BULLETIN DE LA S. M. F.

M. KERAVAL

Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques appartiennent par leurs tangentes à un complexe linéaire

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 134-155
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__134_1>

SUR LES SURFACES DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES APPARTIENNENT PAR LEURS TANGENTES A UN COMPLEXE LINÉAIRE;

Par M. Keraval.

Une solution indirecte de la question est connue. Comme me l'a fait remarquer M. Darboux, en appliquant aux surfaces considérées la transformation de Lie, qui fait correspondre à une droite une sphère, on les transforme en surfaces dont les lignes de courbure sont sphériques. La solution complète de ce dernier problème est bien connue. Il me semble, néanmoins, qu'une étude directe de la question peut être intéressante; j'ai, du reste, trouvé des résultats que je crois nouveaux, par exemple celui-ci.

Toutes les solutions de l'équation

$$s^2 - rt = a^2,$$

qu'on rencontre dans la théorie mécanique de la chaleur, jouissent de la propriété indiquée. J'indiquerai deux méthodes.

PREMIÈRE PARTIE.

Soient X, Y, Z, L, M, N les six coordonnées de la droite et

$$AL + BM + CN + DX + EY + FZ = 0$$

l'équation d'un complexe linéaire. Les coefficients A, B, ... sont, par exemple, fonction d'un paramètre v. Sur une asymptotique de la famille considérée, v demeure constant. En un point $M(x, y, z)$ de la surface le plan polaire dans le complexe est tangent à la surface au point M, ce qui donne immédiatement les équations

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} -p &= \frac{Bz - Cy + D}{Ay - Bx + F} \\ -q &= \frac{Cx - Az + E}{Ay - Bx + F} \end{aligned}\right. \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

En éliminant v, on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Toute surface correspondante jouira de la propriété considérée pour l'une des familles d'asymptotiques, mais il peut arriver que le fait se produise pour les deux familles : c'est ce qui arrive dans le cas suivant que je vais étudier, qui donne la surface minima d'Enneper et, par homographie, les surfaces réglées du troisième ordre à directrices distinctes.

Considérons trois axes de coordonnées rectangulaires et supposons que les axes des complexes linéaires d'une famille soient situés dans le plan xoy et parallèles à ox. Le complexe sera de la forme

$$L + \lambda X + \mu Z = 0,$$

où λ et μ sont des fonctions de v, par exemple.

L'application de la méthode indiquée conduit à l'équation

$$\frac{z}{q} - y = \mathrm{G}\left(\frac{pz}{q}\right).$$

Or, si j'élimine la fonction arbitraire G, je trouve l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$s^2 - rt = \frac{p^2 q^2}{z^2}, \tag{A}$$

qui admet deux intégrales intermédiaires, dépendant chacune d'une fonction arbitraire,

$$\frac{z}{q} - y = \mathrm{G}\left(\frac{pz}{q}\right),$$
$$\frac{z}{p} - x = \mathrm{G}_1\left(\frac{qz}{p}\right).$$

De là résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Si les lignes asymptotiques d'une première famille d'une surface* S *appartiennent à des complexes linéaires, dont les axes soient parallèles entre eux et dans un même plan, il existe une propriété pareille pour les lignes asymptotiques de la deuxième famille. Les axes des nouveaux complexes sont dans le même plan que les premiers et leur sont perpendiculaires.*

En intégrant l'équation (A), on trouve bien facilement les équations

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= -u\mathrm{F}' + u\mathrm{H}' + 2\mathrm{F}, \\ y &= +v\mathrm{F}' - v\mathrm{H}' + 2\mathrm{H}, \\ z &= uv. \end{aligned}\right.$$

F est une fonction arbitraire de u et H une fonction arbitraire de v.

Ces surfaces (S) jouissent de propriétés intéressantes. Un certain nombre d'entre elles sont des surfaces minima, entre autres la surface d'Enneper

Détermination des surfaces |S| *qui sont minima.* — En écrivant que S est minima, je trouve

$$(F'+H')(uH''+vF'')-(u^2+v^2)F''H''+uv=0.$$

Dans cette équation, je traite v comme une constante. Je pose, par exemple, $v=a$, $H'=b$, $H''=c$ et je cherche la fonction $F'=\theta$ de la variable u. L'intégration est facile et donne

$$\theta=\frac{mc-2(a+bc)}{2c}+\sqrt{-\frac{mc}{2a}u^2+\frac{m^2}{4}-\frac{ma(1+c^2)}{2c}}.$$

Mais θ ne doit dépendre que de u et non de v. Or, a, b, c, m sont des fonctions de v, m étant arbitraire et introduit par l'intégration. Il faut donc qu'on ait

$$\frac{mc}{2a}=\alpha,$$
$$\frac{mc-2(a+bc)}{2c}=\beta,$$
$$\frac{m^2}{4}-\frac{ma(1+c^2)}{2c}=\gamma,$$

