

Astérisque

AST

**Séminaire Bourbaki volume 2012/2013 : exposés
1059-1073 - Pages préliminaires**

Astérisque, tome 361 (2014), p. I-X

http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__361__R1_0

© Société mathématique de France, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRISQUE 361

**SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2012/2013
EXPOSÉS 1059-1073**

Société Mathématique de France 2014

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.

Url : <http://www.bourbaki.ens.fr/>

Mots clefs et classification mathématique par sujets (2000)

Exposé n° 1059. — Fonction de Hilbert, dimension d'Iitaka, corps d'Okounkov. — 14-02.

Exposé n° 1060. — Surfaces plates, flot géodésique de Teichmüller, exposants de Lyapunov, espace de modules de différentielles quadratiques, constantes de Siegel-Veech, variations de structure de Hodge, déterminant du laplacien. — 30F30, 32G15, 32G20, 57M50.

Exposé n° 1061. — Hyperbolicité au sens de Kobayashi, différentielles holomorphes, inégalités de Morse holomorphes, courbure. — 14J70, 14F10, 32Q45, 58A20.

Exposé n° 1062. — KK-théorie, conjecture de Baum-Connes, groupe hyperbolique, propriété (T). — 19K35.

Exposé n° 1063. — Variations de structures de Hodge, cycles algébriques, conjecture de Hodge. — 14C25, 14D07, 32G20, 32S35.

Exposé n° 1064. — Groupes pleins-topologiques, homéomorphismes minimaux, groupes moyennables, échanges d'intervalles, odomètres, sous-décalages topologiques, dynamique symbolique, groupes approximativement finis, groupes élémentairement moyennables, actions commensurantes. — 20E32, 20F05, 37B10, 37B50, 43A07, 43025.

Exposé n° 1065. — Flots de gradient, espaces métriques mesurés, distance de Wasserstein, ÉDP d'évolution, flot de la chaleur. — 30L99, 49J45, 35K05, 53C21.

Exposé n° 1066. — ÉDP stochastiques, renormalisation, trajectoires rugueuses. — 60H15, 82C28.

Exposé n° 1067. — Mouvement brownien branchant, équations F-KPP, extrêmes. — 60J80, 60G70, 60J65.

Exposé n° 1068. — Groupes kleinien, laminations terminales, complexe des courbes. — 30F40 (20H10, 57M50).

Exposé n° 1069. — Ore conjecture, Thompson conjecture, commutators, word maps. — Primary: 20-02, 20D05, 20E32, 20F12, 20P05; Secondary: 20C15, 20C33, 20G15, 20G40.

Exposé n° 1070. — Classification des formes automorphes de carré intégrable pour les groupes classiques *via* la fonctorialité endoscopique tordue, groupes classiques, formes automorphes de carré intégrable, classification, fonctorialité, endoscopie tordue. — 11F72, 11R39, 22E55.

Exposé n° 1071. — Diagramme de Young, symétriseur de Young, graphe expenseur, carte, biparti, unicellulaire, partition, caractère, polynôme de Kerov. — 05E10, 20B30, 20C15.

Exposé n° 1072. — Categorification, semisimple Lie algebras, quantum groups, canonical bases. — 17B37, 32S60.

Exposé n° 1073. — Cohomologie motivique, cohomologie étale, cohomologie galoisienne, K-théorie de Milnor, conjecture de Bloch-Kato, théorie homotopique des schémas, algèbre de Steenrod. — 14F42.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2012/2013
EXPOSÉS 1059-1073

Résumé. — Ce 65^e volume du Séminaire Bourbaki regroupe les textes des quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité effectués pendant l'année 2012/2013 : un exposé de théorie de Hodge, un sur la structure de certains groupes d'homéomorphismes d'un espace de Cantor, un concernant les équations différentielles dans les espaces métriques, un d'équations aux dérivées partielles stochastiques, un de probabilités, un exposé sur les laminations et les variétés de dimension 3, deux de théorie des groupes finis, un exposé sur les représentations des groupes classiques et un sur la catégorification de celles des algèbres de Lie, un exposé sur la conjecture de Bloch-Kato en cohomologie galoisienne, un de géométrie algébrique, un de théorie ergodique, un exposé sur l'hyperbolicité des hypersurfaces de l'espace projectif et un exposé à propos de la conjecture de Baum-Connes.

Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 2012/2013, exposés 1059-1073)

This 65th volume of the Bourbaki Seminar contains the texts of the fifteen survey lectures done during the year 2012/2013: one lecture on Hodge theory, one on the structure of certain homeomorphism groups of a Cantor space, one about differential equations in metric spaces, one lecture on stochastic partial differential equations, one on probability theory, one on laminations and 3-dimensional manifolds, two on finite groups, one lecture on the representations of classical groups and one on the categorification of those of Lie algebras, one lecture on the Bloch-Kato conjecture in Galois cohomology, one in algebraic geometry, one in ergodic theory, one lecture on the hyperbolicity of hypersurfaces in projective spaces and one lecture about the Baum-Connes conjecture.

Résumés des exposés	vii
---------------------------	-----

OCTOBRE 2012

1059 Sébastien BOUCKSOM — <i>Corps d'Okounkov [d'après Okounkov, Lazarsfeld-Mustață et Kaveh-Khovanskii]</i>	1
1060 Julien GRIVAUX & Pascal HUBERT — <i>Les exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller [d'après Eskin-Kontsevich-Zorich]</i>	43
1061 Mihai PĂUN — <i>Techniques de construction de différentielles holomorphes et hyperbolicité [d'après J.-P. Demailly, S. Diverio, J. Merker, E. Rousseau, Y.-T. Siu...]</i>	77
1062 Michael PUSCHNIGG — <i>The Baum-Connes conjecture with coefficients for word-hyperbolic groups [after Vincent Lafforgue]</i>	115

JANVIER 2013

1063 François CHARLES — <i>Progrès récents sur les fonctions normales [d'après Green-Griffiths, Brosnan-Pearlstein, M. Saito, Schnell...] ..</i>	149
1064 Yves de CORNULIER — <i>Groupes pleins-topologiques [d'après Matui, Juschenko, Monod, ...]</i>	183
1065 Filippo SANTAMBROGIO — <i>Flots de gradient dans les espaces métriques et leurs applications [d'après Ambrosio-Gigli-Savaré]</i>	225
1066 Lorenzo ZAMBOTTI — <i>L'équation de Kardar-Parisi-Zhang [d'après Martin Hairer]</i>	251

MARS 2013

1067 Jean-Baptiste GOUÉRE — <i>Le mouvement brownien branchant vu depuis sa particule la plus à gauche [d'après Arguin-Bovier-Kistler et Aidékon-Berestycki-Brunet-Shi]</i>	271
1068 Cyril LECUIRE — <i>Modèles et laminations terminales [d'après Minsky et Brock-Canary-Minsky]</i>	299
1069 Gunter MALLE — <i>The proof of Ore's conjecture [after Ellers-Gordeev and Liebeck-O'Brien-Shalev-Tiep]</i>	325
1070 Colette MOEGLIN — <i>Le spectre discret des groupes classiques [d'après J. Arthur]</i>	349

JUN 2013

1071	Pierre CARTIER — <i>Nouveaux développements sur les valeurs des caractères des groupes symétriques; méthodes combinatoires [d'après V. Féray, ...]</i>	373
1072	Joel KAMNITZER — <i>Categorification of Lie algebras [after Rouquier, Khovanov-Lauda, ...]</i>	397
1073	Joël RIOU — <i>La conjecture de Bloch-Kato [d'après M. Rost et V. Voevodsky]</i>	421
	Table par noms d'auteurs	465

Sébastien BOUCKSOM – *Corps d’Okounkov [d’après Okounkov, Lazarsfeld-Mustață et Kaveh-Khovanskii]*

La théorie des corps d’Okounkov généralise aux variétés algébriques non toriques la correspondance entre sections d’un fibré en droites et points entiers d’un corps convexe, ramenant ainsi l’étude asymptotique des sections des puissances d’un fibré en droites à un problème d’équidistribution de points rationnels dans un corps convexe. Cette technique se substitue avantageusement aux méthodes antérieures reposant sur des théorèmes d’annulation de la cohomologie, spécifiques à la caractéristique nulle. Dans cet exposé je présenterai l’idée de base de la construction, remarquablement simple, des corps d’Okounkov, et en exposerai diverses applications, en géométrie algébrique et en géométrie d’Arakelov.

