'avance. Soit X_{l_r} *une suite normale à ψ.*

En choisissant une constante K *au delà d'une certaine limite qui ne dépend que de $\varkappa$, dès que s dépasse une certaine limite qui dépend de δ, λ, x, et dès que r dépasse une certaine limite qui dépend de la suite* X_{l_r} :

a. Pour les x_i (de la $r^{\text{ième}}$ division de la suite X_{l_r}) qui satisfont à $\psi(x_i) > \mathrm{K}$, la somme des valeurs de

$$\frac{1}{2}\psi(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})$$

est plus petite que $\varkappa$.

b. Pour les x_i satisfaisant aux deux conditions

$$\psi(x_i) \leqq \mathrm{K}, \qquad \psi(x_i) - m_s(x_i) \geqq \delta, \tag{1}$$

la somme N *des valeurs de $\frac{1}{2}\mathrm{K}(x_{i+1} - x_{i-1})$ est plus petite que λ.*

c. Pour les x_i qui restent, on a évidemment

$$\psi(x_i) \leqq \mathrm{K}, \qquad \psi(x_i) - m_s(x_i) < \delta.$$

Démonstration. — *a* est évident d'après XV et XVI, et l'on voit que le choix du K ne dépend que de x. Nous choisissons un tel K. Nous n'avons donc à démontrer que *b*.

Le complémentaire P de Q est de première catégorie. On peut donc l'enfermer dans un ensemble dénombrable d'intervalles (t_k, w_k) tels que

$$\sum_1^k \int_{t_k}^{w_k} \psi(x)\,dx < \frac{\lambda}{4} \qquad (voir\ \mathrm{X}).$$

Lorsque x' est un point de Q et (α, β) un intervalle qui contient x', on a

$$g\psi(\alpha, \beta) - \psi(x') \leqq 0.$$

D'après la définition des $m_s(x)$, à chaque point x' de Q correspond un $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$ de manière que pour les points x de Q situés dans $(x' - \varepsilon, x' + \eta)$, dès que s dépasse une certaine limite qui dépend de x' et de δ, on ait

$$\psi(x') - m_s(x) < \frac{\delta}{2}.$$

On a donc

$$g\psi(\alpha, \beta) - m_s(x) < \frac{\delta}{2}.$$

La valeur de K est déjà fixée, nous posons dans le théorème XIV $\lambda = \frac{\delta}{2}$, $w = \frac{\lambda}{4}$ et prenons $\varepsilon < \frac{\lambda}{4}$. D'après cela, nous choisissons le θ et construisons les $d'_1, \ldots, d'_p$, de manière que le théorème XIV soit valable.

En appliquant le lemme du théorème XI, on voit que pour chaque (ξ_1, η_1) (théorème XIV) il existe une division telle, qu'en désignant l'un de ses intervalles par (ξ', η'), ou bien il existe un s, de manière que pour les points x de Q situés dans (ξ', η') on ait

$$g\psi(\xi, \eta) - m_s(x) < \frac{\delta}{2} \quad (^1)$$

(1) (ξ, η) est le d'_h du théorème XIV qui contient le (ξ_1, η_1) considéré.

(intervalles II), ou un tel s n'existe pas [intervalles I, ces intervalles sont compris dans les (t_k, w_k)].

Prenons un s plus grand que le plus grand pour tous les II. Un x_i pour lequel $\psi(x_i) \leqq K$ est situé dans un (ξ, η) (théorème XIV). Donc un x_i qui satisfait à (1) est situé : (α) dans (ξ, ξ_1), (η_1, η); (β) dans (ξ_1, η_1).

La contribution $\left(\frac{1}{2} K(x_{i+1} - x_{i-1})\right)$ des points de (α) à N est $< \frac{\lambda}{4}$ $\left(\varepsilon < \frac{\lambda}{4}, \text{ théorème XIV}\right)$.

Les points de (β) sont de deux espèces, ils se trouvent ou dans un II ou dans un I.

Lorsque le point est point d'un II, on a

$$g\psi(\xi, \eta) - m_s(x_i) < \frac{\delta}{2},$$

et ayant [*voir* (1)]

$$\psi(x_i) - m_s(x_i) \geqq \delta,$$

on aura

$$\psi(x_i) - g\psi(\xi, \eta) \geqq \frac{\delta}{2}.$$

Donc, d'après le théorème XIV, la contribution de tous ces points à N est $< \frac{\lambda}{4}$.

Pour les x_i de (β) qui sont situés dans les I, la contribution à N est, d'après le choix des (t_k, w_k) qui contiennent les I, $< \frac{\lambda}{2}$ (*voir* corollaire V, théorème XIII).

