ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MAURO PICONE

Vedute generali sull'interpolazione e qualche loro conseguenza

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 3-4 (1951), p. 193-244

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_193_0>

VEDUTE GENERALI SULL'INTERPOLAZIONE E QUALCHE LORO CONSEGUENZA (*)

Memoria di MAURO PICONE (Roma)

Introduzione

Sia $f(x)$ una funzione (reale o complessa) della variabile reale x, definita nell'intervallo chiuso e limitato T di punti estremi inferiore a e superiore a', ivi di classe $\nu + 1$, cioè continua con le sue derivate fino a quella, inclusa, d'ordine $\nu + 1$ (ν essendo un fissato numero intero positivo o nullo). Per ogni punto x di T sussiste allora l'eguaglianza di TAYLOR:

$$(1) \qquad f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^\nu}{\nu !} f^{(\nu)}(a) + \int_a^x \frac{(x-\xi)^\nu}{\nu !} f^{(\nu+1)}(\xi)\, d\xi .$$

Riferito il piano a due assi cartesiani ortogonali x e y. sia T l'intervallo del piano, chiuso e limitato, di punti estremi inferiore (a, b) e superiore (a', b'), cioè l'insieme dei punti (x, y) del piano, per cui

$$a \leqq x \leqq a', \qquad b \leqq y \leqq b' .$$

Sia $f(x, y)$ una funzione (reale o complessa) delle due variabili reali x e y, definita in T, ivi di classe $\nu + 1$, cioè, come in questo scritto intenderò, continua in T con le sue derivate parziali

$$\frac{\partial^{h+k} f}{\partial x^h \, \partial y^k} \qquad (0 \leqq h \leqq \nu + 1, 0 \leqq k \leqq \nu + 1).$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

Porrò

$$f^{(h)} = \frac{\partial^{2h} f}{\partial x^h \, \partial y^h} \qquad (0 \leqq h \leqq \nu + 1),$$

e chiamerò, tale derivata, *la derivata totale di f d'ordine h* (¹). Indicherò con $\mathcal{F}'T$ quella parte della frontiera $\mathcal{F}T$ di T, sulla quale risulta

$$(x-a)(y-b) = 0 .$$

Introdotte le funzioni

$$f_h(x, y) = f^{(h)}(a, y) + f^{(h)}(x, b) - f^{(h)}(a, b),$$
$$(h = 0, 1, \ldots),$$

ciascuna delle quali riesce ben determinata, non appena sono assegnati i valori di $f^{(h)}(x, y)$ su $\mathcal{F}'T$, per ogni punto (x, y) di T, sussiste l'eguaglianza (²)

$$(2) \quad f(x,y) = f_0(x,y) + \int_a^x\!\!\int_b^y f_1(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \int_a^x\!\!\int_b^y (x-\xi)(y-\eta) f_2(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \ldots$$
$$+ \int_a^x\!\!\int_b^y \frac{(x-\xi)^{\nu-1}(y-\eta)^{\nu-1}}{[(\nu-1)!]^2} f_\nu(\xi,\eta)\, d\xi\, dy + \int_a^x\!\!\int_b^y \frac{(x-\xi)^\nu (y-\eta)^\nu}{(\nu!)^2} f^{(\nu+1)}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

che può anche concepirsi come un'estensione di quella di TAYLOR (1), al caso delle funzioni di due variabili. La (1) può infatti scriversi

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(a)\, d\xi + \int_a^x (x-\xi) f''(a)\, d\xi + \ldots$$
$$+ \int_a^x \frac{(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(a)\, d\xi + \int_a^x \frac{(x-\xi)^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)}(\xi)\, d\xi \;(^3).$$

(¹) Cfr. M. PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale* [Circolo Matematico di Catania, Catania (1923)], p. 201 210.

(²) Cfr. PICONE, *Appunti d'Analisi superiore*, p. 598 [Rondinella, Napoli (1940)].

(³) Supposta $f(x, y)$ dotata in T di derivate parziali d'ordine comunque elevato, ivi continue, potrebbe dunque considerarsi, come serie di TAYLOR della $f(x, y)$, anche la seguente

$$f(x, y) \sim f_0(x, y) + \sum_{h=1}^{\infty} \int_a^x\!\!\int_b^y \frac{(x-\xi)^{h-1}(y-\eta)^{h-1}}{[(h-1)!]^2} f_h(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

Il calcolo approssimato di una funzione $f(x)$, di una variabile reale x, di classe $\nu + 1$ nell'intervallo T, mediante estrapolazione tayloriana, d'ordine ν, consiste nell'attribuire a $f(x)$ il valore del polinomio

$$u_f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\nu} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!},$$

commettendo, così, un errore dato dalla funzione

$$R(x) \equiv f(x) - u_f(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)}(\xi)\, d\xi .$$

Il calcolo approssimato di una funzione $f(x, y)$, delle due variabili reali x e y, di classe $\nu + 1$ nell'intervallo T, mediante estrapolazione tayloriana, d'ordine ν, si può, analogamente, far consistere nell'attribuire a $f(x, y)$ il valore della funzione

$$u_f(x, y) = f_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\nu} \int_a^x \int_b^y \frac{(x-\xi)^{k-1}(y-\eta)^{k-1}}{[(k-1)!]^2} f_k(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta ,$$

---

definendo, pertanto, come *funzione esponenziale dei due argomenti x e y* quella funzione $f(x, y)$ per cui si ha:

$$f^{(h)}(x, y) = 1 , \quad \text{per} \quad x y = 0, \quad (h = 0, 1, \ldots)$$

e cioè la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x y)^k}{(k!)^2},$$

che potrebbe indicarsi col simbolo

$$\exp(x, y) .$$

Tale funzione è caratterizzata dal dover soddisfare alle equazioni

$$f' = f; \quad f = 1 , \quad \text{per} \quad x y = 0 .$$

Tutto ciò può estendersi alle funzioni di quante si vogliano variabili reali. Cfr. anche CARLO BIRINDELLI, *Sul calcolo numerico degli integrali multipli*, [Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, dell'Accademia Nazionale dei Lincei, seduta del 6 giugno 1951].

commettendo, così, un errore dato dalla funzione

$$R(x,y) \equiv f(x,y) - u_f(x,y = \int_a^x\int_b^y \frac{(x-\xi)^\nu (y-\eta)^\nu}{(\nu\,!)^2} f^{(\nu+1)}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\,.$$

Nel primo caso si sostituisce a $f(x)$ la soluzione $u_f(x)$ delle equazioni

$$\frac{d^{\nu+1} u}{d x^{\nu+1}} = 0\,, \quad \text{in} \quad T\,,$$

$$u^{(h)}(a) = f^{(h)}(a) \qquad (h = 0, 1, \ldots, \nu)\,,$$

commettendo un errore $R(x)$ dato dalla soluzione delle seguenti:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^{\nu+1} u}{d x^{\nu+1}} = f^{(\nu+1)}(x)\,, \\ u^{(h)}(a) = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, \nu)\,, \end{cases}$$

nel secondo si sostituisce a $f(x,y)$ la soluzione $u_f(x,y)$ delle equazioni

$$u^{(\nu+1)}(x,y) \equiv \frac{\partial^{2\nu+2} u}{\partial x^{\nu+1}\, \partial y^{\nu+1}} = 0\,,$$

$$u^{(h)}(x,y) \equiv \frac{\partial^{2h} u}{\partial x^h\, \partial y^h}[\text{su } \mathcal{F}'\, T] = \frac{\partial^{2h} f}{\partial x^h\, \partial y^h}[\text{su } \mathcal{F}'\, T] \quad (h = 0, 1, \ldots, \nu)\,;$$

commettendo un errore $R(x,y)$ dato dalla soluzione delle seguenti:

$$(4) \qquad \begin{cases} u^{(\nu+1)} = \dfrac{\partial^{2\nu+2} u}{\partial x^{\nu+1}\, \partial y^{\nu+1}} = f^{(\nu+1)}(x\,.\,y)\,, \\[2ex] u^{(h)} \equiv \dfrac{\partial^{2h} u}{\partial x^h\, \partial y^h}(\text{su } \mathcal{F}'\, T) = 0\,, \quad (h = 0, 1, \ldots, \nu). \end{cases}$$

Le equazioni (3) ammettono la funzione di GREEN così definita

$$\text{per } a < x < a', \; G_\nu(x,\xi) \begin{cases} = \dfrac{(x-\xi)^\nu}{\nu\,!}\,, & \text{per} \quad a \leqq \xi < x\,, \\ = 0 & , \text{ per} \qquad \xi \geqq x\,, \end{cases}$$

$$G_\nu(a',\xi) = \frac{(a'-\xi)^\nu}{\nu\,!}\,,\; G_\nu(a,\xi) \begin{cases} = 0\,, & \text{per} \quad \nu > 0\,, \\ = 1\,, & \text{per} \quad \nu = 0\,, \end{cases}$$

nel senso che la soluzione di esse è data da

$$R(x) = \int_a^{a'} G_\nu(x, \xi) f^{(\nu+1)}(\xi)\, d\xi ;$$

e, del pari, le equazioni (4) ammettono la funzione di GREEN così definita

$$\text{per} \quad \begin{matrix} a < x < a' \\ b < y < b', \end{matrix} \quad G_\nu(x, y, \xi, \eta) \begin{cases} = \dfrac{(x-\xi)^\nu (y-\eta)^\nu}{(\nu\,!)^2}, & \text{per } a \leqq \xi < x \text{ e } b \leqq \eta < y, \\ = \quad 0 & , \text{ per } \xi - x + \eta - y \geqq 0, \end{cases}$$

$$\text{per} \quad a < x < a', \quad G_\nu(x, b', \xi, \eta) \begin{cases} = \dfrac{(x-\xi)^\nu (b'-\eta)^\nu}{(\nu\,!)^2}, & \text{per} \quad a \leqq \xi < x, \\ = \quad 0 & , \text{ per} \quad \xi \geqq x, \end{cases}$$

$$\text{per} \quad b < y < b', \quad G_\nu(a', y, \xi, \eta) \begin{cases} = \dfrac{(a'-\xi)^\nu (y-\eta)^\nu}{(\nu\,!)^2}, & \text{per} \quad b \leqq \eta < y, \\ = \quad 0 & , \text{ per} \quad \eta \geqq y, \end{cases}$$

$$G_\nu(a', b', \xi, \eta) = \frac{(a'-\xi)^\nu (b'-\eta)^\nu}{(\nu\,!)^2},$$

$$G_\nu(x, b, \xi, \eta) = G_\nu(a, y, \xi, \eta) \begin{cases} = 0, & \text{per} \quad \nu > 0, \\ = 1, & \text{per} \quad \nu = 0, \end{cases}$$

nel senso che la soluzione di esse è data da

$$R(x, y) = \int_a^{a'} \int_b^{b'} G_\nu(x, y, \xi, \eta) f^{(\nu+1)}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Tutto ciò è ben elementare!

Ma suscita talune vedute generali sui metodi di calcolo per interpolazione (o estrapolazione) delle funzioni di quante si vogliano variabili, che sono, come mi propongo di dimostrare in questo scritto, per mezzo di qualche loro applicazione, feconde di risultati interessanti.

Ad esempio, si vedrà — nel modo più efficace al § 6 — che se si fonda il calcolo dell'*integrale doppio* di una data funzione, in *due* variabili, sulla conoscenza, non soltanto dei valori della funzione in alcuni punti del dominio d'integrazione, ma anche su quella di *integrali semplici* di talune funzioni di *una sola* variabile, opportunamente dedotte dalla data, si può pervenire a quel calcolo commettendo errori di tale entità da renderlo effettivamente degno di applicazione numerica. Ciò non può dirsi dei metodi di calcolo fin ad oggi, di solito, seguiti che, giovandosi di ovvie estensioni di quelli ben noti per le funzioni di una variabile, si basano soltanto sulla conoscenza dei valori della funzione in alcuni punti del dominio d'integrazione [4].

§ 1. — Formulazione generale dei metodi di calcolo per interpolazione.

Sia T un dominio limitato internamente connesso, con frontiera $\mathcal{F}T$ di misura nulla, dello spazio euclideo $S_{(r)}$, a r dimensioni, per il quale denoterò con $x_1, x_2, \ldots, x_r$ le coordinate dei suoi punti. Sia

$$E \equiv \Sigma\, a_{i_1 i_2 \ldots i_r} \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_r}}{\partial x_1^{i_1}\, \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_r^{i_r}},$$

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_r \leqq 1 + \nu,$$

un assegnato operatore, alle derivate parziali d'ordine non superiore a $1 + \nu$, i cui coefficienti $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}(P)$ sono funzioni del punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, reali o complesse, continue in T. Sia $\{u\}$ una classe di funzioni del punto P, per ciascuna delle quali

$$E[u],$$

riesce una funzione continua in T. Siano

$$L_1, L_2, \ldots, L_m,$$

m assegnati operatori, *omogenei e distributivi,* definiti nella classe $\{u\}$, tali che:

a) Comunque si assegnino una funzione $e(P)$ di una determinata classe *lineare* $\{e(P)\}$ di funzioni continue in T ed il vettore $l(P)$ ad m componenti $l_1(P), l_2(P), \ldots, l_m(P)$, di una classe $\{l(P)\}$, essa pure lineare e ben de-

(4) Così, il calcolo di un integrale r^{plo} di una data funzione di r variabili, deve basarsi sulla conoscenza dei valori della funzione in alcuni punti del dominio d'integrazione, nonchè su quella di integrali k^{pli} $(k = 1, 2, \ldots, r-1)$ di talune funzioni di k variabili, dalla data opportunamente dedotte. Cfr P. TORLORICI, *Su un metodo numerico di calcolo approssimato per gli integrali doppi* [Pubblicazione n° 303 (serie II) dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma (1951)]; C BIRINDELLI, loc. cit. (3).

terminata, esiste sempre una ed una sola soluzione, della classe $\{u\}$, verificante le equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} E[u] = e(P), \\ L_1[u] = l_1(P), \; L_2[u] = l_2(P), \ldots, L_m[u] = l_m(P). \end{cases}$$

b) Esiste una funzione $G(P, Q)$ dei punti $P(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ tale che, fissato arbitrariamente P in T, riesce funzione di Q definita in $T - \mathcal{F}T - P$, sommabile in T e comunque si assuma la funzione $e(P)$ di $\{e(P)\}$, per la soluzione delle equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} E[u] = e(P), \\ L_1[u] = 0, \; L_2[u] = 0, \ldots, L_m[u] = 0, \end{cases}$$

si abbia

$$u(P) = \int_T G(P, Q)\, e(Q)\, d\,T(Q);$$

esiste cioè la funzione di GREEN, relativa al dominio T e agli operatori E, L_h, $(h = 1, 2, \ldots, m)$, sulle classi $\{u\}$ e $\{e\}$.