Julien GRIVAUX & Pascal HUBERT – *Les exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller [d’après Eskin-Kontsevich-Zorich]*

On sait depuis les travaux de Zorich et Forni que les déviations moyennes ergodiques pour les flots linéaires sur les surfaces de translation sont gouvernées par les exposants de Liapounoff du cocycle de Kontsevich-Zorich. Kontsevich a donné une formule pour la somme des exposants (positifs) de ce cocycle en 1997 et a conjecturé la rationalité de cette somme. Eskin, Kontsevich et Zorich ont très récemment démontré que la somme des exposants de Liapounoff s’exprime en fonction de constantes de Siegel-Veech (mesure du nombre de cylindres sur une surface de translation). En combinant ce résultat avec des travaux antérieurs de Eskin-Masur-Zorich et Eskin-Okounkov, on obtient une réponse positive à la conjecture de Kontsevich. Le but de mon exposé est de présenter le travail d’Eskin-Kontsevich-Zorich dont les méthodes sont tout aussi intéressantes et novatrices que le résultat.

Mihai PĂUN – *Techniques de construction de différentielles holomorphes et hyperbolicité [d’après J.-P. Demailly, S. Diverio, J. Merker, E. Rousseau, Y.-T. Siu...]*

Nous présentons quelques techniques de construction de différentielles de jets. Tout d’abord, nous allons expliquer les points clef des travaux de S. Diverio, J. Merker et E. Rousseau concernant l’hyperbolicité des hypersurfaces génériques de grand degré de l’espace projectif : les différentielles holomorphes sont construites ici par un procédé essentiellement dû à Y.-T. Siu, lui-même inspiré par les travaux de C. Voisin, H. Clemens et L. Ein sur le sujet. Ensuite, nous allons présenter une nouvelle approche due à J.-P. Demailly qui permet d’obtenir des différentielles holomorphes sur une variété de type général arbitraire.

Michael PUSCHNIGG – *The Baum-Connes conjecture with coefficients for word-hyperbolic groups [after Vincent Lafforgue]*

In a recent breakthrough, V. Lafforgue verified the Baum-Connes conjecture with coefficients for all word-hyperbolic groups. This provides the first examples of groups with Kazhdan’s Property (T) satisfying the conjecture. His proof (of almost 200 pages) is completely elementary, but of impressive complexity. It makes essential use of group representations of weak exponential growth. These representations are also the topic of Lafforgue’s work on strengthened versions of Property (T). His results about these properties for higher rank groups and lattices have interesting applications in graph theory and rigidity theory. They also indicate that it might be very difficult to establish the Baum-Connes conjecture for higher rank lattices with the approaches used so far.

François CHARLES – *Progrès récents sur les fonctions normales [d’après Green-Griffiths, Brosnan-Pearlstein, M. Saito, Schnell...]*

Étant donnée une famille de variétés complexes projectives lisses, la conjecture de Hodge prédit l’algébricité du lieu des classes de Hodge. Ce résultat a été démontré de manière inconditionnelle par Cattani, Deligne et Kaplan en 1995. De manière analogue, l’étude conjecturale des relations d’équivalence sur les cycles algébriques ont amené Green et Griffiths à conjecturer l’algébricité du lieu des zéros des fonctions normales. Cet énoncé correspond à une version dans le cas mixte du théorème de Cattani-Deligne-Kaplan. Il a récemment été démontré par Brosnan-Pearlstein et Schnell, en s’appuyant sur les travaux de M. Saito. On présentera les grandes lignes de la preuve.

