ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 42 fascicule 2 mars-avril 2009

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Weizhe ZHENG

Sur l'indépendance de l en cohomologie l-adique sur les corps locaux

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 42, 2009, p. 291 à 334

SUR L'INDÉPENDANCE DE l EN COHOMOLOGIE l-ADIQUE SUR LES CORPS LOCAUX

PAR WEIZHE ZHENG

RÉSUMÉ. – Gabber a déduit son théorème d'indépendance de l de la cohomologie d'intersection d'un résultat général de stabilité sur les corps finis. Dans cet article, nous démontrons un analogue sur les corps locaux de ce résultat général. Plus précisément, nous introduisons une notion d'indépendance de l pour les systèmes de complexes de faisceaux l-adiques sur les schémas de type fini sur un corps local équivariants sous des groupes finis et nous établissons sa stabilité par les six opérations de Grothendieck et le foncteur des cycles proches. Notre méthode permet d'obtenir une nouvelle démonstration du théorème de Gabber. Nous donnons aussi une généralisation aux champs algébriques.

ABSTRACT. – Gabber deduced his theorem of independence of l of intersection cohomology from a general stability result over finite fields. In this article, we prove an analogue of this general result over local fields. More precisely, we introduce a notion of independence of l for systems of complexes of l-adic sheaves on schemes of finite type over a local field, equivariant under finite groups. We establish its stability by Grothendieck's six operations and the nearby cycle functor. Our method leads to a new proof of Gabber's theorem. We also give a generalization to algebraic stacks.

Introduction

Dans les années 1980, Gabber a prouvé l'indépendance de l de la cohomologie d'intersection [12, Th. 1] : pour X un schéma propre sur un corps fini $k = \mathbb{F}_{p^f}$, équidimensionnel et $i \in \mathbb{Z}$, $\det(1 - tF_0^f, IH^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l))$ est un polynôme dans $\mathbb{Z}[t]$, indépendant de $l \neq p$. Ici $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, $F_0 \in \operatorname{Aut}(\bar{k})$ est le Frobenius géométrique absolu qui envoie a sur $a^{1/p}$. Il déduit ce résultat d'un théorème général d'indépendance de l [*ibid.*, Th. 2] : pour E une extension de $\mathbb{Q}$, il définit une notion de E-compatibilité pour les systèmes de complexes l-adiques ($l \neq p$) sur les schémas séparés de type fini sur k et établit la stabilité de cette E-compatibilité par les six opérations de Grothendieck.

L'objet de cet article est d'étudier l'indépendance de l sur un corps local K, par lequel on entend le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini. De façon précise, on définit une notion de E-compatibilité pour les systèmes de complexes l-adiques sur les schémas de type fini sur K. On prouve la stabilité de cette E-compatibilité par les opérations usuelles, notamment les six opérations et le foncteur des cycles proches $R\Psi$.

La E-compatibilité est sensible aux morphismes finis. Dans l'étude de la E-compatibilité, il est naturel d'utiliser les résultats de de Jong sur les altérations équivariantes [16], ce qui amène à généraliser le problème au cas équivariant sous des actions de groupes finis.

Au § 1, après avoir fixé les notations, on définit la E-compatibilité pour les systèmes de complexes équivariants au-dessus d'un corps fini ou local et énonce la stabilité par les six opérations. La démonstration dans le cas d'un corps fini est donnée au § 2. En vue du théorème de Gabber de la stabilité de la E-compatibilité par les six opérations, il suffit d'appliquer une technique de Deligne-Lusztig qui permet de se débarrasser des actions de groupes finis par descente galoisienne. Au § 3 on se réduit au cas des courbes. L'ingrédient essentiel est un raffinement [28, 4.4], dû à Gabber, de résultats de de Jong, grâce auquel on se ramène au cas de Rj_*L_λ pour l'inclusion $j : U \to X$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux G-strict D dans un schéma régulier X et des complexes G-équivariants L_λ sur U à faisceaux de cohomologie lisses, modérément ramifiés le long de D. Dans le cas d'un corps fini, le cas des courbes étant déjà connu depuis Deligne [7, 9.8], on obtient une démonstration indépendante du théorème de Gabber. La fin de la démonstration des énoncés du § 1 dans le cas d'un corps local est donnée au § 4. On les déduit, à l'aide des résultats de de Jong, d'un cas particulier de la stabilité par $R\Psi$, que l'on traite en utilisant à nouveau la technique de Deligne-Lusztig. Le cas général de la stabilité par $R\Psi$ découle de ce cas particulier et encore une fois des résultats de de Jong.

Les schémas équivariants sont mieux compris dans le contexte de leurs champs quotients associés. Ce point est élucidé au § 5. On y donne aussi des généralisations des résultats d'indépendance de l aux champs algébriques.

Ce travail fait partie de ma thèse. Je remercie vivement mon directeur de thèse, L. Illusie, qui m'a donné d'innombrables conseils lors de la préparation de l'article. Je remercie aussi N. Katz pour sa suggestion d'utiliser la technique de Deligne-Lusztig. Je remercie enfin S. Morel et F. Orgogozo pour leurs longues listes de commentaires.

1. Indépendance de l et six opérations

1.1. – Pour une catégorie $\boldsymbol{C}$, on note $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$ la catégorie des objets de $\boldsymbol{C}$ munis d'une action d'un groupe fini à droite. Les objets sont les triplets (X, G, a), où X est un objet de $\boldsymbol{C}$, G est un groupe fini, a est une action de G sur X à droite (i.e. $a : G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Aut}_{\boldsymbol{C}}(X)$ est un homomorphisme de groupes). On enlève a de la notation lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre. Un morphisme $(X_1, G_1) \to (X_2, G_2)$ est un couple (f, α), où $\alpha : G_1 \to G_2$ est un homomorphisme de groupes, $f : X_1 \to X_2$ est un morphisme G_1-équivariant de $\boldsymbol{C}$, l'action de G_1 sur X_2 étant induite par α. La condition de G_1-équivariance signifie que pour tout $g \in G_1$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{a_g} & X_1 \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X_2 & \xrightarrow{a_{\alpha(g)}} & X_2 \end{array}$$

est commutatif. Pour (X,G,a) un objet de $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$ et $g \in G$, $T_g = (a_g, h \mapsto g^{-1}hg)$ est un automorphisme de (X,G,a). Ceci définit une action de G sur (X,G,a) à droite. Si les produits fibrés sont représentables dans $\boldsymbol{C}$, il en est de même dans $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$:

$$(X_1,G_1)\times_{(X,G)}(X_2,G_2) = (X_1\times_X X_2, G_1\times_G G_2).$$

On note $\boldsymbol{Gr.fini}$ la catégorie des groupes finis. Le foncteur projection $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{Gr.fini}$ qui envoie (X,G) sur G est fibrant. On note $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_G$ sa fibre en G. Pour $\alpha : G \to H$ un homomorphisme de groupes finis,

$$\alpha^* : \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_H \to \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_G,$$

est donné par $\alpha^*(Y,H,a) = (Y,G,a\circ\alpha^{\mathrm{op}})$. Pour $\alpha : G \to H$ injectif, l'adjoint à gauche

$$\alpha_* : \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_G \to \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_H$$

de α^* existe dès que les sommes disjointes finies sont représentables dans $\boldsymbol{C}$. Pour l'expliciter, choisissons un système S de représentants de $\alpha(G)\backslash H$. Pour $(X,G)\in\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$, on a

$$\alpha_*(X,G) \simeq \Big(\coprod_{s\in S} X_s, H\Big), \tag{1.1.1}$$

où $X_s = X$ et l'action de $h \in H$ est donnée par $a_g : X_s \to X_t$, où $g\in G$ et $t \in S$ vérifient $sh = \alpha(g)t$. Rappelons qu'une flèche $(f,\alpha) : (X,G) \to (Y,H)$ dans $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$ est *cocartésienne* [3, VI 10] si pour tout objet (Y',H) de $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_H$, l'application

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_H((Y,H),(Y',H)) \to \mathrm{Hom}_\alpha((X,G),(Y',H))\\ u \mapsto u\circ(f,\alpha)\end{gathered}$$

est bijective.

1.1.2. – Pour $(Y,H)\in\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$, si Y est la somme disjointe d'une famille finie d'objets $(X_j)_{j\in J}$ de $\boldsymbol{C}$, et s'il existe une action *transitive* de H sur J à droite telle que pour tout $h\in H$ et tout $j\in J$, $a_h|X_j : X_j \to Y$ se factorise à travers l'inclusion $X_{jh}\hookrightarrow Y$, alors pour tout $j \in J$, l'inclusion $(X_j, G_j)\hookrightarrow (Y,H)$ est cocartésienne, où G_j est le stabilisateur de j dans H.

Soit $(X,G)\in\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$. On appelle *quotient* de X par G un objet Y de $\boldsymbol{C}$ muni d'un morphisme $p : X\to Y$ invariant par G tel que $(X,G)\to(Y,\{1\})$ soit cocartésien, i.e. tel que, pour tout objet Z de $\boldsymbol{C}$, l'application

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}(Y,Z)\to\mathrm{Hom}(X,Z)^G\\ f\mapsto f\circ p\end{gathered}$$

soit bijective. Pour $\alpha : G\to H$ un homomorphisme surjectif, si le quotient Y de X par $\operatorname{Ker}\alpha$ existe, alors l'action de G sur X induit une action de H sur Y, et la flèche $(X,G)\to(Y,H)$ est cocartésienne. De plus, le quotient de X par $\operatorname{Ker}\alpha$ existe si et seulement s'il existe une flèche cocartésienne de source (X,G) au-dessus de α. Cela est vrai pour $\alpha : G\to H$ un homomorphisme quelconque si les sommes disjointes finies sont représentables dans $\boldsymbol{C}$.

1.1.3. – Soit $F : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{C}$ un foncteur. Pour (X, G) un objet de $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$, on note $F_{(X,G)}$ la catégorie fibre de $\boldsymbol{Eq}(F) : \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$ en (X, G). Pour $(\mathcal{F}, G)$, $(\mathcal{G}, G)$ deux objets de $F_{(X,G)}$, G agit à gauche sur $\mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$: pour $c \in \mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $g \in G$, $gc \in \mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est l'unique flèche rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "a_g", "\sim"'] \arrow[d, "gc"] & \mathcal{F} \arrow[d, "c"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "a_g", "\sim"'] & \mathcal{G}. \end{tikzcd}$$

On a une bijection $\mathrm{Hom}_{F_{(X,G)}}((\mathcal{F}, G), (\mathcal{G}, G)) \simeq \mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^G$.

1.2. – Soit S un schéma noethérien. On note $\boldsymbol{C}_S$ la catégorie des S-schémas de type fini et on pose $\boldsymbol{Eq}/S = \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C}_S)$.

Soit $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/S$. Rappelons que l'action de G est dite *admissible* [3, V 1.7] si le quotient de X par G existe dans $\boldsymbol{C}_S$, ou, ce qui revient au même, si toute trajectoire de G dans X est contenue dans un ouvert affine [*ibid.*, 1.8]. Dans ce cas, le morphisme $X \to X/G$ est fini [*ibid.*, 1.5].

Soit $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/S$. Pour une partie Z de X, on note $G_d(Z)$ le stabilisateur de Z. Si x est un point de X, on appelle $G_d(x)$ *groupe de décomposition*. Ce groupe opère canoniquement à gauche sur le corps résiduel $\kappa(x)$, et le fixateur de $\kappa(x)$ est appelé *groupe d'inertie*, noté $G_i(x)$ [*ibid.*, 2]. On dit que l'action de G est *libre* si elle est admissible et si $G_i(x)$ est trivial pour tout $x \in X$. Dans ce cas, l'action de G fait de X un G-torseur sur X/G.

Soit $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/S$. Si G agit transitivement sur l'ensemble $\pi_0(X)$ des composantes connexes de X, alors pour tout $Y \in \pi_0(X)$, l'inclusion $(Y, G_d(Y)) \to (X, G)$ est cocartésienne.

1.3. Formalisme l-adique équivariant

Supposons que S soit régulier de dimension ≤ 1. Soit l un nombre premier inversible sur S. On a un formalisme de faisceaux l-adiques sur les S-schémas séparés de type fini [11, § 6]. Ce formalisme a un sens pour les schémas de type fini sur S (pas nécessairement séparés), et ce n'est que pour certaines opérations ($Rf_!$ et $Rf^!$) qu'on a besoin d'une hypothèse de séparation sur les morphismes. (Voir [18] pour un formalisme sans hypothèse de séparation.) Le formalisme l-adique dans [11] marche aussi dans le cadre équivariant. On va le rappeler brièvement.

On choisit $F : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{C}_S$ un foncteur bifibré avec $F_X \simeq (X^{\sim}_{\text{ét}})^{\text{op}}$. Pour $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/S$, on définit la catégorie des faisceaux d'ensembles sur (X, G) par $(X, G)^{\sim} = F^{\text{op}}_{(X,G)}$ (1.1.3), qui est un topos. Un faisceau sur (X, G) est donc un faisceau $\mathcal{F}$ sur X muni d'une action de G à gauche, compatible à l'action de G sur X. En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est muni d'une famille d'isomorphismes $(b_g : \mathcal{F} \to a_{g*}\mathcal{F})_{g \in G}$ telle que pour tous $g, h \in G$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "b_h"] \arrow[drr, "b_{gh}"'] & a_{h*}\mathcal{F} \arrow[r, "a_{h*}b_g"] & a_{h*}a_{g*}\mathcal{F} \arrow[d, equal] \\ & & (a_{gh})_*\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Un morphisme $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ de faisceaux sur (X, G) est un morphisme $c : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ de faisceaux sur X, G-équivariant, i.e. tel que, pour tout $g \in G$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_1 \arrow[r, "b_g"] \arrow[d, "c"'] & a_{g*}\mathcal{F}_1 \arrow[d, "a_{g*}c"] \\
\mathcal{F}_2 \arrow[r, "b_g"] & a_{g*}\mathcal{F}_2
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Soit Λ un anneau local artinien annulé par une puissance de l. On note $\mathrm{Mod}(X, G, \Lambda)$ la catégorie des faisceaux de Λ-modules sur $(X, G)^\sim$. Un Λ-module sur (X, G) est *constructible* si le Λ-module sur X sous-jacent est constructible. On note $\mathrm{Mod}_c(X, G, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(X, G, \Lambda)$ formée des Λ-modules constructibles sur (X, G). On note $D(X, G, \Lambda)$ la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}(X, G, \Lambda)$, $D_c(X, G, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine formée des complexes à faisceaux de cohomologie dans $\mathrm{Mod}_c(X, G, \Lambda)$.

Soient E un corps extension finie de $\mathbb{Q}_l$, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. On considère le système projectif $\mathcal{O}_\bullet = (\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose

$$\mathrm{Mod}_c(X, G, \mathcal{O}) = 2\text{-}\varprojlim_n \mathrm{Mod}_c(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n),$$

qui s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{Mod}(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ des systèmes projectifs $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $M_n \in \mathrm{Mod}(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ et $M_n \to M_m$ est une flèche dans $\mathrm{Mod}(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ pour $n \geq m$. On note $D(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$. Un faisceau $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ est *essentiellement nul* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geq n$ tel que la flèche $\mathcal{F}_m \to \mathcal{F}_n$ soit nulle. Un complexe $K \in D(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ est *essentiellement nul* si $\mathcal{H}^i K$ est essentiellement nul pour tout $i \in \mathbb{Z}$; K est *essentiellement constant* s'il existe un complexe C de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules de torsion sur $(X, G)^\sim$ et des flèches $L \to K$, $L \to (C \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$ à cônes essentiellement nuls. On considère le foncteur

$$\begin{aligned} D^b(X, G, \mathcal{O}_\bullet) &\to D^-(X, G, \mathcal{O}_\bullet) \\ K &\mapsto (\mathcal{O}/\mathfrak{m})_{n\in\mathbb{N}} \otimes^L_{\mathcal{O}_\bullet} K. \end{aligned}$$

On note $D^b(X, G, \mathcal{O})$ le quotient de la sous-catégorie pleine de $D^b(X, G, \mathcal{O}_\bullet)$, image inverse des complexes essentiellement constants, par la sous-catégorie épaisse, image inverse des complexes essentiellement nuls. Le foncteur

$$(\mathcal{O}/\mathfrak{m}) \otimes^L_{\mathcal{O}} R\varprojlim - : D^b(X, G, \mathcal{O}_\bullet) \to D^+(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m})$$

induit un foncteur conservatif [11, 2.6, 2.7]

$$(\mathcal{O}/\mathfrak{m}) \otimes^L_{\mathcal{O}} - : D^b(X, G, \mathcal{O}) \to D^b(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m}).$$

On note $D^b_c(X, G, \mathcal{O})$ la sous-catégorie pleine de $D^b(X, G, \mathcal{O})$, image inverse de $D^b_c(X, G, \mathcal{O}/\mathfrak{m})$. Elle est munie d'une t-structure canonique $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$, dont le cœur est $\mathrm{Mod}_c(X, G, \mathcal{O})$ [11, 3.5].

On pose $\mathrm{Mod}_c(X, G, E) = \mathrm{Mod}_c(X, G, \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} E$, $D^b_c(X, G, E) = D^b_c(X, G, \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} E$. Enfin on pose $\mathrm{Mod}_c(X, G, \overline{\mathbb{Q}_l}) = 2\text{-}\varinjlim_E \mathrm{Mod}_c(X, G, E)$, $D^b_c(X, G, \overline{\mathbb{Q}_l}) = 2\text{-}\varinjlim_E D^b_c(X, G, E)$, où E parcourt les extensions finies de $\mathbb{Q}_l$ contenues dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_l}$ de $\mathbb{Q}_l$.

On note $K(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$ le groupe de Grothendieck de $\mathrm{Mod}_c(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$, qui est aussi le groupe de Grothendieck de $D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$.

Soit $R = \Lambda, \mathcal{O}, E$ ou $\overline{\mathbb{Q}_l}$ comme plus haut. On choisit $F : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{C}_S$ un foncteur bifibré avec $F_X \simeq \mathrm{Mod}_c(X,R)^{\mathrm{op}}$ (resp. $F_X \simeq D_c^b(X,R)^{\mathrm{op}}$). Pour $(X,G) \in \boldsymbol{Eq}/S$, on pose $\mathrm{Mod}_c(X,G,R)_{\text{naïf}} = F^{\mathrm{op}}_{(X,G)}$ (resp. $D_c^b(X,G,R)_{\text{naïf}} = F^{\mathrm{op}}_{(X,G)}$) (1.1.3). On a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Mod}_c(X,G,R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_c(X,G,R)_{\text{naïf}}$$

(resp. un foncteur

$$D_c^b(X,G,R) \to D_c^b(X,G,R)_{\text{naïf}} \tag{1.3.1}$$

t-exact pour les t-structures canoniques).

Proposition 1.4. – *Le foncteur* (1.3.1) *est une équivalence de catégories si $R = E$ ou $\overline{\mathbb{Q}_l}$.*

Démonstration. – Soient $K, L \in D_c^b(X,G,R)$. On note $f : (\mathrm{pt}, G) \to (\mathrm{pt}, \{1\})$. Le foncteur $R\mathrm{Hom}_{D_c^b(X,G,R)}(K,-)$ s'identifie au composé

$$D_c^b(X,G,R) \xrightarrow{R\mathrm{Hom}_{D_c^b(X,R)}(K,-)} D_c^b(\mathrm{pt},G,R) \xrightarrow{f_*} D_c^b(\mathrm{pt},R).$$

La suite spectrale de foncteur composé appliquée à L s'écrit

$$E_2^{pq} = H^p(G, \mathrm{Hom}_{D_c^b(X,R)}(K, L[q])) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{D_c^b(X,G,R)}(K, L[p+q]).$$

Comme $H^p(G,M) = 0$ pour tout $p > 0$ et tout R-espace vectoriel M, on a

$$\mathrm{Hom}_{D_c^b(X,G,R)}(K,L) \simeq \mathrm{Hom}_{D_c^b(X,R)}(K,L)^G.$$

Donc (1.3.1) est pleinement fidèle. Pour $K \in D^{[a,b]}(X,G,R)_{\text{naïf}}$, montrons par récurrence sur $b-a$ que K est dans l'image essentielle de (1.3.1). Pour $b-a \le 0$, $K = \mathcal{F}[-a]$ pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}_c(X,G,R)_{\text{naïf}}$. Pour $b-a \ge 1$, K est le cône de $(\tau_{\ge b}K)[-1] \to \tau_{\le b-1}K$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\tau_{\ge b}K \in D^{[b,b]}$ et à $\tau_{\le b-1}K \in D^{[a,b-1]}$. $\square$

On renvoie à 5.2 pour une interprétation de $D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$ (et des six opérations qu'on va définir) en termes du champ de Deligne-Mumford $[X/G]$.

1.5. – Pour $K, L \in D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$, G agit sur $K \otimes L$ et $R\mathcal{H}om(K,L)$ par

$$a_g^*(K \otimes L) \xrightarrow{\sim} a_g^*K \otimes a_g^*L \xrightarrow{b_g \otimes b_g} K \otimes L,$$
$$a_g^* R\mathcal{H}om(K,L) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(a_g^*K, a_g^*L) \xrightarrow{R\mathcal{H}om(b_g^{-1}, b_g)} R\mathcal{H}om(K,L), \quad g \in G.$$

Cela définit des foncteurs bi-exacts

$$- \otimes - : D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l}) \times D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l}) \to D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l}),$$
$$R\mathcal{H}om(-,-) : D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})^{\mathrm{op}} \times D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l}) \to D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l}).$$

Soit $(f,\alpha) : (X_1,G_1) \to (X_2,G_2)$ un morphisme dans $\boldsymbol{Eq}/S$ (resp. un morphisme dans $\boldsymbol{Eq}/S$ avec f séparé). Pour $L \in D_c^b(X_2,G_2,\overline{\mathbb{Q}_l})$, G_1 agit sur f^*L (resp. $Rf^!L$) par

$$a_g^* f^* L \simeq f^* a_{\alpha(g)}^* L \xrightarrow{f^* b_g} L$$
$$(\text{resp.} \quad a_g^* Rf^! L \simeq Rf^! a_{\alpha(g)}^* L \xrightarrow{Rf^! b_g} L), \quad g \in G_1.$$

Cela définit un foncteur exact

$$(f,\alpha)^* \text{ (resp. } R(f,\alpha)^!) : D^b_c(X_2,G_2,\overline{\mathbb{Q}_l}) \to D^b_c(X_1,G_1,\overline{\mathbb{Q}_l}).$$

Si $(g,\beta):(X_2,G_2)\to(X_3,G_3)$ est un deuxième morphisme dans $\boldsymbol{Eq}/S$ (resp. un deuxième morphisme dans $\boldsymbol{Eq}/S$ avec g séparé), alors $(gf,\beta\alpha)^* \simeq (f,\alpha)^*(g,\beta)^*$ (resp. $R(gf,\beta\alpha)^! \simeq R(f,\alpha)^! R(g,\beta)^!$).