Donc

$$N < \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = \lambda.$$

THÉORÈME XVIII. — *Soient $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ des fonctions définies sur Q, non négatives, semi-continues et telles que*

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx < +\infty, \qquad \underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx < +\infty.$$

Soit X_{l_r} une suite normale à $(\psi + \varphi)$. X_{l_r} est aussi normale à ψ et à φ.

Nous omettons la démonstration qui est facile, et nous remarquons que le théorème s'applique aussi à la somme d'un nombre limité de fonctions.

Théorème XIX. — *Nous disons que les divisions* $X_l^{(x',x'')}$, $Y_m^{(y',y'')}$ (1) *sont semblables lorsqu'on a*

$$l = m, \qquad y_i = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x_i - x') + y' \qquad (i = 0, \ldots, l).$$

Deux suites de divisions seront dites *semblables*, lorsque leurs $r^{\text{ièmes}}$ divisions ($r = 1, 2, \ldots$) le sont.

Soient (x', x''), (y', y''), ... *des intervalles en nombre limité. Soient* $Q_1, Q_2, \ldots$, *des ensembles de points de seconde catégorie de ces intervalles. Soient* $\psi_1(x)$, $\psi_2(y)$, ... *des fonctions définies sur* $Q_1, Q_2, \ldots$, *non négatives, semi-continues et telles que*

$$\underline{\int_{x'}^{x''}} \psi_1(x)\,dx < +\infty, \qquad \underline{\int_{y'}^{y''}} \psi_2(y)\,dy < +\infty, \qquad \ldots.$$

Il existe des suites semblables $X_{l_r}^{(x',x'')}$, $Y_{l_r}^{(y',y'')}$, ..., *normales à* $\psi_1, \psi_2, \ldots$.

Nous ne considérons que deux intervalles (x', x'') et (y', y''). $\bar{y}$ étant un point de Q_2, posons :

$$\bar{x} = \frac{x''-x'}{y''-y'}(\bar{y} - y') + x',$$

et désignons par $\overline{Q_2}$ l'ensemble des points $x = \bar{x}$ de (x', x''). $\overline{Q_2}$ est évidemment de seconde catégorie.

Posons $\psi_2'(\bar{x}) = \psi_2(\bar{y})$; $\psi_2'(\bar{x})$ est évidemment définie sur $\overline{Q_2}$, elle est non négative semi-continue et

$$\underline{\int_{x'}^{x''}} \psi_2'(\bar{x})\,dx = \frac{x''-x'}{y''-y'} \underline{\int_{y'}^{y''}} \psi_2(y)\,dy < +\infty.$$

$\psi_1(x)$ et $\psi_2'(\bar{x})$ sont donc définies sur l'ensemble Q_2 qui est la

---

(1) On comprend facilement la signification de $Y_m^{(y',y)}$ qui est tout à fait analogue à celle de $X_l^{(x',x)}$.

partie commune de Q_1 et de $\overline{Q_2}$. Q'_2 est de deuxième catégorie (théorème X), ψ_1 et $\psi'_2(\overline{x})$ sont non négatives, semi-continues et leurs intégrales par défaut sont finies.

D'après le théorème XVII, il existe une suite $X_{l_r}^{(x',x'')}$ normale à ψ_1 et à ψ'_2.

On trouve facilement que la suite $Y_{l_r}^{(y',y'')}$, qui est semblable à la suite $X_{l_r}^{(x',x'')}$, sera normale à $\psi_2(y)$.

C. — La fonction semi-continue comme limite des fonctions.

Théorème XX. — *Soit* Q *un ensemble de points de seconde catégorie de* $(0, a)$. *Soient* $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ *des fonctions définies sur* Q, *uniformes, non négatives, intégrables et telles que* $\varphi_s(x) \leqq \varphi_{s+1}(x)$.

La fonction

$$\psi(x) = \lim_{s=\infty} \varphi_s(x)$$

est donc définie sur Q, *elle est uniforme, non négative.*

Supposons qu'elle soit semi-continue, ce qui arrive certainement lorsque chacune des fonctions φ_s *est continue sur* Q (*voir* théorème IV). *On a alors*

$$\lim_{s=\infty} \int_0^a \varphi_s(x)\,dx = \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx.$$

Démonstration. — *a.* Il est connu que $\varphi(x)$ étant une fonction définie pour Q, elle est intégrable lorsqu'elle est bornée et

$$X\, g\varphi(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) = X\, G\varphi(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i),$$

en désignant par $G\varphi(x_i, x_{i+1})$ la limite supérieure des valeurs de φ pour les points de Q compris dans (x_i, x_{i+1}).

Le symbole de ces valeurs égales est $\int_0^a \varphi(x)\,dx$. Il est, de plus, connu que les points de discontinuité de φ forment un ensemble de première catégorie.