Ciò posto, si ha la seguente formulazione generale dei metodi di calcolo per interpolazione (5).

Sia $\{f(P)\}$ una classe di funzioni contenuta nella $\{u\}$, per ciascuna delle quali $E[f]$ appartiene a $\{e(P)\}$ e il vettore di componenti $L_k[f] (k = 1, 2, \ldots, m)$ a $\{l(P)\}$. Assunta una funzione $f(P)$ della classe $\{f(P)\}$, il calcolo approssimato della $f(P)$ in T, *mediante interpolazione competente agli operatori* E, L_k, consiste in ciò:

Si sostituisce al calcolo della $f(P)$, quello della soluzione $u_f(P)$, delle equazioni:

$$(3) \qquad \begin{cases} E[u] = 0 \\ L_k[u] = L_k[f], \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

Poichè si ha, in T,

$$(4) \qquad f(P) = u_f(P) + \int_T G(P, Q)\, E(f)\, d\,T(Q),$$

sussiste il teorema:

---

(5) Parlerò sempre di metodi di *interpolazione*, comprendendo, fra questi, anche quelli che dovrebbero piuttosto chiamarsi di *estrapolazione*

I. — *L'errore che si commette nel sopradetto calcolo è dato da*

$$R(P) = \int_T G(P, Q)\, E[f]\, d\, T(Q).$$

Sia Λ un assegnato arbitrario operatore, omogeneo e distributivo, definito in $\{u\}$, che, applicato ad una funzione $u(P)$ dia per risultato, un numero e al quale corrisponda una determinata funzione $\Gamma_\Lambda(Q)$, sommabile in T, per cui si abbia, comunque si scelga una funzione $e(P)$ della classe $\{e(P)\}$,

$$\Lambda\left[\int_T G(P, Q)\, e(Q)\, d\, T(Q)\right] = \int_T \Gamma_\Lambda(Q)\, e(Q)\, d\, T.$$

Assunta una funzione $f(P)$ di $\{f\}$, si trae dalla (4)

$$\Lambda[f] = \Lambda[u_f] + \int_T \Gamma_\Lambda(Q)\, E[f]\, d\, T,$$

e pertanto:

II. — *L'errore che si commette sostituendo al calcolo di $\Lambda[f]$ quello di $\Lambda[u_f]$ è dato da*

$$\varrho = \int_T \Gamma_\Lambda(Q)\, E[f]\, d\, T,$$

e pertanto è nullo quando e solo quando $E[f]$ risulta, in T, ortogonale e $\Gamma_\Lambda(Q)$ e sempre, in modulo, non supera il termine

$$\int_T |\Gamma_\Lambda(Q)|\, d\, T \,.\, \max_T |E[f]|.$$

§ 2. — Interpolazione armonica e ipoarmonica periferiche.

L'interpolazione armonica periferica si ottiene quando, in particolare, si assuma

$$E \equiv \Delta \equiv \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad L[u] = u(P) \text{ su } \mathcal{F}T.$$

Supporremo il dominio T dotato dell'ordinaria funzione di GREEN $G(P, Q)$, relativa al problema di DIRICHLET per il dominio stesso, la classe $\{u\}$ costituita di funzioni continue in T con le loro derivate parziali del prim'ordine e in $T - \mathcal{F} T$ con quelle del secondo, la classe $\{e(P)\}$ contenendo la costante *uno*. Con tale interpolazione si calcola, nell'interno di T, una funzione $f(P)$, della classe $\{f\}$, calcolando, in sua vece, la funzione u_f, armonica in $T - \mathcal{F} T$, che coincide con $f(P)$ sulla *periferia* $\mathcal{F}\ T$ di T. In $\{u\}$ ha significato il funzionale

$$\Lambda[u] = \int_T u(P)\, d\, T,$$

che, come primo esempio, vogliamo calcolare, per una funzione $f(P)$ della classe $\{f\}$, ponendo

$$\int_T f(P)\, d T = \int_T u_f(P)\, d\, T.$$

Considerando, così, un metodo d'integrazione approssimata che potrebbe chiamarsi *armonico periferico*.

Si commette un errore ϱ dato da

$$\varrho = \int_T \Delta f\, d\, T(Q) \int_T G(P, Q)\, d\, T(P).$$

Come mi ha fatto osservare il mio valente collaboratore WOLF GROSS, la funzione

$$\Gamma(Q) = \int_T G(P, Q)\, d\, T(P),$$

è la soluzione, della classe $\{u\}$, delle equazionioni

(1) $$\Delta u = 1;\ u = 0,\ \text{su}\ \mathcal{F} T,$$

e per una tale funzione, detto n l'asse normale alla $\mathcal{F}\ T$, volto verso l'esterno di T, si ha

$$\int_T u_f\, d\, T = \int_{\mathcal{F}T} u_f \frac{d\,\Gamma}{d\,n}\, d\,\sigma = \int_{\mathcal{F}T} f \frac{d\,\Gamma}{d\,n}\, d\,\sigma,$$

onde il teorema

III. — *Detta $\Gamma_T(P)$ la soluzione delle* (1), *nel calcolo approsimato dell'integrale.*

$$\int_T f(P)\, d\, T,$$

di una funzione f della classe $\{f\}$, col metodo armonico periferico, si pone

$$\int_T f(P)\,d\,T = \int_{\mathcal{F}T} f\frac{d\,\Gamma_T}{d\,n}\,d\,T\,, \tag{2}$$

commettendo così un errore dato da

$$\varrho = \int_T \Delta f.\Gamma_T(Q)\,d\,T\,. \tag{3}$$

Poichè $\Gamma_T(Q)$, nulla su $\mathcal{F}T$, è negativa in $T - \mathcal{F}T$, esiste, supposta $f(P)$ reale, un punto P, intero a T, per cui risulta

$$\varrho = [\Delta f]_P \cdot \int_T \Gamma(Q)\,d\,T. \tag{3'}$$

Le (2) e (3) avranno un pratico significato tutte le volte che si conosca la funzione $\Gamma_T(P)$. Ciò accade, per esempio, nel caso in cui il dominio T sia un iperellissoide. In tal caso, detti $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ i semiassi di T, si ha

$$\Gamma_T(P) = \left(\sum_{k=1}^{r}\frac{x_k^2}{\delta_k^2} - 1\right)\Big/\sum_{k=1}^{r}\frac{2}{\delta_k^2}\,.$$

Se, in particolare, T è l'ipersfera di raggio δ e centro O, si ha

$$\Gamma_T(P) = \frac{1}{2r}\left(\overline{O P}^2 - \delta^2\right),$$

e si perviene all'eguaglianza approssimata

$$\int_T f(P)\,d\,T = \text{mis}\;T.\text{media}_{\mathcal{F}T} f(P)\,\text{(6)}, \tag{4}$$

---

(6) Con media$_{\mathcal{F}T}\, f(P)$ indico (per $r \geqq 2$) il quoziente

$$\frac{1}{\text{mis}\;\mathcal{F}T}\int_{\mathcal{F}D} f(P)\,d\,\sigma\,,$$

e per $r = 1$, la semisomma dei valori della f agli estremi dell'intervallo T.

che costituisce un'estensione, certo elegante, all'integrazione a r dimensioni della formola di BEZOUT per l'integrazione a una. L'errore della (4) è dato da, quando $f(P)$ sia reale,

$$\varrho = -\frac{\delta^2 \operatorname{mis} T}{(r+2)\,r} \cdot [\Delta f]_P, \tag{5}$$

ove P designa un certo punto intero all'ipersfera T [7].

Poichè, per $r \geqq 2$, non si può decomporre lo spazio in ipersfere, la formola (4) non è certo destinata a rendere grandi servizii al calcolo numerico degli integrali a r dimensioni, per $r \geqq 2$. Si potrà in generale richiedere alla (2) un tale compito, tutte le volte che si riesca a costruire la funzione $\Gamma_T(P)$ — *di facile calcolo* — per domini, secondo i quali lo spazio possa esser decomposto. WOLF GROSS mi ha fatto osservare che per l'integrazione a *due* dimensioni si hanno di tali domini. Il piano è infatti decomponibile in triangoli equilateri e per un triangolo equilatero di lato $2\,\delta$, riferito il suo piano a due assi x e y, l'asse x giacente su un lato del triangolo e l'asse y sulla normale a questo lato, condotta per il vertice opposto, si ha

$$\Gamma_T(x, y) = \frac{y}{4\sqrt{3}\,\delta}\,[3\,x^2 - (y - \sqrt{3}\,\delta)^2]. \tag{6}$$

Dato, ad ogni lato, del tringolo equilatero T, il verso su di esso determinato, da quello positivo di percorso sulla periferia di T, riferiti, i punti di ogni lato, ad un sistema di ascisse s, avente per origine il punto di mezzo del lato e per verso l'indicato, siano $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$, le funzioni di s alle quali si riduce la $f(x, y)$, rispettivamente, sul primo, sul secondo, sul terzo lato del triangolo. Introdottavi la funzione (6), la (2) fornisce allora l'eguaglianza approssimata

$$\int_T f(P)\, d\,T = \frac{\sqrt{3}}{4\,\delta}\int_{-\delta}^{\delta} [f_1(s) + f_2(s) + f_3(s)]\,(\delta^2 - s^2)\, ds,$$

e la (3′), se $f(P)$ è reale, l'errore

$$\varrho = -\frac{\delta^2 \operatorname{area} T}{20}[\Delta f]_P.$$

---

[7] Per $r = 1$, la (5) del testo fornisce, se $f(x)$ è reale,

$$\varrho = -\frac{(\operatorname{mis} T)^3}{12} f''(\xi),$$

ξ designando un punto interno all'intervallo T, cioè il ben noto resto della formola di quadratura di BEZOUT.

Il metodo d'integrazione armonico periferico è certamente pratico, per qualsivoglia valore della dimensione r dello spazio, quando il dominio d'integrazione è uno strato ipersferico. Infatti, per un tale dominio si conosce la funzione Γ verificante le (1) e un assegnato strato ipersferico è decomponibile in tali strati, ad esso concentrici, ciascuno di spessore tanto piccolo quanto si vuole.

Per esempio, per $r = 3$, per lo strato sferico T di centro in O e raggi interno δ ed esterno δ', si ha:

$$\Gamma_T(P) = \frac{\delta\,\delta'}{6}(\delta + \delta')\frac{1}{\overline{OP}} - \frac{\delta^2 + \delta\,\delta' + \delta'^2}{6} + \frac{\overline{OP}^2}{6},$$

$$\int_T \Gamma_T(P)\,d\,T = -\frac{\pi}{45}(\delta' - \delta)^3(4\,\delta^2 + 7\,\delta\,\delta' + 4\,\delta'^2).$$

Se, dunque per la funzione $f(P)$, sottoposta all'integrazione, nello strato sferico T di centro in O e raggi, interno a ed esterno a', poniamo

$$f(P) = f(\overline{OP}, M),$$

ove M designa il punto d'intersezione del raggio $O\,P$ con la superficie sferica $\omega(O)$ di centro in O e raggio 1, e, decomposto T negli strati sferici T_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ di raggi

$$\text{interno } a_{k-1} = a + \frac{k-1}{s}(a' - a) \text{ ed esterno } a_k = a + \frac{k}{s}(a' - a),$$

poniamo

$$\int_{T_k} f(P)\,d\,T = \int_{\mathcal{F}T_k} f\frac{d\,\Gamma_{T_k}}{d\,n}\,d\,\sigma =$$

$$\frac{a'-a}{6\,s}[2\,a_{k-1} + a_k)\,a_{k-1}\int_{\omega(0)} f(a_{k-1}, M)\,d\,\omega + (a_{k-1} + 2\,a_k)\,a_k\int_{\omega(0)} f(a_k, M)\,d\,\omega],$$

e quindi

$$\int_T f(P)\,d\,T \equiv \sum_{k=1}^{s}\int_{T_k} f(P)\,d\,T =$$

$$\frac{a'-a}{6\,s}[(2\,a + a_1)\,a\int_{\omega(0)} f(a, M)\,d\,\omega + (2\,a' + a_{s-1})\,a'\int_{\omega(0)} f(a', M)\,d\,\omega$$

$$+ 6\sum_{k=1}^{s-1} a_k^2\int_{\omega(0)} f(a_k, M)\,d\,\omega],$$

si commette un errore ϱ per cui risulta

$$|\varrho| < \frac{\pi}{9} \frac{(a'-a)^2(a'^3-a^3)}{s^2} \max_T |\Delta f|.$$

Un secondo esempio interessante di applicazione dell'interpolazione armonica periferica è fornita dal calcolo del funzionale

$$\Lambda[u] = u(O),$$

O designando il centro di una ipersfera T. In questo secondo esempio, non è necessario richiedere alle funzioni della classe $\{u\}$ la continuità, in tutto T, delle loro derivate parziali del primo ordine. Se si ricorda che [8], supposto $r=3$, detto δ il raggio di T, per una funzione della classe $\{u\}$, nulla su $\mathcal{F}T$, si ha

$$u(O) = \frac{1}{4\pi} \int_T \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\overline{OP}}\right) \Delta u \, dT,$$

si perviene al teorema:

IV. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(P)$ in tre variabili, della classe $\{u\}$ nella sfera di centro O e raggio δ, abbia in O, come le funzioni armoniche, per valore la media di quelli assunti su $\mathcal{F}T$, è che risulti*

$$\int_T \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\overline{OP}}\right) \Delta f \, dT = 0,$$

cioè che la f verifichi l'equazione:

$$\Delta f = \psi(P) - \frac{3(\overline{OP}-\delta)}{\pi\delta^3} \int_T \psi(Q) \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\overline{OQ}}\right) dT(Q),$$

$\psi(P)$ designando un'arbitraria funzione continua in T.

L'interpolazione ν-ipoarmonica periferica si ottiene, in particolare, quando si assuma

$$E \equiv \Delta^\nu = \left(\sum_{h=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right)^\nu,$$

---

[8] Cfr. per es., PICONE [loc cit. [2]], pag. 92.

essendo ν un numero naturale non inferiore a due e la classe $\{u\}$ costituita da funzioni che, in $T - \mathcal{F}T$, possiedono derivate parziali continue dei primi 2ν ordini. Se, per esempio, si suppone il dominio T regolare e la classe $\{u\}$ costituita da funzioni continue in T per le quali riescono, altresì, continue, in tutto T, le derivate parziali dei primi $\nu - 1$ ordini, si può assumere

$$L_k[u] = \frac{d^k u}{d n^k}[\text{su } \mathcal{F}T] \qquad (h = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

n designando l'asse normale alla $\mathcal{F}T$, volto verso l'interno di T. Si sostituisce, allora, al calcolo della $f(P)$, quello della funzione u_f, ν-ipoarmonica, nell'interno di T, verificante, cioè, ivi l'equazione

$$\Delta^\nu u = O,$$

della classe $\{u\}$, che, sulla periferia di T, verifica le ν equazioni

$$\frac{d^k u}{d n^k} = \frac{d^k f}{d n^k} \qquad (h = 0, 1, \ldots, \nu - 1).$$

Ritengo assai interessante un approfondito studio dell'interpolazione ν-ipoarmonica che, ovviamente, deve offrire possibilità, ben più cospicue di quelle date dall'armonica, crescenti con ν.

