A. PELLET

Des équations dominantes

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 250-256

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__250_1>

DES ÉQUATIONS DOMINANTES;

Par M. A. Pellet.

1. Soit t une variable positive; a étant une fonction finie pour $t = 0$, nous appellerons, d'après une expression de M. Cotton [1], *fonction dominante* de a, une fonction A positive non décroissante lorsque t augmente et toujours supérieure ou égale au module de a; pour une fonction $\frac{a}{t^n}$, a étant finie pour $t = 0$

(1) *Sur l'intégration approchée des équations différentielles* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1908).

et $n > 0$, une fonction dominante sera $\frac{A}{t^{n_1}}$, A étant toujours une fonction positive non décroissante et l'inégalité

$$A \geqq |a| t^{n_1 - n}$$

étant satisfaite pour toute valeur de t. Nous appellerons *équation dominante* de l'équation

$$x_i - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

où f est une fonction holomorphe des quantités x, les coefficients étant des fonctions de t, toute équation

$$X_i - F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0,$$

dans laquelle les coefficients de F sont des fonctions dominantes des coefficients correspondants de la fonction f.

Soient les n équations :

$$(1) \qquad x_i - f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

formons les n équations dominantes respectives

$$X_i - F(X_1, \ldots, X_n) = 0.$$

Désignons par $\mathfrak{F}(X)$ le résultat de la substitution de X à X_1, X_2, ..., X_n dans $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; et considérons l'équation

$$(2) \qquad X - \mathfrak{F}(X) = 0.$$

Posons

$$\mathfrak{F}(X) = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \ldots + A_m X^m + \ldots,$$

et supposons que t variant de t_0 à t_1 $(t_1 > t > t_0)$, l'inégalité

$$2A_0 - \mathfrak{F}(2A_0) \geqq 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - 2A_1 - 4A_2A_0 - \ldots - 2^m A_m A_0^{m-1} - \ldots \geqq 0$$

soit satisfaite. Pour ces valeurs de t, les équations (1) admettront un système de solutions unique; les valeurs de x_i seront toutes dominées par X et $2A_0$ $(2A_0 > X > |x_i|)$ et pourront être obtenues par la série de Newton. Pour les autres systèmes de solutions des équations (1), on aura

$$x_i| > 2A_0.$$

Voir mon Mémoire *sur les équations majorantes* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1909).

2. Soit le système de n équations différentielles :

$$x'_i - f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

les fonctions inconnues $x_1, \ldots, x_n$ étant assujetties à s'annuler avec t; f_i désigne une fonction holomorphe de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les coefficients étant des fonctions de t continues ou de la forme $\frac{a}{t^c}$, a étant continue; x'_i dérivée de x_i. Formons comme tantôt les n équations dominantes respectives :

$$X'_i - F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

puis l'équation

$$X' - \mathfrak{F}(X) = 0, \tag{4}$$

en faisant

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X.$$

Posons

$$\mathfrak{F}(X) = A_0 + A_1 X + \ldots + A_m X^m + \ldots,$$

et supposons $A_0 = t^e B_0$, e étant supérieur à -1, et B_0 finie pour $t = 0$; alors

$$\frac{A_0 t}{e+1}$$

est une fonction dominante de toute intégrale $\int_0^t a\,dt$, où a est une fonction continue dominée par A_0. Enfin considérons l'équation

$$Y' - \mathfrak{F}\left(\frac{tY'}{e+1}\right) = 0; \tag{5}$$

et supposons que t variant de o à T, l'inégalité

$$2A_0 - \mathfrak{F}\left(\frac{2tA_0}{e+1}\right) \geqq 0,$$

ou

$$1 \geqq \frac{2A_1 t}{e+1} + \ldots + 2^m \frac{A_m A_0^{m-1}}{(e+1)^m} t^m + \ldots \tag{6}$$

soit satisfaite. Dans ces conditions, les équations (3) admettent un système de solutions, s'annulant pour $t = 0$, et qu'on peut obtenir par la méthode des approximations successives.

En effet, l'équation (5) admet une racine γ' positive plus petite que $2A_0$; on en déduit une fonction γ s'annulant pour $t = 0$, plus petite que $\frac{2A_0 t}{e+1}$.

L'équation (4) admet une solution X s'annulant avec t, qu'on peut obtenir par approximations successives, et l'on a $\gamma \geqq X$. Les fonctions x_i données par approximations successives par les équations (4) admettent X pour fonction dominante.

3. De là il résulte que si dans f_i le coefficient de $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ est le rapport d'une fonction continue de t par une puissance de t, d'exposant inférieur à $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, les équations (3) admettront un système de solutions s'annulant avec t, si par une substitution $x_i = v_i + y_i$, v_i étant une fonction continue de t s'annulant pour $t = 0$, on peut amener l'ordre infinitésimal de A_0, e, par rapport à t, à être aussi grand que l'on veut.

Ainsi soient les $(n-1)$ équations différentielles

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{7}$$

où tous les dénominateurs sont des fonctions holomorphes des variables x, s'annulant lorsque toutes ces variables s'annulent.