On va définir un foncteur exact

$$R(f,\alpha)_* \text{ (resp. } R(f,\alpha)_!) : D^b_c(X_1,G_1,\overline{\mathbb{Q}_l}) \to D^b_c(X_2,G_2,\overline{\mathbb{Q}_l}),$$

adjoint à droite (resp. à gauche) de $(f,\alpha)^*$ (resp. $R(f,\alpha)^!$). Traitons d'abord trois cas spéciaux.

(i) Cas $G_1=G_2=G$, $\alpha=\mathrm{Id}_G$. Pour $K\in D^b_c(X_1,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$, on pose $R(f,\mathrm{Id}_G)_*K = Rf_*K$ (resp. $R(f,\mathrm{Id}_G)_!K = Rf_!K$), sur lequel G agit par

$$Rf_*K \xrightarrow{Rf_*b_g} Rf_*a_{g*}K = a_{g*}Rf_*K$$

$$\text{(resp.} \quad Rf_!K \xrightarrow{Rf_!b_g} Rf_!a_{g*}K \simeq a_{g*}Rf_!K), \quad g\in G.$$

Le foncteur $R(f,\mathrm{Id}_G)_*$ (resp. $R(f,\mathrm{Id}_G)_!$) ainsi défini est un adjoint à droite (resp. à gauche) de $(f,\mathrm{Id}_G)^*$ (resp. $R(f,\mathrm{Id}_G)^!$).

(ii) Cas $X_1=X_2=X$, $f=\mathrm{Id}_X$, α surjectif. Pour $\mathcal{F}\in\mathrm{Mod}(X,G_1,\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$, on définit $(\mathrm{Id}_X,\alpha)_*\mathcal{F}$ (resp. $(\mathrm{Id}_X,\alpha)_!\mathcal{F}$) comme le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ des invariants (resp. le faisceau quotient de $\mathcal{F}$ des coïnvariants) par $\mathrm{Ker}\,\alpha$. Il est muni d'une action de G_2 induite par l'action de G_1 sur $\mathcal{F}$. Le foncteur $(\mathrm{Id}_X,\alpha)_*$ (resp. $(\mathrm{Id}_X,\alpha)_!$) : $\mathrm{Mod}(X,G_1,\mathcal{O}_\bullet)\to\mathrm{Mod}(X,G_2,\mathcal{O}_\bullet)$ ainsi obtenu est un adjoint à droite (resp. à gauche) de $(\mathrm{Id}_X,\alpha)^*$, donc est exact à gauche (resp. à droite) et se dérive en $R(\mathrm{Id}_X,\alpha)_* : D^+(X,G_1,\mathcal{O}_\bullet)\to D^+(X,G_2,\mathcal{O}_\bullet)$ (resp. $L(\mathrm{Id}_X,\alpha)_! : D^-(X,G_1,\mathcal{O}_\bullet)\to D^-(X,G_2,\mathcal{O}_\bullet)$). Cela induit un foncteur $(\mathrm{Id}_X,\alpha)_*$ (resp. $(\mathrm{Id}_X,\alpha)_!$) : $D^b_c(X,G_1,\overline{\mathbb{Q}_l})\to D^b_c(X,G_2,\overline{\mathbb{Q}_l})$ adjoint à droite (à gauche) de $(\mathrm{Id}_X,\alpha)^*$. La flèche canonique $\mathcal{F}^{\mathrm{Ker}\,\alpha}\to\mathcal{F}_{\mathrm{Ker}\,\alpha}$ induit un isomorphisme de foncteurs $(\mathrm{Id}_X,\alpha)_* \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Id}_X,\alpha)_! : D^b_c(X,G_1,\overline{\mathbb{Q}_l})\to D^b_c(X,G_2,\overline{\mathbb{Q}_l})$, donc ces foncteurs sont t-exacts pour les t-structures canoniques.

(iii) Cas $X_1=X_2=X$, $f=\mathrm{Id}_X$, α injectif. On choisit un système S de représentants de $G_2/\alpha(G_1)$. Pour $K\in D^b_c(X,G_1,\overline{\mathbb{Q}_l})$, on considère $L=\bigoplus_{s\in S}a_s^*K$. Soit $g\in G_2$. Pour $s\in S$, on pose $gs=t_s\alpha(h_s)$, $t_s\in S$, $h_s\in G_1$. Alors g agit sur L par

$$a_g^*\bigoplus_{s\in S}a_s^*K \simeq \bigoplus_{s\in S}a_{t_s}^*a_{h_s}^*K \xrightarrow{\bigoplus_{s\in S}a_{t_s}^*b_{h_s}} \bigoplus_{s\in S}a_{t_s}^*K.$$

On pose $(\mathrm{Id}_X,\alpha)_*K=(\mathrm{Id}_X,\alpha)_!K=L$. Cette définition ne dépend pas du choix de S à isomorphisme près. Le foncteur t-exact

$$(\mathrm{Id}_X,\alpha)_* = (\mathrm{Id}_X,\alpha)_! : D^b_c(X,G_1,\overline{\mathbb{Q}_l})\to D^b_c(X,G_2,\overline{\mathbb{Q}_l})$$

ainsi défini est à la fois un adjoint à droite et un adjoint à gauche de $(\mathrm{Id}_X,\alpha)^*$.

Dans le cas général, on décompose (f,α) en

$$(X_1,G_1)\xrightarrow{(f,\mathrm{Id}_{G_1})}(X_2,G_1)\xrightarrow{(\mathrm{Id}_{X_2},\alpha)}(X_2,G_2)$$

et α en $G_1 \xrightarrow{\alpha_1} \operatorname{Im}\alpha \xrightarrow{\alpha_2} G_2$. On pose $R(f,\alpha)_* = (\mathrm{Id}_{X_2},\alpha_2)_*(\mathrm{Id}_{X_2},\alpha_1)_*R(f,\mathrm{Id}_{G_1})_*$ (resp. $R(f,\alpha)_! = (\mathrm{Id}_{X_2},\alpha_2)_!(\mathrm{Id}_{X_2},\alpha_1)_!R(f,\mathrm{Id}_{G_1})_!$). Le foncteur $R(f,\alpha)_*$ (resp. $R(f,\alpha)_!$) ainsi défini est un adjoint à droite (resp. à gauche) de $(f,\alpha)^*$ (resp. $R(f,\alpha)^!$). Il s'ensuit que $R(gf,\beta\alpha)_* \simeq R(g,\beta)_*R(f,\alpha)_*$ (resp. $R(gf,\beta\alpha)_! \simeq R(g,\beta)_!R(f,\alpha)_!$). Voir aussi [2, XVII 3.3.2].

On enlève α de la notation lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre. Les six opérations sur D_c^b induisent les opérations correspondantes sur les groupes de Grothendieck.

Soit $a_X : (X,G) \to (S,\{1\})$. On vérifie que $Ra_X^!\mathbb{Q}_l$ est globalement défini (le cas général découle du cas séparé par [4, 3.2.4]). On pose $D_X = R\mathcal{H}om_X(-,Ra_X^!\mathbb{Q}_l)$. On a $D_XD_X \simeq \mathrm{Id}$. Pour $K,L \in D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$, on a $D_XR\mathcal{H}om_X(K,L) = K\otimes D_XL$. Si $(f,\alpha):(X,G)\to(Y,H)$ est un morphisme dans $\boldsymbol{Eq}/S$ avec f séparé, alors $D_Xf^*\simeq Rf^!D_Y$ et $D_YR(f,\alpha)_*\simeq R(f,\alpha)_!D_X$. En effet, tous les énoncés sauf le dernier résultent facilement des analogues sans actions de groupe. Pour le dernier énoncé, on remarque que pour tout $K\in D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$ et tout $L\in D_c^b(Y,H,\overline{\mathbb{Q}_l})$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_Y(D_YRf_*K,L) &\simeq \mathrm{Hom}_Y(D_YL,Rf_*K)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_X(f^*D_YL,K)\simeq \mathrm{Hom}_X(D_XRf^!L,K)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_X(D_XK,Rf^!L)\simeq \mathrm{Hom}_Y(Rf_!D_XK,L).\end{aligned}$$

Pour $(X,G)\in\boldsymbol{Eq}/S$, $K\in D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$ et $g\in G$, b_g induit un isomorphisme $K\xrightarrow{\sim}T_{g*}K$, où $T_g=(a_g,h\mapsto g^{-1}hg)$ comme dans 1.1.

1.5.1. – Si $(f,\alpha):(X,G)\to(Y,H)$ est cocartésien avec α injectif, alors $(f,\alpha)_*$ est une équivalence de catégories. Cela résulte de (1.1.1) et de la définition de $(f,\alpha)_*$.

Proposition 1.6. – *Soient $(f,\alpha):(X,G)\to(Y,H)$, $(g,\beta):(Y',H')\to(Y,H)$ deux morphismes de même but dans $\boldsymbol{Eq}/S$ avec f séparé. Pour $r\in H$, formons le carré cartésien*

(1.6.1)
$$\begin{tikzcd}
(X',G')_r \arrow[rr, "(h,\gamma)_r"] \arrow[d, "(f',\alpha')_r"] & & (X,G) \arrow[d, "(f,\alpha)"] \\
(Y',H') \arrow[r, "(g,\beta)"] & (Y,H) \arrow[r, "T_r"] & (Y,H)
\end{tikzcd}$$

où T_r est comme plus haut. Le foncteur $R(f',\alpha')_{r!}(h,\gamma)_r^*$ ne dépend, à isomorphisme près, que de la double classe $(\operatorname{Im}\beta)r(\operatorname{Im}\alpha)\subset H$ et on a

$$(g,\beta)^*R(f,\alpha)_!\simeq\bigoplus_r R(f',\alpha')_{r!}(h,\gamma)_r^*,$$

où r parcourt un système de représentants de $\operatorname{Im}\beta\backslash H/\operatorname{Im}\alpha$. En particulier, $R(f,\alpha)_!$ commute à tout changement de base (g,β) dans $\boldsymbol{Eq}/S$ vérifiant $\sharp(\operatorname{Im}\beta\backslash H/\operatorname{Im}\alpha)=1$.

Le cas où $f=g=\mathrm{Id}_Y$ avec Y le spectre d'un corps séparablement clos est une version de la formule de Mackey [27, 7.3].

On renvoie à 5.4 pour une interprétation en termes de champs.

Démonstration. – On remarque d'abord que $R(f,\alpha)_!$ commute au changement de base (g,β) dans chacun des trois cas suivants : (i) $\alpha = \mathrm{Id}$; (ii) $f = \mathrm{Id}$ et α surjectif ; (iii) $f = \mathrm{Id}$, α injectif et β surjectif. Cela résulte du théorème de changement de base usuel [2, XVII 5.2.6] dans le cas (i), et de la définition de $(\mathrm{Id},\alpha)_!$ dans les cas (ii) et (iii).

On factorise α en $G \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{Im}\,\alpha \xrightarrow{\alpha_2} H$, β en $H' \xrightarrow{\beta_1} \mathrm{Im}\,\beta \xrightarrow{\beta_2} H$, et (1.6.1) en un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
(X',G')_r \arrow[rrr, "(h{,}\gamma)_r"] \arrow[d] & & & (X,G) \arrow[d, "(f{,}\alpha_1)"] \\
(Y',I'_r) \arrow[r, "(g{,}\sigma_r)"] \arrow[d, "(\mathrm{Id}_{Y'}{,}\alpha'_{2,r})"] & (Y,I_r) \arrow[rr, "(a_r{,}\tau_r)"] \arrow[d, "(\mathrm{Id}_Y{,}\rho_r)"] & & (Y,\mathrm{Im}\,\alpha) \arrow[d, "(\mathrm{Id}_Y{,}\alpha_2)"] \\
(Y',H') \arrow[r, "(g{,}\beta_1)"] & (Y,\mathrm{Im}\,\beta) \arrow[r, "(\mathrm{Id}_Y{,}\beta_2)"] & (Y,H) \arrow[r, "T_r"] & (Y,H).
\end{tikzcd}$$

On a

$$\begin{aligned}
R(f',\alpha')_{r!}(h,\gamma)_r^* &\simeq (\mathrm{Id}_{Y'},\alpha'_{2,r})_!(g,\sigma_r)^*(a_r,\tau_r)^*R(f,\alpha_1)_! && \text{d'après (i) et (ii)}\\
&\simeq (g,\beta_1)^*(\mathrm{Id}_Y,\rho_r)_!(a_r,\tau_r)^*R(f,\alpha_1)_! && \text{d'après (iii).}
\end{aligned}$$

Donc pour montrer la proposition, on peut supposer que $f = g = \mathrm{Id}_Y$ et que α et β sont des inclusions. On peut prendre pour (1.6.1) le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(Y,H'\cap rGr^{-1}) \arrow[rr, "(a_r{,}\gamma_r)"] \arrow[d, "(\mathrm{Id}{,}\alpha'_r)"] & & (Y,G) \arrow[d, "(\mathrm{Id}{,}\alpha)"] \\
(Y,H') \arrow[r, "(\mathrm{Id}{,}\beta)"] & (Y,H) \arrow[r, "T_r"] & (Y,H)
\end{tikzcd}$$

où α'_r est l'inclusion, γ_r est donné par $g \mapsto r^{-1}gr$. Soit $K \in D^b_c(Y,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$. Soit R un système de représentants de $H'\backslash H/G$. Pour $r \in R$, soit S_r un système de représentants de $H'/(H'\cap rGr^{-1})$. Posons $L_r = \bigoplus_{s\in S_r} a_s^* a_r^* K \simeq (\mathrm{Id},\alpha'_r)_!(a_r,\gamma_r)^*K$. Comme $\bigcup_{r\in R} S_r r$ est un système de représentants de H/G, on a

$$\bigoplus_{r\in R} L_r \simeq \bigoplus_{r\in R}\bigoplus_{s\in S_r} a_{sr}^* K \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Id},\beta)^*(\mathrm{Id},\alpha)_! K. \tag{1.6.2}$$

Pour $h \in H'$, si on pose $hs = t_s h_s$, $t_s \in S_r$, $h_s \in H'\cap rGr^{-1}$, alors h agit sur L_r par

$$a_h^* \bigoplus_{s\in S_r} a_s^* a_r^* K \simeq \bigoplus_{s\in S_r} a_{t_s}^* a_{h_s}^* a_r^* K \xrightarrow{\bigoplus_{s\in S_r} a_{t_s}^* b_{a_r^*K,h_s}} \bigoplus_{s\in S_r} a_{t_s}^* a_r^* K,$$

où $b_{a_r^*K,h_s}$ est donné par

$$a_{h_s}^* a_r^* K \simeq a_r^* a_{\gamma_r(h_s)}^* K \xrightarrow{a_r^* b_{\gamma_r(h_s)}} a_r^* K.$$

Comme $hsr = t_s r r^{-1} h_s r$, $t_s r \in S_r r$, $r^{-1}h_s r \in G$, h agit sur $(\mathrm{Id},\beta)^*(\mathrm{Id},\alpha)_! K$ par

$$a_h^* \bigoplus_{r\in R}\bigoplus_{s\in S_r} a_{sr}^* K \simeq \bigoplus_{r\in R}\bigoplus_{s\in S_r} a_{t_s r}^* a_{r^{-1}h_s r}^* K \xrightarrow{a_{t_s r}^*(b_{r^{-1}h_s r})} \bigoplus_{r\in R}\bigoplus_{s\in S_r} a_{t_s r}^* K.$$

Donc l'isomorphisme (1.6.2) est H'-équivariant. L'image de L_r ne dépend que de la double classe $H'rG$. □

PROPOSITION 1.7. – *Soit* $(f,\alpha):(X,G)\to(Y,H)$ *un morphisme dans* $\boldsymbol{Eq}/S$.

(a) *Supposons que* $\alpha : G\to H$ *soit surjectif et que* f *fasse de* Y *un quotient de* X *par* $\operatorname{Ker}\alpha$. *Alors pour tout* $K\in D^b_c(Y,H,\overline{\mathbb{Q}_l})$, *la flèche d'adjonction* $K\to(f,\alpha)_*(f,\alpha)^*K$ *est un isomorphisme.*

(b) *Si de plus* $\operatorname{Ker}\alpha$ *opère librement sur* X, *de sorte que* X *est un* $(\operatorname{Ker}\alpha)$-*torseur sur* Y, *alors pour tout* $L\in D^b_c(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$, *la flèche d'adjonction* $(f,\alpha)^*(f,\alpha)_*L\to L$ *est un isomorphisme.*

On renvoie à 5.3 pour une interprétation en termes de champs dans le cas (b).

Démonstration. – (a) Pour tout point géométrique $\bar y$ de Y à valeur dans un corps algébriquement clos, $\bar y$ est le quotient de $X^{\mathrm{red}}_{\bar y}$ par $\operatorname{Ker}\alpha$ (ceci découle de [3, V 1.1 (iii)]). Quitte à changer S, on peut supposer $H=\{e\}$, $Y=y=\operatorname{Spec} k$ avec k un corps algébriquement clos et X réduit. Alors il existe un sous-groupe G_1 de G tel que $X=\coprod_{h\in G_1\backslash G} x_h$, où $x_h=\operatorname{Spec} k$ et l'action de G est donnée par $a_g(x_h)=x_{hg}$. Soit $K\in D^b_c(Y,\overline{\mathbb{Q}_l})$. Alors $((f,\alpha)^*K)_{x_h}=K$, et $g\in G$ agit par

$$a_g^*(f,\alpha)^*K\simeq(f,\alpha)^*K\xrightarrow{\mathrm{Id}}(f,\alpha)^*K.$$

Donc $(f,\mathrm{Id})_*(f,\alpha)^*K\simeq\bigoplus_{h\in G/G_1}K_h$, où $K_h=K$, et $g\in G$ agit par

$$\bigoplus_{h\in G/G_1}(K_h\xrightarrow{\mathrm{Id}}K_{gh}).$$

Donc la diagonale induit un isomorphisme $K\to(\bigoplus_{h\in G/G_1}K_h)^G\simeq(f,\alpha)_*(f,\alpha)^*K$.

(b) Si $\operatorname{Ker}\alpha$ opère librement sur X, alors pour tout point géométrique $\bar y\to Y$, $X_{\bar y}$ est un $\operatorname{Ker}\alpha$-torseur sur $\bar y$. On fait le même dévissage qu'en (a). Dans notre cas $G_1=\{1\}$. Soit (g,β) une section de (f,α) (par exemple $(y,1)\mapsto(x_1,1)$). Alors (g,β) est cocartésien, donc $(g,\beta)_*$ est une équivalence de catégories. Il en résulte que $(f,\alpha)_*$ l'est aussi, d'où le résultat. □

REMARQUE. – Soient k/k_0 une extension finie galoisienne, k' une extension finie de k tel que k' soit galoisien sur k_0. Alors $(\operatorname{Spec} k',\operatorname{Gal}(k'/k_0))\to(\operatorname{Spec} k,\operatorname{Gal}(k/k_0))$ vérifie les hypothèses de (b).

1.8. Traces locales

Soit G un groupe fini agissant sur $x=\operatorname{Spec}\kappa(x)$. Le corps $\kappa(x)$ est muni d'une action de G à gauche. Soit $\bar x$ un point géométrique algébrique au-dessus de x, i.e. le spectre d'un corps $\kappa(\bar x)$, clôture séparable de $\kappa(x)$. On pose

$$G_{\bar x}=G\times_{\operatorname{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^G)}\operatorname{Gal}(\kappa(\bar x)/\kappa(x)^G).$$

Soit l un nombre premier inversible sur x. On a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned}\operatorname{Mod}_c(x,G,\overline{\mathbb{Q}_l})&\to\operatorname{Rep}(G_{\bar x},\overline{\mathbb{Q}_l})\\ L&\mapsto L_{\bar x},\end{aligned}$$

où $\operatorname{Rep}(G_{\bar x},\overline{\mathbb{Q}_l})$ est la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}_l}$-représentations continues de $G_{\bar x}$. Pour $L\in\operatorname{Mod}_c(x,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$, $(DL)_{\bar x}$ s'identifie à la représentation contragrédiente de $L_{\bar x}$.

Soient H un groupe fini agissant sur $y = \operatorname{Spec} \kappa(y)$ et $(f, \alpha) : (x, G) \to (y, H)$ un morphisme avec f fini. Prenons $\bar{y}$ un point géométrique algébrique au-dessus de y s'insérant dans un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \bar{x} \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d, "f"] \\ \bar{y} \arrow[r] & y. \end{tikzcd}$$

À l'aide de f, on identifie $\kappa(y)$ à un sous-corps de $\kappa(x)$. On a $\kappa(y)^H \subset \kappa(y)^G \subset \kappa(x)^G$, d'où un diagramme commutatif de groupes

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \operatorname{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^G) \arrow[d] & \operatorname{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^G) \arrow[l] \arrow[d] \\ H \arrow[r] & \operatorname{Gal}(\kappa(y)/\kappa(y)^H) & \operatorname{Gal}(\kappa(\bar{y})/\kappa(y)^H) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

qui induit un homomorphisme $\alpha_{\bar{x}} = (f, \alpha)_{\bar{x}} : G_{\bar{x}} \to H_{\bar{y}}$. Soit $L \in \operatorname{Mod}_c(X, G, \overline{\mathbb{Q}_l})$. On a $((f, \alpha)_* L)_{\bar{y}} \simeq (\alpha_{\bar{x}})_* L_{\bar{x}}$ comme $H_{\bar{y}}$-représentations. Ici $(\alpha_{\bar{x}})_*$ est la co-induction. (Si on note $(\alpha_{\bar{x}})_!$ l'induction, on a un isomorphisme canonique $(\alpha_{\bar{x}})_* \xrightarrow{\sim} (\alpha_{\bar{x}})_!$, *cf.* 1.5 (ii) et (iii).) Le caractère de la représentation $(\alpha_{\bar{x}})_*$ peut se calculer en utilisant le lemme suivant.

LEMME 1.9. – *Soient F un corps, $\alpha : G_1 \to G_2$ un homomorphisme de groupes (abstraits) avec $N = \operatorname{Ker} \alpha$ d'ordre fini et $I = \operatorname{Im} \alpha$ d'indice fini dans G_2, L un F-espace vectoriel de dimension finie, $\rho : G_1 \to \mathrm{GL}_F(L)$ une représentation linéaire. On note $\alpha_* L$ le module co-induit, i.e. $\alpha_* L = \operatorname{Hom}_{F[I]}(F[G_2], L^N)$ avec l'action de G_2 induite par multiplication à droite sur $F[G_2]$. Alors pour tout $g \in G_2$,*

$$\sharp N \cdot \operatorname{Tr}(g, \alpha_* L) = \sum_s \sum_{\substack{t \in G_1 \\ \alpha(t) = s^{-1} g s}} \operatorname{Tr}(t, L), \tag{1.9.1}$$

où s parcourt un système de représentants de G_2/I.

Démonstration. – Il suffit de traiter les deux cas spéciaux suivants.

(i) Cas $N = \{1\}$. La formule est immédiate (voir, par exemple, [27, 3.3]).