§ 3. — Interpolazione razionale intera delle funzioni di una variabile reale e calcolo dell'errore.

In un intervallo limitato $T \equiv (a, a')$, dell'asse reale x, si fissino r punti $x_1, x_2, \ldots, x_r$ e si facciano a questi corrispondere r numeri interi, non negativi, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$, ponendo

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r + r = n.$$

Riferendoci sempre alle generalità esposte nel § 1, la classe $\{u\}$ sia costituita da tutte le funzioni di classe n, nell'intervallo (a, a') e si assuma

$$E[u] = \frac{d^n u}{d x^n}, \qquad L_{hk}[u] = u^{(k)}(x_h)$$

$$(h = 1, 2, \ldots, r; \; k = 0, 1, \ldots, \nu_h).$$

Comunque si assegnino i numeri l_{hk}, esiste sempre una ed una sola soluzione delle equazioni

$$\frac{d^n u}{d x^n} = 0 ,$$

$$u^{(k)}(x_h) = l_{hk} \quad (h = 1, 2, \ldots, r; \ \ k = 0, 1, \ldots, \nu_h),$$

ed è data dal polinomio, al più di grado $n-1$,

$$u(x) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} l_{hk} P_{hk}(x),$$

ove $P_{hk}(x)$ è quello fra tali polinomi, verificante le n equazioni

$$P_{hk}^{(j)}(x_i) \begin{cases} = 0, & \text{per } \ |h-i| + |k-j| > 0 . \\ = 1, & \text{per } \ h = i \text{ e } k = j, \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r; \ \ j = 0, 1, \ldots, \nu_i)$$

il quale, avendo posto

$$p_h(x) = \frac{1}{(x - x_h)^{\nu_h+1}} \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{\nu_i+1},$$

$$q_h(x) = \frac{1}{p_h(x)} .$$

ha l'espressione

(1) $$P_{hk}(x) = \frac{p_h(x)}{k!} \sum_{s=k}^{\nu_h} \frac{q_h^{(s-k)}(x_h)}{(s-k)!} (x - x_h)^s . \text{ [9]}$$

Data, ad arbitrio, una funzione $f(x)$, della classe n in (a, a'), posto

$$f^{(k)}(x_h) = f_{hk} \quad (h = 1, 2, \ldots, r; \ \ k = 0, 1, \ldots, \nu_h).$$

come funzione interpolatrice u_f della f si assume, nell'interpolazione razionale intera d'ordine n, coi *punti fondamentali* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ e *coi contatti*

---

[9] Cfr., per esempio, PICONE, *Lezioni di Analisi Matematica per gli allievi d'Ingegneria*, II Corso, Anno accademico 1950-51, n^0 11, p. 57 [Edizioni Studium Urbis, Roma Città Universitaria].

degli ordini $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$,

$$u_f(x) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} f_{hk} \, P_{hk}(x) \,. \tag{2}$$

Per calcolare ora l'errore $f(x) - u_f(x)$, bisogna ottenere la soluzione delle equazioni (2) del § 1. Nel caso attuale, esse sono:

$$\frac{d^n u}{d x^n} = e(x)\,, \qquad u^{(k)}(x_h) = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, r\,;\ k = 0, 1, \ldots, \nu_h)\,. \tag{3}$$

Tutte le soluzioni della prima si ottengono ponendo

$$u(x) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} l_{hk} \, P_{hk}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \, e(\xi) \, d\xi \,,$$

ove x_0 è un punto arbitrariamente fissato in T, con le n costanti arbitrarie l_{hk}, e dunque per verificare le seconde delle (3) si deve porre

$$l_{hk} = -\int_{x_0}^{x_h} \frac{(x_h-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \, e(\xi) \, d\xi \,.$$

Si trova, pertanto, come errore $R(x)$ commesso, nell'interpolazione considerata,

$$\begin{gathered} R(x) = f(x) - u_f(x) = \\ \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \, d\xi - \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} P_{hk}(x) \int_{x_0}^{x_h} \frac{(x_h-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f^{(n)}(\xi) \, d\xi \,. \end{gathered} \tag{4'}$$

Si ha dunque

$$R(x_0) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} P_{hk}(x_0) \int_{x_h}^{x_0} \frac{(x_h-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f^{(n)}(\xi) \, d\xi \,,$$

e poichè x_0 è un punto qualunque di (a, a'), possiamo anche scrivere

$$R(x) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} P_{hk}(x) \int_{x_h}^{x} \frac{(x_h-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f^{(n)}(\xi) \, d\xi \,. \tag{4''}$$

Assumendo, nella (4'), il punto x_0 nell'estremo a dell'intervallo T e facendo uso delle funzioni $G_\nu(x, \xi)$, definite a pag. 218, posto

$$G(x, \xi) = G_{n-1}(x, \xi) - \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} P_{hk}(x)\, G_{n-k-1}(x_h, \xi),$$

si ha pure, la solita espressione dell'errore:

$$f(x) - u_f(x) = \int_a^{a'} G(x, \xi) f^{(n)}(\xi)\, d\xi, \tag{5}$$

mediante una funzione di Green.

Se ora $\lambda(x)$ è una funzione, fissata ad arbitrio, sommabile nell'intervallo (a, a'), riesce definito in $\{u\}$ il funzionale

$$\Lambda[u] = \int_a^{a'} \lambda(x)\, u(x)\, dx,$$

e ponendo, per ogni funzione $f(x)$ di $\{u\}$,

$$\int_a^{a'} \lambda(x) f(x)\, dx = \int_a^{a'} \lambda(x)\, u_f(x)\, dx = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} f_{hk} \int_a^{a'} \lambda(x)\, P_{hk}(x)\, dx. \tag{6}$$

si commette l'errore

$$\varrho = \int_a^{a'} \Gamma_\lambda(\xi) f^{(n)}(\xi)\, d\xi, \tag{7}$$

ove

$$\Gamma_\lambda(\xi) = \int_a^{a'} \lambda(x)\, G(x, \xi)\, dx.$$

Nella (6) non compaiono quelli fra i valori f_{hk} per ciascuno dei quali la funzione $\lambda(x)$ è ortogonale, nell'intervallo (a, a'), al corrispondente polinomio $P_{hk}(x)$ e pertanto, scegliendo tale funzione in modo che riesca ortogonale ad alcuni di questi polinomi, si possono ignorare, per il calcolo approssimato di $\Lambda[f]$, mediante la (6), i corrispondenti valori di $f^{(k)}(x_h)$, qualora questi risultassero di calcolo difficile o di incerta approssimazione.

Data ora una funzione $F(x)$, sommabile nell'intervallo (a, a'), si può applicare la (6) al calcolo approssimato dell'integrale

$$\int_a^{a'} F(x)\, d\, x\,,$$

con un errore maggiorabile, tutte le volte che si riesca a decomporre la $F(x)$ nel prodotto

$$F(x) = \lambda(x) f(x)\,,$$

di una funzione $\lambda(x)$, sommabile nell'intervallo (a, a'), per una funzione $f(x)$ di classe $n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r + r$, con la condizione che si sappiano calcolare, con errore maggiorabile, gli n integrali

$$\int_a^{a'} \lambda(x)\, P_{hk}(x)\, d\, x \qquad (h = 1, 2, \ldots, r\,;\, k = 0, 1, \ldots, \nu_r)\,,$$

e si sappia maggiorare l'integrale (7).

Farò ora l'applicazione immediata di queste formole generali ad alcuni casi particolari ben semplici. I risultati a cui si perviene sono, in parte, notissimi e se indicherò anche questi lo farò e per la nuova sistemazione che essi ricevono, nel quadro delle precedenti vedute generali, e per farne al § 6, un fruttuoso raffronto con quelli che vi esporrò, concernenti il calcolo dell'errore in talune formole di cubatura, che io ritengo nuove.

Posto

$$a' - a = 2\,\alpha\,, \qquad a' + a = 2\, a_0\,,$$

conviene introdurre la variabile t, legata alla x dall'eguaglianza

$$x = a_0 + \alpha\, t\,,$$

onde, posto

$$f(a_0 + \alpha\, t) = \varphi(t)\,, \tag{8}$$

si trova

$$\int_a^{a'} f(x)\, d\, x = \frac{a' - a}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, d\, t\,.$$

L'interpolazione centrale si ottiene quando, per essa, si considerano soltanto i valori che la $f(x)$ e talune sue successive derivate, a cominciare dalla prima, assumono nel punto di mezzo dell'intervallo T. Supposta $f(x)$ di classe *uno*, si ha, per esempio,

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(\tau)\, d\tau$$

e quindi

$$(9') \qquad \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, dt = 2\varphi(0) + \int_0^1 [\varphi'(t) - \varphi'(-t)](1-t)\, dt,$$

supposta di classe *due*, si ha

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\, t + \int_0^t (1-\tau)\, \varphi''(\tau)\, d\tau,$$

e quindi anche

$$(9'') \qquad \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, dt = 2\varphi(0) + \int_{-1}^{1} \varphi''(t) \frac{(1-|t|)^2}{2}\, dt.$$

Donde, ponendo (formola di GAUSS)

$$\int_a^{a'} f(x)\, dx = (a'-a) f\left(\frac{a+a'}{2}\right),$$

si commette un errore dato da

$$(10') \qquad \varrho = \frac{(a'-a)^2}{4} \int_0^1 [f'(a_0 + \alpha t) - f'(a_0 - \alpha t)](1-t)\, dt,$$

se $f(x)$ è di classe *uno*, e, se $f(x)$ è di classe due, dato anche da

$$(10'') \qquad \varrho = \frac{(a'-a)^3}{16} \int_{-1}^{1} f''(a_0 + \alpha t)(1-|t|)^2\, dt, \text{ [10]}$$

[10] Supposta $f(x)$ di classe due, un'ovvia integrazione per parti fornisce, del resto, subito

$$\int_0^1 [\varphi'(t) - \varphi'(-t)](1-t)\, dt = \int_0^1 [\varphi''(t) + \varphi''(-t)] \frac{(1-t)^2}{2}\, dt = \int_{-1}^{1} \varphi''(t) \frac{(1-|t|)^2}{2}\, dt,$$

cioè l'identità delle due espressioni (10') e (10'') di ϱ.

che può, dunque, essere così maggiorato:

$$(11') \qquad |\varrho| \leqq \frac{(a'-a)^2}{8} \max_T |f'(x) - f'(2a_0 - x)|,$$

nel primo caso, e, com'è ben noto, anche così:

$$(11'') \qquad |\varrho| \leqq \frac{(a'-a)^3}{24} \max_T |f''(x)|,$$

nel secondo.

L'interpolazione periferica si ottiene quando, per essa, si considerano soltanto i valori che la $f(x)$ e talune sue successive derivate, a cominciare dalla prima assumono agli estremi dell'intervallo T. Supposta $f(x)$ di classe *due*, sostituendo, per esempio, a $\varphi(t)$ la funzione interpolatrice $u_\varphi(t)$, al più di primo grado, verificante le condizioni

$$u_\varphi(-1) = \varphi(-1), \quad u_\varphi(1) = \varphi(1),$$

cioè la funzione

$$u_\varphi(t) = \varphi(1)\frac{1+t}{2} + \varphi(-1)\frac{1-t}{2},$$

si commette un errore dato da [cfr. la (4'')]

$$(12) \qquad R(t) = \varphi(t) - u_\varphi(t) =$$

$$\frac{1+t}{2}\int_1^t (1-\tau)\varphi''(\tau)\,d\tau - \frac{1-t}{2}\int_{-1}^t (1+\tau)\varphi''(\tau)\,d\tau$$

donde, ponendo (formola di BEZOUT)

$$\int_a^{a'} f(t)\,dt \equiv \frac{a'-a}{2}\int_{-1}^1 \varphi(t)\,dt = \frac{a'-a}{2}\int_{-1}^1 u_\varphi(t)\,dt \equiv \frac{a'-a}{2}[f(a) + f(a')]$$

si commette un errore

$$\varrho = -\frac{a'-a}{4}\int_{-1}^1 \varphi''(t)(1-t^2)\,dt = -\frac{(a'-a)^3}{16}\int_{-1}^1 f''(a_0 + \alpha t)(1-t^2)\,dt$$

che può essere, com'è ben noto, così maggiorato [cfr. la nota (7)]:

$$|\varrho| \leqq \frac{(a'-a)^3}{12} \max_T |f''(x)|, \tag{13}$$

Abbiamo così, (di nuovo!) considerata l'interpolazione armonica periferica del § prec., nel caso delle funzioni di una sola variabile reale.