α, β, γ ne contenant ni u ni v. Si j'élimine m, il me reste deux relations

$$a\alpha-a-bc=c\beta,$$
$$a^2\alpha^2-a^2\alpha(1+c^2)=c^2\gamma.$$

En revenant aux anciennes notations, la première me donne

$$(\alpha-1)v=H'H''+\beta H''.$$

En intégrant

$$(\alpha-1)v^2=H'^2+2\beta H'+\rho,$$

ρ étant une constante d'intégration. Je prends, par exemple,

$$H'=-\beta+\sqrt{\beta^2-\rho+(\alpha-1)v^2};$$

d'où

$$H''=\frac{(\alpha-1)v}{\sqrt{(\alpha-1)v^2+\beta^2-\rho}};$$

d'où facilement

$$\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)v^2+\beta^2-\rho}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha v^2+\gamma};$$

d'où une première solution

$$\alpha=1,\qquad H''=0,\qquad H'=-\beta+\sqrt{\beta^2-\rho},$$

qui conduit à une valeur infinie pour m. Il est facile de voir que cette solution conduit à la surface minima d'Enneper. Si $\alpha \neq 1$, on trouve

$$\begin{gathered}
F' = \beta + \sqrt{-\alpha u^2 + \gamma}, \\
H' = -\beta + \sqrt{(\alpha - 1) v^2 + \beta^2 - \rho}, \\
\gamma(\alpha - 1) = \alpha(\beta^2 - \rho),
\end{gathered}$$

et, alors, deux cas à distinguer, selon que $\alpha = 0$ ou $\alpha \neq 0$. Si $\alpha = 0$, $\gamma = 0$,

$$\begin{gathered}
F' = \beta, \\
H' = -\beta + \sqrt{\beta^2 - v^2},
\end{gathered}$$

F et H sont de la forme

$$F = au, \qquad H = -av + \frac{b^2}{2} \arcsin \frac{v}{b} + \frac{v}{2} \sqrt{b^2 - u^2}.$$

On a donc la surface minima réglée, c'est-à-dire l'hélicoïde à plan directeur.

Enfin, si $\alpha \neq 0$, la surface n'est plus réglée, on trouve alors

$$\begin{aligned}
F &= \frac{k^2}{2h} \arcsin \frac{hu}{k} + \frac{u}{2} \sqrt{k^2 - h^2 u^2}, \\
H &= \frac{k'^2}{2h'} \operatorname{arg\,sh} \frac{h'v}{k'} + \frac{v}{2} \sqrt{k'^2 + h'^2 v^2}.
\end{aligned}$$

En changeant légèrement les notations, j'arrive aux formules définitives

$$(\Sigma) \qquad \left\{\begin{aligned}
x &= k \sin u \operatorname{ch} v + hu, \\
y &= h \cos u \operatorname{sh} v + kv, \\
z &= \sin u \operatorname{sh} v,
\end{aligned}\right.$$

où h et k sont des constantes liées par la relation

$$h^2 - k^2 = 1.$$

Les lignes asymptotiques correspondent aux valeurs constantes de u ou de v, et les lignes de courbure à

$$u \pm v = \text{const.}$$

J'ignore si cette surface minima a été étudiée, elle me paraît intéressante : en particulier la représentation sphérique des asymptotiques. Les cosinus directeurs de la normale au point u, v

sont donnés par les formules

$$x_1 = \frac{-\operatorname{sh} v}{k \cos u + h \operatorname{ch} v},$$
$$y_1 = \frac{-\sin u}{k \cos u + h \operatorname{ch} v},$$
$$z_1 = \frac{h \cos u + k \operatorname{ch} v}{k \cos u + h \operatorname{ch} v};$$

on a bien $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$. D'ailleurs

$$x_1 \operatorname{ch} v = \operatorname{sh} v (k z_1 - h).$$
$$y_1 \cos u = \sin u \; k - h z_1).$$

On a donc pour représentation sphérique deux familles de cercles orthogonaux. Il résulte de là que les lignes asymptotiques qui sont, par hypothèse, capables d'un complexe linéaire sont de plus des hélices. Les unes sont tracées sur un cylindre elliptique, les autres sur un cylindre hyperbolique.

La surface minima Σ possède une infinité de génératrices rectilignes parallèles à oy et s'appuyant sur ox. Il suffit, dans les équations (Σ), de faire $v = 0$, on trouve y et z nuls, donc ox est sur la surface. Pour $u = m\pi$, m étant entier, on a $z = 0$, $x = m.h\pi$, ce qui démontre la proposition.

SECONDE PARTIE.

La deuxième méthode qu'on peut employer consiste à partir des belles formules de M. Lelieuvre, qu'on trouvera au Tome IV de la *Théorie des surfaces* de M. Darboux. On fait usage de trois solutions θ_1, θ_2, θ_3, d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = k\theta.$$

Je suppose d'abord $k = 0$, j'appellerai les surfaces correspondantes des surfaces de première espèce.