(ii) Cas $I = G_2$. Soit $\bar{g} = \sum_{\substack{t \in G_1 \\ \alpha(t) = g}} \rho(t) \in \operatorname{End}_F(L)$. Alors $\bar{g}(L) \subset L^N$. Le membre de droite de (1.9.1) est

$$\operatorname{Tr}(\bar{g}, L) = \operatorname{Tr}(\bar{g}, L^N) + \operatorname{Tr}(\bar{g}, L/L^N) = \sharp N \cdot \operatorname{Tr}(g, L^N). \qquad \square$$

1.10. – Soit $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/S$. Pour tout point $x \in X$, $\kappa(x)$ est muni d'une action à gauche du groupe de décomposition

$$G_d(x) = \{ g \in G \mid a_g(x) = x \}.$$

On désigne le schéma $\operatorname{Spec} \kappa(x)$ encore par x et on note i_x le morphisme $(x, G_d(x)) \to (X, G)$. Soit $\bar{x}$ un point géométrique algébrique au-dessus de x. On pose

$$G_d(x, \bar{x}) = G_d(x)_{\bar{x}} = G_d(x) \times_{\operatorname{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)})} \operatorname{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}). \tag{1.10.1}$$

En d'autres termes, un élément de $G_d(x, \bar{x})$ est un couple (g, ϕ) où $g \in G_d(x)$ et $\phi \in \operatorname{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ induisent le même automorphisme sur $\kappa(x)$.

Soient $(f,\alpha):(X,G)\to(Y,H)$ un morphisme dans $\boldsymbol{Eq}/S$, $x\in X$, $y=f(x)$, $\bar{x}\to x$ au-dessus de $\bar{y}\to y$. Alors (f,α) induit $(f_x,\alpha_x):(x,G_d(x))\to(y,H_d(y))$ et $\alpha_{\bar{x}}=(f,\alpha)_{\bar{x}}:G_d(x,\bar{x})\to H_d(y,\bar{y})$.

Soit $L\in D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l})$. On pose $L_x=i_x^*L\in D_c^b(x,G_d(x),\overline{\mathbb{Q}_l})$. Pour $g\in G$, b_g induit $L_{a_gx}\simeq(T_{g,x})_*L_x$, où $T_g=(a_g,h\mapsto g^{-1}hg)$ comme dans 1.1.

Soit $f:(X,G)\to(Y,H)$ un morphisme fini. Soit $y\in Y$. Notons O_y l'orbite de y sous H. On choisit un système S de représentants des orbites dans X sous G au-dessus de O_y. Pour $x\in S$, notons O_x l'orbite de x sous G, $f_{O_x}:O_x\to O_y$ la restriction de f à O_x, et $z=f(x)$. Choisissons $h_x\in H$ tel que $a_{h_x}(y)=z$. Alors $((f,\alpha)_*L)|O_y\simeq\bigoplus_{s\in S}(f_{O_x},\alpha)_*(L|O_x)$. Donc

$$((f,\alpha)_*L)_y\simeq\bigoplus_{x\in S}((f_{O_x},\alpha)_*(L|O_x))_y\simeq\bigoplus_{x\in S}T^*_{h_x,y}((f_{O_x},\alpha)_*(L|O_x))_z\simeq\bigoplus_{x\in S}T^*_{h_x,y}(f_x,\alpha_x)_*L_x.$$

Prenons $\bar{x}\to x$ et $\bar{z}\to z$ au-dessus de $\bar{y}\to y$. Alors pour tout $h\in H_d(y,\bar{y})$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(h,((f,\alpha)_*L)_{\bar{y}})&=\sum_{x\in S}\mathrm{Tr}(T_{h_x,\bar{y}}(h),(\alpha_{\bar{x}})_*L_{\bar{x}})\\ &=\sum_{x\in S}\frac{1}{\sharp N_x}\sum_{s\in H_d(z,\bar{z})/I_x}\ \sum_{\substack{t\in G_d(x,\bar{x})\\ \alpha_{\bar{x}}(t)=s^{-1}T_{h_x,\bar{y}}(h)s}}\mathrm{Tr}(t,L_{\bar{x}}),\quad\text{d'après (1.9.1)}\end{aligned}\tag{1.10.2}$$

où $N_x=\operatorname{Ker}\alpha_{\bar{x}}$, $I_x=\operatorname{Im}\alpha_{\bar{x}}$.

Proposition 1.11. – *On utilise les notations de 1.7. Soient $x\in X$, $y=f(x)$, $\bar{y}\to y$ au-dessus de $\bar{x}\to x$. Dans le cas (a) (resp. (b)) de 1.7, l'homomorphisme $\alpha_{\bar{x}}:G_d(x,\bar{x})\to H_d(y,\bar{y})$ est surjectif (resp. un isomorphisme).*

Démonstration. – D'après [3, V 1.1 (iii)], $\kappa(x)$ est une extension quasi-galoisienne de $\kappa(y)$ et l'homomorphisme $\operatorname{Ker}\alpha_x\to\mathrm{Gal}(\kappa(x)/\kappa(y))$ est surjectif. Donc $\kappa(x)^{G_d(x)}$ est une extension radicielle de $\kappa(y)^{H_d(y)}$, d'où un carré cartésien de groupes

$$\begin{array}{ccc}G_d(x,\bar{x}) & \xrightarrow{\alpha_{\bar{x}}} & H_d(y,\bar{y})\\ \downarrow & & \downarrow\\ G_d(x) & \longrightarrow & H_d(y)\times_{\mathrm{Gal}(\kappa(y)/\kappa(y)^{H_d(y)})}\mathrm{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)}).\end{array}$$

Donc $\alpha_{\bar{x}}$ est surjectif.

Dans le cas (b), l'homomorphisme $\operatorname{Ker}\alpha_x\to\mathrm{Gal}(\kappa(x)/\kappa(y))$ est un isomorphisme. Donc $\alpha_{\bar{x}}$ est un isomorphisme. □

Corollaire 1.12. – *Soient K un corps, K' une extension finie galoisienne, $\eta=\operatorname{Spec}K$, $\eta'=\operatorname{Spec}K'$, $(X,G)\in\boldsymbol{Eq}/\eta$. Considérons $(\mathrm{pr}_1,\mathrm{Id}):(X_{\eta'},G)\to(X,G)$. Soient $x\in X$, $y\in X_{\eta'}$ au-dessus de x, $\bar{y}\to y$ au-dessus de $\bar{x}\to x$. Alors l'image de $\mathrm{Id}_{\bar{y}}:G_d(y,\bar{y})\to G_d(x,\bar{x})$ est*

$$G'=G_d(x)\times_{\mathrm{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)})}\mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}\cdot K').$$

Démonstration. – Il est clair que $\mathrm{Im}\,\mathrm{Id}_{\bar{y}} \subset G'$. Soit $(g,\phi) \in G'$. Notons $H = \mathrm{Gal}(K'/K)$. Formons le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
(X_{\eta'},G) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "{(\mathrm{pr}_1,\mathrm{Id})}"] & (X_{\eta'},G\times H) \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & (X,G) \arrow[d] \\
& (\eta',H) \arrow[r] & (\eta,\{1\}).
\end{tikzcd}$$

D'après 1.11 (b), l'homomorphisme $(\mathrm{pr}_1)_{\bar{y}} : (G \times H)_d(y,\bar{y}) \to G_d(x,\bar{x})$ est un isomorphisme. Soit (g,h,ψ) l'image inverse de (g,ϕ). Alors $\psi|K' = \mathrm{Id}_{K'}$. En appliquant $(\mathrm{pr}_2)_{\bar{y}}$, on obtient $(h,\psi) \in H_d(\eta',\bar{\eta})$, donc $h = 1$, i.e. $(g,\phi) = \mathrm{Id}_{\bar{y}}(g,\psi)$. □

1.13. E-compatibilité

Soient p un nombre premier, E un corps de caractéristique 0, I un ensemble, γ une application

$$I \to \left\{(l,\iota) \;\middle|\; l \text{ un nombre premier} \neq p,\ \iota : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_l} \text{ un plongement de corps}\right\},$$

où, pour chaque l, $\overline{\mathbb{Q}_l}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_l$. Pour $\lambda \in I$, on écrit $\gamma(\lambda) = (l_\lambda, \iota_\lambda)$.

Soient $K = \mathbb{F}_{p^f}$ un corps fini (resp. un corps local de corps résiduel $k = \mathbb{F}_{p^f}$, i.e. le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien excellent R de corps résiduel k), $\eta = \mathrm{Spec}\,K$. Soit $(X,G) \in \boldsymbol{Eq}/\eta$. On désigne par $|X|$ l'ensemble des points fermés de X. Pour $x \in |X|$, $\kappa(x)$ est une extension finie de K. Soit $\bar{x}$ un point géométrique algébrique au-dessus de x. On note $F_0 \in \mathrm{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ le Frobenius géométrique (absolu) qui envoie a sur $a^{1/p}$ (resp. R_x l'anneau des entiers de $\kappa(x)$, $R_{\bar{x}}$ le normalisé de R_x dans $\kappa(\bar{x})$, x_0 le point fermé de $\mathrm{Spec}\,R_x$, $\bar{x}_0$ le point fermé de $\mathrm{Spec}\,R_{\bar{x}}$, $F_0 \in \mathrm{Aut}(\kappa(\bar{x}_0))$ le Frobenius géométrique). On note ρ l'inclusion $\mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ (resp. l'homomorphisme composé $\mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}) \to \mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x}_0)/\kappa(x_0)^{G_d(x)}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\kappa(\bar{x}_0))$).

Définition 1.14. – (i) On dit qu'un système $(t_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}}$ est (E,I,γ)-*compatible* (ou E-compatible s'il n'y a pas de confusion à craindre) s'il existe $c \in E$ tel que $t_\lambda = \iota_\lambda(c)$ pour tout $\lambda \in I$.

(ii) On dit qu'un système de complexes $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ est (E,I,γ)-*compatible* (ou E-compatible s'il n'y a pas de confusion à craindre) si pour tout $x \in |X|$, tout $\bar{x} \to x$ et tout $(g,\phi) \in G_d(x,\bar{x})$ (1.10.1) avec $\rho(\phi)$ une puissance entière de F_0^f, le système $(\mathrm{Tr}((g,\phi),(L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda\in I}$ est (E,I,γ)-compatible.

Les systèmes E-compatibles sur (X,G) forment une sous-catégorie triangulée de la catégorie produit $\prod_{\lambda\in I} D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$, notée $D_c^b(X,G,E)$. Lorsque $G = \{1\}$, on écrit simplement $D_c^b(X,E)$. La E-compatibilité de $(L_\lambda)_{\lambda\in I}$ ne dépend que de $([L_\lambda])_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} K(X,G,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ (1.3).

Proposition 1.15. – *Soient $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$, $x \in |X|$, $\bar{x} \to x$, $N \in \mathbb{Z}$. Supposons que pour tout $(g,\phi) \in G_d(x,\bar{x})$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fn}$, $n \geq N$, le système $(\mathrm{Tr}((g,\phi),(L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda\in I}$ est E-compatible. Alors $((L_\lambda)_x)_{\lambda\in I}$ est E-compatible.*

Démonstration. – On peut supposer $X = x$ et $\sharp I = 2$. On peut supposer $[L_\lambda] = [\mathcal{F}_\lambda] - [\mathcal{G}_\lambda]$ avec $\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_\lambda \in \mathrm{Mod}_c(x, G, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ semi-simples, $\lambda \in I$. Il suffit de montrer que le système $(\mathrm{Tr}((g,\phi),(L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda\in I}$ est E-compatible pour tout $(g,\phi) \in G_d(x,\bar{x})$ avec $\rho(\phi) = F_0^{f(N-1)}$. On pose $Z = \mathrm{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ (resp. $Z = \mathrm{Aut}(\kappa(\overline{x_0}))$). On note τ l'homomorphisme composé

$$G_d(x,\bar{x}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathrm{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)}) \xrightarrow{\rho} Z \xrightarrow{r} \hat{\mathbb{Z}},$$

où r est l'isomorphisme qui envoie F_0 sur 1. Dans le cas fini, on pose $W = \tau^{-1}(\mathbb{Z})$; dans le cas local, il existe un sous-groupe ouvert I_1 de $\tau^{-1}(0)$ agissant trivialement sur les $(\mathcal{F}_\lambda)_{\bar{x}}$ et $(\mathcal{G}_\lambda)_{\bar{x}}$, $\lambda \in I$ en vertu du théorème de monodromie locale de Grothendieck, et on pose $W = \tau^{-1}(\mathbb{Z})/I_1$. Dans les deux cas, τ induit un homomorphisme surjectif $\nu : W \to f'\mathbb{Z}$ de noyau fini avec $f \mid f'$. Le groupe infini W agit par conjugaison sur l'ensemble fini $\nu^{-1}(f')$. Le centre $Z(W)$ de W, qui est le fixateur de $\nu^{-1}(f')$, est d'indice fini. Soit $h \in \tau^{-1}(\mathbb{Z})$ tel que $\tau(h) \geq f$ et que l'image de h dans W appartienne à $Z(W)$. Alors pour tout $(g,\phi) \in G_d(x,\bar{x})$ avec $\tau(g) = f(N-1)$, gh et hg définissent le même automorphisme sur $(\mathcal{F}_\lambda)_{\bar{x}}$. Il en est de même sur $(\mathcal{G}_\lambda)_{\bar{x}}$. On conclut en appliquant [14, 8.1]. □

Le théorème suivant est le résultat principal de cet article.

THÉORÈME 1.16. – *Sur un corps fini ou local comme dans 1.13, les six opérations préservent la E-compatibilité. Plus précisément, pour* $(f,\alpha) : (X,G) \to (Y,H)$ *dans* $\boldsymbol{Eq}/\eta$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I}, (M_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X,G,E)$, $(N_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(Y,H,E)$*, on a*

$$(L_\lambda \otimes M_\lambda)_{\lambda\in I}, (R\mathcal{H}om(L_\lambda, M_\lambda))_{\lambda\in I}, ((f,\alpha)^* N_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X,G,E),$$
$$(R(f,\alpha)_* L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(Y,H,E),$$

et, lorsque f *est séparé,*

$$(R(f,\alpha)^! N_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X,G,E), \quad (R(f,\alpha)_! L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(Y,H,E).$$

COROLLAIRE 1.17. – *La dualité préserve la E-compatibilité. Plus précisément, pour* $(X,G) \in \boldsymbol{Eq}/S$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X,G,E)$*, on a* $(D_{(X,G)} L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X,G,E)$.

Démonstration. – Pour montrer que $(D_X L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible, on s'intéresse aux traces en un point $x \in |X|$. Soit V un voisinage ouvert séparé de x dans X. Quitte à remplacer (X,G) par $(\bigcap_{g\in G_d(x)} a_g(V), G_d(x))$, on peut supposer X séparé. Ce cas découle de 1.16. □

En fait, 1.16 et 1.17 seront démontrés en même temps (voir 2.5 et 3.9).

REMARQUE 1.18. – (i) On retrouve le théorème de Gabber [12, Th. 2] pour $G = \{1\}$ et K fini.

(i′) Dans le cas K local, soient η_1 une extension finie de η, $\overline{\eta_1} \to \eta_1$, $X \to \eta_1$ un morphisme séparé de type fini muni d'une action d'un groupe fini G. Si $(g,\phi) \in G_d(\eta_1, \overline{\eta_1})$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fn}$, $n \in \mathbb{Z}$, alors 1.16 combiné avec [29, (2.4.1) et (2.4.4)] implique que

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \mathrm{Tr}((g,\phi), H_c^i(X_{\overline{\eta_1}}, \mathbb{Q}_l)) \in p^{fd\min\{0,n\}}\mathbb{Z}$$

est indépendant de l, où $d = \dim X$. On retrouve ainsi [25, Th. B], le cas $s = \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}_p}$ de [28, 4.2] et le cas (très particulier) de [26, 0.1] où Γ est la classe du graphe de a_g.

(ii) 1.16 équivaut à l'énoncé pour $\sharp I = 2$.

(iii) On peut remplacer E par une extension algébrique quelconque E'. En effet, pour tout $\lambda \in I$, notons J_λ l'ensemble des plongements $\mu : E' \to \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}}$ qui prolongent ι_λ. Soit I' une partie de $\coprod_{\lambda\in I} J_\lambda$, qui contient au moins un élément de chaque J_λ, $\lambda \in I$, et au moins un J_λ, $\lambda \in I$, au cas où I est non vide. On note $\gamma' : I' \to \{(l,\iota)\}$ l'application qui envoie $\mu \in J_\lambda$ sur (l_λ, μ). Alors un système $(t_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}}$ est (E, I, γ)-compatible si et seulement si $(t'_\mu)_{\mu\in I'} \in \prod_{\mu\in I'} \overline{\mathbb{Q}_{l_\mu}}$ est (E', I', γ')-compatible, où $t'_\mu = t_\lambda$ pour $\mu \in J_\lambda$. Le foncteur

$$M : \prod_{\lambda\in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}}) \to \prod_{\mu\in I'} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}_{l_\mu}})$$
$$(L_\lambda)_{\lambda\in I} \mapsto (L'_\mu)_{\mu\in I'}, \quad \text{où } L'_\mu = L_\lambda \text{ pour } \mu \in J_\lambda,$$

commute aux six opérations et à la dualité. Un système $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D_c^b(X, G, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ est E-compatible si et seulement si $M((L_\lambda)_{\lambda\in I})$ est E'-compatible.

(iv) Les énoncés pour $(f,\alpha)^*$ et $\otimes$ sont triviaux. L'énoncé pour $(f,\alpha)_*$ avec f fini résulte de (1.10.2). L'énoncé pour D dans le cas où X est régulier et où les L_λ sont à faisceaux de cohomologie lisses découle du théorème de pureté : pour $x \in |X|$, $(D_X L_\lambda)_x \simeq (D_x(L_\lambda)_x)(d_x)[2d_x]$, où $d_x = \dim_x X$, et évidemment D_x préserve la E-compatibilité.

(v) On verra en 4.8 que $R\Psi$ préserve aussi la E-compatibilité.

2. Descente galoisienne et indépendance de l sur un corps fini

2.1. – Une technique de Deligne-Lusztig [10, démonstration de 3.3] permet de se débarrasser de l'action de groupe dans certaines circonstances.

Soit S un schéma noethérien. On désigne par $\boldsymbol{Eq}^{\mathrm{adm}}/S$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{Eq}/S$ formée des couples (X, G) où G agit sur X de façon admissible (1.2).

LEMME 2.2. – *Soient G un groupe fini, $f : S' \to S$ un G-torseur. Le foncteur*

$$\epsilon_f : \boldsymbol{C}_S \xrightarrow{\sim} (\boldsymbol{Eq}^{\mathrm{adm}}/S)_G/(S', G)$$
$$X \mapsto (X \times_S S', G),$$

où G agit sur $X \times_S S'$ via son action sur S', est une équivalence de catégories.

Démonstration. – C'est un cas particulier de la descente galoisienne (voir [3, VIII 7.6] et [5, 6.2.B]). Un quasi-inverse de ϵ_f est donné par $(Y, G) \mapsto Y/G$. □

Notons $e_{f,X} : (X \times_S S', G) \to (X, \{1\})$ la projection.

2.3. – Soit

$$\big((S_m, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_{m\geq 1}, ((f_{m,n}, \alpha_{m,n}) : (S_{mn}, \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) \to (S_m, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))_{m,n\geq 1}\big)$$

un système projectif, où $S_1 = S$, $\alpha_{m,n} : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ désigne l'homomorphisme qui envoie $\bar{1}$ sur $\bar{1}$, tel que $f_{m,n}$ soit un $\operatorname{Ker}\alpha_{m,n}$-torseur, $m, n \geq 1$. Soit $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}^{\mathrm{adm}}/S$. Soient $m \geq 1$, $g \in G$. Notons n_g l'ordre de g. On considère l'action diagonale de $\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}$ sur $X_{S_m} \times_{S_m} S_{n_g m}$, celle sur X_{S_m} étant donnée par l'homomorphisme $i_g : \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z} \to G$

qui envoie $\bar{1}$ sur g et celle sur $S_{n_g m}$ donnée par l'homomorphisme $\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n_g m\mathbb{Z}$ qui envoie $\bar{1}$ sur $\bar{m}$. On définit un foncteur

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{Eq}^{\mathrm{adm}}/S)_G &\to \boldsymbol{C}_{S_m}\\ (X,G) &\mapsto X^{(m,g)} = \epsilon^{-1}_{f_{m,n_g}}(X_{S_m} \times_{S_m} S_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Posons

$$d_{(X,G),m,g} = (\mathrm{pr}_1, i_g) : (X_{S_m} \times_{S_m} S_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \to (X,G).$$

Rappelons

$$e_{f_{m,n_g}, X^{(m,g)}} : (X_{S_m} \times_{S_m} S_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \to (X^{(m,g)}, \{1\}).$$

Supposons que S soit régulier de dimension ≤ 1. Posons

$$C_{(X,G),m,g} = e_{f_{m,n_g}, X^{(m,g)}*} d^*_{(X,G),m,g} : D^b_c(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l}) \to D^b_c(X^{(m,g)}, \overline{\mathbb{Q}_l}).$$

La définition de $C_{m,g}$ commute aux six opérations et à la dualité. Plus précisément, on a

$$C_{(X,G),m,g} R\mathcal{H}om_{(X,G)}(-,-) \simeq R\mathcal{H}om_{X^{(m,g)}}(C_{(X,G),m,g}-, C_{(X,G),m,g}-),$$
$$C_{(X,G),m,g}(-\otimes -) \simeq C_{(X,G),m,g} - \otimes C_{(X,G),m,g}-, C_{(X,G),m,g} D_{(X,G)} \simeq D_{X^{(m,g)}} C_{(X,G),m,g},$$

et, pour $(f,\mathrm{Id}) : (X,G) \to (Y,G)$ dans $\boldsymbol{Eq}^{\mathrm{adm}}/S$,

$$C_{(X,G),m,g}(f,\mathrm{Id})^* \simeq (f^{(m,g)})^* C_{(Y,G),m,g}, C_{(Y,G),m,g} R(f,\alpha)_* \simeq R(f^{(m,g)})_* C_{(X,G),m,g},$$

et, lorsque f est séparé,

$$C_{(X,G),m,g} R(f,\mathrm{Id})^! \simeq R(f^{(m,g)})^! C_{(Y,G),m,g}, C_{(Y,G),m,g} R(f,\alpha)_! \simeq R(f^{(m,g)})_! C_{(X,G),m,g}.$$

Reprenons les notations de 1.13. En particulier, $K = \mathbb{F}_{p^f}$ (resp. K est un corps local de corps résiduel $\mathbb{F}_{p^f}$). Pour $m \geq 1$, soient $K_m = \mathbb{F}_{p^{fm}}$ (resp. K_m une extension non ramifiée de K de corps résiduel $\mathbb{F}_{p^{fm}}$), $\eta_m = \operatorname{Spec} K_m$. Pour $m \geq 1$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ agit sur η_m via l'isomorphisme de groupes

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathrm{Gal}(K_m/K) \tag{2.3.1}$$

où l'image ϕ de $\bar{1}$ est donnée par $\phi = F_0^f|K_m$ (resp. $\bar{\phi} = F_0^f|\mathbb{F}_{p^{fm}}$, où $\bar{\phi}$ est la réduction de ϕ). Appliquons 2.3 au système projectif $(\eta_m)_{m\geq 1}$.