Posons, lorsque x n'appartient pas à Q,

$$\varphi_s^{(1)}(x) = g\varphi_s(x), \qquad \psi_1(x) = g\psi(x),$$

et lorsque x appartient à Q,

$$\varphi_s^{(1)}(x) = \varphi_s(x), \qquad \psi_1(x) = \psi(x).$$

On démontre facilement que

$$\lim_{s=\infty} \varphi_s^{(1)}(x) = \psi_1(x),$$

de plus, que $\varphi_s^{(1)}$ est aussi intégrable, ψ_1 est semi-continue (*voir* XVI) et

$$\int_0^a \varphi_s^{(1)}(x)\,dx = \int_0^a \varphi_s(x)\,dx, \qquad \underline{\int_0^a} \psi_1(x)\,dx = \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx.$$

On peut donc supposer que Q coïncide avec $(0, a)$ ([1]).

b. On a $\varphi_s \leqq \varphi_{s+1}$, donc

$$\int_0^a \varphi_s(x)\,dx \leqq \underline{\int_0^a} \varphi_{s+1}(x)\,dx.$$

Ainsi, $\lim_{s=\infty} \int_0^a \varphi_s(x)\,dx$ est déterminée.

Prenons une suite X_{l_r}. On a évidemment

$$g^{\varphi_s}(x_i, x_{i+1}) \leqq g^{\psi}(x_i, x_{i+1}),$$

nous aurons donc

$$X_{l_r} g^{\varphi_s}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) \leqq X_{l_r} g^{\psi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i);$$

pour $r = \infty$, on aura

$$\int_0^a \varphi_s(x)\,dx \leqq \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx.$$

On a donc

$$\lim_{s=\infty} \int_0^a \varphi_s(x)\,dx \leqq \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx.$$

c. Soit $\delta > 0$ et prenons un X_l tel que nous ayons

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx - X_l\, g^{\psi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) < \frac{\delta}{2} \quad ([2]).$$

([1]) On démontre immédiatement le théorème à l'aide des intégrales de M. Lebesgue.

([2]) On prend :

$$+\infty - a = \frac{1}{a}, \qquad (+\infty \geqq a \geqq 0), \qquad \frac{1}{0} = +\infty, \qquad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Soient les δ_i arbitraires mais tels que $x_{i+1} - x_i > \delta_i > 0$ et que

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx - X_l\, g^{\psi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i - \delta_i) < \delta.$$

Soit x' un point de (x_i, x_{i+1}). On a $\lim\limits_{s=\infty} \varphi_s = \psi$, donc il existe un ν (qui dépend de x') de manière que

$$\psi(x') - \varphi_\nu(x') < \frac{\delta}{2}.$$

On a encore

$$\psi(x') \geqq g^{\psi}(x_i, x_{i+1});$$

ainsi

$$g^{\psi}(x_i, x_{i+1}) - \varphi_\nu(x') < \frac{\delta}{2}.$$

Soit P_s l'ensemble des points de discontinuité de φ_s, il est de première catégorie. L'ensemble P, qui est la réunion de $P_1, P_2, \ldots$, est aussi de première catégorie. Soit Q' le complémentaire de P.

Lorsque x' est un point de Q', φ_ν est continue en x'. Il existe donc un (ξ, η) compris dans (x_i, x_{i+1}) et contenant x', de manière que

$$\varphi_\nu(x') - g^{\varphi_\nu}(\xi, \eta) < \frac{\delta}{2}.$$

On a donc

$$g^{\psi}(x_i, x_{i+1}) - g^{\varphi_\nu}(\xi, \eta) < \delta,$$

et ainsi, pour $s = \nu$

$$g^{\varphi_s}(\xi, \eta)(\eta - \xi) + \delta(\eta - \xi) > g^{\psi}(x_i, x_{i+1})(\eta - \xi),$$

et cette inégalité est évidemment valable pour $s \geqq \nu$.

On peut donc (*voir* XI) former une division de (x_i, x_{i+1}) de manière que la somme des longueurs de ses intervalles qui ne satisfont pas à une pareille inégalité soit plus petite que δ_i.

Soit X_{l_1} la division de $(0, a)$ qui est formée par ces divisions des (x_i, x_{i+1}). Soit s plus grand que chacun des ν qui se présentent. On aura

$$X_{l_1}\, g^{\varphi_s}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + \delta a > X_l\, g^{\psi}(x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - x_i - \delta_i).$$

Ainsi pour s assez grand

$$\int_0^a \varphi_s(x)\,dx + \delta a + \delta > \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx,$$

ce qui, d'après b, démontre le théorème.