En posant

$$\theta_1 = A_1 + B_1,$$
$$\theta_2 = A_2 + B_2,$$
$$\theta_3 = A_3 + B_3,$$

où les A dépendent de u et les B de v seulement, les formules de Lelieuvre donnent pour l'équation de la surface rapportée à ses lignes asymptotiques les formules

$$(S_1)\quad \begin{cases} x = A_3 B_2 - A_2 B_3 + \int A_2\, dA_3 - A_3\, dA_2 + \int B_2\, dB_3 - B_3\, dB_2, \\ y = A_1 B_3 - A_3 B_1 + \int A_3\, dA_1 - A_1\, dA_3 + \int B_3\, dB_1 - B_1\, dB_3, \\ z = A_2 B_1 - A_1 B_2 + \int A_1\, dA_2 - A_2\, dA_1 + \int B_1\, dB_2 - B_2\, dB_1, \end{cases}$$

et j'ai alors le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques v soient capables chacune d'un complexe linéaire, c'est que la courbe*

$$(A)\qquad x = A_1, \qquad y = A_2, \qquad z = A_3$$

soit plane.

Dans ce qui suit, je vais donc donner à v une valeur constante d'ailleurs quelconque, u seul variera et une lettre accentuée désignera une dérivée par rapport à u.

Soit donc

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z + pL + qM + rN = 0$$

l'équation du complexe linéaire qui correspond à l'asymptotique v. Les coefficients ξ, η, ζ, p, q, r sont donc des fonctions de la seule variable v. J'écris que le plan tangent au point xyz est le plan polaire de ce point dans le complexe

$$\frac{\xi + qz - ry}{A_1 + B_1} = \frac{\eta + rx - pz}{A_2 + B_2} = \frac{\zeta + py - qx}{A_3 + B_3} = -\lambda,$$

λ étant différent de zéro. Je chasse les dénominateurs et je dérive en u

$$\begin{aligned} -qz' + ry' &= \lambda'(A_1 + B_1) + \lambda A'_1, \\ -rx' + pz' &= \lambda'(A_2 + B_2) + \lambda A'_2, \\ -py' + qx' &= \lambda'(A_3 + B_3) + \lambda A'_3. \end{aligned}$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes. En les intégrant, elles donnent ξ, η, ζ. Or, les équations (S_1) me donnent

$$x' = A'_3(A_2 + B_2) - A'_2(A_3 + B_3), \qquad \ldots.$$

En portant dans les équations précédentes, on trouve trois équations qui se réduisent aux deux suivantes

$$(A_1+B_1)\lambda'+A'_1\lambda$$
$$=(A_2+B_2)qA'_1+(A_3+B_3)rA'_1-(A_1+B_1)(qA'_2+rA'_3),$$
$$(A_2+B_2)\lambda'+A'_2\lambda$$
$$=(A_3+B_3)rA'_2+(A_1+B_1)pA'_2-(A_2+B_2)(pA'_1+rA'_3).$$

Si j'élimine λ', je trouve une équation qui se décompose

$$(\lambda'+pA'_1+qA'_2+rA'_3)\,[(A_1+B_1)A'_2-(A_2+B_2)A'_1]=0.$$

Or, le crochet n'est pas nul, car on suppose que θ_1, θ_2, θ_3 sont des solutions distinctes; par suite, le quotient de deux d'entre elles n'est pas une constante.

Donc

$$(1)\qquad \lambda'+pA'_1+qA'_2+rA'_3=0.$$

En tenant compte de cette équation, les précédentes donnent

$$A'_1\,[p(A_1+B_1)+q(A_2+B_2)+r(A_3+B_3)-\lambda]=0.$$

Donc, ou bien $A'_1=0$ et la courbe (A) est bien plane, ou bien

$$(2)\qquad \lambda=p(A_1+B_1)+q(A_2+B_2)+r(A_3+B_3).$$

Si je compare (1) et (2), je trouve

$$\lambda'=0, \qquad \text{donc} \qquad \lambda=F(v),$$
$$(3)\qquad pA_1+qA_2+rA_3=G(v).$$

Le point $A_1\,A_2\,A_3$ décrit donc une courbe plane dont le plan est naturellement indépendant de v. On voit facilement que la condition est suffisante.

On a donc un moyen très simple d'avoir des surfaces jouissant de la propriété indiquée pour une ou deux familles d'asymptotiques. Dans ce dernier cas, si l'on suppose que le plan de la courbe (A) soit : $y=mx$ et celui de la courbe (B) : $y=-mx$, on trouve pour équations

$$(S_1)\qquad \begin{cases} x=-muH'-mvF'+m(2F-uF')+m(2H-vH'),\\ y=+vF' \quad -uH' \quad +(uF'-2F) \quad +(2H-vH'),\\ z=2mF'H', \end{cases}$$

en posant

$$A_1 = F', \qquad B_1 = H',$$
$$A_2 = mF', \qquad B_2 = -mH',$$
$$A_3 = u, \qquad B_3 = v,$$

F est une fonction quelconque de u, et H de v.