Proposition 2.4. – *Soient $(X,G) \in \boldsymbol{Eq}^{\mathrm{adm}}/\eta$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D^b_c(X,G,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$. Pour que $(L_\lambda)_{\lambda\in I}$ soit E-compatible, il faut et il suffit que pour tout $m \geq 1$ et tout $g \in G$,*

$$(C_{(X,G),m,g} L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D^b_c(X^{(m,g)}, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$$

soit E-compatible.

Démonstration. – La nécessité est claire. Soit $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D^b_c(X,G,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ tel que pour tout $m \geq 1$ et tout $g \in G$, $(C_{m,g}L_\lambda)_{\lambda\in I}$ soit E-compatible. Comme $e^*_{f_{m,n_g}} e_{f_{m,n_g}*} \simeq \mathrm{Id}$ (1.7 (b)), on a $(d^*_{m,g}L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D^b_c(X_{\eta_m} \times_{\eta_m} \eta_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}, E)$. D'après 1.15, il suffit de montrer que pour tout $x \in |X|$, tout $\bar{x} \to x$ et tout $(g,\phi) \in G_d(x,\bar{x})$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fm}$, $m \geq 1$, $(\mathrm{Tr}((g,\phi),(L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda\in I}$ est E-compatible. Soient $y \in |X_{\eta_m}|$ au-dessus de x, $\bar{y} \to y$ au-dessus de $\bar{x} \to x$. D'après 1.12, on a $(g, \phi) \in G_d(y, \bar{y})$, correspondant à $(\bar{1}, \phi) \in (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(y, \bar{y})$. On prend le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
(X_{\eta_m} \times_{\eta_m} \eta_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \arrow[r, "(\mathrm{Id},\Delta)"] & (X_{\eta_m} \times_{\eta_m} \eta_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & (X_{\eta_m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
& (\eta_{n_g m}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \arrow[r] & (\eta_m, \{1\}).
\end{tikzcd}$$

Soient $z \in |X_{\eta_m} \times_{\eta_m} \eta_{n_g m}|$ au-dessus de y, $\bar{z} \to z$ au-dessus de $\bar{y} \to y$. D'après 1.11 (b), l'homomorphisme

$$(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(z, \bar{z}) \to (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(y, \bar{y})$$

est un isomorphisme. Soit $(\bar{1}, b, \phi) \in (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(z, \bar{z})$ l'image inverse de $(\bar{1}, \phi)$. Alors $(b, \phi) \in (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(\eta_{n_g m}, \bar{\eta})$, donc $b = \bar{1}$. Bref, $(d_{m,g})_{\bar{z}} : (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(z, \bar{z}) \to G_d(x, \bar{x})$ envoie $(\bar{1}, \phi)$ sur (g, ϕ). Donc les

$$\mathrm{Tr}((g, \phi), (L_\lambda)_{\bar{x}}) = \mathrm{Tr}((\bar{1}, \phi), (d^*_{m,g} L_\lambda)_{\bar{z}})$$

forment un système E-compatible. □

Scholie. – Avec les notations de la démonstration, si on note w l'image de z par $e_{f_{m,n_g}}$, on choisit $\overline{w} \to w$ au-dessous de $\bar{z} \to z$ et on désigne encore par ϕ l'image de $(\bar{1}, \phi)$ par

$$(e_{f_{m,n_g}})_{\bar{z}} : (\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(z, \bar{z}) \to \{1\}_d(w, \overline{w}) = \mathrm{Gal}(\kappa(\overline{w})/\kappa(w)),$$

alors

$$\mathrm{Tr}((g, \phi), (L_\lambda)_{\bar{x}}) = \mathrm{Tr}(\phi, (C_{(X,G),m,g} L_\lambda)_{\overline{w}}).$$

2.5. – *Démonstration de 1.16 dans le cas d'un corps fini.* – On sait que $(f, \alpha)^*$ et $\otimes$ préservent la E-compatibilité. Pour montrer 1.16, il suffit d'établir la stabilité par D et $R(f, \alpha)_*$. La stabilité par $R(f, \alpha)_!$, $R(f, \alpha)^!$ et $R\mathcal{H}om$ s'obtiendront par dualité. Comme $R(f, \alpha)_* = (\mathrm{Id}, \alpha)_* R(f, \mathrm{Id})_*$, on peut supposer $\alpha = \mathrm{Id}$. D'après 2.4 et le théorème de Gabber, D et $R(f, \mathrm{Id})_*$ préservent la E-compatibilité lorsque les actions de groupe sont admissibles.

Soit $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D^b_c(X, G, E)$. Pour montrer que $(D_X L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible, on s'intéresse aux traces en un point $x \in |X|$. Soient V un voisinage ouvert séparé de x dans X, U un voisinage ouvert affine de x dans $\bigcap_{g \in G_d(x)} a_g(V)$. Quitte à remplacer (X, G) par $(\bigcap_{g \in G_d(x)} a_g(U), G_d(x))$, on peut supposer X affine. Ce cas est déjà connu.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme G-équivariant. Pour montrer que Rf_* préserve la E-compatibilité, on fait une récurrence sur $d = \dim X$. Le cas $d < 0$ est trivial. Pour $d \geq 0$, on prend un ouvert dense affine G-stable U de X et on note $j : U \hookrightarrow X$. Pour $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D^b_c(X, G, E)$, comme $[L_\lambda] - [Rj_* j^* L_\lambda]$ est à support de dimension $\leq d - 1$, il suffit de montrer que $(Rj_* j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(R(fj)_* j^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ sont E-compatibles. Donc on peut supposer X affine. Comme le problème est local sur Y, un argument similaire à celui dans l'alinéa précédent permet de supposer en plus Y affine. Ce cas est déjà connu. □

2.6. – Rappelons le théorème de Gabber de stabilité de la E-compatibilité par extension intermédiaire [12, Th. 3] : pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte de schémas séparés de type fini sur un corps fini $k = \mathbb{F}_{p^f}$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(U, E)$ un système E-compatible de faisceaux pervers purs de poids $w \in \mathbb{Z}$, $(j_{!*}L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible.

Rappelons que $K(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est un groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphie de faisceaux pervers simples. Pour $a \in \mathbb{Z}$, notons $K_m(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ (resp. $K_{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$, resp. $K_{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$, resp. $K_a(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$) le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux pervers mixtes (resp. de poids $\leq a$, resp. de poids $\geq a$, resp. purs de poids a).

Proposition 2.7. – *Les projections canoniques*

$$p_{\leq a} : K_m(X, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to K_{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}_l}) \text{ et } p_{\geq a} : K_m(X, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to K_{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$$

préservent la E-compatibilité. Plus précisément, pour $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} K_m(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ un système E-compatible, les systèmes $(p_{\leq a}L_\lambda)_{\lambda\in I}$ et $(p_{\geq a}L_\lambda)_{\lambda\in I}$ sont E-compatibles.

Démonstration. – Il suffit de montrer que la projection canonique $p_w : K_m(X, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to K_w(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ préserve la E-compatibilité pour tout $w \in \mathbb{Z}$, car $p_{\leq a} = \sum_{w\leq a} p_w$, $p_{\geq a} = \sum_{w\geq a} p_w$. On peut supposer $\sharp I = 2$. Soient $L_\lambda = \sum_{w\in\mathbb{Z}} L_{\lambda,w}$, $L_{\lambda,w} = [M_{\lambda,w,0}] - [M_{\lambda,w,1}]$, où $M_{\lambda,w,0}$ et $M_{\lambda,w,1}$ sont des faisceaux pervers purs de poids w.

(a) *Cas où X est lisse sur k et $\mathcal{H}^e(M_{\lambda,w,\alpha})$ lisse sur X pour $\lambda \in I$, $w \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 0, 1$, $e \in \mathbb{Z}$.* Alors pour tout $x \in |X|$, le facteur L local $L_x(L_{\lambda,w}, t)$ peut être extrait de $L_x(L_\lambda, t)$ comme la partie de poids $w - \dim_x X$. Donc les $L_{\lambda,w}$ forment un système E-compatible.

(b) *Cas général.* On fait une récurrence sur $d = \dim X$, simultanément pour tout $w \in \mathbb{Z}$. Le cas $d < 0$ est trivial. Pour $d \geq 0$, on peut supposer X réduit. Prenons un ouvert dense $j : U \hookrightarrow X$ lisse sur k tel que $\mathcal{H}^e(j^*M_{\lambda,w,\alpha})$ soit lisse sur U, pour $\lambda \in I$, $w \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 0, 1$, $e \in \mathbb{Z}$. Notons $i : Y \to X$ le fermé complémentaire. D'après (a), $(j^*L_{\lambda,w})_{\lambda\in I}$ est E-compatible, donc $(j_{!*}j^*L_{\lambda,w})_{\lambda\in I}$ l'est aussi en vertu de la démonstration du théorème de Gabber rappelé en 2.6. D'après [4, 5.3.11], pour tout $w \in \mathbb{Z}$, il existe $L'_{\lambda,w} \in K_w(Y, \overline{\mathbb{Q}_l})$ tel que

$$L_{\lambda,w} = j_{!*}j^*L_{\lambda,w} + i_*L'_{\lambda,w}. \tag{2.7.1}$$

En sommant, pour tout $w \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$L_\lambda = \sum_{w\in\mathbb{Z}} j_{!*}j^*L_{\lambda,w} + i_* \sum_{w\in\mathbb{Z}} L'_{\lambda,w},$$

d'où la E-compatibilité de $(\sum_{w\in\mathbb{Z}} L'_{\lambda,w})_{\lambda\in I}$. Par conséquent, pour tout $w \in \mathbb{Z}$, $(L'_{\lambda,w})_{\lambda\in I}$ est E-compatible en vertu de l'hypothèse de récurrence. La E-compatibilité de $(L_{\lambda,w})_{\lambda\in I}$ résulte alors de (2.7.1). □

Notons $D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ la sous-catégorie triangulée de X formée des complexes mixtes. Pour $a \in \mathbb{Z}$, notons ${}^wD^{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ (resp. ${}^wD^{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$) la sous-catégorie triangulée de $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ formée des complexes mixtes K tels que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^p\mathcal{H}^iK$ soit de poids $\leq a$ (resp. $\geq a$). S. Morel [24, 3.1.1] a défini un foncteur exact troncature par le poids

$$w_{\leq a} : D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to {}^wD^{\leq a}(X, \overline{\mathbb{Q}_l}) \text{ (resp. } w_{\geq a} : D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to {}^wD^{\geq a}(X, \overline{\mathbb{Q}_l})),$$

adjoint à gauche (resp. à droite) de l'inclusion

$$ {}^wD^{\leq a}(X,\overline{\mathbb{Q}_l}) \subset D^b_m(X,\overline{\mathbb{Q}_l}) \text{ (resp. } {}^wD^{\geq a}(X,\overline{\mathbb{Q}_l}) \subset D^b_m(X,\overline{\mathbb{Q}_l})\text{)}, $$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}({}^wD^{\leq a}(X,\overline{\mathbb{Q}_l})) \arrow[d] & \mathrm{Ob}(D^b_m(X,\overline{\mathbb{Q}_l})) \arrow[l, "\mathrm{Ob}(w_{\leq a})"'] \arrow[r, "\mathrm{Ob}(w_{\geq a})"] \arrow[d] & \mathrm{Ob}({}^wD^{\geq a}(X,\overline{\mathbb{Q}_l})) \arrow[d] \\ K_{\leq a}(X,\overline{\mathbb{Q}_l}) & K_m(X,\overline{\mathbb{Q}_l}) \arrow[l, "p_{\leq a}"'] \arrow[r, "p_{\geq a}"] & K_{\geq a}(X,\overline{\mathbb{Q}_l}). \end{tikzcd}$$

Pour $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert et L un faisceau pervers pur de poids $a \in \mathbb{Z}$, la flèche canonique $w_{\geq a}j_!L \to j_{!*}L$ est un isomorphisme [24, 3.1.4]. En vue de cela, la stabilité par la troncature par le poids (2.7) généralise le théorème de Gabber (2.6).

3. Altérations galoisiennes et réduction au cas des courbes

On reprend les notations de 1.13. En particulier, K est un corps fini ou local.

Soit X un schéma de type fini sur $\eta = \operatorname{Spec} K$. On considère la condition suivante portant sur $L \in D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})$:

3.0.1 Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il existe une extension finie F de $\mathbb{Q}_l$ et un $\mathcal{O}$-faisceau $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$, tels que $\mathcal{H}^iL \simeq (\mathcal{F}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} F) \otimes_F \overline{\mathbb{Q}_l}$ et que $\mathcal{F}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ soit constant sur toute composante connexe de X, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.

Cette condition est stable par image inverse et $\otimes$. Si $X \hookrightarrow Y$ est un ouvert de complémentaire un diviseur à croisements normaux, alors 3.0.1 implique que L est à faisceaux de cohomologie lisses sur X, modérément ramifiés sur Y.

Le résultat principal de ce paragraphe est la proposition suivante.

Proposition 3.1. – *On fait les hypothèses suivantes :*

(A) *Soient K_1 une extension finie de K, $\eta_1 = \operatorname{Spec} K_1$, $a_X : X \to \eta_1$ une courbe lisse affine, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D^b_c(X,E)$ avec tous les L_λ vérifiant 3.0.1. Alors $(Ra_{X!}L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible.*

(B) *Soient X une courbe sur η, normale, $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D^b_c(U,E)$ avec tous les L_λ vérifiant 3.0.1. Alors $(Rj_*L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible.*

Alors la conclusion de 1.16 est vraie.

Dans le cas d'un corps local, (A) et (B) seront démontrés en 4.11.

3.2. – Dans le cas d'un corps fini, (A) est une conséquence de la formule des traces de Grothendieck, tandis que (B) est une variante de [7, 9.8]. Prouvons (B) dans une plus grande généralité, avec la condition 3.0.1 remplacée par ce que les L_λ sont à faisceaux de cohomologie lisses. On peut supposer X irréductible. Quitte à remplacer η par le corps de définition de X, on peut supposer X géométriquement irréductible. On peut supposer X projective. D'après 1.18 (iii), on peut supposer que E contient les racines p-ièmes de l'unité. D'après 1.18 (ii), on peut supposer $\sharp I = 2$. Notons $D = X - U$. Pour $x \in D$, posons $n = \max_{\lambda\in I, i\in\mathbb{Z}, y\in D-\{x\}} \operatorname{Swan}_y(\mathcal{H}^iL_\lambda)$. D'après [17, Construction, p. 217], il existe un système E-compatible $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in I}$ de faisceaux lisses de rang 1 sur $X - (D - \{x\})$ tel que pour tout $y \in D - \{x\}$, $\operatorname{Swan}_y(\mathcal{F}_\lambda) > n$. Alors $Rj_*(L_\lambda \otimes \mathcal{F}_\lambda)_y = 0$, pour $y \in D - \{x\}$

[*ibid.*, Prop., p. 216], et $Rj_*(L_\lambda \otimes \mathcal{F}_\lambda)_x \simeq (Rj_*L_\lambda)_x \otimes (\mathcal{F}_\lambda)_x$. Donc, d'après la formule des traces, pour $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(F_0^{rm}, (Ra_{U*}L_\lambda)_{\bar\eta})\\ &= \sum_{y\in U(\mathbb{F}_{p^{rm}})} \mathrm{Tr}(F_0^{rm}, (L_\lambda)_{\bar y})\mathrm{Tr}(F_0^{rm}, (\mathcal{F}_\lambda)_{\bar y}) + \frac{r}{f}\mathrm{Tr}(F_0^{rm}, (Rj_*L_\lambda)_{\bar x})\mathrm{Tr}(F_0^{rm}, (\mathcal{F}_\lambda)_{\bar x}),\end{aligned}$$

où $a_U : U \to \eta$, r et f sont tels que $\kappa(x) = \mathbb{F}_{p^r}$, $\kappa(\eta) = \mathbb{F}_{p^f}$. D'après 1.18 (iv) et la formule des traces, $(Ra_{U*}L_\lambda)_{\lambda\in I} \simeq (D_\eta Ra_{U!}D_U L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible, donc $((Rj_*L_\lambda)_x)_{\lambda\in I}$ est E-compatible. D'où (B).

Cette démonstration, jointe à 3.1, donne une démonstration de 1.16 dans le cas d'un corps fini indépendante du théorème de Gabber.

3.3. – Si K est un corps local, E est un corps de nombres, pour λ_1, λ_2 deux places finies de E ne divisant pas p, ρ_1, ρ_2 des représentations λ_1- et λ_2-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, Deligne a défini une notion de compatibilité entre ρ_1 et ρ_2 [7, 8.8]. Prenons pour $\mathcal{F}_i$ le E_{λ_i}-faisceau sur $\eta = \mathrm{Spec}\, K$ correspondant à ρ_i, choisissons un plongement $E_{\lambda_i} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_{l_i}}$ $i \in I = \{1, 2\}$, et posons

$$\begin{aligned}\gamma : I &\to \{(l, \iota)\}\\ i &\mapsto (l_i, E \hookrightarrow E_{\lambda_i} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_{l_i}}).\end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est (E, I, γ)-compatible au sens de 1.14 si et seulement si les semi-simplifiées de ρ_1 et ρ_2 sont compatibles au sens de Deligne.

En vue de cette interprétation, la proposition suivante généralise [7, 9.8].

Proposition 3.4. – *Soient S une courbe lisse sur $k = \mathbb{F}_{p^f}$, $(X, G) \in$ **Eq**$/S$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X, G, E)$. Soit s un point fermé de S. Notons $S_{(s)}$ le hensélisé de S en s, η_s son point générique. Alors le système $(L_\lambda|X_{\eta_s})_{\lambda\in I}$ est E-compatible (au sens de 1.14 pour les schémas de type fini sur un corps local).*

Démonstration. – Quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer $\kappa(s) = k$. Le problème étant local sur X, on peut supposer X affine. Pour $m \geq 1$, $g \in G$, on applique 2.3 à (X, G) sur $\mathbb{F}_{p^f}$ et à (X_{η_s}, G) sur η_s. On obtient

$$\begin{array}{ccc} & & X^{(m,g)} \\ & & \downarrow \\ s_m = s_{\mathbb{F}_{p^{fm}}} & \longrightarrow & S_{\mathbb{F}_{p^{fm}}}. \end{array}$$

Notons η_{s_m} le point générique du hensélisé de $S_{\mathbb{F}_{p^{fm}}}$ en s_m. On a $(X^{(m,g)})_{\eta_{s_m}} \simeq (X_{\eta_s})^{(m,g)}$ et $(C_{m,g}L_\lambda)|(X_{\eta_s})^{(m,g)} \simeq C_{m,g}(L_\lambda|X_{\eta_s})$. Quitte à remplacer X par $X^{(m,g)}$ (2.4), on peut supposer $G = \{1\}$.

Soit y un point fermé de X_{η_s}. Alors il existe un morphisme étale de type fini $S' \to S$, une section $s \to S'$, et un sous-schéma fermé Y de $X_{S'-\{s\}}$, fini sur $S' - \{s\}$, tels que $Y_{\eta_s} \simeq y$, d'où le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] & \\ X_{\eta_s} \arrow[r] \arrow[d] & X_{S'-\{s\}} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \eta_s \arrow[r] & S'-\{s\} \arrow[r] & S. \end{tikzcd}$$

Quitte à remplacer S par S', X par Y, on peut supposer que X est quasi-fini séparé sur S. Prenons un S-plongement $j : X \to \overline{X}$ où $\overline{X}$ est un S-schéma fini. Quitte à remplacer X par $\overline{X}$, L_λ par $j_! L_\lambda$, on peut supposer que X est fini sur S. Quitte à remplacer X par une composante du normalisé de X^{red}, on peut supposer de plus X lisse sur k. Quitte à remplacer S par X, on peut supposer $X = S$.

Ce cas de la proposition est essentiellement [7, 9.8]. Rappelons comment le déduire du cas d'un corps fini de 1.16. On peut supposer $\sharp I = 2$. On pose $[L_\lambda] = [\mathcal{F}_\lambda] - [\mathcal{G}_\lambda]$, où $\mathcal{F}_\lambda$ et $\mathcal{G}_\lambda$ sont des faisceaux sur S, semi-simples sur η_s, $\lambda \in I$. Soit I_1 un sous-groupe ouvert de $I(\overline{K}/K)$ agissant trivialement sur les $(\mathcal{F}_\lambda)_{\overline{\eta_s}}$ et $(\mathcal{G}_\lambda)_{\overline{\eta_s}}$, où $K = \kappa(\eta_s)$, $\overline{K}$ est une clôture séparable de K. Soit $\phi \in G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fm}$, $m \geq 1$. Notons K_1 l'extension finie séparable de K correspondant au sous-groupe fermé de G_K topologiquement engendré par I_1 et ϕ. Alors $I(\overline{K}/K_1) = I_1$. Prenons S_1 une courbe lisse sur k, $f : S_1 \to S$ un morphisme quasi-fini et s_1 un point de S_1 au-dessus de s tels que le point générique η_{s_1} du hensélisé de S_1 en s_1 vérifie $\eta_{s_1} = \mathrm{Spec}\, K_1$. Formons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(S-\{s\}) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f'"'] & S_1 \arrow[d, "f"] \\ S-\{s\} \arrow[r, hook] & S. \end{tikzcd}$$

Alors $f'^*\mathcal{F}_\lambda$ et $f'^*\mathcal{G}_\lambda$ se prolongent en des faisceaux $\mathcal{F}'_\lambda$ et $\mathcal{G}'_\lambda$ sur S_1, lisses dans un voisinage de s_1. Posons $L'_\lambda = \mathcal{F}'_\lambda \oplus \mathcal{G}'_\lambda[1]$. Alors $[(Rj_*f'^*L_\lambda)_{s_1}] \simeq [(L'_\lambda)_{s_1}] - [(L'_\lambda)_{s_1}(-1)]$, d'où

$$\mathrm{Tr}(\phi, (L_\lambda)_{\overline{\eta_s}}) = \mathrm{Tr}(F_0^{fm}, (L'_\lambda)_{\overline{s_1}}) = \frac{1}{1-p^{fm}} \mathrm{Tr}(F_0^{fm}, (Rj_*(f')^*L_\lambda)_{\overline{s_1}}),$$

où $\overline{\eta_s} \to \eta_s$, $\overline{s_1} \to s_1$. Ces traces sont E-compatibles, car $(Rj_*(f')^*L_\lambda)_{\lambda\in I}$ l'est d'après le cas d'un corps fini de 1.16. (En fait la démonstration de (B) donnée en 3.2 suffit : on n'a pas besoin d'invoquer 3.1.) □

Les lemmes 3.5, 3.7 et 3.8 seront utilisés dans la démonstration de 3.1.