L'interpolazione centro-periferica si ottiene quando, per essa, si considerano soltanto i valori che la $f(x)$ e talune sue successive derivate a cominciare dalla prima, assumono nel punto di mezzo e agli estremi dell'intervallo T. Supposta $f(x)$ di classe *tre,* per la funzione interpolatrice $u_{1\varphi}(t)$, al più di secondo grado, verificante (per esempio) le condizioni

$$u_{1\varphi}(-1) = \varphi(-1), \; u_{1\varphi}(0) = \varphi(0), \; u_{1\varphi}(1) = \varphi(1),$$

si ha

$$u_{\varphi}(t) = \frac{t(1+t)}{2}\varphi(1) + (1-t^2)\varphi(0) - \frac{t(1-t)}{2}\varphi(-1),$$

e per l'errore $R_1(t)$, ove si assuma il punto x_0, della formola generale (4'), nel punto zero,

$$R_1(t) = \varphi(t) - u_{1\varphi}(t) = \int_0^t \frac{(1-\tau)^2}{2}\varphi'''(\tau)\,d\tau \tag{14}$$

$$-\frac{t(1+t)}{2}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^2}{2}\varphi'''(\tau)\,d\tau - \frac{t(1-t)}{2}\int_{-1}^0 \frac{(1+\tau)^2}{2}\varphi'''(\tau)\,d\tau .$$

Supposta $f(x)$ di classe *quattro,* per la funzione interpolatrice $u_{2\varphi}(t)$, al più di terzo grado, verificante le condizioni

$$u_{2\varphi}(0) = \varphi(0), u'_{2\varphi}(0) = \varphi'(0), u_{2\varphi}(-1) = \varphi(-1), u_{2\varphi}(1) = \varphi(1),$$

si ha

$$u_{2\varphi}(t) = \frac{t^2(1+t)}{2}\varphi(1) + \frac{t^2(1-t)}{2}\varphi(-1) + (1-t^2)\varphi(0) + (t-t^3)\varphi'(0),$$

essa (cfr. § prec.) è una funzione interpolatrice *bi-ipoarmonica.* Per il relativo errore $R_2(t)$, ove si assuma il punto x_0 della (4') nel punto zero si trova

$$R_2(t) = \varphi(t) - u_{2\varphi}(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{6}\varphi^{\mathrm{IV}}(\tau)\,d\tau \tag{15}$$

$$-\frac{t^2(1+t)}{2}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^3}{6}\varphi^{\mathrm{IV}}(\tau)\,d\tau - \frac{t^2(1-t)}{2}\int_{-1}^0 \frac{(2+\tau)^3}{6}\varphi^{\mathrm{IV}}(\tau)\,d\tau .$$

Dalla (14) e dalla (15) si ricava che, ponendo (formola di CAVALIERI-SIMPSON)

$$\int_a^{a'} f(x)\,d\,x = \frac{a'-a}{2}\int_{-1}^{1} u_{1\varphi}(t)\,d\,t \equiv \frac{a'-a}{2}\int_{-1}^{1} u_{2\varphi}(t)\,d\,t \equiv$$

$$\frac{a'-a}{6}\,[f(a)+4f(a_0)+f(a')],$$

si commette un errore dato da

$$(16)\qquad \varrho = \frac{a'-a}{2}\int_{-1}^{1} R_1(t)\,d\,t = -\frac{a'-a}{2^2.3}\int_0^1 [\varphi'''(t)-\varphi'''(-t)]\,(1-t)^2\,t\,d\,t =$$

$$-\frac{(a'-a)^4}{2^5.3}\int_0^1 [f'''(a_0+\alpha\,t)-f'''(a_0-\alpha\,t)]\,(1-t)^2\,t\,d\,t\,,$$

se $f(x)$ è di classe *tre*, dato anche da

$$(17)\qquad \varrho = \frac{a'-a}{2}\int_{-1}^{1} R_2(t)\,d\,t = -\frac{a'-a}{2^4.3^2}\int_{-1}^{1} \varphi^{\mathrm{IV}}(t)\,(1-|t|)^3\,(1+3\,|t|)\,dt =$$

$$-\frac{(a'-a)^5}{2^8.3^2}\int_{-1}^{1} f^{\mathrm{IV}}(a_0+\alpha\,t)\,(1-|t|)^3\,(1+3\,|t|)\,d\,t,$$

se $f(x)$ è di classe *quattro* [11].

---

[11] L'identità delle due espressioni (15) e (17) di ϱ, ottenute quando $f(x)$ è di classe quattro, si verifica subito mediante un'integrazione per parti. Avendosi infatti

$$\int (1-t)^2\,t\,d\,t = -\frac{(1-t)^3}{3}\,t - \frac{(1-t)^4}{3.4}\,,$$

risulta

$$\int_0^1 [\varphi'''(t)-\varphi'''(-t)]\,(1-t)^2\,t\,d\,t = \int_0^1 [\varphi^{\mathrm{IV}}(t)+\varphi^{\mathrm{IV}}(-t)]\left[\frac{(1-t)^3}{3}\,t + \frac{(1-t)^4}{3.4}\right]d\,t$$

$$= \frac{1}{2^2.3}\int_0^1 [\varphi^{\mathrm{IV}}(t)+\varphi^{\mathrm{IV}}(-t)\,(1-t)^3\,(1+3\,t)\,d\,t\,.$$

LA (16) fu data da CANTELLI (nella nota « *Resti nelle formole di quadratura* » in Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1915-1916) e la (17) da PEANO (nella nota « *Resto nelle formole di gradratura espresso con un integrale definito* » in Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1913).

Si ha, dunque, nel primo caso, la maggiorazione dell'errore

$$|\varrho| \leqq \frac{(a'-a)^4}{1152} \max_T |f'''(x) - f'''(2a_0 - x)|,$$

e, nel secondo, anche la seguente

$$|\varrho| \leqq \frac{(a'-a)^5}{2880} \max_T |f^{\mathrm{IV}}(x)|.$$

§ 4. — Interpolazione razionale intera delle funzioni olomorfe di una variabile complessa e calcolo dell'errore.

Indicherò con A un *campo* (cioè un insieme di punti aperto e connesso) del piano complesso $z = x + iy$. Quando menzionerò una curva del piano, sottintenderò sempre che essa sia continua e rettificabile. Sussiste il teorema seguente.

V. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $e(z)$, olomorfa nel campo A, sia ivi la derivata n^{ma} di una funzione $u(z)$, essa pure olomorfa in A, è che, comunque si assuma in A una curva chiusa C, si abbia sempre*

$$\int_C e(z) z^k \, dz = 0, \quad \text{per} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ (}^{12}\text{)}.$$

Il teorema, ben noto dagli elementi per $n = 1$, si dimostra subito. La condizione è necessaria: Infatti, per la funzione $u(z)$, olomorfa in A, comunque si fissi un numero non negativo k, non superiore a $n-1$, integrando successivamente k volte per parti, lungo una curva chiusa C, tracciata in A, si ha

$$\int_C u^{(n)}(z) z^k \, dz = -k \int_C u^{(n-1)}(z) z^{h-1} \, dz = k(k-1) \int_C u^{(n-2)}(z) z^{h-2} \, dz =$$

$$\ldots = (-1)^k k! \int_C u^{(n-k)}(z) \, dz = 0.$$

---

(12) Basterebbe considerare, in luogo di curve arbitrarie continue e rettificabili, soltanto le poligonali, od anche, soltanto, quelle particolari poligonali — che soglio, nei miei corsi, chiamare *coordinate* — per le quali ogni lato è parallelo ad uno degli assi coordinati.

La condizione è sufficiente: Suppostala soddisfatta, fissato a piacere un punto z_0 in A, le n funzioni di z:

$$(1) \qquad e_k(z) = (C)\int_{z_0}^{z} e(\zeta)\,\zeta^k\,d\,\zeta \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

ottenute, integrando la $e(z)\,z^k$ lungo una qualunque curva C tracciata in A, congiungente il punto z_0 col punto z, riescono olomorfe in A, e si ha

$$e'_k(z) = e(z)\,z^k.$$

La funzione

$$(2) \qquad u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{z^{n-h-1}}{(n-h-1)!}\,\frac{e_k(z)}{k!},$$

è pur essa olomorfa in A, e si ha

$$u'(z) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{z^{n-k-2}}{(n-k-2)!}\,\frac{e_k(z)}{k!} + e(z)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{z^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\,\frac{z^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{z^{n-k-2}}{(n-h-2)!}\,\frac{e_k(z)}{k!},$$

. . . .

$$u^{(n-1)}(z) = e_0(z), \quad u^{(n)}(z) = e(z).$$

Se, adottandovi una curva C d'integrazione indipendente da k, introduciamo le (1) nella (2), si perviene alla seguente espressione della $u(z)$, ben consueta nel campo reale, che impiegheremo sempre in seguito,

$$u(z) = (C)\int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^{n-1}}{(n-1)!}\,e(\zeta)\,d\,\zeta.$$

Fissati, ad arbitrio, in A, gli r punti $z_1, z_2, \dots, z_r$, si facciano a questi corrispondere r numeri interi non negativi $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ e si ponga (cfr. § prec.)

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r + r = n,$$

$$p_h(z) = \frac{1}{(z-z_h)^{\nu_h+1}} \prod_{i=1}^{r} (z-z_i)^{\nu_i+1},$$

$$q_h(z) = 1 / p_h(z).$$

Il polinomio, al più di grado $n-1$,

$$P_{hk}(z) = \frac{p_h(z)}{k!} \sum_{s=k}^{\nu_h} \frac{q_h^{(s-k)}(z_h)}{(s-k)!} (z - z_h)^s ,$$

$$(h = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 0, 1, \ldots, \nu_h),$$

verifica le equazioni

$$P_{hk}^{(j)}(z_i) \begin{cases} = 0, & \text{per} \quad |h-i| + |k-j| > 0, \\ = 1, & \text{per} \quad h = i \ \text{ e } \ k = j, \end{cases}$$

e la totalità dei polinomi $P(z)$, al più di grado $n-1$, è descritta dal polinomio

$$P(z) = \sum_{h=1}^{r} \cdot \sum_{k=0}^{\nu_h} l_{hk} P_{hk}(z),$$

al variare comunque delle costanti l_{hk}, per le quali si ha

$$P^{(k)}(z_h) = l_{hk} .$$

Sia ora $e(z)$, un'assegnata arbitraria funzione olomorfa in A, derivata n^{ma} di una funzione $u(z)$, essa pure olomorfa in A. La differenza

$$u(z) - (C)\int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^{n-1}}{(n-1)!} e(\zeta)\, d\zeta,$$

è un polinomio, al più di grado $n-1$, e si avrà pertanto,

(3) $$u(z) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} l_{hk} P_{hk}(z) + (C)\int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^{n-1}}{(n-1)!} e(\zeta)\, d\zeta .$$

Al variare, comunque, delle costanti l_{hk}, la $u(z)$, data dalla (3), descrive pertanto la totalità delle soluzioni dell'equazione:

$$u^{(n)}(z) = e(z) .$$

Data un'arbitraria funzione $f(z)$, olomorfa nel campo A, posto

$$f^{(k)}(z_h) = f_{hk} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 0, 1, \ldots, \nu_h),$$

il polinomio, al più di grado $n-1$,

$$(4)\qquad u_f(z) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{h=0}^{\nu_r} f_{hk}\, P_{hk}(z) ,$$

si assume come *funzione interpolatrice razionale intera,* nel campo A, della funzione $f(z)$, *coi punti fondamentali* $z_1, z_2, \ldots, z_r$ e *coi contatti degli ordini* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$. L'errore $R(z) = f(z) - u_f(z)$, commesso in tale interpolazione, è la soluzione dell'equazione

$$u^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) ,$$

che verifica le condizioni

$$(5)\qquad u^{(k)}(z_h) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 0, 1, \ldots, \nu_h) .$$

$R(z)$ avrà dunque l'espressione (3), postovi $f^{(n)}(z)$ in luogo di $e(z)$, e saranno verificate le (5), soltanto se vi si assume

$$l_{hk} = -(C_{hk}) \int_{z_0}^{z_h} \frac{(z_h - \zeta)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f^{(n)}(\zeta)\, d\zeta .$$

Si hanno dunque (cfr. § prec.) le due espressioni di $R(z)$:

$$(6')\qquad \begin{aligned} R(z) = {} & (C) \int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\zeta)\, d\zeta \\ & - \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} (C_{hk}) \int_{z_0}^{z_h} P_{hk}(z) \frac{(z_h - \zeta)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f^{(n)}(\zeta)\, d\zeta , \end{aligned}$$

$$(6'')\qquad R(z) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{h=0}^{\nu_h} (C_{hk}) \int_{z_h}^{z} P_{hk}(z) \frac{(z_h - \zeta)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f^{(n)}(\zeta)\, d\zeta .$$

Dalla seconda di queste si deduce:

$$|R(z)| \leq \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} \max_{C_{hk}} |f^{(n)}(z)| \frac{(\text{lung } C_{hk})^{n-k}}{(n-k)!} |P_{hk}(z)| .$$

È da aspettarsi che le espressioni (6′) e (6″) dell'errore nell'interpolazione considerata possano essere utilizzate con profitto nella teoria dell'approssimazione delle funzioni olomorfe mediante polinomi interpolatori. Si può, in particolare, proporsi il problema seguente: fissati gli r punti $z_1, z_2, \ldots, z_r$ nel campo A, posto $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_r = \nu$, determinare l'insieme dei punti di A per cui riesce:

$$\lim_{\nu \to \infty} u_f(z) = f(z).$$

Esso, del tutto elementare per $r = 1$, non è stato ancora, che io mi sappia, studiata in generale.

Vogliamo, in proposito, dare uno sviluppo in serie di $R(z)$ che si deduce dalla sua espressione (6′), nell'ipotesi che i punti $z_1, z_2, \ldots, z_r$ siano contenuti nel massimo campo circolare $\Gamma(z_0)$, con centro nel punto z_0, contenuto in A. Si ha, per z in $\Gamma(z_0)$,

$$f^{(n)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(n+s)}(z_0)}{s!}(z - z_0)^s,$$

donde, dalla (6′), omettendo l'indicazione delle curve d'integrazione,

$$R(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(n+s)}(z_0)}{s!}\left[\int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^{n-1}}{(n-1)!}(\zeta - z_0)^s\, d\zeta \right.$$

$$\left. - \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=0}^{\nu_h} P_{hk}(z) \int_{z_0}^{z_h} \frac{(z_h - \zeta)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}(\zeta - z_0)^s\, d\zeta\right],$$

ma, per ogni intero l,

$$\int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^l}{l!}(\zeta - z_0)^s\, d\zeta = s!\,\frac{(z-z_0)^{l+s+1}}{(l+s+1)!},$$

donde

$$R(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(n+s)}(z_0)}{(n+s)!}\left[(z-z_0)^{n+s} - \sum_{h=1}^{r}\sum_{k=0}^{\nu_h} P_{hk}(z)\frac{d^k}{d z_h^k}(z_h - z_0)^{n+s}\right].$$

Ora, il polinomio di grado $n + s$:

$$P_s(z) = (z-z_0)^{n+s} - \sum_{h=1}^{r}\sum_{k=0}^{\nu_h} P_{hk}(z)\frac{d^k}{d z_h^k}(z_h - z_0)^{n+s}$$

è infinitesimo, nel punto z_h, d'ordine ν_h; se, dunque, poniamo

$$\Pi(z) = (z - z_1)^{\nu_1+1} (z - z_2)^{\nu_2+1} \dots (z - z_h)^{\nu_h+1},$$

osservando che

$$\lim_{z\to\infty} (P_s(z)/(z - z_0)^{n+s}) = 1,$$

si trova

$$P_0(z) = \Pi(z), \quad P_s(z) = \Pi(z)\,[(z - z_0)^s + Q_{s-1}(z)],$$

ove $Q_{s-1}(z)$ designa un certo polinomio di grado $s-1$. Si ha, in definitiva,

$$R(z) = (z-z_1)^{\nu_1+1}(z-z_2)^{\nu_2+1}\dots(z-z_r)^{\nu_r+1}\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0+Q_0) + \dots\right].$$

§ 5. — Interpolazione trigonometrica delle funzioni di una variabile reale e calcolo dell'errore.