On voit que ce sont des transformations par homographie des surfaces (S). Ce sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$4m^2z^2(s^2 - rt) = (m^2p^2 - q^2)^2.$$

Il reste à examiner le cas où les plans des courbes (A), (B) sont parallèles. En posant

$$A_1 = u, \qquad B_1 = H'.$$
$$A_2 = F', \qquad B_2 = v,$$
$$A_3 = a, \qquad B_3 = b \qquad \text{et} \qquad a + b = m,$$

on a, pour les surfaces cherchées, les équations

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{cases} x = m(v - F'), \\ y = m(u - H'), \\ z = F'H' + uF' + vH' - 2(F + H) - uv. \end{cases}$$

Les complexes linéaires sont

$$N = m^2Z + 2mH'X + 2mvY,$$
$$N = -2muX - 2mF'Y - m^2Z.$$

Les axes de ces complexes ont pour équations

$$x = 2mv, \qquad x = -2mF',$$
$$y = -2mH', \qquad y = 2mu;$$

ils décrivent deux cylindres quelconques parallèles à oz; enfin, les paramètres des complexes sont les mêmes pour chaque famille d'asymptotiques et ont pour valeur

$$-m^2 \quad \text{et} \quad +m^2.$$

Enfin, les surfaces Σ_1 sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$s^2 - rt = \frac{1}{m^4}.$$

En partant de l'équation

$$s^2 - rt = \frac{1}{a^2},$$

et en adoptant la forme donnée par M. Darboux, on a, pour les surfaces intégrales,

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \mathrm{H}' - \mathrm{F}', \\ \dfrac{y}{a} = u \quad - v, \\ \dfrac{z}{a} = (u+v)(\mathrm{H}' - \mathrm{F}') + 2(\mathrm{F} - \mathrm{H}). \end{cases}$$

Les complexes sont

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \quad 2a\mathrm{H}'\mathrm{Y} + 2a\dot{v}\mathrm{X} \quad - a\mathrm{Z}, \\ \mathrm{N} &= - \; 2au\mathrm{X} \quad - 2a\mathrm{F}'\mathrm{Y} + a\mathrm{Z}. \end{aligned}$$

Les axes des complexes

$$\begin{aligned} x &= \quad 2a\mathrm{H}', & x &= -2a\mathrm{F}', \\ y &= -2av, & y &= +2au, \end{aligned}$$

et les paramètres des complexes : $+a$ et $-a$.

Représentation sphérique des lignes asymptotiques. — Je reprends les surfaces (S_1), sans faire aucune hypothèse sur les courbes (A) et (B). On sait qu'on peut faire correspondre à S_1 une autre surface S_2, avec orthogonalité des éléments linéaires (Darboux, t. IV) en prenant une solution de

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = k\theta,$$

ici $\dfrac{d^2 \theta}{du\, dv} = 0$. Si je prends $\omega = 1$, je trouve

$$(\mathrm{S}_2) \qquad \begin{cases} x_1 = \mathrm{B}_1 - \mathrm{A}_1. \\ x_2 = \mathrm{B}_2 - \mathrm{A}_2, \\ x_3 = \mathrm{B}_3 - \mathrm{A}_3. \end{cases}$$

Si je prends pour courbes (A), (B)

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} x = -2\mathrm{A}_1, \\ y = -2\mathrm{A}_2, \\ z = -2\mathrm{A}_3, \end{cases} \qquad\qquad (\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} x = +2\mathrm{B}_1, \\ y = +2\mathrm{B}_2, \\ z = +2\mathrm{B}_3. \end{cases}$$

Si F est le premier point et F′ le second : 1° le milieu M_1 de FF′ décrit la surface S_2 qui correspond à S_1 avec orthogonalité des éléments linéaires; 2° FF′ est parallèle à la normale en M (qui correspond à M_1) à la surface S_1 et, par conséquent, la congruence G de M. Darboux (t. IV, p. 61), qu'on obtient en menant par un point de S_2 une parallèle à la normale au point correspondant de S_1, a pour surface focale les deux courbes (A) et (B).

On en déduit de suite la représentation sphérique des asymptotiques. Par exemple, pour la surface minima (Σ), les courbes (A), (B) sont une ellipse et une hyperbole focales; les cônes, ayant un sommet sur l'une et s'appuyant sur l'autre, sont de révolution, etc.

Solution la plus générale du problème avec les formules de M. Lelieuvre. — On se donne une équation de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = k\theta,$$

où k est une fonction connue de u et v. Soient alors $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ trois solutions de cette équation non liées par une relation homogène à coefficients constants.