LEMME 3.5. – *Soient X un schéma noethérien intègre muni d'une action d'un groupe fini G, $Y \to X$ un morphisme étale de schémas. Alors il existe un ouvert affine dense G-stable U de X, un morphisme $(f, \alpha) : (Z, G') \to (U, G)$ avec α surjectif faisant de Z un* $(\mathrm{Ker}\,\alpha)$*-torseur sur*

U, et une factorisation

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "f"'] & Y \times_X U \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ & U \arrow[r, hook] & X. \end{tikzcd}$$

Démonstration. – Quitte à remplacer X par un ouvert affine dense G-stable de X, on peut supposer X affine. Notons η le point générique de X, $G_0 = G_i(\eta)$. Alors G_0 agit trivialement sur X, l'action de G sur X se factorise donc par $Q = G/G_0$. Comme $X \to X/G$ est étale en η, il existe un ouvert U affine dense G-stable de X tel que $Y \times_X U \to U$ et $U \to U/G$ soient des revêtements étales. On peut supposer que $G_0 = \{1\}$. En effet, une fois ce cas établi, on peut l'appliquer, dans le cas général, à l'action de Q sur U. On obtient $(f, \beta) : (Z, Q') \to (U, Q)$. Il suffit alors de prendre $G' = G \times_Q Q'$, qui agit sur Z à travers sa projection sur Q', et prendre pour α la projection $G' \to G$.

Soit x un point géométrique de U/G. On a une équivalence de catégories

$$F : \{\text{revêtements étales de } U/G\} \to \{\pi_1\text{-ensembles finis à gauche}\}$$
$$T \mapsto T_x,$$

où $\pi_1 = \pi_1(U/G, x)$. Alors $F(U) \simeq \pi_1/A$, où A est un sous-groupe ouvert distingué tel que $\pi_1/A \simeq G^{\mathrm{op}}$, et $F(Y \times_X U) \simeq \coprod_{i=1}^n \pi_1/B_i$, où les B_i, $1 \le i \le n$, sont des sous-groupes ouverts de A. Soit $C \subset \bigcap_{i=1}^n B_i$ un sous-groupe ouvert distingué de π_1. On prend $G' = (\pi_1/C)^{\mathrm{op}} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et Z un revêtement étale de U/G tel que $F(Z) = (\pi_1/C) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, l'action de G' sur Z étant donnée par la translation à droite de G' sur $F(Z)$. On prend $g : Z \to Y \times_X U$ tel que $F(g)$ soit donné par

$$(\pi_1/C) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \coprod_{i=1}^n \pi_1/B_i$$
$$(\sigma, \bar{i}) \mapsto \bar{\sigma} \in \pi_1/B_i.$$

Notons f le composé de g et de la projection $Y \times_X U \to U$, α le composé $G' \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} (\pi/C)^{\mathrm{op}} \to (\pi/A)^{\mathrm{op}} \simeq G$. Alors $F(f)$ s'identifie à α^{op}, donc f est G'-équivariant et fait de Z un $(\operatorname{Ker}\alpha)$-torseur sur U. □

3.6. – Soient $u : X \to Z$ un morphisme de schémas muni d'une action d'un groupe fini G, $X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} Z$ une factorisation de u dans la catégorie des schémas. Rappelons la construction d'une factorisation équivariante [15, 7.6]. Pour $g \in G$, notons Y_g le Z-schéma défini par la composition $Y \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{a_g} Z$. Posons $G = \{g_1, \dots, g_n\}$,

$$(Y/Z)^G = Y_{g_1} \times_Z \cdots \times_Z Y_{g_n}$$

sur lequel G opère par $(y_{g_1}, \dots, y_{g_n})g = (y_{gg_1}, \dots, y_{gg_n})$. Alors f a la factorisation G-équivariante $X \xrightarrow{v'} (Y/Z)^G \to Z$, où v' envoie x sur $(v(xg_1), \dots, v(xg_n))$.

Lemme 3.7. – *Soient $f : X \to Z$ un morphisme séparé de type fini de schémas noethériens, G un groupe fini agissant sur f. Alors on peut factoriser f en $X \overset{j}{\hookrightarrow} Y \xrightarrow{g} Z$ de façon G-équivariante, où g est propre et j est une immersion.*

Démonstration. – D'après le théorème de compactification de Nagata [6, 4.1], f se factorise en $X \xhookrightarrow{j_0} Y_0 \xrightarrow{g_0} Z$, où g_0 est propre et j_0 est une immersion. Il suffit alors d'appliquer 3.6. □

Le lemme clef suivant découle de raffinements, dus à Gabber, de résultats de de Jong ([16], [28, 4.4]) sur les altérations équivariantes.

On appelle *altération galoisienne* [28, 4.4.1] un morphisme $(f,\alpha) : (S',G') \to (S,G)$ où α est surjectif, f est un morphisme propre dominant génériquement fini de schémas noethériens intègres, tel que $K(S')^H$ soit une extension radicielle de $K(S)$, où $H = \operatorname{Ker}\alpha$, $K(S')$ (resp. $K(S)$) est le corps des fonctions de S' (resp. S). Alors il existe un ouvert affine dense G-stable U de S tel que $f^{-1}(U) \to f^{-1}(U)/H$ soit un revêtement étale galoisien de groupe H/H_0, où $H_0 = H \cap \operatorname{Ker}(G' \to \operatorname{Aut}(K(S')))$, et que $f^{-1}(U)/H \to U$ soit un homéomorphisme universel fini et plat. La composition de deux altérations galoisiennes est une altération galoisienne.

Soit G un groupe fini. Soit X un schéma noethérien régulier muni d'une action de G. Rappelons qu'un diviseur à croisements normaux G-stable D de X est dit *G-strict* s'il est strict et si pour toute composante irréductible D_i de D et tout $g \in G$ tel que $D_i g \neq D_i$, D_i et $D_i g$ ne se coupent pas. Soit $S = \operatorname{Spec} R$ un trait de point fermé s. Rappelons qu'un *couple semi-stable* [29, 5.5 (a)] est un couple (X,Z), où X est un S-schéma de type fini et Z est une partie fermée de X contenant X_s, qui est, localement pour la topologie étale, de la forme

$$(\operatorname{Spec} R[t_1,\ldots,t_n]/(t_1\cdots t_a - \pi), Z),$$

où π est une uniformisante de R, Z est défini par l'idéal $(t_1\cdots t_b)$, $1 \le a \le b \le n$. Alors Z est un diviseur à croisements normaux de X. Si $X \to S$ est muni d'une action de G sous laquelle Z est stable, on dit que le couple semi-stable (X,Z) est *G-strict* si Z est un diviseur à croisements normaux G-strict de X.

Soit S un schéma noethérien. On dit qu'une courbe nodale G-équivariante $X \to S$ est *G-scindée* si elle est scindée et si pour tout $s \in S$, toute composante irréductible C de X_s et tout $g \in G_d(s)$ tel que $Cg \neq C$, C et Cg ne se coupent pas (condition $(*)$ dans [28, 4.4.1]). On appelle *fibration plurinodale G-scindée* (*cf.* [16, 5.8]) un système $(X_d \xrightarrow{f_d} \cdots \xrightarrow{f_1} X_0, \{\sigma_{ij}\}, Z_0)$, où

- $f_i : X_i \to X_{i-1}$ est une courbe projective, nodale et G-scindée,
- $\sigma_{ij} : X_{i-1} \to X_i$, $j = 1,\ldots,n_i$, sont des sections disjointes de f_i dans le lieu lisse de f_i, permutées par G (i.e. pour tout j, il existe j' tel que $a_g \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ij'} \circ a_g$),
- $Z_0 \subsetneq X_0$ est un fermé G-stable,

tel que f_i soit lisse sur $X_{i-1} - Z_{i-1}$, où on a posé $Z_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \sigma_{ij}(X_{i-1}) \cup f_i^{-1}(Z_{i-1})$, $1 \le i \le d$. Ici on dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est *projectif* si f admet une factorisation $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n_Y \to Y$, où i est une immersion fermée. Dans la définition d'une courbe plurinodale G-scindée, $X_d \to X_0$ est projectif et plat.

LEMME 3.8. – *Soient G un groupe fini, $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini G-équivariant de schémas noethériens intègres, U un ouvert dense G-stable de X. Supposons que la fibre générique X_η de f soit géométriquement irréductible. On fait aussi les hypothèses suivantes :*

(i) *S est excellent ;*

(ii) *pour toute altération galoisienne $(S_1, G_1) \to (S, G)$ et toute partie fermée $F_1 \subsetneq S_1$, il existe une altération galoisienne $(S_2, G_2) \to (S_1, G_1)$ telle que S_2 soit régulier et que l'image inverse de F_1 dans S_2 soit contenue dans un diviseur à croisements normaux G_2-strict.*

Alors il existe un groupe fini G', un homomorphisme de groupes $\alpha : G' \to G$, un diagramme commutatif G'-équivariant

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "v"] & X_d \arrow[r, "g"] & S' \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[rr, "f"] & & S \end{tikzcd}$$

où (u, α), (v, α) sont des altérations galoisiennes, j est une immersion ouverte dominante, et une fibration plurinodale G'-scindée de g

$$(X_d \xrightarrow{f_d} \cdots \xrightarrow{f_1} X_0 = S', \{\sigma_{ij}\}, Z_0)$$

telle que X_i soit régulier, Z_i soit un diviseur à croisements normaux G'-strict de X_i pour $0 \leq i \leq d$ et que Z_d contienne $X_d - v^{-1}(U)$.

On appliquera le lemme uniquement quand S est le spectre d'un corps (3.9) ou un trait excellent (4.11, 4.12). Dans ces cas, les hypothèses (i) et (ii) sont automatiquement satisfaites. Lorsque S est un trait excellent, u est nécessairement un changement de traits fini, et (X_d, Z_d) est un couple semi-stable G'-strict sur S'.

Démonstration. – D'après 3.7, on peut supposer f propre. Si $\dim X_\eta = 0$, alors (f, Id_G) est une altération galoisienne, donc il suffit d'y appliquer l'hypothèse (ii) et de prendre $g = \mathrm{Id}$. Si $\dim X_\eta \geq 1$, on applique [28, 4.4.3]. On obtient un groupe fini G', un homomorphisme de groupes $\alpha : G' \to G$, un diagramme G'-équivariant

$$\begin{tikzcd} X_d \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & S' \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

où (u, α), (v, α) sont des altérations galoisiennes, et une fibration plurinodale G'-scindée de g

$$(X_d \xrightarrow{f_d} \cdots \xrightarrow{f_1} X_0 = S', \{\sigma_{ij}\}, Z_0)$$

telle que Z_d contienne $X_d - v^{-1}(U)$. En appliquant (ii), on se ramène au cas où X_0 est régulier et Z_0 est un diviseur à croisements normaux G'-strict. Appliquant alors [28, 4.4.4] successivement à $f_1, \ldots, f_d$, on modifie X_i de sorte que X_i devient régulier et Z_i devient un diviseur à croisements normaux G'-strict, $1 \leq i \leq d$. $\square$

3.9. – *Démonstration de 3.1.* – On sait que f^* et $\otimes$ préservent la E-compatibilité. Prouvons d'abord l'énoncé suivant :

(A') Pour $(f, \alpha) : (X, G) \to (Y, H)$ un morphisme de $\boldsymbol{Eq}/\eta$ avec f séparé, $R(f, \alpha)_!$ préserve la E-compatibilité.

Comme $R(f,\alpha)_! = (\mathrm{Id},\alpha)_! R(f,\mathrm{Id})_!$ et $(\mathrm{Id},\alpha)_!$ préserve la E-compatibilité (1.18 (iv)), on peut supposer $\alpha = \mathrm{Id}$. D'après le théorème de changement de base, on peut supposer que $Y = \eta_1$ est le spectre d'une extension finie de K. On peut supposer $\sharp I = 2$.

(a) *Cas* $X = \mathbb{A}^1_{\eta_1}$. Choisissons $w : W \to X$ étale dominant tel que les $w^* L_\lambda$ vérifient 3.0.1. On applique 3.5 à w pour trouver un ouvert affine dense G-stable $j : U \hookrightarrow X$ et un morphisme $(f,\alpha) : (U',G') \to (U,G)$ avec α surjectif faisant de U' un $(\mathrm{Ker}\,\alpha)$-torseur sur U tels que les $(f,\alpha)^* j^* L_\lambda$ vérifient 3.0.1. Soit $i : Z = X - U \to X$. On a le triangle distingué

$$Ra_{U!} j^* L_\lambda \to Ra_{X!} L_\lambda \to a_{Z!} i^* L_\lambda \to .$$

Ici les $Ra_{U!} j^* L_\lambda \simeq R(a_{U'},\alpha)_! (f,\alpha)^* j^* L_\lambda$ (1.7 (a), 5.3) forment un système E-compatible en vertu de (A) et de 2.4, $(a_{Z!} i^* L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible car a_Z est fini. Donc $(Ra_{X!} L_\lambda)_{\lambda\in I}$ l'est aussi.

(b) *Cas général.* On fait une récurrence sur $d = \dim X$. Le cas $d \le 0$ est trivial. Si $d \ge 1$, on prend un ouvert affine dense G-stable U. Soit $i : Z = X - U \to X$. On a le triangle distingué

$$Ra_{U!} j^* L_\lambda \to Ra_{X!} L_\lambda \to Ra_{Z!} i^* L_\lambda \to .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $(Ra_{Z!} i^* L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible. Donc il suffit de voir que $(Ra_{U!} j^* L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible. D'après le lemme de normalisation, il existe un morphisme $U/G \to \mathbb{A}^1_\eta$ à fibres de dimension $\le d-1$. Ceci induit un η_1-morphisme G-équivariant $f : U \to \mathbb{A}^1_{\eta_1}$. On a $Ra_{U!} \simeq Ra_{\mathbb{A}^1_{\eta_1}!} Rf_!$. Il suffit donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence et (a).

Pour prouver 1.16, il suffit de prouver les énoncés suivants pour tout $d \in \mathbb{N}$:

(C_d) *Pour* (X,G) *sur* η *avec* $\dim X \le d$*,* D_X *préserve la* E*-compatibilité.*

(D_d) *Pour* $(f,\alpha) : (X,G) \to (Y,H)$ *un morphisme de* ***Eq***$/\eta$ *(où* f *est éventuellement non séparé) avec* $\dim X \le d$*,* $R(f,\alpha)_*$ *la préserve aussi.*

On peut supposer $\sharp I = 2$. On fait une récurrence sur d. Le cas $d = 0$ est trivial (1.18 (iv)). Pour $d \ge 1$, supposons (C_{d-1}) et (D_{d-1}) établis.

Prouvons (C_d). On peut supposer X réduit. Soit $(L_\lambda)_{\lambda\in I}$ un système E-compatible sur X. On prend un ouvert dense régulier G-stable $j : U \hookrightarrow X$ tel que les $L_\lambda | U$ soient à faisceaux de cohomologie lisses. On pose $i : Z = X - U \to X$. Le triangle distingué

$$i_* Ri^! D_X L_\lambda \to D_X L_\lambda \to Rj_* j^* D_X L_\lambda \to$$

se récrit

$$i_* D_Z(i^* L_\lambda) \to D_X L_\lambda \to Rj_* D_U j^* L_\lambda \to .$$

D'après (C_{d-1}), $(D_Z(i^* L_\lambda))_{\lambda\in I}$ est E-compatible. D'après 1.18 (iv), $(D_U j^* L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible. Donc la preuve de (C_d) se ramène à celle de (D_d).

Prouvons (D_d). On prend $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D^b_c(X,G,E)$.

3.9.1. – Supposons qu'il existe $(L'_\lambda)_{\lambda\in I} \in D^b_c(X,G,E)$ tel que pour tout $\lambda \in I$, $[L_\lambda] - [L'_\lambda]$ soit à support de dimension $\le d-1$, i.e. il existe $i : Z_\lambda \to X$ sous-schéma fermé G-stable de dimension $\le d-1$ et $L''_\lambda \in K(Z_\lambda, G, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ tels que $[L_\lambda] - [L'_\lambda] = i_* L''_\lambda$. En appliquant (D_{d-1}), on voit qu'il suffit de vérifier $(Rf_* L'_\lambda)_{\lambda\in I} \in D^b_c(Y,G,E)$.

On peut supposer X réduit. Soit $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense normal G-stable. On considère $L_\lambda \to Rj_*j^*L_\lambda$. D'après 3.9.1, il suffit de montrer que $(Rj_*j^*L_\lambda)_{\lambda\in I}$ et $(R(fj)_*j^*L_\lambda)_{\lambda\in I}$ sont E-compatibles. Donc on peut supposer X normal. On peut supposer de plus que G agit transitivement sur $\pi_0(X)$. Si C est une composante connexe de X, alors $(C, G_d(C)) \to (X, G)$ est cocartésien (1.1.2). Quitte à remplacer X par une composante connexe (1.5.1), on peut supposer X intègre.

Choisissons $w : W \to X$ étale dominant tel que les w^*L_λ vérifient 3.0.1. On applique 3.5 à w pour trouver un ouvert dense G-stable U de X, et $(g, \beta) : (Z, G') \to (U, G)$ avec β surjectif faisant de Z un $(\operatorname{Ker}\beta)$-torseur sur U, tels que les $L_\lambda|Z$ vérifient 3.0.1. D'après 3.9.1, il suffit de montrer que $(Rj_*j^*L_\lambda)_{\lambda\in I}$ et $(R(fj)_*j^*L_\lambda)_{\lambda\in I}$ sont E-compatibles, où $j : U \hookrightarrow X$. D'après 1.7 (a), $j^*L_\lambda \simeq (g,\beta)_*(g,\beta)^*j^*L_\lambda$. Donc, quitte à remplacer X par Z, on peut supposer

(a) les L_λ vérifient 3.0.1.

D'après 3.7, $(f, \alpha) = (p, \alpha)(j, \mathrm{Id})$, où j est une immersion ouverte et p est propre. D'après (A'), $R(p, \alpha)_!$ préserve la E-compatibilité. Donc on peut supposer (a) et

(b) f est une immersion ouverte et $\alpha = \mathrm{Id}$.

Ces hypothèses seront toujours conservées.

Le cas $d = 1$ résulte alors de (B). En effet, on s'intéresse aux traces situées en un point $y \in Y - X$. Quitte à remplacer G par $G_d(y)$ et Y par un voisinage affine $G_d(y)$-stable de y, on peut supposer de plus Y affine. En vertu de 2.4, on peut supposer $G = \{1\}$. Soit $g : Y' \to Y$ le normalisé de Y_{red}. Formons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "f'"] \arrow[d, "g_X"] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, hook, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

Le morphisme $L_\lambda \to g_{X*}g_X^*L_\lambda$ est un isomorphisme sur le lieu de normalité de X_{red}, qui est un ouvert dense. D'après 3.9.1, il suffit donc de voir que les $Rf_*g_{X*}g_X^*L_\lambda = g_*Rf'_*g_X^*L_\lambda$ forment un système E-compatible. Quitte à remplacer f par f', on peut supposer de plus Y normal. En appliquant (B), on achève la démonstration de (D_1).

Dans la suite, $d \geq 2$. Soit K_1 une extension galoisienne de K telle que les composantes irréductibles de $Y \times_\eta \eta_1$ soient géométriquement irréductibles [13, 4.5.10], où $\eta_1 = \operatorname{Spec} K_1$. Quitte à faire le changement de base $\eta_1 \to \eta$ et remplacer G par $G \times \operatorname{Gal}(K_1/K)$, on peut supposer qu'on a un morphisme G-équivariant $Y \to \eta_1$ et que les composantes irréductibles de Y sont géométriquement irréductibles sur η_1. Comme dans l'alinéa précédent, on peut supposer de plus Y normal. Quitte à remplacer Y par une composante connexe, on peut supposer Y intègre, donc géométriquement irréductible sur η_1. On peut supposer $\dim Y = d$ et X non vide.

On applique 3.8 à $Y \to \eta$ et l'ouvert X de Y. On obtient une altération galoisienne $(v, \beta) : (Y', G') \to (Y, G)$ avec Y' régulier et un diviseur à croisements normaux G'-strict D de Y'

contenant $Y' - v^{-1}(X)$. Soit $U = Y' - D$ et formons le diagramme à carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
(U, G') \arrow[r, hook, "(j,\mathrm{Id}_{G'})"] & (v^{-1}(X), G') \arrow[r, hook, "(f',\mathrm{Id}_{G'})"] \arrow[d, "(v_X,\beta)"] & (Y', G') \arrow[d, "(v,\beta)"] \\
 & (X, G) \arrow[r, hook, "(f,\mathrm{Id}_G)"] & (Y, G).
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $L_\lambda \to R(v_X, \beta)_* v_X^* L_\lambda$ est un isomorphisme sur un ouvert dense de X (1.7 (a)). D'après 3.9.1 et (A'), il suffit donc de voir que les $Rf_* R(v_X, \beta)_* v_X^* L_\lambda = R(v, \beta)_* Rf'_* v_X^* L_\lambda$ forment un système E-compatible. Par (A'), il suffit alors de voir que $(Rf'_* v_X^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible. Comme $\dim(v^{-1}(X) - U) \leq d - 1$, il suffit, d'après 3.9.1, de voir que $(Rj_* j^* v_X^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $(R(f'j)_* j^* v_X^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ sont E-compatibles. Donc on peut supposer

(c) Y est régulier irréductible de dimension d et X est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux G-strict de Y.

Posons $Y - X = \sum_{i \in J} D_i$. Pour $i \in J$, notons $X_{(i)} = Y - \bigcup_{j \in J - \{i\}} D_j$, et formons le diagramme à carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
 & D_i^\circ \arrow[r, hook, "j'_{(i)}"] \arrow[d, "\iota'_i"'] & D_i \arrow[d, "\iota_i"] \\
X \arrow[r, hook, "j^{(i)}"] & X_{(i)} \arrow[r, hook] & Y.
\end{tikzcd}$$

D'après (a), L_λ est à faisceaux de cohomologie lisses sur X, modérément ramifiés sur Y. D'après [29, (3.7.1)], le morphisme de changement de base

$$\iota_i^* Rf_* L_\lambda \to R(j'_{(i)})_* (\iota'_i)^* Rj_*^{(i)} L_\lambda$$

est un isomorphisme. Cet isomorphisme est $G_d(D_i)$-équivariant. En appliquant (D_{d-1}) à $j'_{(i)}$, il suffit de prouver la E-compatibilité de $(Rj_*^{(i)} L_\lambda)_{\lambda \in I}$. On est ramené à prouver la stabilité par Rf_* sous les hypothèses additionnelles (c) et

(d) X est le complémentaire d'un diviseur régulier D de Y.

Refaisant un dévissage comme dans la démonstration de (D_1), on peut supposer de plus

(e) Y affine.