Yves de CORNULIER – *Groupes pleins-topologiques [d’après Matui, Juschenko, Monod, ...]*

Les groupes pleins-topologiques sont des groupes d’autohoméomorphismes de l’espace de Cantor, décrits localement comme puissances d’un autohoméomorphisme fixé à l’avance. Il a été démontré récemment que certains de ces groupes, associés à des sous-décalages minimaux, sont infinis, simples, de type fini et moyennables ; l’existence de groupes ayant ces propriétés n’était pas connue auparavant.

Filippo SANTAMBROGIO – *Flots de gradient dans les espaces métriques et leurs applications [d’après Ambrosio-Gigli-Savaré]*

Un flot de gradient dans \mathbb{R}^n est une solution d’une équation du type $x'(t) = -\nabla F(x(t))$, c’est-à-dire une courbe de pente maximale pour une fonction F . Une discrétisation variationnelle en temps (Euler implicite) permet d’éviter d’utiliser le gradient et de définir donc une notion de solution qui a un sens pour des fonctions peu régulières sur des espaces sans structure différentiable. La longue série de travaux d’Ambrosio, Gigli et Savaré, que je tâcherai de présenter brièvement, a traité au moins trois grandes questions : l’existence, l’unicité et les notions appropriées de solutions dans des espaces métriques assez généraux ; le cas de l’espace des mesures de probabilité avec la distance induite par le transport optimal et ses applications aux EDP d’évolutions ; l’application de ces idées à l’analyse des espaces métriques mesurés et de leurs structures différentielles, dans laquelle je me concentrerai en particulier sur ce qui a été fait autour de l’équation de la chaleur.

Lorenzo ZAMBOTTI – *L’équation de Kardar-Parisi-Zhang [d’après Martin Hairer]*

L’équation de Kardar-Parisi-Zhang a été introduite dans les années quatre-vingt pour modéliser les fluctuations d’une interface soumise à un phénomène de croissance aléatoire ; elle apparaît dans l’étude des systèmes de particules en interaction, des polymères dirigés en milieu aléatoire, des matrices aléatoires. Il s’agit d’une équation stochastique aux dérivées partielles dirigée par un bruit blanc en espace-temps, contenant un terme quadratique en la dérivée spatiale, difficile à rendre rigoureuse car on s’attend à avoir des solutions au plus höldériennes en espace. Bizarrement, on peut écrire une solution explicite de cette équation, mais on ne sait pas donner un sens rigoureux à la non linéarité ; surtout, aucune théorie connue ne donne de résultats d’unicité. Dans cet exposé je présenterai les récents résultats de Martin Hairer, qui a donné une théorie complète d’existence, unicité et approximation pour cette équation, dans laquelle la faible régularité en espace est gérée à travers la théorie des trajectoires rugueuses.

Jean-Baptiste GOUÉRÉ – *Le mouvement brownien branchant vu depuis sa particule la plus à gauche [d’après Arguin-Bovier-Kistler et Aïdékon-Berestycki-Brunet-Shi]*

Le mouvement brownien branchant est, dans cet exposé, un processus stochastique décrivant l’évolution d’un système fini de particules sur la droite réelle. À l’instant initial, le système consiste en une particule située en l’origine. La particule se déplace selon un mouvement brownien. Après un temps aléatoire indépendant et de loi exponentielle, la particule se divise en deux particules. Ces deux particules évoluent alors indépendamment et suivant le même processus que la première particule (trajectoires browniennes puis divisions) et ainsi de suite. À chaque instant, le système consiste ainsi en un nombre aléatoire de particules dont les positions sont dépendantes. Mon exposé sera essentiellement consacré aux travaux récents de Arguin-Bovier-Kistler et Aïdékon-Berestycki-Brunet-Shi qui décrivent la limite en temps grand du système de particules vu depuis sa particule la plus à gauche.