Les formules de M. Lelieuvre sont alors

$$(\mathrm{T})\qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int \left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial u} - \theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right)du + \left(\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial v} - \theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial v}\right)dv, \\ y = \displaystyle\int \left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial u} - \theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial u}\right)du + \left(\theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial v} - \theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)dv, \\ z = \displaystyle\int \left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial u} - \theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)du + \left(\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial v} - \theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\right)dv. \end{cases}$$

Les lignes asymptotiques sont les courbes obtenues en faisant u ou v constant. J'ai alors obtenu le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques* $v =$ const. *soient chacune capables d'un complexe linéaire, c'est que* θ_1, θ_2, θ_3 *soient liées par une relation de la forme*

$$B_1\theta_1 + B_2\theta_2 + B_3\theta_3 \equiv 1,$$

où B_1, B_2, B_3 ne dépendent que de v. Les quantités B_1, B_2, B_3 sont proportionnelles aux cosinus directeurs de l'axe du complexe.

Soit

$$\zeta X + \eta Y + \zeta Z + pL + qM + rN = 0$$

l'équation du complexe qui correspond à une certaine valeur de v. En écrivant que le plan polaire du point xyz dans le complexe est tangent en ce point à la surface, on a

$$\begin{aligned} \xi + qz - ry &= \lambda\theta_1, \\ \eta + rx - pz &= \lambda\theta_2, \\ \zeta + py - qx &= \lambda\theta_3, \end{aligned}$$

avec $\lambda \neq 0$ et réciproquement, il suffit qu'on puisse trouver $\lambda \neq 0$; $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ non nulles ensemble et vérifiant les équations précédentes. Si je dérive en u ces équations deviennent

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} qz' - ry' &= \lambda\theta'_1 + \lambda'\theta_1, \\ rx' - pz' &= \lambda\theta'_2 + \lambda'\theta_2, \\ py' - qx' &= \lambda\theta'_3 + \lambda'\theta_3, \end{aligned} \right.$$

qui peuvent remplacer les précédentes. En les intégrant, on aura ξ, η, ζ, ou mieux

$$\lambda\theta_1 - qz + ry$$

sera une fonction de v qui donnera ξ, de même pour η et ζ. D'autre part, on a

$$x' = \theta_2\theta'_3 - \theta_3\theta'_2, \qquad y = \ldots, \qquad z = \ldots,$$

les équations (1) deviennent

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda\theta'_1 + \lambda'\theta_1 &= \theta_1(q\theta'_2 + r\theta'_3) - \theta'_1(q\theta_2 + r\theta_3), \\ \lambda\theta'_2 + \lambda'\theta_2 &= \theta_2(r\theta'_3 + p\theta'_1) - \theta'_2(r\theta_3 + p\theta_1), \\ \lambda\theta'_3 + \lambda'\theta_3 &= \theta_3(p\theta'_1 + q\theta'_2) - \theta'_3(p\theta_1 + q\theta_2). \end{aligned} \right.$$

Nous allons voir qu'elles se réduisent à 2.

Entre les deux premières, j'élimine λ

$$(\theta_1\theta'_2 - \theta_2\theta'_1).[p\theta'_1 + q\theta'_2 + r\theta'_3 - \lambda'] = 0.$$

Si le premier facteur était nul, on aurait

$$\theta_1 = B\theta_2,$$

B ne dépendant que de v. Alors, l'équation qui donne $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ serait de la forme $\frac{d^2\theta}{du\,dv} = 0$; nous avons étudié le cas à part. Il faut donc qu'on ait

$$\lambda' = p\theta'_1 + q\theta'_2 + r\theta'_3. \tag{3}$$

En vertu de cette équation, le système (2) donne

$$-\lambda = p\theta_1 + q\theta_2 + r\theta_3;$$

d'où $\lambda' = 0$, d'où $\lambda = \mathrm{H}(v)$. Ainsi λ doit être différent de zéro et ne dépendre que de v. On a alors

$$p\theta_1 + q\theta_2 + r\theta_3 + \lambda = 0,$$

ou, en divisant par $-\lambda$,

$$\mathrm{B}_1\theta_1 + \mathrm{B}_2\theta_2 + \mathrm{B}_3\theta_3 \equiv 1,$$

$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3$ sont proportionnels à p, q, r, c'est-à-dire aux cosinus directeurs de l'axe du complexe.

Il résulte de là que, dans l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = k\theta, \tag{θ}$$

k n'est pas quelconque. L'équation (θ) doit être choisie parmi celles que la méthode de Laplace permet d'intégrer après deux opérations au plus et dont la solution générale contient deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v et leurs dérivés des deux premiers ordres.