En vertu de 2.4, on peut supposer $G = \{1\}$. Pour $y \in |D|$, on prend un sous-schéma régulier C de Y de dimension 1 tel que $C \cap D = \{y\}$. Alors d'après [29, 3.7 (ii)], $(Rf_* L_\lambda)|C \simeq Rf'_*(L_\lambda | C \cap X)$, où $f' : C \cap X \hookrightarrow C$. Il suffit donc d'appliquer l'hypothèse (B). Ceci achève la démonstration de (D_d). □

La démonstration de (D_d), $d \geq 2$, peut aussi être achevée par la méthode de la démonstration de [8, Th. finitude, 2.4]. Sous les hypothèses (a) à (e), on plonge Y/G dans un espace affine $\mathbb{A}^n_\eta$. On note $g : Y \to \mathbb{A}^n_\eta$. Pour tout $1 \le i \le n$, on note $p_i : \mathbb{A}^n_\eta \to \mathbb{A}^1_\eta$ la i-ième projection et on considère

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "f"] \arrow[dr] & Y \arrow[d, "p_i g"] \\ & \mathbb{A}^1_\eta. \end{tikzcd}$$

D'après le théorème de changement de base générique ([*ibid.*, 1.9 (ii)] pour le cas des coefficients de torsion ; le cas l-adique résulte de ce cas par l'argument usuel : passer aux gradués pour la filtration l-adique sur un modèle entier), il existe un ouvert dense U_i de $\mathbb{A}^1_\eta$ tel que Rf_* commute à tout changement de base $S' \to U_i$. Quitte à rétrécir U_i, on peut supposer que les fibres de $(p_i g)^{-1}(U_i) \to U_i$ sont de dimension $\le d-1$. Alors (D_{d-1}) implique que

$$(Rf_* L_\lambda | (p_i g)^{-1}(U_i))_{\lambda\in I}$$

est E-compatible, pour tout i. Notons que $E = Y - \bigcup_{i=1}^n (p_i g)^{-1}(U_i)$ est un ensemble fini, donc $E \cap (Y-X)$ est rare dans $Y-X$, car $Y-X$ est purement de dimension $d-1 \ge 1$. Comme les $Rf_* L_\lambda | Y-X$ sont à faisceaux de cohomologie lisses [29, 3.7 (i)], $(Rf_* L_\lambda | Y-X)_{\lambda\in I}$ est E-compatible en vertu de la proposition suivante (où $m = d-1$).

Proposition 3.10. – *Soit $m \ge 0$. Faisons l'hypothèse (D_m). Soient (X, G) de type fini sur η avec X régulier, de dimension $\le m$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D^b_c(X, G, \mathbb{Q}_{l_\lambda})$ à faisceaux de cohomologie lisses. Supposons qu'il existe $U \subset X$ un ouvert dense G-stable tel que $(L_\lambda|U)_{\lambda\in I} \in D^b_c(U, G, E)$. Alors $(L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible.*

Rappelons que l'hypothèse (D_m) sera satisfaite (une fois (A) et (B) établis).

Démonstration. – On a une filtration de X par des ouverts G-stables

$$U = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_m = X$$

telle que $U_i - U_{i-1}$ soit régulier et purement de codimension i dans U_i. On montre $(L_\lambda|U_i)_{\lambda\in I} \in D^b_c(U_i, G, E)$ par récurrence sur i. Le cas $i = 0$ est une hypothèse de la proposition et le cas $i = m$ permet de conclure. Supposons cela vrai pour un i vérifiant $0 \le i \le m-1$. Soit $j_i : U_i \hookrightarrow U_{i+1}$. On a la formule de projection

$$L_\lambda|U_{i+1} \otimes Rj_{i*}\mathbb{Q}_{l_\lambda} \xrightarrow{\sim} Rj_{i*}(L_\lambda|U_i).$$

D'après l'hypothèse de récurrence et (D_m), $Rj_{i*}(L_\lambda|U_i) \in D^b_c(U_{i+1}, G, E)$. On a un isomorphisme G-équivariant

$$R^q j_{i*}\mathbb{Q}_l = \begin{cases} \mathbb{Q}_{l,U_{i+1}} & \text{si } q = 0, \\ \mathbb{Q}_{l,U_{i+1}-U_i}(-i-1) & \text{si } q = 2i+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in |U_{i+1} - U_i|$, tout $\bar{x} \to x$ et tout $(g, \phi) \in G_d(x, \bar{x})$ avec $\rho(\phi) = F_0^n$, $n > 0$ un entier (on a utilisé les notations de 1.13), on a

$$\mathrm{Tr}((g,\phi), (Rj_{i*}\mathbb{Q}_l)_{\bar{x}}) = 1 - p^{n(i+1)}.$$

Donc on a $(L_\lambda|U_{i+1})_{\lambda\in I} \in D^b_c(U_{i+1}, G, E)$. $\square$

4. Indépendance de l des cycles proches et fin de la démonstration de 1.16

4.1. – Soient S un trait hensélien, l un nombre premier inversible sur S. Soit $\boldsymbol{D}_S$ la catégorie des couples (X, S_1) où S_1 est un trait fini sur S et X est un schéma de type fini sur S_1. Un morphisme $(X_1, S_1) \to (X_2, S_2)$ dans $\boldsymbol{D}_S$ est un couple (f, g) de flèches s'insérant dans un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & S_1 \arrow[d, "g"] \\ X_2 \arrow[r] & S_2. \end{tikzcd}$$

On note par s le point fermé de S et par η le point générique de S. Soit $\boldsymbol{D}_{s,S}$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{D}_S$ formée des couples (X, S_1) avec $X_\eta = \varnothing$.

À un objet (X, S_1) de $\boldsymbol{D}_{s,S}$, on associe le topos $X \times_{s_1} \eta_1$ [1, XIII 1.2.4], où s_1 est le point fermé de S_1, η_1 est le point générique de S_1. Pour $(X, S_1, G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_{s,S})$, on définit comme dans 1.3 les catégories $\mathrm{Mod}_c(X \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}_l})$, $D_c^b(X \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}_l})$, les six opérations et la dualité. Soit $\overline{s_1} \to s_1$ un point géométrique algébrique. Un faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur $(X \times_{s_1} \eta_1, G)$ est un faisceau sur $X_{\overline{s_1}}$, muni d'une action continue ([1, XIII 1.1.2]) de

$$G_{\overline{s_1},\eta_1} = G \times_{\mathrm{Gal}(k_1/k_1^G)} \mathrm{Gal}(\overline{K_1}/K_1^G),$$

compatible à l'action de $G_{\overline{s_1},\eta_1}$ sur $X_{\overline{s_1}}$ (via $G_{\overline{s_1},\eta_1} \to G_{\overline{s_1}} = G \times_{\mathrm{Gal}(k_1/k_1^G)} \mathrm{Gal}(\overline{k_1}/k_1^G)$). Ici $k_1 = \kappa(s_1)$, $\overline{k_1} = \kappa(\overline{s_1})$, $K_1 = \kappa(\eta_1)$, $\overline{K_1}$ est une clôture séparable de K_1.

Pour $(x, S_1, G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_{s,S})$ avec $x = \operatorname{Spec} \kappa(x)$, et $\bar{x}$ un point géométrique algébrique au-dessus de x, on pose

$$G_{\bar{x},\eta_1} = G \times_{\mathrm{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^G)} \mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^G) \times_{\mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/k_1^G)} \mathrm{Gal}(\overline{K_1}/K_1^G).$$

En d'autres termes, un élément de $G_{\bar{x},\eta_1}$ est un triplet (g, ϕ, ψ) où $g \in G$, $\phi \in \mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^G)$, $\psi \in \mathrm{Gal}(\overline{K_1}/K_1^G)$ tel que ϕ soit la réduction de ψ et que ϕ et g induisent le même automorphisme sur $\kappa(x)$. On a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}_c(x \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}_l}) &\to \mathrm{Rep}(G_{\bar{x},\eta_1}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \\ L &\mapsto L_{\bar{x}}. \end{aligned}$$

Pour $(X, S_1, G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_{s,S})$, x un point fermé de X, on pose

$$G_d(x, \bar{x}, \eta_1) = G_d(x)_{\bar{x},\eta_1}.$$

Pour $L \in D_c^b(X \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}_l})$, on pose $L_x = i_x^* L$, où $i_x : (x, S_1, G_d(x)) \to (X, S_1, G)$.

On a la variante suivante de 1.12.

Proposition 4.2. – *Soient $(X, S_1, G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_{s,S})$, S' un trait fini étale sur S d'extension résiduelle galoisienne, T une composante de $S_1 \times_S S'$. Notons t le point fermé de T, η_T le point générique de T, $H = G_d(T)$, $Y = X \times_{s_1} t$. Considérons $(Y, T, H) \to (X, S_1, G)$. Soient $x \in |X|$, $y \in |Y|$ au-dessus de x, $\bar{y} \to y$ au-dessus de $\bar{x} \to x$. Alors l'image de l'homomorphisme induit $i : H_d(y, \bar{y}, \eta_T) \to G_d(x, \bar{x}, \eta_1)$ est*

$$G' = G_d(x) \times_{\mathrm{Gal}(\kappa(x)/\kappa(x)^{G_d(x)})} \mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}) \times_{\mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/k_1^{G_d(x)})} \mathrm{Gal}(\overline{K_1}/K_1^{G_d(x)} \cdot K'),$$

où K' est le corps des fractions de S'.

Démonstration. – Il est évident que $\operatorname{Im} i \subset G'$. Soit $(g,\phi,\psi) \in G'$. Posons $\Gamma = \operatorname{Gal}(K'/K)$. Formons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
(Y,H) \arrow[r] \arrow[d] & (Y,(G\times\Gamma)_d(T)) \arrow[r] \arrow[d] & (X\times_s s', G\times\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & (X,G) \arrow[d] \\
(t,H) \arrow[r] & (t,(G\times\Gamma)_d(T)) \arrow[r] & (s_1\times_s s', G\times\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & (s_1,G) \arrow[d] \\
& & (s',\Gamma) \arrow[r] & (s,\{1\}).
\end{tikzcd}$$

D'après une variante de 1.11 (b), l'homomorphisme $(G\times\Gamma)_d(y,\bar{y},\eta_T) \to G_d(x,\bar{x},\eta_1)$ est un isomorphisme. Soit $(g,\gamma,\phi',\psi') \in (G\times\Gamma)_d(y,\bar{y},\eta_T)$ l'image inverse de (g,ϕ,ψ). Alors $\phi'|k' = \mathrm{Id}_{k'}$. Comme $(\gamma,\phi') \in G_d(s',\bar{s})$, on a $\gamma = 1$, i.e. $(g,\phi,\psi) = i(g,\phi',\psi')$. □

4.3. – Soit $(S_{(m)})_{m\geq 1}$ un système comme dans 2.3. On désigne par $\boldsymbol{Eq}^{\mathrm{adm}}(\boldsymbol{D}_{s,S})$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_{s,S})$ formée des triples (X,S_1,G) où G agit sur X de façon admissible. Pour $(X,S_1,G) \in \boldsymbol{Eq}^{\mathrm{adm}}(\boldsymbol{D}_{s,S})$, on applique 2.3 à $(X,G) \to (S_1,G)$ au-dessus de S. Pour $m \geq 1$, $g \in G$, choisissons une composante $T_{m,g}$ de $S_1^{(m,g)}$ et posons $Y_{m,g} = X^{(m,g)} \times_{S_1^{(m,g)}} T_{m,g}$. On va définir un foncteur

$$C_{m,g} : D_c^b(X\times_{s_1}\eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to D_c^b(Y_{m,g}\times_{t_{m,g}}\eta_{T_{m,g}}, \overline{\mathbb{Q}_l}),$$

analogue du $C_{m,g}$ de 2.3. Le groupe $\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}$ agit diagonalement sur $S_1\times_S S_{(n_g m)}$. Choisissons S' une composante de $S_1\times_S S_{(n_g m)}$ au-dessus de $T_{m,g}$, $X' = X\times_{S_1} S'$. On note

$$(X,S_1,G) \xleftarrow{d} (X',S',(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(S')) \xrightarrow{e} (Y_{m,g},T_{m,g},\{1\}).$$

On pose $C_{m,g} = e_* d^*$, qui ne dépend pas du choix de S'.

4.4. – Supposons dorénavant, sauf en 4.7, que le corps résiduel k de S soit $\mathbb{F}_{p^f}$. Alors $G_d(x,\bar{x},\eta_1) = G_d(x)\times_{\operatorname{Gal}(\kappa(x)/k)} \operatorname{Gal}(\overline{K_1}/K_1^{G_d(x)})$. Soient E, I, γ comme dans 1.13. Pour $(X,S_1,G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_{s,S})$, on dit que $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D_c^b(X\times_{s_1}\eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ est (E,I,γ)-*compatible* (ou E-compatible s'il n'y a pas de confusion à craindre) si pour tout $x \in |X|$, tout $\bar{x} \to x$ et tout $(g,\phi,\psi) \in G_d(x,\bar{x},\eta_1)$ avec $\rho(\phi)$ une puissance entière de F_0^f, le système $(\operatorname{Tr}((g,\phi,\psi),(L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda\in I}$ est (E,I,γ)-compatible. Ici $\rho : \operatorname{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x)^{G_d(x)}) \hookrightarrow \operatorname{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ est l'inclusion, $F_0 \in \operatorname{Aut}(\kappa(\bar{x}))$ désigne le Frobenius géométrique absolu $a \mapsto a^{1/p}$.

Comme en 1.15, la définition ne changera pas si on se restreint aux triplets $(g,\phi,\psi) \in G_d(x,\bar{x},\eta_1)$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fm}$, où m est un entier $\geq N(x)$, $N(x)$ est une constante qui ne dépend que de x.

Proposition 4.5. – *La E-compatibilité ainsi définie est stable par les six opérations et la dualité.*

Démonstration. – Cela découle du cas fini de 1.16 et 1.17. À titre d'exemple, prouvons la stabilité par D. Soient $(X,S_1,G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_{s,S})$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X\times_{s_1}\eta_1, G, E)$. Il suffit de montrer que pour $x \in |X|$, $\bar{x} \to x$, $(g,\phi,\psi) \in G_d(x,\bar{x},\eta_1)$ avec $\rho(\phi) = F_0^{mf}$, $m \geq 1$, $(\operatorname{Tr}((g,\phi,\psi),(DL_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda\in I}$ est E-compatible. Soient $s' = \operatorname{Spec}\mathbb{F}_{p^{fm}}$, S' un trait étale sur S

de point fermé s'. Appliquons 4.2. On a $(g,\phi,\psi)\in H_d(y,\bar{y},\eta_T)$. L'unique homomorphisme continu $\mathrm{Gal}(\kappa(\bar{t})/\kappa(t)^H)\to\mathrm{Gal}(\kappa(\overline{\eta_T})/\kappa(\eta_T)^H)$ qui envoie ϕ sur ψ définit un foncteur $F: D_c^b(Y\times_t\eta_T,H,\overline{\mathbb{Q}_l})\to D_c^b(Y,H,\overline{\mathbb{Q}_l})$ de sorte que

$$\mathrm{Tr}((g,\phi,\psi),(DL_\lambda)_{\bar{x}})=\mathrm{Tr}((g,\phi),(F(DL_\lambda)_t)_{\bar{y}}).$$

Comme $F(DL_\lambda)_t\simeq DF(L_\lambda)_t$, il suffit d'appliquer le cas fini de 1.17. □

Pour $m\geq 1$, soit $S_{(m)}$ un trait étale sur S de corps résiduel $\mathbb{F}_{p^{fm}}$. L'isomorphisme (2.3.1) induit une action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur $S_{(m)}$. Appliquons 4.3 au système $(S_{(m)})_{m\geq 1}$.

Proposition 4.6. – *Soient* $(X,S_1,G)\in\boldsymbol{Eq}^{\mathrm{adm}}(\boldsymbol{D}_{s,S})$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I}\in\prod_{\lambda\in I}D_c^b(X\times_{s_1}\eta_1,G,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$. *Pour que* $(L_\lambda)_{\lambda\in I}$ *soit E-compatible, il faut et il suffit que pour tout* $m\geq 1$ *et tout* $g\in G$,

$$(C_{m,g}L_\lambda)_{\lambda\in I}\in\prod_{\lambda\in I}D_c^b(Y_{m,g}\times_{t_{m,g}}\eta_{T_{m,g}},\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$$

soit E-compatible.

Démonstration. – La nécessité est claire. Soit $(L_\lambda)_{\lambda\in I}\in\prod_{\lambda\in I}D_c^b(X\times_{s_1}\eta_1,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ tel que pour tout $m\geq 1$ et tout $g\in G$, $(C_{m,g}L_\lambda)_{\lambda\in I}$ soit E-compatible. Comme $e^*e_*=\mathrm{Id}$ (variante de 1.7 (b)), on a $(d^*L_\lambda)\in D_c^b(X'\times_{s'}\eta',\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z},E)$. Il suffit de montrer que pour tout $x\in|X|$, tout $\bar{x}\to x$ et tout $(g,\phi,\psi)\in G_d(x,\bar{x},\eta_1)$ avec $\rho(\phi)=F_0^{fm}$, $m\geq 1$, $(\mathrm{Tr}((g,\phi,\psi),(L_\lambda)_{\bar{x}}))_{\lambda\in I}$ est E-compatible. Notons T la composante de $S_1\times_S S_{(m)}$ dominée par S', $H=G_d(T)$, $Y=X\times_{s_1}t$. Soient $y\in|Y|$ au-dessus de x, $\bar{y}\to y$ au-dessus de $\bar{x}\to x$. D'après 4.2, on a $(g,\phi,\psi)\in H_d(y,\bar{y},\eta_T)$, correspondant à $(\bar{1},\phi,\psi)\in(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(y,\bar{y},\eta_T)$. Formons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
(X',(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(S')) \arrow[r, "(\mathrm{Id},\Delta)"] \arrow[d] & (X',(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(S')) \arrow[r] \arrow[d] & (Y\times_{s_{(m)}}s_{(n_gm)},\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & (Y,\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
(S',(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(S')) \arrow[r, "(\mathrm{Id},\Delta)"] & (S',(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(S')) \arrow[r] & (t\times_{s_{(m)}}s_{(n_gm)},\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & (t,\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
 & & (s_{(n_gm)},\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \arrow[r] & (s_{(m)},\{1\}).
\end{tikzcd}$$

Soient $x'\in|X'|$ au-dessus de y, $\overline{x'}\to x'$ au-dessus de $\bar{y}\to y$. D'après une variante de 1.11 (b), l'homomorphisme $(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(x',\overline{x'},\eta')\to(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(y,\bar{y},\eta_T)$ est un isomorphisme. Soit $(\bar{1},b,\phi,\psi)\in(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(x',\overline{x'},\eta')$ l'image inverse de $(\bar{1},\phi,\psi)$. Alors $(b,\phi)\in(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(\eta_{n_gm},\bar{\eta})$, donc $b=\bar{1}$. Bref, $d_{\overline{x'},\eta'}:(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})_d(x',\overline{x'},\eta')\to G_d(x,\bar{x},\eta_1)$ envoie $(\bar{1},\phi,\psi)$ sur (g,ϕ,ψ). Donc les

$$\mathrm{Tr}((g,\phi,\psi),(L_\lambda)_{\bar{x}})=\mathrm{Tr}((\bar{1},\phi,\psi),(d^*L_\lambda)_{\overline{x'}})$$

forment un système E-compatible. □

4.7. – Soit $(X,S_1,G)\in\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_S)$. On a le foncteur des cycles proches

$$R\Psi_{X/S_1}:D_c^b(X_{\eta_1},G,\overline{\mathbb{Q}_l})\to D_c^b(X_{s_1}\times_{s_1}\eta_1,G,\overline{\mathbb{Q}_l}).$$

Un morphisme dans $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_S)$ de la forme $(f, \mathrm{Id}, \alpha) : (X, S_1, G) \to (Y, S_1, H)$ induit un morphisme $R\Psi_{Y/S_1} R(f_{\eta_1}, \alpha)_* \to R(f_{s_1}, \alpha)_* R\Psi_{X/S_1}$, qui est un isomorphisme lorsque f est propre.

Pour $(X, S_1, G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_S)$, $L \in D_c^b(X_{\eta_1}, G, \mathbb{Q}_l)$, on a, avec les notations de 2.3 et 4.3,

$$C_{m,g} R\Psi_{X/S_1} L \simeq R\Psi_{Y_{m,g}/T_{m,g}} (C_{(X_{\eta_1}, G), m, g} L)_{\eta_{T_{m,g}}}. \tag{4.7.1}$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

THÉORÈME 4.8. – *Soient S_1 un trait fini sur S, X un schéma de type fini sur S_1, G un groupe fini agissant sur $X \to S_1$ par des S-automorphismes. Alors $R\Psi_{X/S_1}$ préserve la E-compatibilité.*

Pour S d'égale caractéristique (ou du moins, pour S le hensélisé en un point fermé d'une courbe lisse sur $\mathbb{F}_{p^f}$), le résultat était connu de Gabber, mais non publié.

Pour $(g, \phi, \psi) \in G_{\overline{s_1}, \eta_1}$ avec $\rho(\phi) = F_0^{fn}$, $n \in \mathbb{Z}$, 4.8 combiné avec [29, 2.4, 5.3] implique que

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \mathrm{Tr}((g, \phi, \psi), H_c^i(X_{\bar{s}}, (R\Psi_{X/S_1} \mathbb{Q}_l)_{\bar{s}})) \in p^{fd \min\{0,n\}} \mathbb{Z}$$

est indépendant de l, où $d = \dim X_\eta$. On retrouve ainsi le cas (très particulier) de [23, 6.1.3] où Γ est le graphe transposé de a_g.

La démonstration de 4.8 sera donnée en 4.12. Commençons par les deux cas particuliers suivants.

LEMME 4.9. – *Supposons de plus X quasi-fini sur S_1. Alors $R\Psi_{X/S_1}$ préserve la E-compatibilité.*

LEMME 4.10. – *Soient G un groupe fini agissant sur un trait S_1 fini sur S, (X, Z) un couple semi-stable G-strict sur S_1, $u : X - Z \hookrightarrow X_{\eta_1}$, $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X - Z, G, E)$ avec L_λ vérifiant 3.0.1. Alors on a*

$$(R\Psi_{X/S_1} Ru_* L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X_{s_1} \times_{s_1} \eta_1, G, E).$$

Pour la notion de couple semi-stable G-strict, on renvoie aux définitions qui précèdent 3.8.