Cyril LECUIRE – *Modèles et laminations terminales [d’après Minsky et Brock-Canary-Minsky]*

Soit M une variété de dimension 3 compacte dont l’intérieur est muni d’une métrique hyperbolique complète g . Les travaux d’Ahlfors, Bers, Bonahon et Thurston permettent d’associer à g des invariants, dits « de bouts », décrivant son comportement asymptotique. La conjecture des laminations terminales, formulée dans les années 70 par Thurston prédit que ces invariants de bouts déterminent g à isométrie près. Elle a été résolue dans les années 2000 par Brock-Canary-Minsky. L’élément principal de la preuve est la construction d’un modèle associé aux invariants de bouts de g et d’une application bilipschitzienne de ce modèle vers (M, g) .

Gunter MALLE – *The proof of Ore’s conjecture [after Ellers-Gordeev and Liebeck-O’Brien-Shalev-Tiep]*

Ore’s conjecture asserts that in a non-abelian finite simple group, every element is a commutator. The proof of this statement was recently completed by Liebeck, O’Brien, Shalev and Tiep. We report on the various ingredients used in that proof, reaching from Deligne-Lusztig character theory to explicit computations. We also mention several related, still open problems.

Colette MOEGLIN – *Le spectre discret des groupes classiques [d’après J. Arthur]*

Grâce à Langlands, on connaît la décomposition spectrale de l’espace des fonctions de carré intégrable (modulo le centre) d’un quotient arithmétique d’un groupe réductif, par exemple, un groupe de matrices $GL(n)$, un groupe de matrices orthogonales, un groupe de matrices symplectiques... Mais cette connaissance très théorique nécessite de connaître les représentations irréductibles du groupe dans cet espace de fonctions, c’est ce que l’on appelle le spectre discret. Le but de cet exposé est de formuler les résultats concrets obtenus par J. Arthur pour les groupes classiques.

Pierre CARTIER – *Nouveaux développements sur les valeurs des caractères des groupes symétriques ; méthodes combinatoires [d’après V. Féray, ...]*

L’étude asymptotique des diagrammes de Young de grande taille a été entreprise à la fin du 20^e siècle par l’École de Saint-Petersbourg (Vershik, Kerov, Okunkov). Les méthodes des probabilités « libres » ont été inventées par Voiculescu dans le but de contrôler les algèbres d’opérateurs liées aux groupes libres ; elles ont servi ensuite à l’étude des matrices aléatoires

de grande taille, qui s'est révélée très importante tant en physique statistique que dans l'étude des zéros de la fonction zeta de Riemann. Plus récemment, elles ont été appliquées par Biane aux propriétés asymptotiques des permutations.

Nous insisterons surtout sur les *formules exactes* qui sous-tendent ces formules asymptotiques, obtenues par les collaborateurs de Biane (Śniady, Féray), et qui développent de nouveaux domaines de la combinatoire (principalement les cartes planaires).

Joel KAMNITZER – *Categorification of Lie algebras [after Rouquier, Khovanov-Lauda, ...]*

Given a vector space with an action of a semi-simple Lie algebra, we can try to “categorify” this representation, which means finding a category where the generators of the Lie algebra act by functors. Such categorical representations arise naturally in geometric representation theory. A framework for studying these categorical representations was introduced by Rouquier and Khovanov-Lauda. Their definitions are algebraic/combinatorial, but are connected to the topology of quiver varieties by the work of Varagnolo-Vasserot.

Joël RIOU – *La conjecture de Bloch-Kato [d'après M. Rost et V. Voevodsky]*

La conjecture de Bloch-Kato énonce que pour tout corps k et tout nombre premier ℓ différent de la caractéristique de k , l'algèbre de K -théorie de Milnor de k modulo ℓ (qui est définie par générateurs et relations) s'identifie à une algèbre de cohomologie galoisienne associée à k . La démonstration de cet énoncé, qui admet de nombreuses applications, utilise de façon essentielle d'une part les théories motiviques (cohomologie, homotopie, opérations de Steenrod) et d'autre part des constructions géométriques de variétés algébriques ayant des propriétés remarquables par rapport à des symboles en K -théorie de Milnor.