Théorème. — *Étant donnée une équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0, \tag{E}$$

si m solutions $z_1, z_2, \ldots, z_m$ DISTINCTES *sont liées par une relation de la forme*

$$\mathrm{A}_1 z_1 + \mathrm{A}_2 z_2 + \ldots + \mathrm{A}_m z_m = 0,$$

où les A *ne dépendent que de x et, naturellement, ne sont pas tous nuls, l'équation* (E) *s'intègre par la méthode de Laplace, au bout de $m - 2$ opérations au plus.*

En effet, la relation peut s'écrire

$$z_m = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_{m-1} z_{m-1}.$$

En écrivant que z_m vérifie (E), on trouve

$$\Sigma\lambda_1\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial z_1}{\partial x}+b\frac{\partial z_1}{\partial y}+cz_1\right)+\Sigma\lambda'_1\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}+az_1\right)=0,$$

qui se réduit au second terme. Si donc on pose

$$\theta_1=\frac{\partial z_1}{\partial y}+az_1,\qquad \theta_2=\ldots,\qquad \ldots,$$

l'équation nouvelle (E_1) aura pour $m-1$ solutions : $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}$ liées par une relation de la forme

$$\lambda'_1\theta_1+\lambda'_2\theta_2+\ldots+\lambda'_{m-1}\theta_{m-1}=0.$$

Les λ' ne sont pas nuls, sans quoi les λ seraient constants et $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ne seraient pas m solutions distinctes.

En continuant, on arrive à une équation E_{m-2}, où deux solutions seront liées comme les précédentes.

Je dis que cette équation aura un invariant nul. Supposons que, dans l'équation

$$\text{(E)}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0,$$

deux solutions z_1, z_2 soient liées par

$$z_2=\lambda z_1,$$

où λ ne dépend que de x.

Ecrivons que z_2 vérifie (E), nous trouvons

$$\lambda'=\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}+az_1\right)=0,$$

Si donc λ' n'est pas une constante

$$\frac{\partial z_1}{\partial y}+az_1=0;$$

d'où

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial z_1}{\partial x}+z_1\frac{\partial a}{\partial x}=0;$$

d'où

$$z_1\frac{\partial a}{\partial x}-cz_1-b\frac{\partial z_1}{\partial y}=0,$$

ou bien

$$z_1\left(\frac{\partial a}{\partial x} - c + ab\right) = 0,$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = c - ab, \qquad \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0,$$

l'invariant h est donc nul.

La démonstration suppose, par exemple, que les rapports de $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{m-1}$ à l'une d'elles ne sont pas des constantes; s'il en était ainsi, l'équation en z aurait deux solutions, dont le quotient serait une fonction de x et l'invariant h serait nul.

On peut dire que, au bout de $m - 2$ opérations *au plus*, la méthode de Laplace conduit à l'intégration.

Application aux surfaces considérées. — Si trois solutions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de

$$(\theta) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = k\theta$$

sont liées par

$$B_1\theta_1 + B_2\theta_2 + B_3\theta_3 \equiv 1,$$

où les B ne dépendent que de v en appliquant la méthode de Laplace, c'est-à-dire en posant

$$z = \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

l'équation en z aura trois solutions z_1, z_2, z_3, liées par

$$B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 z_3 \equiv 0;$$

une nouvelle transformation de Laplace donnera une équation dont un invariant sera nul.

Donc, la solution générale de l'équation (θ) sera de rang 3 au plus. Dès lors, on n'aura, pour trouver l'équation des surfaces considérées, qu'à appliquer les formules données par M. Darboux au Tome IV de la *Théorie des surfaces*. Je ne crois pas utile de développer les calculs.

Nous avons vu que les solutions de l'une ou l'autre des équations

$$s^2 - rt = \frac{p^2 q^2}{z^2},$$

$$s^2 - rt = \frac{1}{a^2},$$

donnaient des surfaces dont les deux systèmes de lignes asymptotiques étaient capables d'un complexe linéaire. Les transformées de ces surfaces par homographie ou corrélation jouissent de la même propriété. La première donne ainsi les surfaces réglées du troisième ordre à directrices distinctes, tandis que la deuxième donne celles de Cayley. Par exemple, la surface

$$x = u + v,$$
$$y = u^2 + v^2,$$
$$z = u^3 + v^3$$

correspond à $s^2 - rt = \frac{9}{4}$.

Classification des surfaces θ. — Appelons surfaces θ les surfaces pour lesquelles l'une au moins des deux familles d'asymptotiques est capable d'un complexe linéaire. Elles correspondent à une équation (θ)

$$(\theta) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = k\theta,$$

où la solution est de rang 1, 2 ou 3.