La funzione $f(x)$, della variabile reale x, sia di classe $2n+1$, nell'intervallo $T \equiv (a, a')$ e siano $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ ($x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1}$, $x_{2n+1} - x_1 < a' - a$) $2n+1$ punti di T, arbitrariamente fissati. Posto

$$a' - a = 2\alpha, \quad a + a' = 2a_0,$$

$$x = a_0 + \frac{\alpha}{\pi} t,$$

$$x_h = a_0 + \frac{\alpha}{\pi} t_h \qquad (h = 1, 2, \dots, 2n+1),$$

$$f\left(a_0 + \frac{\alpha}{\pi} t\right) = \varphi(t),$$

$$p_h(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{t - t_h}{2}} \prod_{i=1}^{2n+1} \operatorname{sen}\frac{t - t_i}{2},$$

nel calcolo approssimato della $\varphi(t)$ (e quindi della $f(x)$) per *interpolazione trigonometrica, coi punti fondamentali $t_1, t_2, \dots, t_{2n+1}$ e coi contatti d'ordine zero,* si assume come funzione interpolatrice della $\varphi(t)$, nell'intervalto $(-\pi, \pi)$, il polinomio trigonometrico d'ordine $2n$ seguente:

$$u_\varphi(t) = \sum_{h=1}^{2n+1} \varphi(t_h) \frac{p_h(t)}{p_h(t_h)},$$

che verifica le eguaglianze

$$u_\varphi(t_h) = \varphi(t_h), \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2n+1).$$

Anche tale procedimento interpolatorio rientra, com'è ben manifesto, in quello generale considerato al § 1. Basta porvi

$$E \equiv \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{d^2}{d t^2} + s^2\right) \frac{d}{d t},$$

$$L_h[u] \equiv u(t_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots 2n+1).$$

L'errore $R(t) = \varphi(t) - u_\varphi(t)$, connesso nella considerata interpolazione, è dunque dato dalla soluzione $R(t)$ dalle seguenti equazioni:

(1) $$E[u] \equiv \prod_{s=1}^{2n} \left(\frac{d^2}{d t^2} + s^2\right) \frac{d u}{d t} = E[\varphi],$$

(2) $$u(t_h) = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2n+1).$$

La soluzione della (1), ridotta omogenea, verificate le condizioni iniziali

(3) $$\begin{cases} u^{(h)}(0) = 0 & (h = 0, 1, \ldots, 2n-1), \\ u^{(2n)}(0) = 1 & \end{cases}$$

è data da

$$u(t) = q_n \left(\operatorname{sen} \frac{t}{2}\right)^{2n},$$

ove q_n è il numero razionale positivo

$$q_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \binom{2n}{s} (n-s)^{2n},$$

e quindi tutte le soluzioni della (1) sono date dalla formola

$$u(t) = \sum_{h=1}^{2n+1} l_h \frac{p_h(t)}{p_h(t_h)} + q_n \int_{t_0}^{t} \left(\operatorname{sen} \frac{t-\tau}{2}\right)^{2n} E[\varphi(\tau)]\, d\tau,$$

ove t_0 è un punto arbitrariamente fissato nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ e le l_h sono costanti arbitrarie. Per varificare le condizioni (2) si deve porre

$$l_h = -q_n \int_{t_0}^{t_h} \left(\operatorname{sen} \frac{t_h - \tau}{2}\right)^{2n} E[\varphi(\tau)]\, d\tau,$$

e si perviene così alle due seguenti espressioni dell'errore

$$(4')\quad R(t) = q_n \int_{t_0}^{t} \left(\operatorname{sen} \frac{t-\tau}{2}\right) E[\varphi(\tau)]\, d\tau - \sum_{h=1}^{2n+1} q_n \frac{p_h(t)}{p_h(t_h)} \int_{t_0}^{t_h} \left(\operatorname{sen} \frac{t_h-\tau}{2}\right)^{2n} E[\varphi(\tau)]\, d\tau,$$

$$(4'')\quad R(t) = \sum_{h=1}^{2n+1} q_n \frac{p_h(t)}{p_h(t_h)} \int_{t_h}^{t} \left(\operatorname{sen} \frac{t_h-\tau}{2}\right)^{2n} E[\varphi(\tau)]\, d\tau,$$

nella prima nelle quali t_0 è un punto arbitrario dell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

Così, per esempio, per $n = 1$, $t_1 = -\frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$, $t_3 = \frac{\pi}{2}$, si trova

$$u_\varphi(t) = \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \frac{1 - \cos t - \operatorname{sen} t}{2} + \varphi(0) \cos t + \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{1 - \cos t + \operatorname{sen} t}{2},$$

e collocando t_0 nel punto zero, dalla (4'),

$$R(t) = \int_0^t [1 - \cos(t-\tau)][\varphi'''(\tau) + \varphi'(\tau)]\, d\tau$$

$$+ \frac{1 - \cos t - \operatorname{sen} t}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \operatorname{sen} \tau)(\varphi''' + \varphi')\, d\tau$$

$$- \frac{1 - \cos t + \operatorname{sen} t}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen} \tau)(\varphi''' + \varphi')\, d\tau .$$

Ne segue che, ponendo

$$(5)\quad \int_a^{a'} f(x)\, dx \equiv \frac{a'-a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = \frac{a'-a}{2} \left[f\left(a_0 + \frac{\alpha}{2}\right) + f\left(a_0 - \frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

Si commette l'errore

$$(6)\quad \varrho = \frac{a'-a}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(t)\, dt$$

$$= (a'-a) \int_0^{\pi} [\varphi'''(t) + \varphi'(t) - \varphi'''(-t) - \varphi'(-t)]\, \Gamma(t)\, dt,$$

ove

$$
(7) \qquad \Gamma(t) \begin{cases} = -\dfrac{t}{2\pi} + \left(1 - \dfrac{1}{\pi}\right)\dfrac{\operatorname{sen} t}{2}, & \text{per} \quad 0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}, \\ = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t + \operatorname{sen} t}{2\pi}, & \text{per} \quad \dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi . \end{cases}
$$

Esso è dunque nullo quando e solo quando la funzione

$$\varphi'''(t) + \varphi'(t) - \varphi'''(-t) - \varphi'(-t)$$

è ortogonale, nell'intervallo $(-\pi, \pi)$, alla funzione $\Gamma(t)$, definita dalla (7), la quale, continua in tale intervallo, con la sua derivata prima, vi è nulla agli estremi e positiva nell'interno. In particolare, l'errore è nullo se la funzione $\varphi'''(t) + \varphi'(t)$ è pari. In ogni caso se $f(x)$ è reale, data la positività di $\Gamma(\tau)$ nell'intervallo $(0, \pi)$, esiste un punto τ, interno all'intervallo stesso, per il quale

$$
\begin{aligned}
\varrho &= (a' - a)\,[\varphi'''(\tau) + \varphi'(\tau) - \varphi'''(-\tau) - \varphi'(-\tau)] \int_0^\pi \Gamma(t)\, d t \\
&= (a' - a)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)[\varphi'''(\tau) + \varphi'(\tau) - \varphi'''(-\tau) - \varphi'(-\tau)] .
\end{aligned}
$$

Se $f(x)$ è di classe *quattro,* si deduce dalla (6), con un'integrazione per parti, che si ha anche

$$\varrho = (a' - a) \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi^{\mathrm{IV}}(t) + \varphi''(t)] \int_{|t|}^{\pi} \Gamma(\tau)\, d\tau\, d t ,$$

e quindi, se $f(x)$ è reale, l'esistenza di un punto τ, interno all'intervallo $(-\pi, \pi)$, per cui

$$\varrho = \frac{\pi^2}{8}(a' - a)\,[\varphi^{\mathrm{IV}}(\tau) + \varphi''(\tau)] ,$$

cioè l'esistenza di un punto ξ interno all'intervallo (a, a') per cui

$$\varrho = \frac{1}{32}(a' - a)^3 \left[\left(\frac{a' - a}{2\pi}\right)^2 f^{\mathrm{IV}}(\xi) + f''(\xi)\right] .$$

Ad un'altra espressione dell'errore ϱ, di cui è affetta la (5), si perviene anche, ovviamente, a mezzo dell'interpolazione razionale intera di primo grado, secondo la quale si trova, supposta la $f(x)$ di classe due,

$$\varrho = \frac{(a'-a)^3}{8} \int_{-1}^{1} f''(a_0 + \alpha t)\, \Gamma^*(t)\, dt ,$$

ove $\Gamma^*(t)$ è funzione pari, e

$$\Gamma^*(t) \begin{cases} = \dfrac{t^2}{2}, & \text{per} \quad 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}, \\[2ex] = \dfrac{(1-t)^2}{2}, & \text{per} \quad \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 . \end{cases}$$

Se $f(x)$ è reale, esiste dunque anche un punto ξ^*, interno all'intervallo (a, a'), per il quale

$$\varrho = \frac{(a'-a)^3}{8} f''(\xi^*) \int_{-1}^{1} \Gamma^*(t)\, dt = \frac{(a'-a)^3}{96} f''(\xi^*) .$$

e ϱ è nullo anche, per esempio, quando $f''(a_0 + \alpha t)$ è funzione dispari di t. Ecc.

§ 6. — Interpolazione competente alla derivazione totale, in un intervallo del piano, delle funzioni di due variabili reali.

Considereremo, in questo paragrafo finale, per una funzione $f(x, y)$ delle due variabili reali x e y, di una determinata classe n in un intervallo T del piano (cfr. l'Introduzione), alcuni procedimenti interpolatori, in quell'intervallo, che competono alla *derivazione totale l'ordine non superiore* a n, cioè agli operatori

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k\, \partial y^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) .$$

e riescono — come vedremo — in stretta analogia con quelli, considerati al § 3, per le funzioni di una variabile reale [13].

---

[13] Si può farne sistematicamente l'estensione all'interpolazione delle funzioni di quante si vogliano variabili reali $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, competente alla derivazione totale in queste variabili, cioè agli operatori

$$\frac{\partial^{rk}}{\partial x_1^k\, \partial x_2^k \cdots \partial x_r^k},$$

ma di ciò si occuperà il mio valente collaboratore Prof. CARLO BIRINDELLI.

Detti (a, b) e (a', b') i punti estremi, inferiore e superiore, dell'intervallo T, i calcoli e le formole si semplificano notevolmente se, posto

$$a' - a = 2\alpha, a' + a = 2a_0, b' - b = 2\beta, b' + b = 2b_0;$$

si opera il cambiamento di variabili

$$x = a_0 + \alpha s, y = b_0 + \beta t,$$

con che l'intervallo rettangolare T, del piano (x, y), viene rappresentato nell'intervallo quadrato Q, di punti estremi inferiore $(-1, -1)$ e superiore $(1, 1)$, del piano (s, t), e, posto

$$f(a_0 + \alpha s, b_0 + \beta t) = \varphi(s, t),$$

i procedimenti interpolatori per la funzione $f(x, y)$, nell'intervallo rettangolare T del piano (xy), equivalgono a quelli della $\varphi(s, t)$ nell'intervallo quadrato Q del piano (s, t). Non perderemo però di vista la primitiva funzione $f(x, y)$, poichè, in varie occasioni, sarà istruttivo enunciare i risultati a cui perverremo riferendoci ad essa e all'intervallo rettangolare T.

Cominceremo dal dimostrare i seguenti tre teoremi.

VI. — *Assegnata, ad arbitrio, una funzione $F(s, t)$ di classe $n + 2$ nel quadrato Q (n intero positivo o nullo), esiste una ed una sola soluzione, della stessa classe in Q, dell'equazione*

$$v^{(n+2)}(s, t) \equiv \frac{\partial^{2n+4} v}{\partial s^{n+2} \partial t^{n+2}} = 0, \tag{1}$$

che coincide con la $F(s, t)$ sulla periferia $\mathcal{F}Q$ di Q e, per $n > 0$, supposte allora, $F(1, t)$, $F(-1, t)$, $F(s, 1)$, $F(s, -1)$ infinitesime, almeno d'ordine n, nel punto zero, è identicamente nulla, con le sue derivate totali fino a quella inclusa d'ordine $n - 1$, sulla linea L mediana di Q [14], *ed è data da*

$$\begin{aligned} v(s, t) = {} & \frac{s^n}{2}(1 + s) F(1, t) + \frac{(-s)^n}{2}(1 - s) F(-1, t) \\ & + \frac{t^n}{2}(1 + t) F(s, 1) + \frac{(-t)^n}{2}(1 - t) F(s, -1) \end{aligned} \tag{2}$$

---

[14] Per *linea mediana* di un intervallo del piano, col centro nel punto (a_0, b_0), intendo l'insieme delle sue mediane, cioè il luogo dei suoi punti, per cui

$$(x - a_0)(y - b_0) = 0.$$

$$-\frac{1}{4}s^n t^n (1+s)(1+t)F(1,1)-\frac{1}{4}s^n(-t)^n(1+s)(1-t)F(1,-1)$$

$$-\frac{1}{4}(-s)^n t^n (1-s)(1+t)F(-1,1)-\frac{1}{4}s^n t^n(t-s)(1-t)F(-1,-1).$$

Si verifica immediatamente che la $v(s,t)$, data dalla (2), è di classe $n+2$ in Q, vi è soluzione della (1), coincide con la $F(s,t)$ sulla periferia di Q e, per $n>0$, è identicamente nulla, con le sue prime $n-1$ derivate totali, sulla linea mediana L. Il teorema sarà dunque dimostrato se stabiliremo l'unicità di una tale soluzione della (1). Le soluzioni della (1), per $n=0$, di classe *due* nel quadrato Q, sono tutte date dalla formola

$$v(s,t)=C(t)+s\,D(t)+A(s)+t\,B(s),$$

ove $A(s)$ e $B(s)$ sono funzioni arbitrarie della sola s e $C(t)$ e $D(t)$ della sola t, di classe *due* nell'intervallo $(-1,1)$. Le soluzioni della (1), per $n>0$, di classe $n+2$ nel quadrato Q, identicamente nulle sulla linea mediana L, con le loro derivate totali fino a quella inclusa d'ordine $n-1$, son tutte date dalla formola

$$v(s,t)=s^n C(t)+s^{n+1}D(t)+t^n A(s)+t^{n+1}B(s), \tag{3}$$

ove $A(s)$ e $B(s)$ sono funzioni arbitrarie della sola s e $C(t)$ e $D(t)$ della sola t, di classe $n+2$ nell'intervallo $(-1,1)$, infinitesime, almeno d'ordine n, nel punto zero. Il detto teorema d'unicità sarà dunque dimostrato, per $n\geqq 0$, se faremo vedere che esiste una sola funzione, avente la forma (3), che coincide con la $F(s,t)$ sulla $\mathcal{F}Q$.