Démonstration de 4.9. – On peut supposer X réduit. Soit $f : X' \to X$ le normalisé de X. Alors $f_\eta = \mathrm{Id}$ et $R\Psi_{X/S_1} \simeq Rf_{s*} R\Psi_{X'/S_1}$. Donc on peut supposer X normal de sorte que X est somme disjointe de spectres d'extensions finies de s_1, de spectres d'extensions finie de η_1 et de traits finis sur S_1. On peut supposer que $X = S_3$ est un trait fini sur S_1. Soient K_2 une sous-extension maximale non ramifiée de K_3/K_1, S_2 le normalisé de S_1 dans K_2, $g : S_3 \to S_2$. Alors $R\Psi_{S_3/S_1} \simeq R\Psi_{S_2/S_1} Rg_{\eta_1 *}$. Comme $R\Psi_{S_2/S_1} : D_c^b(\eta_2, G, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to D_c^b(s_2 \times_{s_1} \eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}_l})$ s'identifie à l'identité, il résulte de 1.18 (iv) que $R\Psi_{S_3/S_1}$ préserve la E-compatibilité. □

Démonstration de 4.10. – Soit D une composante de X_s. On note par $Z^{(D)}$ la réunion des autres composantes de Z. Formons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X - Z \arrow[r, hook] \arrow[dd, hook, "u"'] & X - Z^{(D)} \arrow[dd] & D^\circ \arrow[l] \arrow[d, hook, "j"] \\ & & D \arrow[d, hook] \\ X_\eta \arrow[r, hook] & X & X_s. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Comme L_λ est modérément ramifié sur X, on a un isomorphisme [29, (5.6.2)]

$$(R\Psi_{X/S_1} Ru_* L_\lambda)|D \simeq Rj_* R\Psi_{(X-Z^{(D)})/S_1} L_\lambda.$$

Cet isomorphisme est $G_d(D)$-équivariant. Appliquant 1.16 dans le cas fini (variante 4.5) à Rj_*, on est ramené à prouver la proposition au cas où $Z = X_s$ est un diviseur régulier. Alors $X \to S_1$ est lisse. D'après 4.6 et (4.7.1), on peut supposer $G = \{1\}$. Soit $x \in |X_s|$. Il existe un sous-schéma fermé Y de X qui est un trait fini étale sur S' de point fermé x. D'après [*ibid.*, 5.6 (iii)], $(R\Psi_{X/S_1} L_\lambda)_x \simeq R\Psi_{Y/S_1}(L_\lambda)_{\eta_Y}$. Il suffit donc d'appliquer 4.9 à $Y \to S_1$. □

4.11. – *Fin de la démonstration de 1.16.* – Pour finir la démonstration, il reste à traiter le cas des courbes. Plus précisément, il reste à prouver les énoncés (A) et (B) de 3.1 pour K un corps local.

Prouvons d'abord (B). On peut supposer X géométriquement irréductible. On applique 3.8 à $G = \{1\}$ et $X \to S$ et on obtient un groupe fini G' et un diagramme commutatif G'-équivariant

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, "v_U"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[d, "v"] & Y \arrow[r, "g"] & S' \arrow[d, "u"] \\ U \arrow[r, hook, "j"] & X \arrow[rr] & & S \end{tikzcd}$$

avec $(Y, Y - U')$ un couple semi-stable G'-strict sur S', $Y - U' = Y_{s'} \cup H$, où H est la réunion d'un nombre fini de sections de g. Quitte à rétrécir Y, on peut supposer que $X' = Y_{\eta'}$. Notons que v est fini. Le cône de $L_\lambda \to (v_U, \alpha)_* v_U^* L_\lambda$ est à support de dimension 0 (1.7 (a)), où $\alpha : G' \to \{1\}$. D'après 1.18 (iv), $((v_U, \alpha)_* v_U^* L_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible, donc il suffit de vérifier que les $Rj_*(v_U, \alpha)_* v_U^* L_\lambda = (v, \alpha)_* Rj'_* v_U^* L_\lambda$ forment un système E-compatible. Comme $(v, \alpha)_*$ préserve la E-compatibilité, il suffit donc de vérifier que $(Rj'_* L'_\lambda)_{\lambda \in I}$ est E-compatible, où $L'_\lambda = v_U^* L_\lambda$. D'après [29, 5.6 (i)], on a $i_{s'}^* R\Psi_{Y/S'} Rj'_* L'_\lambda \simeq R\Psi_{H/S'} i_{\eta'}^* Rj'_* L'_\lambda$, où $i_{s'} : H \cap Y_{s'} \to Y_{s'}$, $i_{\eta'} : H \cap Y_{\eta'} \to Y_{\eta'}$. Cet isomorphisme est G'-équivariant. Comme $R\Psi_{H/S'} : D_c^b(H_{\eta'}, G', \overline{\mathbb{Q}}_l) \to D_c^b(H_{s'} \times_{s'} \eta', G', \overline{\mathbb{Q}}_l)$ s'identifie à l'identité, il suffit alors d'appliquer 4.10.

Prouvons (A). Plus généralement, prouvons que si G est un groupe fini agissant sur a_X comme dans (A) par des η-automorphismes, et $(L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(X, G, E)$ avec tous les L_λ vérifiant 3.0.1, alors $(Ra_{X!} L_\lambda)_{\lambda \in I} \in D_c^b(\eta_1, G, E)$. On peut supposer X géométriquement irréductible sur η_1. Soit S_1 le normalisé de S dans K_1. L'action de G sur η_1 se prolonge en une action sur S_1. On applique 3.8 à $X \to S_1$ et obtient un homomorphisme surjectif $\alpha : G' \to G$ et un diagramme commutatif G'-équivariant

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "v"] & Y \arrow[r, "g"] & S' \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[rr] & & S_1 \end{tikzcd}$$

avec $(Y, Y - X')$ un couple semi-stable G'-strict sur S' et g propre. Le cône de $L_\lambda \to (v,\alpha)_* v^* L_\lambda$ est à support de dimension 0. Donc il suffit de vérifier que $(Ra_{X!}(v,\alpha)_* v^* L_\lambda)_{\lambda\in I}$ appartient à $D_c^b(\eta_1, G, E)$. Soit $L'_\lambda = v^* L_\lambda$. On a $Ra_{X!}(v,\alpha)_* L'_\lambda = (u_{\eta_1},\alpha)_* Rg_{\eta' *} Rj_{\eta'!} L'_\lambda$,

$$R\Psi_{S'/S'} Rg_{\eta' *} Rj_{\eta'!} L'_\lambda \simeq Rg_{s*} R\Psi_{Y/S'} Rj_{\eta'!} L'_\lambda.$$

Comme $R\Psi_{S'/S'} : D_c^b(\eta', G, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to D_c^b(s' \times_{s'} \eta', G, \overline{\mathbb{Q}_l})$ s'identifie à l'identité, il suffit de vérifier que $(R\Psi_{Y/S'} Rj_{\eta'!} L'_\lambda)_{\lambda\in I}$ appartient à $D_c^b(Y_{s'}, G, E)$. On a le triangle distingué

$$R\Psi_{Y/S'} Rj_{\eta'!} L'_\lambda \to R\Psi_{Y/S'} Rj_{\eta' *} L'_\lambda \to R\Psi_{Y/S'} i_* i^* Rj_{\eta' *} L'_\lambda \to,$$

où $i : Y_{\eta'} - X' \to Y_{\eta'}$. Pour le deuxième terme, on applique 4.10. Pour le troisième, on applique (B), 2.4 et 4.9. On a achevé la démonstration de 1.16. □

4.12. – *Démonstration de 4.8.* – Supposons $\sharp I = 2$. Il suffit de montrer pour tout $d \in \mathbb{N}$:

$(*_d)$ Pour tout $(X, S_1, G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_S)$ et toute famille E-compatible $(L_\lambda)_{\lambda\in I}$ sur X_{η_1}, de support de dimension $\le d$, la famille $(R\Psi_{X/S_1} L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible.

On montre $(*_d)$ par récurrence sur d. On peut supposer $\dim X_\eta \le d$ et X réduit. Si $d = 0$, alors X est quasi-fini sur S_1. Ce cas est déjà traité en 4.9. Soit $d \ge 1$ tel que $(*_{d-1})$ soit vrai. Prouvons $(*_d)$. Soit $w : U \hookrightarrow X_\eta$ un ouvert dense G-stable affine et normal. Comme $(Rw_* w^* L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible (le cas local de 1.16) et le cône M_λ de $L_\lambda \to Rw_* w^* L_\lambda$ est à support dans $Y_\eta - U$ de dimension $\le d-1$, $(R\Psi_{X/S_1} M_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible en vertu de l'hypothèse de récurrence $(*_{d-1})$. Donc il suffit de montrer que $(R\Psi_{X/S_1} Rw_* w^* L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible. Quitte à remplacer U par un sous-schéma ouvert fermé G-stable de U, on peut supposer que G agit transitivement sur $\pi_0(U)$. Soit C une composante connexe de U. Alors $(C, G_d(C)) \to (U, G)$ est cocartésien (1.1.2). D'après 1.5.1, quitte à remplacer U par C, X par l'adhérence de C et G par $G_d(C)$, on peut supposer X irréductible. En appliquant 3.5, quitte à rétrécir U, on peut supposer qu'il existe $(f,\alpha) : (Z, G') \to (U, G)$ faisant de Z un $(\mathrm{Ker}\,\alpha)$-torseur sur U et tel que les $f^* L_\lambda$ vérifient 3.0.1. On applique 3.7 au morphisme composé $Z \xrightarrow{f} U \hookrightarrow X$ et on trouve un diagramme commutatif G'-équivariant

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

où g est propre et j est une immersion ouverte. Notons $L'_\lambda = w^*L_\lambda$. On a $L'_\lambda \simeq R(f,\alpha)_*f^*L'_\lambda$ (1.7 (a)), donc

$$\begin{aligned} R\Psi_{X/S_1}Rw_*L'_\lambda \simeq R\Psi_{X/S_1}Rw_*R(f,\alpha)_*f^*L'_\lambda = R\Psi_{X/S_1}R(g_{\eta_1},\alpha)_*Rj_{\eta_1*}f^*L'_\lambda \\ \simeq R(g_{s_1},\alpha)_*R\Psi_{Y/S_1}Rj_{\eta_1*}f^*L'_\lambda. \end{aligned}$$

Quitte à changer les notations, il suffit de montrer l'assertion suivante

($\dagger_d$) Soient $(X,S_1,G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_S)$ tel que $\dim X_{\eta_1} \leq d$, $w : U \hookrightarrow X_{\eta_1}$ ouvert G-équivariant, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(U,G,E)$ tel que les L_λ vérifient 3.0.1. On a $(R\Psi_{X/S_1}Rw_*L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X_{s_1},G,E)$.

Soit K' une extension finie galoisienne de K_1^G contenant K_1 telle que les composantes irréductibles de $U\otimes_{K_1}K'$ soient géométriquement irréductibles. Soient $u : S' \to S_1$ le normalisé de S_1 dans K', $X' = X\times_{S_1}S'$, $w' = w\times_{S_1}S'$, $G' = G\times_{\mathrm{Gal}(K_1/K_1^G)}\mathrm{Gal}(K'/K_1^G)$, $\alpha\colon G' \to G$ la projection. Alors $R\Psi_{X/S_1}Rw_* \simeq (u_{X_{s_1}},\alpha)_*u^*_{X_{s_1}}R\Psi_{X/S_1}Rw_* \simeq (u_{X_{s_1}},\alpha)_*R\Psi_{X'/S'}Rw'_*u_U^*$. Donc on peut supposer que les composantes irréductibles de U sont géométriquement irréductibles. Comme au début de la démonstration, quitte à remplacer X par X_{red} et à rétrécir U, on peut supposer en plus U normal. Quitte à remplacer U par une composante connexe C, X par l'adhérence de C, et G par $G_d(C)$ (1.1.2, 1.5.1), on peut supposer X intègre et X_{η_1} géométriquement irréductible. Le problème étant local, on peut supposer en plus X séparé (voire affine). Comme $d \geq 1$, on applique 3.8 et on obtient $\beta : G' \to G$ et un diagramme commutatif G'-équivariant

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook, "j"] & U' \arrow[r, hook, "w'"] \arrow[d, "v_{1U}"] \arrow[dd, bend right=60, "v_U"'] & X'_\eta \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "v_1"] \arrow[dr] \arrow[dd, bend right=60, "v"'] & \\
& U\times_{\eta_1}\eta' \arrow[r, hook, "w_{S'}"] \arrow[d, "u_U"] & X_\eta\times_{\eta_1}\eta' \arrow[r, hook] \arrow[d] & X\times_{S_1}S' \arrow[r] \arrow[d, "u_X"] & S' \arrow[d, "u"] \\
& U \arrow[r, hook, "w"] & X_\eta \arrow[r, hook] & X \arrow[r] & S_1
\end{tikzcd}$$

à carrés cartésiens tels que (u,β) et (v,β) soient des altérations galoisiennes, et que $(X', X'-V)$ soit un couple semi-stable G'-strict sur S'. Le V du diagramme est le $X'-Z_d$ de 3.8. Soit $G_{S'} = G'/\operatorname{Ker}\beta\cap\operatorname{Ker}(G' \to \operatorname{Aut}(S'))$. Alors β se factorise en $G' \xrightarrow{\beta_1} G_{S'} \xrightarrow{\alpha} G$, $G_{S'}$ agit sur S' et le morphisme $((v_{1U})_{\mathrm{red}},\beta_1) : (U',G') \to ((U\times_{\eta_1}\eta')_{\mathrm{red}}, G_{S'})$ est une altération galoisienne. D'après 1.7 (a),

$$\begin{aligned} R\Psi_{X/S_1}Rw_*L_\lambda &\simeq (u_{X_s},\alpha)_*(u_{X_s},\alpha)^*R\Psi_{X/S_1}Rw_*L_\lambda \\ &\simeq (u_{X_s},\alpha)_*R\Psi_{X\times_{S_1}S'/S'}Rw_{S'*}(u_U,\alpha)^*L_\lambda, \end{aligned}$$

où u_{X_s} est le changement de base de u_X par $X_s \to X$, et le cône de

$$(u_U,\alpha)^*L_\lambda \to R(v_{1U},\beta_1)_*(v_{1U},\beta_1)^*(u_U,\alpha)^*L_\lambda$$

est à support de dimension $\leq d-1$. Grâce au cas local de 1.16 et l'hypothèse de récurrence $(*_{d-1})$, il suffit donc de voir que les

$$(u_{X_s},\alpha)_* R\Psi_{X\times_{S_1}S'/S'} Rw_{S'*} R(v_{1U},\beta_1)_*(v_{1U},\beta_1)^*(u_U,\alpha)^* L_\lambda \\ \simeq R(v_{X_s},\beta)_* R\Psi_{X'/S'} Rw'_*(v_U,\beta)^* L_\lambda$$

forment un système E-compatible. Ici v_{X_s} est le changement de base de v par $X_s \to X$. Quitte à remplacer $v_U^* L_\lambda$ par $Rj_*j^*v_U^*L_\lambda$, on est donc ramené à montrer $(\dagger_d)$ dans le cas où $(X, X-U)$ est un couple semi-stable G-strict. Ceci est déjà fait en 4.10. □

La définition suivante généralise 1.14.

Définition 4.13. – Soit $(X,G)\in \boldsymbol{Eq}/S$. Un système $(L_\lambda)_{\lambda\in I}\in\prod_{\lambda\in I} D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ est *E-compatible* si $(j^*L_\lambda)_{\lambda\in I}$ et $(i^*L_\lambda)_{\lambda\in I}$ sont E-compatibles, où $j : X_\eta \hookrightarrow X$, $i: X_s\to X$.

Pour $(X,S_1,G)\in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{D}_S)$, le foncteur des cycles évanescents

$$R\Phi_{X/S_1} : D_c^b(X,G,\overline{\mathbb{Q}_l}) \to D_c^b(X_{s_1}\times_{s_1}\eta_1, G, \overline{\mathbb{Q}_l})$$

préserve la E-compatibilité. C'est une conséquence immédiate de 4.8.

Exemple 4.14. – Soient T et T' deux traits henséliens d'égale caractéristique, à corps résiduel $k=\mathbb{F}_{p^f}$, munis d'uniformisantes. Soit (E,I,γ) comme plus haut avec E contenant les racines p-ièmes de l'unité. Soit $\psi : \mathbb{F}_p \to E^\times$ un caractère. Pour $\lambda\in I$, on note $\psi_\lambda = \iota_\lambda\circ\psi : \mathbb{F}_p\to \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}}^\times$. Alors les transformations de Fourier locales [20, 2.3.2.4]

$$\mathcal{F}_\psi^{(0,\infty')}, \mathcal{F}_\psi^{(\infty,0')}, \mathcal{F}_\psi^{(\infty,\infty')} : \mathrm{Mod}_c(\eta_T,\overline{\mathbb{Q}_l}) \to \mathrm{Mod}_c(\eta_{T'},\overline{\mathbb{Q}_l})$$

préservent la E-compatibilité. Plus précisément, pour $(V_\lambda)_{\lambda\in I}\in\prod_{\lambda\in I}\mathrm{Mod}_c(\eta_T,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$, E-compatible, les systèmes

$$(\mathcal{F}_{\psi_\lambda}^{(0,\infty')}V_\lambda)_{\lambda\in I}, (\mathcal{F}_{\psi_\lambda}^{(\infty,0')}V_\lambda)_{\lambda\in I}, (\mathcal{F}_{\psi_\lambda}^{(\infty,\infty')}V_\lambda)_{\lambda\in I}$$

sont E-compatibles. Cela résulte de [*ibid.*, 2.4.2.1], de la stabilité de la E-compatibilité par $R\Phi$, et de 3.4.

La proposition suivante généralise 1.16 et 1.17.

Proposition 4.15. – *La E-compatibilité sur S est stable par les six opérations et la dualité.*

Démonstration. – La stabilité par $\otimes$ et $(f,\alpha)^*$ est triviale. Il suffit de prouver la stabilité par $R(f,\alpha)_*$ et D.

On montre d'abord que pour $(X,G)\in\boldsymbol{Eq}/S$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I}\in D_c^b(X_\eta,G,E)$, on a $(Rj_*L_\lambda)_{\lambda\in I}\in D_c^b(X,G,E)$, où $j: X_\eta\hookrightarrow X$. La suite spectrale de Hochschild-Serre donne

$$E_2^{pq} = H^p(I_\eta, R^q\Psi_{X/S}L_\lambda) \Rightarrow i^*R^{p+q}j_*L_\lambda,$$

où $I_\eta = \mathrm{Ker}(\mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)\to\mathrm{Gal}(\bar s/s))$, $i: X_s\to X$. Comme $(R\Psi_{X/S}L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible (4.8), il suffit de montrer que pour $(Y,G)\in\boldsymbol{Eq}/s$, $(M_\lambda)_{\lambda\in I}\in D_c^b(Y\times_s\eta,G,E)$, on a $(R\Gamma(I_\eta,M_\lambda))_{\lambda\in I}\in D_c^b(Y,G,E)$. Pour cela, on peut supposer que Y est fini sur s, $\sharp I=2$,

$[M_\lambda]=[\mathcal{F}_\lambda]-[\mathcal{G}_\lambda]$, $[\mathcal{F}_\lambda],[\mathcal{G}_\lambda]\in \mathrm{Mod}_c(Y\times_s\eta,G,\overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ et I_η agit sur $\mathcal{F}_\lambda$ et $\mathcal{G}_\lambda$ par un quotient fini Q. Alors

$$([R\Gamma(I_\eta,M_\lambda)])_{\lambda\in I}=\left([\mathcal{F}_\lambda^Q]-[\mathcal{F}_\lambda^Q(-1)]-[\mathcal{G}_\lambda^Q]+[\mathcal{G}_\lambda^Q(-1)]\right)_{\lambda\in I}\in K(Y,G,E).$$

Prouvons la stabilité par $R(f,\alpha)_*$, où $(f,\alpha):(X,G)\to(Y,H)$ est un morphisme dans $\boldsymbol{Eq}/S$. Soit $(L_\lambda)_{\lambda\in I}\in D_c^b(X,G,E)$. On a les triangles distingués

$$i_*Ri^!L_\lambda\to L_\lambda\to Rj_*j^*L_\lambda\to,$$
$$R(fi,\alpha)_*Ri^!L_\lambda\to R(f,\alpha)_*L_\lambda\to R(fj,\alpha)_*j^*L_\lambda\to .$$

Comme $(Rj_*j^*L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible, $(Ri^!L_\lambda)_{\lambda\in I}$ l'est aussi. Il suffit donc d'appliquer 1.16 pour $R(f_s,\alpha)_*$ et $R(f_\eta,\alpha)_*$.

Prouvons la stabilité par D. Soit $(L_\lambda)_{\lambda\in I}\in D_c^b(X,G,E)$. On a le triangle distingué

$$i_*D_{(X_s,G)}(i^*L_\lambda)\to D_{(X,G)}L_\lambda\to Rj_*D_{(X_\eta,G)}j^*L_\lambda\to .$$

Il suffit donc d'appliquer 1.17 pour $D_{(X_s,G)}$ et $D_{(X_\eta,G)}$. □

Remarque 4.16. – Si on remplace les faisceaux usuels par les faisceaux de Weil [9, 1.1.10], on peut définir la E-compatibilité de la même manière. Tous les résultats concernant la E-compatibilité (notamment 4.15, 4.8, 3.10, 3.4) restent valables.

5. Appendice : Indépendance de l sur les champs algébriques

Soient K un corps fini de caractéristique p ou un corps local de caractéristique résiduelle p (1.13), $\eta=\operatorname{Spec}K$. On note $\boldsymbol{Ch}/\eta$ la catégorie des η-champs algébriques [22, 4.1] de type fini. Soit l un nombre premier $\neq p$. Pour $\mathcal{X}\in\boldsymbol{Ch}/\eta$, on note $\mathrm{Mod}_c(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})$ la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceaux constructibles sur le site lisse-étale de $\mathcal{X}$ [*ibid.*, 12.1 (i)]. On dispose, par [18], d'une catégorie triangulée $D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})$ munie d'une t-structure usuelle de cœur $\mathrm{Mod}_c(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})$ et d'un formalisme de six opérations. Pour $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ un morphisme de η-champs algébriques de type fini, on a

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{X}}:D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})^{\mathrm{op}}&\to D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l}),\\ -\otimes-:D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})\times D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})&\to D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l}),\\ R\mathcal{H}om_{\mathcal{X}}(-,-):D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})^{\mathrm{op}}\times D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})&\to D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l}),\\ f^*,Rf^!:D_c^b(\mathcal{Y},\overline{\mathbb{Q}_l})&\to D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l}).\end{aligned}$$

Rappelons que f est dit *relativement de Deligne-Mumford* [22, 7.3.3], si pour tout schéma affine Y et tout morphisme $Y\to\mathcal{Y}$, le produit fibré $Y\times_{\mathcal{Y}}\mathcal{X}$ est un η-champ de Deligne-Mumford. Dans ce cas, on a

$$Rf_*,Rf_!:D_c^b(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})\to D_c^b(\mathcal{Y},\overline{\mathbb{Q}_l}).$$

Si $\mathcal{X}$ est un η-champ de Deligne-Mumford de type fini, $\mathrm{Mod}_c(\mathcal{X},\overline{\mathbb{Q}_l})$ s'identifie à la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceaux constructibles sur le site *étale* de $\mathcal{X}$ [*ibid.*, 12.1 (ii)].

Le foncteur

$$\begin{aligned} F:\boldsymbol{Eq}/\eta&\to\boldsymbol{Ch}/\eta\\ (X,G)&\mapsto[X/G]=[X/G/\eta]\quad [\textit{ibid.}, 2.4.2, 3.4.1]\end{aligned}$$

n'est ni fidèle ni plein. Notons S l'ensemble des flèches $(f,\alpha):(X,G)\to(Y,H)$ dans $\boldsymbol{Eq}/\eta$ telles que G soit isomorphe à $H\times H'$, α s'identifie à la projection $H\times H'\to H$, et f fasse de X un H'-torseur sur Y. Notons $Q:\boldsymbol{Eq}/\eta\to(\boldsymbol{Eq}/\eta)(S^{-1})$ le foncteur de localisation.