Je suis arrivé au théorème suivant :

THÉORÈME. — 1° *La solution est de rang* 1, *lorsque les axes des complexes sont parallèles entre eux, la surface des axes est cylindrique ou plane et réciproquement.*

2° *La solution est de rang* 2, *lorsque la surface des axes est une surface réglée à plan directeur et réciproquement et, par suite :*

3° *La solution est de rang* 3, *lorsque les axes des complexes sont parallèles aux génératrices d'un cône.*

Démonstration. — Première partie. — Si les axes des complexes sont parallèles à une direction fixe, l'équation (θ) est de rang 1, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Nous supposons qu'il s'agisse des complexes des courbes

$v =$ const. On a alors une relation de la forme

$$B_1\theta_1 + B_2\theta_2 + B_3\theta_3 \equiv 1,$$

où B_1, B_2, B_3 ne dépendent que de v. La direction B_1, B_2, B_3 étant celle de l'axe des complexes, ces quantités doivent être proportionnelles à des constantes α, β, γ

$$\frac{B_1}{\alpha} = \frac{B_2}{\beta} = \frac{B_3}{\gamma} = \frac{1}{\lambda};$$

d'où

$$\alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3 \equiv \lambda.$$

Donc λ est une solution de l'équation (θ)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = k\theta,$$

et, comme λ ne dépend que de v, il faut $k = 0$.

Réciproquement, une équation de premier rang nous donne

$$\theta_1 = A_1 + B_1,$$
$$\theta_2 = A_2 + B_2,$$
$$\theta_3 = A_3 + B_3,$$

et nous avons vu que la courbe (A)

$$x = A_1, \qquad y = A_2, \qquad z = A_3$$

devait être plane,

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 \equiv \delta,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant constants. On a alors

$$\alpha\theta_1 + \beta\theta_2 + \gamma\theta_3 \equiv F(v),$$

α, β, γ donnent la direction de l'axe qui est, par suite, perpendiculaire au plan de la courbe (A).

Deuxième partie. — Supposons que les axes des complexes correspondant aux courbes $v =$ const. soient parallèles au plan fixe

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Si alors

$$B_1\theta_1 + B_2\theta_2 + B_3\theta_3 \equiv 1,$$

on doit avoir

$$\alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 \equiv 0,$$

ou encore, par exemple,

$$B_3 = aB_1 + bB_2,$$

a, b étant des constantes; par suite,

$$B_1(\theta_1 + a\theta_3) + B_2(\theta_2 + b\theta_3) \equiv 1,$$

de la forme

$$B_1\theta_4 + B_2\theta_5 \equiv 1,$$

et alors, d'après un théorème démontré plus haut, l'équation (θ) est de rang 2 au plus.

Réciproquement. — Prenons une équation de rang 2 et montrons que les axes des complexes linéaires sont parallèles à un plan fixe. Pour plus de commodité, je remplace les variables u, v par x, y; on peut prendre θ_1, θ_2, θ_3 sous la forme (Darboux, *Théorie des surfaces*)

$$\theta_1 = \frac{2}{x-y}(X_1 - Y_1) - X_1' - Y_1',$$

$$\theta_2 = \frac{2}{x-y}(X_2 - Y_2) - X_2' - Y_2',$$

$$\theta_5 = \frac{2}{x-y}(X_3 - Y_3) - X_3' - Y_3',$$

les X ne dépendant que de x et les Y de y. Mais il faut que θ_1, θ_2, θ_3 soient liés par une relation de la forme

$$B_1\theta_1 + B_2\theta_2 + B_3\theta_3 \equiv 1,$$

où les B ne dépendent que de y. Si, dans cette dernière relation, je remplace θ_1, θ_2, θ_3 par leurs valeurs et si je donne à y une valeur constante, d'ailleurs quelconque, B_1, B_2, B_3 deviennent trois constantes a_1, a_2, a_3; je pose alors

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = X,$$

et la relation prend la forme

$$2X = x(X' + a) \qquad (a = \text{const.}).$$

C'est une équation linéaire facile à intégrer. Finalement, je trouve

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 \equiv P,$$

P étant un polynome du deuxième degré en x à coefficients constants; je peux donner à y trois valeurs distinctes, j'aurai alors trois relations de même forme

$$\begin{aligned} a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 &= P, \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 &= Q, \\ c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 &= R. \end{aligned}$$

Dès lors, si j'appelle Δ le déterminant des coefficients de $X_1 X_2 X_3$, deux cas se présentent. Ou bien $\Delta \neq 0$, ou $\Delta = 0$. Dans le premier cas, X_1, X_2, X_3 sont trois trinomes du deuxième degré en x à coefficients constants, la surface correspondante est réglée et l'axe des complexes indéterminé. Dans le deuxième cas, on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0,$$

et l'axe du complexe est parallèle au plan

$$(a_2 b_3 - b_2 a_3)x + (a_3 b_1 - b_3 a_1)y + (a_1 b_2 - b_1 a_2)z = 0.$$

Si les trois coefficients étaient nuls, l'axe serait parallèle à une direction fixe et l'équation (θ) serait de rang 1, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de là que, si pour une surface θ les deux familles d'asymptotiques sont capables d'un complexe linéaire, les deux surfaces d'axes seront de même nature : ou cylindrique, ou à plan directeur, ou à cône directeur.