Tale coincidenza avverrà allora e allora soltanto che si verifichino le seguenti quattro equazioni:

$$s^n C(1)+s^{n+1}D(1)+A(s)+B(s)=F(s,1), \tag{4}$$

$$(-1)^n s^n C(-1)+(-1)^n s^{n+1}D(-1)+A(s)-B(s)=(-1)^n F(s,-1), \tag{5}$$

$$C(t)+D(t)+t^n A(1)+t^{n+1}B(1)=F(1,t), \tag{6}$$

$$C(t)-D(t)+(-1)^n t^n A(-1)+(-1)^n t^{n+1}B(-1)=(-1)^n F(-1,t). \tag{7}$$

Dalle (4) e (5) si ricava

$$\begin{cases} A(s)=\frac{1}{2}[F(s,1)+(-1)^n F(s,-1)]+a\,s^n+a_1\,s^{n+1}, \\ B(s)=\frac{1}{2}[F(s,1)-(-1)^n F(s,-1)]+b\,s^n+b_1\,s^{n+1}, \end{cases} \tag{8}$$

e dalle (6) e (7),

$$\text{(9)}\qquad \begin{cases} C(t) = \dfrac{1}{2}\,[F(1\,,t) + (-1)^n\, F(-1\,,t)] + c\, t^n + c_1\, t^{n+1}\,, \\[2ex] D(t) = \dfrac{1}{2}\,[F(1\,,t) - (-1)^n\, F(-1\,,t)] + d\, t^n + d_1\, t^{n+1}\,, \end{cases}$$

ove $a\,, b\,, c\,, d\,,\ a_1\,, b_1\,, c_1\,, d_1$ sono costanti verificanti le eguaglianze:

$$a = -\frac{1}{2}\,[C(1) + (-1)^n\, C(-1)]\,,\qquad a_1 = -\frac{1}{2}\,[D(1) + (-1)^n\, D(-1)]\,,$$

$$b = -\frac{1}{2}\,[C(1) - (-1)^n\, C(-1)]\,,\qquad b_1 = -\frac{1}{2}\,[D(1) - (-1)^n\, D(-1)]\,,$$

$$c = -\frac{1}{2}\,[A(1) + (-1)^n\, A(-1)]\,,\qquad c_1 = -\frac{1}{2}\,[B(1) + (-1)^n\, B(-1)]\,,$$

$$d = -\frac{1}{2}\,[A(1) - (-1)^n\, A(-1)]\,,\qquad d_1 = -\frac{1}{2}\,[B(1) - (-1)^n\, B(-1)]\,.$$

Introdotte le (8) e (9) nella (3), si trova

$$\text{(10)}\qquad v(s\,,t) = \frac{s^n}{2}(1+s)\,F(1\,,t) + \frac{(-s)^n}{2}(1-s)\,F(-1\,,t)$$
$$+ \frac{t^n}{2}(1+t)\,F(s\,,1) + \frac{(-t)^n}{2}(1-t)\,F(s\,,-1)$$
$$+ (a+c)\,s^n\,t^n + (a_1+d)\,s^{n+1}\,t^n + (b+c_1)\,s^n\,t^{n+1} + (b_1+d_1)\,s^{n+1}\,t^{n+1}\,.$$

Dalle (4), (5), (6) e (7) si ricava anche

$$\text{(11)}\qquad C(1) + D(1) + A(1) + B(1) = F(1\,,1)\,,$$

$$\text{(12)}\qquad (-1)^n\, C(-1) + (-1)^n\, D(-1) + A(1) - B(1) = (-1)^n\, F(1\,,-1),$$

$$\text{(13)}\qquad C(1) - D(1) + (-1)^n\, A(-1) + (-1)^n\, B(-1) = (-1)^n\, F(-1\,,1)\,,$$

$$\text{(14)}\qquad (-1)^n\, C(-1) - (-1)^n\, D(-1) + (-1)^n\, A(-1) - (-1)^n B(\quad 1) =$$
$$F(-1\,,-1)\,,$$

sottraendo, membro a membro, la (12) dalla (11) e la (14) dalla (13),

$$(15)\qquad 2\,B(1)+C(1)+D(1)-(-1)^n\,C(-1)-(-1)^n\,D(-1)=$$
$$F(1\,,1)-(-1)^n\,F(1\,,-1),$$

$$(16)\quad 2(-1)^n\,B(-1)+C(1)-D(1)-(-1)^n\,C(-1)+(-1)^n\,D(-1)=$$
$$(-1)^n\,F(-1\,,1)-F(-1\,,-1),$$

sommando, membro a membro, la (11) con la (12) e la (13) con la (14),

$$(17)\qquad 2\,A(1)+C(1)+D(1)+(-1)^n\,C(-1)+(-1)^n\,D(-1)=$$
$$F(1\,,1)+(-1)^n\,F(-1\,,1),$$

$$(18)\quad 2(-1)^n\,A(-1)+C(1)-D(1)+(-1)^n\,C(-1)-(-1)^n\,D(-1)=$$
$$(-1)^n\,F(-1\,,1)+F(-1\,,-1),$$

sommando membro a membro la (15) con la (16) e la (18) con la (17),

$$-4(c_1+b)=F(1\,,1)-(-1)^n\,F(1\,,-1)+(-1)^n\,F(-1\,,1)-F(-1\,,-1),$$

$$-4(a+c)=F(1\,,1)+(-1)^n\,F(1\,,-1)+(-1)^n\,F(-1\,,1)+F(-1\,,-1),$$

sottraendo membro a membro la (16) dalla (15) e la (18) dalla (17),

$$-4(b_1+d_1)=F(1\,,1)-(-1)^n\,F(1\,,-1)-(-1)^n\,F(-1\,,1)+F(-1\,,-1),$$

$$-4(a_1+d)=F(1\,,1)+(-1)^n\,F(1\,,-1)-(-1)^n\,F(-1\,,1)-F(-1\,,-1).$$

Vengon così determinati i valori delle costanti $a+c$, a_1+d, $b+c_1$, b_1+d_1 che compaiono nella (10), la quale, introdottivi tali valori, fornisce la (2). Ed è così dimostrata l'unicità sopra detta.

VII. — *Assegnate ad arbitrio, nel quadrato Q, una funzione continua $e(s\,,t)$ ed una funzione $\varphi(s\,,t)$ di classe due, esiste una ed una sola soluzione, di tal classe, delle equazioni*

$$u''=e(s\,,t),\quad \text{in } Q,$$

$$u=\varphi\qquad ,\quad \text{su } \mathcal{F}Q,$$

e posto

$$F(s, t) = \varphi(s, t) - \int_0^s \int_0^t (s - \sigma)(t - \tau)\, e(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau,$$

è data da

$$(20)\qquad \begin{aligned} u(s, t) &= \frac{1+s}{2} F(1, t) + \frac{1-s}{2} F(-1, t) \\ &+ \frac{1+t}{2} F(s, 1) + \frac{1-t}{2} F(s, -1) \\ &- \frac{1}{4}(1+s)(1+t) F(1, 1) - \frac{1}{4}(1+s)(1-t) F(1, -1) \\ &- \frac{1}{4}(1-s)(1+t) F(-1, 1) - \frac{1}{4}(1-s)(1-t) F(-1, -1) \\ &+ \int_0^s \int_0^t (s - \sigma)(t - \tau)\, e(\sigma, \tau)\, d\tau\, d\sigma. \end{aligned}$$ [15]

Ed invero, la funzione

$$v = u - \int_0^s \int_0^t (s - \sigma)(t - \tau)\, e(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau,$$

è di classe *due* in Q, e vi verifica le equazioni

$$v'' = 0, \text{ in } Q; \qquad v = F, \text{ su } \mathcal{F} Q,$$

e pertanto essa è data dalla (2), per $n = 0$, e quindi la u della (20).

VIII. — *Assegnate, ad arbitrio, nel quadrato Q, una funzione continua $e(s, t)$ ed una funzione $\varphi(s, t)$ di classe $n + 2$ $(n > 0)$, esiste una ed una sola soluzione, di tal classe, delle equazioni:*

$$\begin{aligned} u^{(n+2)} &= e(s, t), \text{ in } Q, \\ u &= \varphi \quad, \text{ su } \mathcal{F} Q, \\ u^{(h)} &= \varphi^{(h)} \quad, \text{ su } L, \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1), \end{aligned}$$

[15] Tale teorema è da reputarsi noto, da gran tempo Cfr. D. MANGERON, Giornale di Matematiche di Battaglini, 1933.

e, posto

$$\varphi_k(s,t)=\varphi^{(k)}(s,0)+\psi^{(k)}(0,t)-\varphi^{(h)}(0,0), \qquad (k=0,1,\dots,n-1)$$

$$F(s,t)=\varphi(s,t)-\varphi_0(s,t)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^s\int_0^t\frac{(s-\sigma)^{k-1}(t-\tau)^{k-1}}{[(k-1)!]^2}\varphi_k(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau$$

$$-\int_0^s\int_0^t\frac{(s-\sigma)^{n+1}(t-\tau)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}e(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau, \text{ (16)}$$

è data da

$$(21)\quad \begin{aligned} u(s,t)={}&\frac{s^n}{2}(1+s)F(1,t)+\frac{(-s)^n}{2}(1-s)F(-1,t)\\ &+\frac{t^n}{2}(1+t)F(s,1)+\frac{(-t)^n}{2}(1-t)F(s,-1)\\ &-\frac{1}{4}s^nt^n(1+s)(1+t)F(1,1)-\frac{1}{4}s^n(-t)^n(1+s)(1-t)F(1,-1)\\ &-\frac{1}{4}(-s)^nt^n(1-s)(1+t)F(-1,1)-\frac{1}{4}s^nt^n(1-s)(1-t)F(-1,-1)\\ &+\varphi_0(s,t)+\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^s\int_0^t\frac{(s-\sigma)^{k-1}(t-\tau)^{k-1}}{[(k-1)!]^2}\varphi_k(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau\\ &+\int_0^s\int_0^t\frac{(s-\sigma)^{n+1}(t-\tau)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}e(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau. \end{aligned}$$

Ed invero, la funzione

$$v=u-\varphi_0-\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^s\int_0^t\frac{(s-\sigma)^{k-1}(t-\tau)^{k-1}}{[(k-1)!]^2}\varphi_k\,d\sigma\,d\tau$$

$$-\int_0^s\int_0^t\frac{(s-\sigma)^{n+1}(t-\tau)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}e\,d\sigma\,d\tau,$$

---

(16) Per $n=1$, il sommatorio $\sum_{h=1}^{n-1}(\dots)$ deve essere omesso.

è di classe $n+2$ in Q, e vi verifica le equazioni:

$$\begin{aligned} v^{(n+2)} &= 0\,, \text{ in } Q\,, \\ v &= F, \text{ su } \mathcal{F}Q\,, \\ v^{(h)} &= 0\,, \text{ su } L\,, \qquad (h=0\,,1\,,\ldots\,,n-1)\,, \end{aligned}$$

risultando $F(1\,,t)$, $F(-1\,,t)$, $F(s\,,1)$, $F(s\,,-1)$ infinitesime, almeno d'ordine n, nel punto zero, e pertanto la v è fornita della (2) donde la u dalla (21).

L'interpolazione centrale, di una funzione $f(x\,,y)$ di classe $n+1$ ($n \geqq 0$) nell'intervallo T, consiste nel sostituirla con una funzione u_f della stessa classe, di derivata totale $(n+1)^{ma}$ identicamente nulla in T, che, sulla linea mediana di T, verifica le equazioni

$$u_f^{(k)} = f^{(k)} \qquad (k=0\,,1\,,\ldots n)\,.$$

Per $n=0$ e $n=1$, essa è già stata considerata dal TORTORICI [loc. cit. ([4])] e dal BIRINDELLI [loc. cit. ([3])] è stata estesa al caso delle funzioni di quante si vogliano variabili e per n qualunque. Supposta $f(x\,,y)$ di classe uno, per la funzione $\varphi(s\,,t)$ si ha

$$\varphi(s\,,t) = \varphi_0(s\,,t) + \int_0^s\int_0^t \varphi'(\sigma\,,\tau)\,d\sigma\,d\tau\,,$$

e quindi

$$\iint_Q \varphi(s\,,t)\,d\,s\,d\,t = 2\int_{-1}^1 \varphi(s\,,0)\,d\,s + 2\int_{-1}^1 \varphi(0\,,t)\,d\,t - 4\,\varphi(0\,,0)$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \mathop{\Delta}_{-s}^{s}\,\mathop{\Delta}_{-t}^{t}\,\varphi'(\tau\,,\sigma)(1-s)(1-t)\,d\,s\,dt \text{ ([17])},$$

supposta di classe due,

$$\varphi(s\,,t) = \varphi_0(s\,,t) + \int_0^s\int_0^t \varphi_1(\sigma\,,\tau)\,d\sigma\,d\tau + \int_0^s\int_0^t (s-\sigma)(t-\tau)\,\varphi''(\sigma\,,\tau)\,d\sigma\,d\tau$$

([17]) Per una funzione $f(x\,,y)$), col simbolo $\mathop{\Delta}_{a}^{a'}\,\mathop{\Delta}_{b}^{b'}\,f(\xi\,,\eta)$, denoterò la sua *variazione doppia:*

$$f(a'\,,b') - f(a\,,b') - f(a'\,,b) + f(a\,,b)\,,$$

relativa all'intervallo di punti estranei $(a\,,b)$ e $(a'\,,b')$.

e quindi

$$\iint_Q \varphi(s,t)\,d\,s\,d\,t = 2\int_{-1}^{1}\varphi(s,0)\,d\,s + 2\int_{-1}^{1}\varphi(0,t)\,d\,t - 4\,\varphi(0,0)$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi''(\sigma,\tau)\,\frac{(1-|\sigma|)^2(1-|\tau|)^2}{4}\,d\,\sigma\,d\,\tau\,.$$

Poichè

$$\iint_T f(x,y)\,d\,x\,d\,y = \frac{\text{area } T}{4}\iint_Q \varphi(s,t)\,d\,s\,d\,t\,,$$

$$\int_a^{a'} f(x,b_0)\,d\,x = \frac{a'-a}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(s,0)\,d\,s, \quad \int_b^{b'} f(a_0,y)\,d\,y = \frac{b'-b}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(0,t)\,d\,t\,,$$

si ha dunque il risultato: *Posto*

$$\iint_T f(x,y)\,d\,T = \tag{22}$$

$$(b'-b)\int_a^{a'} f(x,b_0)\,d\,x + (a'-a)\int_b^{b'} f(a_0,y)\,d\,y - f(a_0,b_0)\,\text{area } T\,,$$

si commette un errore dato da:

$$\varrho = \frac{(\text{area } T)^2}{4^2}\int_0^1\int_0^1 \mathop{\Delta}_{-s}^{s}\mathop{\Delta}_{-t}^{t} f'(a_0+\alpha\,\sigma,\,b_0+\beta\,\tau)(1-s)(1-t)\,d\,s\,d\,t\,, \tag{23'}$$

se f è di classe uno, dato anche da

$$\varrho = \frac{(\text{area } T)^3}{16^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f''(a_0+\alpha\,s,\,b_0+\beta\,t)(1-|s|)^2(1-|t|)^2\,d\,s\,d\,t\,, \tag{23''}$$

se f è di classe due, che può dunque essere così maggiorato:

$$|\varrho| \leqq \frac{(\text{area } T)^2}{8^2}\max_T\left|\mathop{\Delta}_{x}^{2a_0-x}\mathop{\Delta}_{y}^{2b_0-y} f'(\xi,\eta)\right|,$$

nel primo caso e, come ha già notato TORTORICI, *anche così*

$$|\varrho| \leqq \frac{(\text{area } T)^3}{24^2} \max_T |f''(x, y)|,$$

nel secondo.