PROPOSITION 5.1. – *La catégorie localisée $(\boldsymbol{Eq}/\eta)(S^{-1})$ admet un calcul de fractions à droite au sens faible (i.e. pour toute flèche t dans $(\boldsymbol{Eq}/\eta)(S^{-1})$, il existe des flèches s,t' dans $\boldsymbol{Eq}/\eta$ avec $s\in S$ telles que $t=Q(t')Q(s)^{-1}$). Le foncteur F se factorise en*

$$(\boldsymbol{Eq}/\eta)\xrightarrow{Q}(\boldsymbol{Eq}/\eta)(S^{-1})\xrightarrow{\widetilde{F}}\boldsymbol{Ch}/\eta,$$

où $\widetilde{F}$ est un foncteur plein (i.e. $\widetilde{F}$ envoie $\mathrm{Hom}_{(\boldsymbol{Eq}/\eta)(S^{-1})}(A,B)$ sur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Ch}/\eta}(\widetilde{F}A,\widetilde{F}B)$*, pour tous $A,B\in(\boldsymbol{Eq}/\eta)(S^{-1})$).*

Démonstration. – On vérifie que

(i) Pour tout $(X,G)\in\boldsymbol{Eq}/\eta$, $\mathrm{Id}_{(X,G)}\in S$.

(ii) Pour tous $s_1,s_2\in S$, composables, $s_1\circ s_2\in S$.

(iii) Tout diagramme dans $\boldsymbol{Eq}/\eta$ de la forme

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "s"] \\ {} \arrow[r, "t"'] & {} \end{tikzcd}$$

où $s\in S$, peut être complété en un diagramme commutatif dans $\boldsymbol{Eq}/\eta$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] \arrow[d, "s'"'] & {} \arrow[d, "s"] \\ {} \arrow[r, "t"'] & {} \end{tikzcd}$$

où $s'\in S$.

Donc $(\boldsymbol{Eq}/\eta)(S^{-1})$ admet un calcul de fractions à droite au sens faible.

Pour tout $s\in S$, $F(s)$ est un isomorphisme. Donc F se factorise à travers Q. Montrons que $\widetilde{F}$ est plein. Soient $(X,G),(Y,H)\in\boldsymbol{Eq}/\eta$, $\alpha:[X/G]\to[Y/H]$ dans $\boldsymbol{Ch}/\eta$. Formons le diagramme 2-commutatif de η-champs à carrés 2-cartésiens

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] & {[X/G]} \arrow[d, "\alpha"] \\ Y \arrow[r] & {[Y/H].} \end{tikzcd}$$

Notons $s:(X',G\times H)\to(X,G)$, $t:(X',G\times H)\to(Y,H)$. Alors $s\in S$ et $Ft=\alpha\circ Fs$, i.e. $\alpha=\widetilde{F}(ts^{-1})$. $\square$

Proposition 5.2. – *Pour $(X,G) \in \boldsymbol{Eq}/\eta$, il existe une équivalence de catégories canonique $o_{X,G}$ qui rend* 2*-commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} D^b_c([X/G],\overline{\mathbb{Q}}_l) \arrow[r, "o_{X,G}"] \arrow[dr, "p^*_{X,G}"'] & D^b_c(X,G,\overline{\mathbb{Q}}_l) \arrow[d, "\omega_{X,G}"] \\ & D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}}_l) \end{tikzcd}$$

où $p_{X,G} : X \to [X/G]$ est la projection, $\omega_{X,G}$ est le foncteur oubli de l'action de G. Cette équivalence commute aux six opérations et à la dualité. Plus précisément, on a

(5.2.1) $$o_{X,G} R\mathcal{H}om_{[X/G]}(-,-) \simeq R\mathcal{H}om_{(X,G)}(o_{X,G}-, o_{X,G}-),$$

(5.2.2) $$o_{X,G}(- \otimes -) \simeq (o_{X,G}-) \otimes (o_{X,G}-), \quad o_{X,G} D_{[X/G]} \simeq D_{(X,G)} o_{X,G},$$

et, pour $(f,\alpha) : (X,G) \to (Y,H)$ un morphisme dans $\boldsymbol{Eq}/\eta$, on a

(5.2.3) $$o_{X,G}[f/\alpha]^* \simeq (f,\alpha)^* o_{Y,H},$$

(5.2.4) $$o_{Y,H} R[f/\alpha]_* \simeq R(f,\alpha)_* o_{X,G},$$

et, lorsque f est séparé, on a

(5.2.5) $$o_{X,G} R[f/\alpha]^! \simeq R(f,\alpha)^! o_{Y,H},$$

(5.2.6) $$o_{Y,H} R[f/\alpha]_! \simeq R(f,\alpha)_! o_{X,G}.$$

Démonstration. – Au niveau des topos étales, on a un diagramme 2-commutatif de foncteurs images inverses [22, 12.3.3 et 12.4.6]

$$\begin{tikzcd} {[X/G]^\sim} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & (X,G)^\sim \arrow[d] \\ & X^\sim \end{tikzcd}$$

d'où l'existence de $o_{X,G}$. Les isomorphismes (5.2.1) à (5.2.4) sont clairs. Les isomorphismes (5.2.5) et (5.2.6) s'en déduisent par la dualité. □

Remarque. – Le diagramme

$$\begin{tikzcd} D^b_c([Y/H],\overline{\mathbb{Q}}_l) \arrow[r, "o_{Y,H}"] \arrow[drr, "p^*_{Y,H}"'] \arrow[dd, "{[f/\alpha]^*}"] \arrow[ddr, phantom, "(*)"] & D^b_c(Y,H,\overline{\mathbb{Q}}_l) \arrow[dr, "\omega_{Y,H}"] \arrow[dd, dashed, "{(f,\alpha)^*}"] & \\ & & D^b_c(Y,\overline{\mathbb{Q}}_l) \arrow[dd, "f^*"] \\ D^b_c([X/G],\overline{\mathbb{Q}}_l) \arrow[r, dashed, "o_{X,G}"] \arrow[drr, "p^*_{X,G}"'] & D^b_c(X,G,\overline{\mathbb{Q}}_l) \arrow[dr, dashed, "\omega_{X,G}"] & \\ & & D^b_c(X,\overline{\mathbb{Q}}_l), \end{tikzcd}$$

dont le carré $(*)$ correspond à (5.2.3), est 2-commutatif. Des diagrammes analogues existent pour (5.2.1), (5.2.2) et (5.2.5).

5.3. – En vertu de 5.2, on peut interpréter certains cas de 1.6 et 1.7 en termes des champs. Si $(f,\alpha):(X,G)\to(Y,Q)$ est un morphisme de $\boldsymbol{Eq}/\eta$ vérifiant les hypothèses de 1.7 (b) (α est surjectif et f fait de X un $(\operatorname{Ker}\alpha)$-torseur sur Y), alors $[f/\alpha]:[X/G]\to[Y/Q]$ est un isomorphisme, d'où les conclusions de 1.7 (a) et (b) (les flèches d'adjonction $\mathrm{Id}\to(f,\alpha)_*(f,\alpha)^*$ et $(f,\alpha)^*(f,\alpha)_*\to\mathrm{Id}$ sont des isomorphismes). La proposition 1.6 (cas $S=\eta$) s'interprète comme un théorème de changement de base pour les champs algébriques (cf. [18, § 12]) en vertu de la proposition suivante.

Proposition 5.4. – *Soient* $(f,\alpha):(X,G)\to(Y,H)$, $(g,\beta):(Y',H')\to(Y,H)$ *deux morphismes de même but dans* $\boldsymbol{Eq}/\eta$. *Pour* $r\in H$, *formons le carré cartésien*

(5.4.1)
$$\begin{tikzcd}[column sep=large] (X',G')_r \arrow[rr, "(h,\gamma)_r"] \arrow[d, "(f',\alpha')_r"] & & (X,G) \arrow[d, "(f,\alpha)"] \\ (Y',H') \arrow[r, "(g,\beta)"] & (Y,H) \arrow[r, "T_r"] & (Y,H) \end{tikzcd}$$

où $T_r=(a_r,h\mapsto r^{-1}hr)$ *est comme dans* 1.1. *Le* η*-champ* $[X'/G']_r=F((X',G')_r)$ *ne dépend, à isomorphisme près, que de la double classe* $(\operatorname{Im}\beta)r(\operatorname{Im}\alpha)\subset H$ *et le carré*

(5.4.2)
$$\begin{tikzcd} \coprod_r [X'/G']_r \arrow[r, "{[h/\gamma]_r}"] \arrow[d, "{[f'/\alpha']_r}"'] & {[X/G]} \arrow[d, "{[f/\alpha]}"] \\ {[Y'/H']} \arrow[r, "{[g/\beta]}"] & {[Y/H]} \end{tikzcd}$$

est 2*-cartésien, où* r *parcourt un système de représentants de* $\operatorname{Im}\beta\backslash H/\operatorname{Im}\alpha$.

Démonstration. – Comme $F(T_r)\simeq\mathrm{Id}_{[Y/H]}$, (5.4.2) est 2-commutatif. Il suffit de montrer que pour tout η-schéma affine connexe non vide U, le foncteur

$$\coprod_r([X'/G']_r)_U\xrightarrow{\left(([f'/\alpha']_r)_U,([h/\gamma]_r)_U\right)}[Y'/H']_U\times_{[Y/H]_U}[X/G]_U$$

est une équivalence de catégories et que l'image essentielle de $([X'/G']_r)_U$ ne dépend que de la double classe de r. Construisons un quasi-inverse v du foncteur. Un objet de $[Y'/H']_U\times_{[Y/H]_U}[X/G]_U$ est un triplet (Z,W,k) où $Z\in[Y'/H']_U$, $W\in[X/G]_U$, k est un isomorphisme $[g/\beta]_U(Z)\xrightarrow{\sim}[f,\alpha]_U(W)$ dans $[Y/H]_U$. Rappelons que Z est un H'-torseur sur U muni d'un η-morphisme H'-équivariant $Z\to Y'$ et le morphisme $(Z,H')\to([g/\beta]_U(Z),H)$ est cocartésien (1.1). Notons $\beta_*Z=[g/\beta]_U(Z)$. De même pour W et $[f,\alpha]_U(W):\alpha_*W=[f,\alpha]_U(W)$. L'isomorphisme k est un Y-morphisme H-équivariant. Pour $r\in H$, formons le carré cartésien au-dessus de (5.4.1)

$$\begin{tikzcd} V_r \arrow[rr] \arrow[d] & & W \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & \beta_*Z \arrow[r, "a_r\circ k=k\circ a_r", "\sim"'] & \alpha_*W. \end{tikzcd}$$

Notons $C=\{r\in G\mid V_r\neq\varnothing\}$. Alors $C\in\operatorname{Im}\beta\backslash H/\operatorname{Im}\alpha$. Pour $r\in C$, V_r est un G'-torseur sur U. On pose $v(Z,W,k)=V_r$. □

Soient E, I, γ comme dans 1.13.

DÉFINITION 5.5. – Soient $\mathcal{X} \in \boldsymbol{Ch}/\eta$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$. On dit que $(L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est (E, I, γ)-compatible (ou E-compatible s'il n'y a pas de confusion à craindre) si pour tout morphisme $i : x \to \mathcal{X}$ dans $\boldsymbol{Ch}/\eta$ où x est le spectre d'une extension finie de K, $(i^* L_\lambda)_{\lambda\in I}$ appartient à $D_c^b(x, E)$ (1.14).

Les systèmes E-compatibles sur $\mathcal{X}$ forment une sous-catégorie triangulée de $\prod_{\lambda\in I} D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$, notée $D_c^b(\mathcal{X}, G, E)$. Lorsque $\mathcal{X} = X$ est un schéma, la définition ci-dessus coïncide avec 1.14 : $D_c^b(\mathcal{X}, E) \simeq D_c^b(X, E) = D_c^b(X, \{1\}, E)$. Plus généralement, on a

PROPOSITION 5.6. – *Pour $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/\eta$ et $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D_c^b([X/G], \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I}$ appartient à $D_c^b([X/G], E)$ si et seulement si $(o_{X,G} L_\lambda)_{\lambda\in I}$ appartient à $D_c^b(X, G, E)$.*

Démonstration. – La suffisance est claire. En effet, soient $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D_c^b([X/G], \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ tel que $(o_{X,G} L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X, G, E)$, $i : x \to [X/G]$ dans $\boldsymbol{Ch}/\eta$ où x est le spectre d'une extension finie de K. D'après 5.1, il existe des morphismes $s : (Y, H) \to (x, \{1\})$, $t : (Y, H) \to (X, G)$ dans $\boldsymbol{Eq}/\eta$ vérifiant $s \in S$, tels que $i = F(t)F(s)^{-1}$. D'après 5.2,

$$i^* L_\lambda \simeq F(s)_* F(t)^* L_\lambda \simeq s_* t^* o_{X,G} L_\lambda.$$

Donc $(i^* L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible, en vertu de 1.18 (iv).

Prouvons la nécessité. Soient $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b([X/G], E)$, $x \in |X|$. Alors, d'après 5.2, $i_x^* o_{X,G} L_\lambda \simeq o_{x,G_d(x)} F(i_x)^* L_\lambda$, où $i_x : (x, G_d(x)) \to (X, G)$. Quitte à remplacer (X, G) par $(x, G_d(x))$, L_λ par $F(i_x)^* L_\lambda$, on peut supposer que X est le spectre d'une extension finie de K. On applique alors la construction 2.3 : pour $g \in G$, $m \geq 1$, on a construit

$$(X^{(m,g)}, \{1\}) \xleftarrow{e_{m,g}} (X_{\eta_{n_g m}}, \mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_{m,g}} (X, G),$$

donnant lieu à

$$X^{(m,g)} \underset{\sim}{\xleftarrow{Fe_{m,g}}} [X_{\eta_{n_g m}}/(\mathbb{Z}/n_g\mathbb{Z})] \xrightarrow{Fd_{m,g}} [X/G].$$

D'après 5.2,

$$C_{m,g} o_{X,G} L_\lambda = e_{m,g*} d_{m,g}^* o_{X,G} L_\lambda \simeq (Fe_{m,g})_* (Fd_{m,g})^* L_\lambda \simeq ((Fd_{m,g})(Fe_{m,g})^{-1})^* L_\lambda.$$

Donc on a $(C_{m,g} o_{X,G} L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X^{(m,g)}, E)$. Par conséquent, on a $(o_{X,G} L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X, G, E)$ en vertu de 2.4. □

PROPOSITION 5.7. – *Pour $\mathcal{X} \in \boldsymbol{Ch}/\eta$, $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in \prod_{\lambda\in I} D_c^b(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})$ est E-compatible si et seulement si pour tout morphisme* lisse *$\phi : X \to \mathcal{X}$, où X un schéma affine, on a $(\phi^* L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(X, E)$.*

Démonstration. – La nécessité est claire. La suffisance découle de [22, 6.3]. □

PROPOSITION 5.8. – *La E-compatibilité est stable par la dualité, $\otimes$, $R\mathcal{H}om$, f^*, $Rf^!$, et, lorsque f est relativement de Deligne-Mumford, par Rf_* et $Rf_!$.*

Démonstration. – La stabilité par $\otimes$ et par f^* résulte de la définition. Pour la dualité, on applique 5.7. Soient $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(\mathcal{X}, E)$, X un schéma affine, $\phi : X \to \mathcal{X}$ un morphisme lisse. On peut supposer que ϕ est purement de dimension n. Alors

$$\phi^* D_{\mathcal{X}} L_\lambda \simeq D_X R\phi^! L_\lambda \simeq (D_X \phi^* L_\lambda)(-n)[-2n],$$

donc $(\phi^* D_{\mathcal{X}} L_\lambda)_{\lambda\in I}$ est E-compatible.

Il reste à vérifier la stabilité par $Rf_!$ pour $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ relativement de Deligne-Mumford. D'après le théorème de changement de base [18, 12.5.3], on peut supposer que $\mathcal{Y} = y$ est le spectre d'une extension finie de K. Alors $\mathcal{X}$ est un champ de Deligne-Mumford. D'après [22, 6.1.1], il existe un ouvert non vide $\mathcal{U} \simeq [X/G]$, où X est un schéma affine de type fini sur y, G un groupe fini agissant à droite sur X. Soient $j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{X}$, i l'immersion fermée complémentaire. Alors on a le triangle distingué

$$R(fj)_! j^* L_\lambda \to Rf_! L_\lambda \to R(fi)_! i^* L_\lambda \to .$$

D'après 1.16, 5.1, 5.2 et 5.6, $R(fj)_!$ préserve la E-compatibilité. On conclut par récurrence noethérienne. □

Exemple 5.9. – Soit $\pi : V \to \eta$ un fibré vectoriel de rang constant r. Alors $\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_{m,\eta}$ agit par homothétie sur V et on peut former le η-champ quotient $\bar\pi : \mathcal{V} = [V/\mathbb{G}_m] \to \eta$. Soit $\pi^\vee : V^\vee \to \eta$ le fibré vectoriel dual de π. Comme précédemment, on forme le η-champ quotient $\bar\pi^\vee : \mathcal{V}^\vee = [V^\vee/\mathbb{G}_m] \to \eta$. Alors la transformation de Fourier homogène [21, 1.5] $\mathrm{Four}_{\mathcal{V}/\eta} : D_c^b(\mathcal{V}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to D_c^b(\mathcal{V}^\vee, \overline{\mathbb{Q}_l})$ préserve la E-compatibilité.

En effet, comme dans la démonstration de [*ibid.*, 1.9], il suffit de montrer que pour $(L_\lambda)_{\lambda\in I} \in D_c^b(\mathcal{V}, E)$, les systèmes

$$\mathrm{Four}_{\mathcal{V}/\eta}(i_* i^* L_\lambda) \simeq (\pi^\vee)^* \sigma^* i^* L_\lambda[r],$$
$$i_*^\vee (i^\vee)^* \mathrm{Four}_{\mathcal{V}/\eta}(j_! j^* L_\lambda) \simeq i_*^\vee \sigma^* R\pi_! j_! j^* L_\lambda[r],$$
$$j_!^\vee (j^\vee)^* \mathrm{Four}_{\mathcal{V}/\eta}(j_! j^* L_\lambda) \simeq j_!^\vee R\mathrm{pr}_!^\vee (\mathrm{pr}^* j^* L_\lambda \otimes RJ_* \overline{\mathbb{Q}_{l_\lambda}})[r-1]$$

sont E-compatibles. Ici $i : B(\mathbb{G}_m) \to \mathcal{V}$, $i^\vee : B(\mathbb{G}_m) \to \mathcal{V}^\vee$, $j : \mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathcal{V}$, $j^\vee : \mathbb{P}(V^\vee) \hookrightarrow \mathcal{V}$, $\pi = [\pi/\mathbb{G}_m] : \mathcal{V} \to B(\mathbb{G}_m)$, $\pi^\vee = [\pi^\vee/\mathbb{G}_m] : \mathcal{V}^\vee \to B(\mathbb{G}_m)$, $\sigma : B(\mathbb{G}_m) \to B(\mathbb{G}_m)$ envoie $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}^{\otimes -1}$, $\mathrm{pr}^\vee$ et pr sont les deux projections canoniques de $\mathbb{P}(V^\vee) \times \mathbb{P}(V)$, J est une immersion ouverte [*ibid.*, 1.5]. Ces morphismes étant tous relativement de Deligne-Mumford, voire représentables [22, 3.9], il suffit d'appliquer 5.8.

Pour les champs algébriques de type fini sur un corps fini, on dispose, par [19, § 9], d'un formalisme de poids. On a des analogues de 2.6 et de 2.7.

RÉFÉRENCES

[1] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7)*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969, Lecture Notes in Math. **288, 340**, Springer, 1972–1973.

[2] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964, Lecture Notes in Math. **269, 270, 305**, Springer, 1972–1973.

[3] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961, Documents Mathématiques (Paris) **3**, Soc. Math. France, 2003.

[4] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers, I (Luminy, 1981)*, Astérisque **100**, Soc. Math. France, 1982, 5–171.

[5] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **21**, Springer, 1990.

[6] B. Conrad, Deligne's notes on Nagata compactifications, prépublication, 1997.

[7] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, in *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Lecture Notes in Math. **349**, Springer, 1973, 501–597.

[8] P. Deligne, *Cohomologie étale (SGA $4\frac{1}{2}$)*, Lecture Notes in Math. **569**, Springer, 1977.

[9] P. Deligne, La conjecture de Weil. II, *Publ. Math. I.H.É.S.* **52** (1980), 137–252.

[10] P. Deligne, G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math.* **103** (1976), 103–161.

[11] T. Ekedahl, On the adic formalism, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math. **87**, Birkhäuser, 1990, 197–218.

[12] K. Fujiwara, Independence of l for intersection cohomology (after Gabber), in *Algebraic geometry 2000, Azumino*, Adv. Stud. Pure Math. **36**, Math. Soc. Japan, 2002, 145–151.

[13] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, *Publ. Math. I.H.É.S.* **20, 24, 28, 32** (1964–1967).

[14] L. Illusie, Miscellany on traces in ℓ-adic cohomology : a survey, *Jpn. J. Math.* **1** (2006), 107–136.

[15] A. J. de Jong, Smoothness, semi-stability and alterations, *Publ. Math. I.H.É.S.* **83** (1996), 51–93.

[16] A. J. de Jong, Families of curves and alterations, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **47** (1997), 599–621.

[17] N. M. Katz, Wild ramification and some problems of "independence of l", *Amer. J. Math.* **105** (1983), 201–227.

[18] Y. Laszlo, M. Olsson, The six operations for sheaves on Artin stacks II : adic coefficients, *Publ. Math. I.H.É.S.* **107** (2008), 169–210.

[19] Y. Laszlo, M. Olsson, Perverse t-structure on Artin stacks, *Math. Z.* **261** (2009), 737–748.

[20] G. Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, *Publ. Math. I.H.É.S.* **65** (1987), 131–210.

[21] G. Laumon, Transformation de Fourier homogène, *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), 527–551.

[22] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **39**, Springer, 2000.

[23] Y. Mieda, On l-independence for the étale cohomology of rigid spaces over local fields, *Compos. Math.* **143** (2007), 393–422.

[24] S. Morel, Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel : le cas des variétés de Siegel, *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), 63–100.

[25] T. Ochiai, l-independence of the trace of monodromy, *Math. Ann.* **315** (1999), 321–340.

[26] T. Saito, Weight spectral sequences and independence of l, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), 583–634.

[27] J-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, 5e éd., Hermann, 1998.

[28] I. Vidal, Théorie de Brauer et conducteur de Swan, *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), 349–391.

[29] W. Zheng, Sur la cohomologie des faisceaux l-adiques entiers sur les corps locaux, *Bull. Soc. Math. France* **136** (2008), 465–503.

(Manuscrit reçu le 4 janvier 2008 ;
accepté, après révision, le 1er septembre 2008.)

Weizhe Zheng
Columbia University MC4406
2990 Broadway
New York, NY 10027, USA
E-mail: zheng@math.columbia.edu