1° Si les termes du premier degré ne sont pas nuls dans toutes les fonctions f_i, égalons ces rapports à $\frac{dt}{t}$ et posons

$$f_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i,$$

$\varphi_i^{(1)}$ représentant l'ensemble des termes du premier degré de f_i; φ^i ne contenant par suite que des termes du second degré au moins; puis $x_i = u_i + y_i$ et déterminons les n quantités u_i par les équations différentielles linéaires à coefficients constants :

$$t u_i' = \varphi_i^{(1)}(u_1 \ldots u_n),$$

et la condition de s'annuler avec t. Si $\Delta(\lambda)$ représente le déterminant des équations du premier degré homogènes

$$\lambda u_i = \varphi_i^{(1)}(u_1, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ρ le nombre des racines de l'équation de degré n

$$\Delta(\lambda) = 0$$

ayant leur partie réelle positive, en tenant compte de leurs degrés de multiplicité, les quantités u_i contiennent ρ constantes arbitraires et des termes contenant en facteur des puissances de Lt tout en tendant vers o avec t, s'il y a des racines multiples. Les équations en y_i seront de la forme

$$t y'_i = \varphi_i^{(1)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + b_i^{(0)} + \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les coefficients de la fonction holomorphe ψ_i de $y_i, \ldots, y_n$, qui s'annule avec ces variables, étant maintenant fonctions de t, ceux des termes du premier degré par rapport aux y s'annulant avec t, ainsi que $b_i^{(0)}$. Nous poserons

$$y_i = u_i^{(1)} + z_i,$$

les $u_i^{(1)}$ étant déterminées par les équations

$$t u_i^{(1)\prime} = \varphi_i^{(1)}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) + b_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et la condition d'être infiniment petites avec t d'ordre le plus élevé possible; et opérerons sur les équations en z comme nous avons opéré sur les équations en y.

Nous obtenons ainsi pour les x_i des séries

$$x_i = u_i + u_i^{(1)} + \ldots + u_i^{(K)} + \ldots,$$

dans laquelle les termes sont infiniment petits avec t, l'ordre allant en augmentant avec l'indice K; ces séries sont donc convergentes.

2° Si $p > 1$ est le degré des termes de moindre degré n'étant pas nuls dans toutes les fonctions f_i, égalons les rapports (7) à $\dfrac{dt}{t^p}$, et posons

$$f_i = \varphi_i^{(p)} + \varphi_i,$$

$\varphi_i^{(p)}$ représentant l'ensemble des termes homogènes de degré p dans f_i, φ_i ne contenant par suite que des termes de degré $p+1$ au moins.

Puis posons

$$x_i = a_i t + y_i,$$

les n coefficients numériques a_i satisfaisant aux équations

$$a_i = \varphi_i^{(p)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

supposées compatibles. Les équations en y sont de la forme

$$t y'_i = \psi_i^{(1)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + b_i^{(0)} + \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les fonctions $\psi_i^{(1)}$ étant homogènes, du premier degré, à coefficients constants; ψ_i une fonction holomorphe des quantités y, s'annulant avec toutes ces quantités; mais de plus les termes du premier degré en y s'annulent avec t ainsi que $b_1^{(0)}$, qui est un infiniment petit avec t d'ordre supérieur à 1; enfin le coefficient de $y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n}$ contient en dénominateur une puissance de t au plus égale à

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1.$$

Posons

$$y_i = u_i + z_i,$$

les fonctions u_i satisfaisant aux équations

$$t u'_i = \psi_i^{(1)}(u_1, u_2, \ldots, u_n) + b_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et étant assujetties à être infiniment petites avec t d'un ordre supérieur à 1. Ainsi $\Delta(\lambda)$ étant le déterminant des équations du premier degré

$$\lambda u_i = \psi_i^{(1)}(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

ρ le nombre des racines de l'équation de degré n, $\Delta(\lambda) = 0$, dont la partie réelle est supérieure à 1, en tenant compte de leurs degrés de multiplicité, les quantités u_i contiendront ρ constantes arbitraires et des termes contenant des puissances de Lt en facteur, tout en tendant vers 0, s'il y a des racines multiples.

On aura pour les z_i des équations de la même forme que les équations en y_i

$$t z'_i = \psi_i^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) + c_i^0 + \chi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons

$$z_i = u_i^{(1)} + w_i,$$

en déterminant $u_i^{(1)}$ par les équations linéaires

$$tu_i^{(1)\prime} = \psi_i^{(1)}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) + c_i^{(0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et la condition d'être infiniment petites avec t, d'ordre le plus élevé possible; et opérons sur les équations en w_i comme nous avons opéré sur les équations en z_i. Nous obtenons ainsi pour les x_i des séries

$$x_i = a_i t + u_i + u_i^{(1)} + \ldots + u_i^{(K)} + \ldots,$$

où les termes $u_i^{(K)}$ infiniment petits avec t sont d'un ordre qui va en augmentant avec l'indice K; ces séries sont donc convergentes.