L'identità delle due espressioni (23') e (23'') dell'errore, ottenute nell'ipotesi che la f sia di classe *due* può, del resto, essere immediatamente verificata mediante un'integrazione doppia per parti (18). Si ha, infatti,

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \mathop{\Delta}_{-s}^{s} \mathop{\Delta}_{-t}^{t} \varphi(\sigma,\tau)(1-s)(1-\tau)\,ds\,dt = \int_0^1\!\!\int_0^1 \mathop{\Delta}_{-s}^{s} \mathop{\Delta}_{-t}^{t} (\sigma,\tau)\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}\frac{(1-s)^2(1-t)^2}{4}\,ds\,dt =$$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 [\varphi''(s,t)+\varphi''(-s,t)+\varphi''(s,-t)+\varphi''(-s,-t)]\frac{(1-s)^2(1-t)^2}{4}\,ds\,dt =$$

$$\int_{-1}^1\!\int_{-1}^1 \varphi''(s,t)\,\frac{(1-|s|)^2(1-|t|)^2}{4}\,ds\,dt\,.$$

Si noti la perfetta analogia delle formole (23') e (23''), rispettivamente con le formole (10') e (10'') del § 3, relative all'interpolazione razionale intera centrale. Entrambe le formole (10') e (23') esprimono l'errore per mezzo dell'integrale esteso all'intervallo T', avente per punto estremo inferiore il centro di T e per punto estremo superiore quello di T, del prodotto di una *variazione* della derivata f' — variazione che vorrei chiamare *centrale* perchè è relativa ad un intervallo J col centro fisso in quello di T — per la misura dell'intervallo J' che ha per punto estremo inferiore il superiore di J e per superiore quello di T. Con le formole (10'') e (23'') l'errore è espresso dal prodotto di $1/2^r$ (r dimensione dello spazio) per l'integrale, esteso all'intervallo T, del prodotto della derivata f'' per il quadrato della misura dell'intervallo di cui una coppia di vertici opposti è costituita dal punto d'integrazione e da uno di quelli di T, ad esso più prossimi.

---

(18) Alludo all'eguaglianza

$$\int_a^{a'}\!\!\int_b^{b'} g f'\,dx\,dy = \mathop{\Delta}_{a}^{a'} \mathop{\Delta}_{b}^{b'} (gf) - \mathop{\Delta}_{a}^{a'} \int_b^{b'} g_y f\,dy - \mathop{\Delta}_{b}^{b'} \int_a^{a'} g_x f\,dx + \int_a^{a'}\!\!\int_b^{b'} f g'\,dx\,dy\,.$$

Se nella (22) si costituiscono i due integrali semplici, che in essa compaiono, con le loro approssimazioni

$$(a' - a) f(a_0, b_0), (b' - b) f(a_0, b_0),$$

fornite dalla formola di GAUSS, si perviene alla ben nota

$$\iint_T f(x, y)\, d\, T = f(a_0, b_0) \text{ area } T, \tag{24}$$

della quale già si conosce una maggiorazione del modulo dell'errore [19]. Ma, a norma di quanto precede, l'errore ϱ^* di cui è affetta la (24) è precisamente dato da:

$$\varrho^* = \frac{(b' - b)(a' - a)^2}{4} \int_0^1 \mathop{\Delta}_{-s}^{s} f_x(a_0 + \alpha\, \sigma, b_0)(1 - s)\, d\, s \tag{25'}$$

$$+ \frac{(a' - a)(b' - b)^2}{4} \int_0^1 \mathop{\Delta}_{-t}^{t} f_y(a_0, b_0 + \beta\, \tau)(1 - t)\, d\, t$$

$$+ \frac{(\text{area } T)^2}{4^2} \int_0^1\!\!\int_0^1 \mathop{\Delta}_{-s}^{s} \mathop{\Delta}_{-t}^{t} f_{xy}(a_0 + \alpha\, \sigma\,.\, b_0 + \beta\, \tau)(1 - s)(1 - t)\, d\, s\, d\, t,$$

se la f è di classe *uno*, anche da

$$\varrho^* = \frac{(b' - b)(a' - a)^3}{16} \int_{-1}^{1} f_{x^2}(a_0 + \alpha\, s, b_0)\,)1 - |\, s\,|)^2\, d\, s \tag{25''}$$

$$+ \frac{(a' - a)(b' - b)^3}{16} \int_{-1}^{2} f_{y^2}(a_0, b_0 + \beta\, t)(1 - |\, t\,|)^2\, d\, t$$

$$+ \frac{(\text{area } T)^3}{16^2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{x^2y^2}(a_0 + \alpha\, s, b_0 + \beta\, t)(1 - |\, s\,|)^2 (1 - |\, t\,|)^2\, d\, s\, d\, t,$$

---

(19) Cfr. le citate [loc. cit. (1)] mie *Lezioni di analisi infinitesimale*, pag. 672.

se la f è di classe *due*. Il confronto delle espressioni (25') e (25'') dell'errore di cui è affetta la (24) con le (23') e (23'') dell'errore commesso con la (22), ben convince della assai maggiore potenza approssimatrice che, in generale, possiede un metodo di calcolo numerico dell'integrale doppio di una funzione f, esteso ad un intervallo T, fondato sull'impiego della (22), di fronte a quella posseduta da un metodo che si avvalga della (24). Per esempio, decomposto l'intervallo T in n^2 intervalli T_{hk} $(h, k = 1, 2, \dots, n)$ eguali, coi centri nei punti (a_h, b_k), l'impiego della formola (22), per il calcolo dell'integrale della f esteso a ciascuno di questi intervalli, conduce ad approssimare l'integrale della f esteso a T, per mezzo della somma [cfr. TORTORICI, loc. cit. (4)]

$$S_n = \frac{a'-a}{n} \sum_{h=1}^{n} \int_b^{b'} f(a_h, y)\, dy + \frac{b'-b}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_a^{a'} f(x, b_k)\, dx$$

$$- \frac{\text{area } T}{n^2} \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_h, b_k),$$

l'impiego della (24) mediante la somma, di calcolo assai più semplice,

$$S_n^* = \frac{\text{area } T}{n^2} \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_h, b_k).$$

Ma, mentre si può assicurare che l'errore di cui è affetta la S_n è, al diverger di n, infinitesimo almeno del second'ordine, rispetto a $1 \mid n$, se f è di classe *uno,* e del quarto se f è di classe *due,* per quello commesso con la S_n^* si può solo dire che il suo ordine di infinitesimo non è inferiore a uno nel primo caso, a due, nel secondo.

L'impiego della (22) esige, per contro, il calcolo approssimato dei due integrali ad una dimensione che in essa compaiono, ma, senza contare che talvolta ciò può essere immediato, anche quando non lo sia il calcolo dell'assegnato integrale doppio, a quel compito già provvedono, in generale, le regole ben note e lungamente sperimentate del classico « Calcolo numerico ».

Per esempio, sostituendo, nel secondo membro della (22), i due integrali con le loro approssimazioni fornite dalla formola di CAVALIERI-SIMPSON, si perviene alla formola, non priva di eleganza,

$$\iint_T f\, dT = \frac{\text{area } T}{6} [\Sigma f(C_i) + 2 f(C)], \tag{26}$$

ove sono indicati con C il centro e con C_i i centri dei lati dell'intervallo T. Di tale formola si può subito scrivere, dopo quanto precede, un'espressione dell'errore, la quale consente di affermare che, decomposto l'intervallo T d'integrazione in n^2 intervalli eguali T_{hk}, ed applicata la (26) per il calcolo dell'integrale della f esteso a ciascuno di questi intervalli parziali, la somma di tali integrali approssima quello esteso a T, con un errore, infinitesimo, almeno del second'ordine o del quarto, rispetto a $1/n$, secondochè la f è di classe *uno* o *due*.

L'interpolazione periferica si segue, supposta la $f(x, y)$ di classe due nell'intervallo T, assumendo come funzione interpolatrice della funzione $\varphi(s, t)$, la soluzione $u_\varphi(s, t)$ delle equazioni

$$u''(s, t) = 0$$

$$u(s, t) = \varphi(s, t), \text{ su } \mathcal{F} Q.$$

In virtù del teor. VII si ha:

$$u_\varphi(s, t) = \frac{1+s}{2}\varphi(1, t) + \frac{1-s}{2}\varphi(-1, t) + \frac{1+t}{2}\varphi(s, 1) + \frac{1-t}{2}\varphi(s, -1)$$

$$-\frac{(1+s)(1+t)}{4}\varphi(1, 1) - \frac{(1+s)(1-t)}{4}\varphi(1, -1)$$

$$-\frac{(1-s)(1+t)}{4}\varphi(-1, 1) - \frac{(1-s)(1-t)}{4}\varphi(-1, -1).$$

L'errore $R(s, t) = \varphi(s, t) - u_\varphi(s, t)$ è dato dalla soluzione delle equazioni

$$u'' = \varphi'',$$

$$u = 0, \text{ su } \mathcal{F} Q,$$

e quindi, di nuovo per il teor. VII, risulta

$$R(s, t) = \int_0^s \int_0^t (s-\sigma)(t-\tau)\varphi''(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau$$

$$-\left[\frac{1+s}{2}\int_0^1\int_0^t (1-\sigma)(t-\tau) + \frac{1-s}{2}\int_{-1}^0\int_0^t (1+\sigma)(t-\tau) + \frac{1+t}{2}\int_0^s\int_0^1 (s-\sigma)(1-\tau)\right.$$

$$\left. + \frac{1-t}{2}\int_0^s\int_{-1}^0 (s-\sigma)(1+\tau)\right]\varphi''(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau$$

$$+\left[\frac{(1+s)(1+t)}{4}\int_0^1\int_0^1(1-\sigma)(1-\tau)+\frac{(1+s)(1-t)}{4}\int_0^1\int_{-1}^0(1-\sigma)(1+\tau)\right.$$

$$\left.+\frac{(1-s)(1+t)}{4}\int_{-1}^0\int_0^1(1+\sigma)(1-\tau)+\frac{(1-s)(1-t)}{4}\int_{-1}^0\int_{-1}^0(1+\sigma)(1+\tau)\right]\varphi''(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Si ha

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 u_\varphi(s,t)\,d\,s\,d\,t=$$

$$\int_{-1}^1\varphi(1,t)\,d\,t+\int_{-1}^1\varphi(-1,t)\,d\,t+\int_{-1}^1\varphi(s,1)\,d\,s+\int_{-1}^1\varphi(s,-1)\,d\,s$$

$$-[\varphi(1,1)+\varphi(1,-1)+\varphi(-1,1)+\varphi(-1,-1)]$$

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 R(s,t)\,d\,s\,d\,t=\frac{1}{4}\int_{-1}^1\int_{-1}^1\varphi''(s,t)(1-s^2)(1-t^2)\,d\,s\,d\,t\,,$$

e pertanto il risultato: *Se la f è di classe due nell'intervallo T, ponendo*

$$\iint_T f\,d\,T=\frac{a'-a}{2}\left[\int_b^{b'}f(a',y)\,d\,y+\int_b^{b'}f(a,y)\,d\,y\right] \tag{27}$$

$$+\frac{b'-b}{2}\left[\int_a^{a'}f(x,b')\,d\,x+\int_a^{a'}f(x,b)\,d\,x\right]$$

$$-\frac{\text{area }T}{4}[f(a,b)+f(a',b)+f(a,b')+f(a',b')]\,,$$

si commette un errore dato da

$$\varrho=\frac{(\text{area }T)^3}{16^2}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f''(a_0+\alpha\,s\,,b_0+\beta\,t)(1-s^2)(1-t^2)\,d\,s\,d\,t \tag{28}$$

che può essere così maggiorato:

$$|\varrho|\leqq\frac{(\text{area }T)^3}{12^2}\max{}_T|f''\;x\,,y)|\,. \tag{29}$$

Si noti l'analogia delle formole (28) e (29) con quelle ottenute al § 3 relative all'interpolazione periferica razionale intera delle funzioni di una variabile.

Se agli integrali ad una dimensione che compaiono nella (27) si sostituiscono le loro approssimazioni date dalle formole, di GAUSS, di BEZOUT, di CAVALIERI-SIMPSON, si ottengono rispettivamente, le seguenti:

$$\iint_T f\,d\,T = \frac{\text{area } T}{4}\,[2\,\Sigma f(C_i) - \Sigma f(V_i)]\,,$$

$$\iint_T f\,d\,T = \frac{\text{area } T}{4}\,\Sigma f(V_i)$$

$$\iint_T f\,d\,T = \frac{\text{area } T}{12}\,(4\,\Sigma f(C_i) - \Sigma f(V_i)]\,,$$

ove sono indicati con C_i i centri dei lati e con V_i i vertici di T, delle quali è ben facile ora scrivere un'espressione dell'errore di cui sono affette, a mezzo di integrali semplici operanti sulle derivate f_{x^2}, f_{y^2} e doppio operante su f''.