Emploi de la transformation de Lie. — Je prends, par exemple, la transformation qui fait correspondre à la droite

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta,$$

la sphère de centre $x_0 y_0 z_0$ et de rayon R tels que

$$\begin{aligned} a &= x_0 + y_0 i, & b &= R + z_0, \\ \beta &= x_0 - y_0 i, & \alpha &= R - z_0, \end{aligned}$$

et je me propose de chercher les surfaces qui correspondent à celles de Monge, engendrées par le roulement sur un cône d'un plan entraînant une courbe tracée sur lui. Une pareille surface aura une première famille de lignes de courbure plane; il lui correspondra par la transformation inverse de Lie, si les plans des lignes de courbure passent par l'origine, une surface (S) dont une famille d'asymptotiques sera capable d'un complexe linéaire de la forme

$$AL + DX + Y + M = 0.$$

En appliquant la première méthode, j'aurai donc pour cette surface (S)

$$-p = \frac{z + D}{Ay - x}, \qquad -q = \frac{1 - Az}{Ay - x}.$$

Si j'écris que A et D sont liés par une fonction arbitraire, j'ai une équation de premier ordre; en éliminant la fonction arbitraire, on trouve l'équation du deuxième ordre

$$s^2 - rt = \left[\frac{p + q(z - px - qy)}{xz - y}\right]^2,$$

qui doit admettre deux intégrales intermédiaires, contenant chacune une fonction arbitraire. Effectivement, la méthode classique donne

$$z - px + \lambda py = F(\lambda) \qquad \text{où} \qquad \lambda = \frac{1 - qx}{z - qy}$$

et

$$\frac{xz - y}{px + qy} = x + H(\mu) \qquad \text{où} \qquad \mu = \frac{p + qz}{px + qy}.$$

Les deux familles d'asymptotiques sont capables de complexes linéaires, et l'on trouve que les surfaces des axes de ces complexes sont deux conoïdes

$$\frac{y}{x} = f(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{z}{y} = g(x).$$

En changeant de notations, on peut remplacer l'équation aux dérivées partielles précédente par la suivante, qui est plus symétrique,

$$s^2 - rt = \left(\frac{pq + z - px - qy}{xy - z}\right)^2.$$

Les directrices des surfaces d'axes des complexes sont alors ox et oy.

Je prends maintenant le théorème démontré par M. Darboux au Tome IV (p. 226) de la *Théorie des surfaces*, et qu'il énonce ainsi :

« Les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques se déduisent, par des inversions et des dilatations, soit d'un cône, soit de la surface dont toutes les normales sont tangentes à un cône, ou bien elles dérivent par dégénérescence des surfaces ainsi obtenues. »

Il suffit d'appliquer la transformation de Lie aux surfaces précédentes pour avoir le théorème concernant les surfaces que j'envisage. On sait que les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure se ramènent à des inversions et à des dilatations. La transformation de Lie leur fait correspondre les transformations de contact qui conservent les lignes asymptotiques, c'est-à-dire l'homographie et la transformation par polaires réciproques. Par la transformation de Lie, le cône me donne le conoïde

$$z = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

et la surface de Monge, dont les normales sont tangentes à un cône, me donne les surfaces qui correspondent à l'équation

$$s^2 - rt = \left(\frac{pq + z - px - qy}{xy - z}\right)^2.$$

Toutes les surfaces, dont les deux familles d'asymptotiques sont capables d'un complexe linéaire, doivent se déduire de celles-là par homographies et corrélations ou dériver par dégénérescence des surfaces ainsi obtenues.

En terminant, j'indiquerai une propriété des surfaces (S)

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= -uF' + uH' + 2F, \\ y &= +vF' - vH' + 2H, \\ z &= uv. \end{aligned}\right.$$

Par la transformation de Lie, on retrouve ainsi une propriété des sphères principales, signalée par M. Blutel (*Comptes rendus de l'Académie*, 1899). Si je considère les tangentes à une courbe v en tous les points où elle coupe une courbe u, je trouve pour les six coordonnées d'une de ces tangentes

$$\begin{aligned}
X &= F' - uF'' + H', & L &= v^2(F' - uF'') + v(2H - vH'),\\
Y &= vF'', & M &= v(2uF' - u^2F'' - 2F),\\
Z &= v, & N &= v(2FF'' - F'^2) + uvF''(H' - F') - 2H(F' + H' - uF'');
\end{aligned}$$

on en déduit les deux relations

$$\begin{aligned}
Y &= F''Z,\\
M &= Z(2uF' - u^2F'' - 2F),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que les tangentes aux courbes v en tous les points d'une courbe u coupent deux droites fixes, l'une à l'infini, l'autre parallèle à oy et rencontrant ox. Cette propriété se conserve par homographie et corrélation.