L'interpolazione centro-periferica di una funzione $f(x, y)$, di classe $n + 2$ nell'intervallo $T\,(n \geqq 1)$, consiste nell'adottare come sua funzione interpolatrice la soluzione u_f, della stessa classe, delle equazioni:

$$\begin{aligned} &u^{(n+2)} = 0\,, \quad \text{in} \quad T\,,\\ &u \quad\ = f, \quad \text{su}\ \mathcal{F}\,T\,,\\ &u^{(k)} \ = f^{(k)}, \ \text{su}\ L\,, \quad (k = 0\,, 1\,, \ldots, n-1)\,, \end{aligned}$$

L designando la linea mediana di T. Sostituendo la $f(x, y)$ con la $\varphi(s, t)$, seguiremo il solito procedimento, fondato sul teor. VIII. Per $n = 1$, posto

$$F_1(s, t) = \varphi(s, t) - \varphi_0(s, t) \equiv \overset{s}{\underset{0}{\Delta}}\,\overset{t}{\underset{0}{\Delta}}\,\varphi(\sigma, \tau)\,,$$

si trova, come funzione interpolatrice $u_{1\varphi}$ della φ, nel quadrato Q,

$$\begin{aligned} u_{1\varphi}(s, t) = \frac{s}{2}(1+s)\,F_1(1, t)\\ - \frac{s}{2}(1-s)\,F_1(-1, t) + \frac{t}{2}(1+t)\,F_1(s, 1) - \frac{t}{2}(1-t)\,F_1(s, -1)\\ - \frac{s\,t}{4}[(1+s)(1+t)\,F_1(1,1) - (1+s)(1-t)\,F_1(1,-1) - (1-s)(1+t)\,F_1(-1,1)\\ + (1-s)(1-t)\,F_1(-1,-1)] + \varphi(s, 0) + \varphi(0, t) - \varphi(0, 0)\,, \end{aligned}$$

con l'errore

$$R_1(s,t) = \int_0^s \int_0^t \frac{(s-\sigma)^2 (t-\tau)^2}{4} \varphi'''(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau$$

$$-\Big[s(1+s)\int_0^1\int_0^t (1-\sigma)^2 (t-\tau)^2 + s(1-s)\int_{-1}^0\int_0^t (1+\sigma)^2 (t-\tau)^2$$

$$+ t(1+t)\int_0^s\int_0^1 (s-\sigma)^2 (1-\tau)^2 + t(1-t)\int_0^s\int_{-1}^0 (s-\sigma)^2 (1+\tau)^2\Big] \frac{\varphi'''(\sigma,\tau)}{8} d\sigma d\tau$$

$$+ s\,t\Big[(1+s)(1+t)\int_0^1\int_0^1 (1-\sigma)^2 (1-\tau)^2 + (1+s)(1-t)\int_0^1\int_{-1}^0 (1-\sigma)^2 (1+\tau)^2$$

$$+(1-s)(1+t)\int_{-1}^0\int_0^1 (1+\sigma)^2 (1-\tau)^2 + (1-s)(1-t)\int_{-1}^0\int_{-1}^0 (1+\sigma)^2 (1+t)^2\Big] \frac{\varphi'''(\sigma,\tau)}{16} d\sigma\, d\tau.$$

Per $n = 2$, posto

$$F_2(s,t) = \mathop{\Delta}_0^s \mathop{\Delta}_0^t \varphi(\sigma,\tau) - t\,\varphi'(s,0) - s\,\varphi'(0,t) + s\,t\,\varphi'(0,0),$$

si trova, come funzione interpolatrice $u_{2\varphi}$ della φ, nel quadrato Q.

$$u_{2\varphi}(s,t) = \frac{s^2}{2}(1+s)\,F_2(1,t)$$

$$+ \frac{s^2}{2}(1-s)\,F_2(-1,t) + \frac{t^2}{2}(1+t)\,F_2(s,1) + \frac{t^2}{2}(1-t)\,F_2(s,-1)$$

$$- \frac{s^2 t^2}{4}\,[(1+s)(1+t)\,F_2(1,1) + (1+s)(1-t)\,F_2(1,-1)$$

$$+ (1-s)(1+t)\,F_2(-1,1) + (1-s)(1-t)\,F_2[-1,-1)]$$

$$+ \varphi(s,0) + \varphi(0,t) - \varphi(0,0) + t\,\varphi'(s,0) + s\,\varphi'(0,t) + s\,t\,\varphi'(0,0),$$

con l'errore

$$R_2(s,t) = \int_0^s\int_0^t \frac{(s-\sigma)^3 (t-\tau)^3}{(3\,!)^2} \varphi^{IV}(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau$$

$$-\left[s^2(1+s)\int_0^1\int_0^t (1-\sigma)^3(t-\tau)^3 + s^2(1-s)\int_{-1}^0\int_0^t (1+\sigma)^3(t-\tau)^3\right.$$

$$\left.+\,t^2(1+t)\int_0^s\int_0^1 (s-\sigma)^3(1-\tau)^3 + t^2(1-t)\int_0^s\int_{-1}^0 (s-\sigma)^3(1+\tau)^3\right]\frac{\varphi^{IV}(\sigma,\tau)}{2\,(3\,!)^2}\,d\sigma\,d\tau$$

$$+\,s^2t^2\left[(1+s)(1+t)\int_0^1\int_0^1 (1-\sigma)^3(1-\tau)^3 + (1+s)(1-t)\int_0^1\int_{-1}^0 (1-\sigma)^3(1+\tau)^3\right.$$

$$\left.+(1-s)(1+t)\int_{-1}^0\int_0^1 (1+\sigma)^3(1-\tau)^3 + (1-s)(1-t)\int_{-1}^0\int_{-0}^0 (1+\sigma)^3(1+\tau)^3\right]\frac{\varphi^{IV}(\sigma,\tau)}{4\,(3\,!)^2}\,d\sigma\,d\tau\,.$$

È ben visibile che

$$\int\!\!\int_Q u_{1\varphi}(s,t)\,ds\,dt = \int\!\!\int_Q u_{2\varphi}(s,t)\,ds\,dt\,, \tag{30}$$

e facili calcoli conducono alle eguaglianze:

$$\int\!\!\int_Q u_{1\varphi}(s,t)\,ds\,dt =$$

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^1[\varphi(-1,t)+4\,\varphi(0,t)+\varphi(1,t)]\,dt+\frac{1}{3}\int_{-1}^1[\varphi(s,-1)+4\,\varphi(s,0)+\varphi(s,1)]\,ds$$

$$-\frac{1}{9}\{\varphi(-1,-1)+\varphi(-1,1)+\varphi(1,-1)+\varphi(1,1)$$

$$+\,4\,[\varphi(0,1)+\varphi(0,-1)+\varphi(1,0)+\varphi(-1,0)]+16\,\varphi(0,0)\}\,,$$

$$\int\!\!\int_Q R_1(s,t)\,ds\,dt =$$

$$\frac{1}{2^2\,.\,3^2}\int_0^1\int_0^1 \underset{-s}{\overset{s}{\Delta}}\ \underset{-t}{\overset{t}{\Delta}}\ \varphi'''(\sigma,\tau)\,(1-s)^2(1-t)^2\,s\,t\,ds\,dt\,,$$

$$\int\!\!\int_Q R_2(s,t)\,ds\,dt =$$

$$\frac{1}{2^6\,.\,3^4}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \varphi^{IV}(s,t)\,(1-|s|)^3(1-|t|)^3(1+3\,|s|)(1+3\,|t|)\,ds\,dt\,.$$

Se $f(x, y)$ è di classe *quattro,* devono, in virtù della (30), essere identici i secondi membri delle due ultime eguaglianze, ciò che è confermato da un'integrazione doppia per parti, secondo la quale si ha:

$$\int_0^1\int_0^1 \underset{-s}{\overset{s}{\Delta}}\ \underset{-t}{\overset{t}{\Delta}}\ \varphi'''(\sigma, \tau)(1-s)^2(1-t)^2\, s\, t\, d s\, d t =$$

$$\int_0^1\int_0^1 \underset{-s}{\overset{s}{\Delta}}\ \underset{-t}{\overset{t}{\Delta}}\ \varphi'''(\sigma, \tau)\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}\left[\frac{(1-s)^3}{3\,.\,4}(1+3\,s)\frac{(1-t)^3}{3\,.\,4}(1+3\,t)\right] d s\, d t = .$$

$$\frac{1}{2^4\,.\,3^2}\int_0^1\int_0^1 [\varphi^{IV}(s, t) + \varphi^{IV}(-s, t) + \varphi^{IV}(s, -t) + \varphi^{IV}(-s, -t)]$$

$$.\,(1-s)^3(1-t)^3(1+3\,s)(1+3\,t)\, d s\, d t\,.$$

Si perviene dunque al risultato: *Indicati con C il centro, con C_i i centri dei lati con V_i, i vertici dell'intervallo T, posto*

$$(31)\qquad \iint_T f(x, y)\, d\, T = \frac{a'-a}{6}\int_b^{b'}[f(a, y) + 4 f(a_0, y) + f(a', y)]\, d y$$

$$+\frac{b'-b}{6}\int_a^{a'}[f(x, b) + 4 f(x, b_0) + f(x, b')]\, dx$$

$$-\frac{\text{area } T}{36}[\Sigma f(V_i) + 4\,\Sigma f(C_i) + 16 f(C)]\,,$$

si commette un errore, dato da

$$(32')\qquad \varrho = \frac{(\text{area } T)^4}{2^{10}\,.\,3^2}\int_0^1\int_0^1 \underset{-s}{\overset{s}{\Delta}}\ \underset{-t}{\overset{t}{\Delta}}\ f'''(a_0+\alpha\,\sigma, b_0+\beta\,\tau)(1-s)^2(1-t)^2\, s\, t\, d s\, d t\,,$$

se $f(x, y)$ è di classe tre, in T, dato anche da

$$(32'')\qquad \varrho = \frac{(\text{area } T)^5}{2^{16}\,.\,3^4}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f^{IV}(a_0+\alpha\, s, b_0+\beta\, t)$$

$$.\,(1-|s|)^3(1-|t|)^3(1+3\,|s|)(1+3\,|t|)\, d s\, d t\,,$$

se $f(x, y)$ è di classe quattro, che può essere così maggiorato

$$(33') \qquad |\varrho| \leqq \frac{(\text{area } T)^4}{1152^2} \max_T \left| \underset{x}{\overset{2a_0-x}{\Delta}} \underset{y}{\overset{2b_0-y}{\Delta}} f'''(\xi, \eta) \right|,$$

nel primo caso, e anche così:

$$(33'') \qquad |\varrho| \leqq \frac{(\text{area } T)^5}{2880^2} \max_T |f^{IV}(x, y)|,$$

nel secondo.

Si noti, ancora una volta, la perfetta analogia delle formole (32) e (33) con quelle riportate alla fine del § 3, concernenti l'interpolazione centro-periferica razionale intera delle funzioni di una variabile.

Le riscontrate analogie — mai venute meno — fanno pensare all'esistenza di un teorema generale che dovrebbe subito condurre, nell'interpolazione competente alla derivazione totale, a risultati analoghi a quelli nell'interpolazione razionale intera delle funzioni di una variabile reale, anche per le funzioni di quante si vogliano variabili reali.

Se si calcolano i due integrali semplici, che compaiono al secondo membro della (31), per mezzo delle loro approssimazioni fornite dalla formola di CAVALIERI-SIMPSON, si ottiene l'eguaglianza approssimata

$$(34) \qquad \iint_T f(x, y)\, d\, T = \frac{\text{area } T}{36} [\Sigma f(V_i) + 4\, \Sigma f(C_i) + 16 f(C)],$$

della quale, nelle mie « Lezioni di Analisi infinitesimale » [loc. cit. ([1]), p. 673] è già data una maggiorazione del modulo dell'errore ϱ^*. Con la teoria attuale, siamo però in grado di assegnare a tale errore, supposta, per esempio, la funzione f di classe *quattro,* la seguente interessante espressione

$$(35) \qquad \varrho^* = -\frac{(a'-a)(b'-b)^5}{6.2304} \int_{-1}^{1} [f_{y^4}(a, b_0 + \beta t) + 4 f_{y^4}(a_0, b_0 + \beta t) + f_{y^4}(a', b_0 + \beta t)]\, \Gamma(t)\, d\, t$$
$$- \frac{(b'-b)(a'-a)^5}{6.2304} \int_{-1}^{1} [f_{x^4}(a_0 + \alpha s, b) + 4 f_{x^4}(a_0 + \alpha s, b_0) + f_{x^4}(a_0 + \alpha s, b')]\, \Gamma(s)\, d\, s$$
$$+ \frac{(\text{area } T)^5}{2304^2} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f^{IV}(a_0 + \alpha s, b_0 + \beta t)\, \Gamma(s)\, \Gamma(t)\, d\, s\, d\, t.$$

ove si è posto

$$(1 - |s|)^3 (1 + 3|s|) = \Gamma(s).$$

Decomposto l'intervallo T d'integrazione in n^2 intervalli eguali T_{hk}, di punti estremi inferiore (a_{h-1}, b_{k-1}) e superiore (a_h, b_k) e di centro (a_h^0, b_k^0) $(h, k = 1, 2, \ldots, n;\ a_0 = a,\ a_n = a',\ b_0 = b,\ b_n = b')$ ed applicando la (34) per il calcolo dell'integrale della f esteso a ciascuno degli intervalli T_{hk}, la (35) ci assicura che la somma P_n di questi integrali:

$$(36) \qquad \begin{aligned} S_n^* = \frac{\text{area } T}{36\, n^2} \Big[& f(a, b) + f(a, b') + f(a', b) + f(a'. b') \\ & + 2 \sum_{h=1}^{n-1} \{ f(a_h, b) + f(a_h, b') + f(a, b_h) + f(a', b_h) \} \\ & + 4 \sum_{h=1}^{n} \{ f(a_h^0, b) + f(a_h^0, b') + f(a, b_h^0) + f(a', b_h^0) \} \\ & + 4 \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f(a_h, b_k) + 8 \sum_{h-1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(a_h^0, b_k) \\ & + 8 \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} f(a_h, b_k^0) + 16 \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_h^0, b_k^0) \Big], \end{aligned}$$

approssima l'integrale esteso a T con un errore infinitesimo, almeno del quart'ordine rispetto a $1/n$. Bisogna tuttavia riconoscere che l'esperienza fatta (all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo) di tale metodo d'integrazione, nonchè di quello che fornirebbe l'uso della (26) non ha dato, in parecchie occasioni, risultati soddisfacenti.

Non è stata ancora sperimentata l'applicazione della formola (31), la quale, notiamolo, supposta la f di classe *quattro,* ove si calcolino i due integrali semplici che compaiono al suo secondo membro mediante formole il cui errore abbia la dimensione di una lunghezza elevata, almeno, alla nona potenza, conduce, seguendo il considerato metodo della decomposizione dell'intervallo d'integrazione in n^2 intervalli eguali T_{hk}, alle approssimazioni

$$\begin{aligned} S_n = & \frac{a' - a}{6\,n} \int_b^{b'} \Big[f(a, y) + f(a', y) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} f(a_h, y) + 4 \sum_{h=1}^{n} f(a_h^0, y) \Big] d\,y \\ & + \frac{b' - b}{6\,n} \int_a^{a'} \Big[f(x, b) + f(x, b') + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x, b_k) + 4 \sum_{k=1}^{n} f(x, b_k^0) \Big] d\,x - S_n^*, \end{aligned}$$

[ove S_n^* è data dalla (36)] affette da un errore infinitesimo, almeno, dell'ottavo ordine rispetto a $1/n$.

Ma io oso, egualmente, esprimere, fin da ora, la mia opinione in proposito, secondo la quale la formola (31) è destinata a compiere l'ufficio, per l'integrazione doppia, che, per quella semplice, adempie, da secoli, la provvidenziale formola di CAVALIERI-SIMPSON, costituendone l'attesa *vera* estensione.

Portofino Vetta, 10 agosto 1951