ABDELALI ATTIOUI

Version réelle de la conjecture de Ramadanov

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 29, nº 3 (1996), p. 273-285
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1996_4_29_3_273_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 29, 1996, p. 273 à 285.

VERSION RÉELLE DE LA CONJECTURE DE RAMADANOV

PAR ABDELALI ATTIOUI

ABSTRACT. – Let X and Y be two smooth real n-manifolds. To each smooth hypersurface M of their product satisfying a suitable convexity condition, one can associate a real microlocal analogue of the Bergman kernel. The real incidence relation in the real projective space is the real analogue of the complexe sphere.

We give, when n is greater than or equal to 3, an example of a hypersurface M not equivalent to the model, whose Bergman kernel B has no logarithmic term.

In the 2-dimensional case, we show that if the coefficient of the logarithmic term of B vanishes of order 4 near a point of M, then M is equivalent to the model.

RÉSUMÉ. – On considère deux variétés analytiques réelles X et Y de même dimension n et une hypersurface M régulière en position générale dans leur produit, satisfaisant une condition de stricte pseudoconvexité. On associe à M un analogue microlocal réel du noyau de Bergman. La relation d'incidence réelle dans l'espace projectif réel est l'analogue réel de la sphère complexe.

On donne dans le cas où $n \geq 3$ un exemple d'hypersurface M, non équivalente au modèle, dont la singularité du noyau de Bergman ne comporte pas de terme logarithmique. On montre aussi que si $n = 2$ et si le coefficient du terme logarithmique de la singularité du noyau de Bergman associé à M s'annule à l'ordre 4 au voisinage d'un point de M alors, au voisinage de ce point, M est équivalente au modèle.
Je remercie Monsieur L. Boutet De Monvel pour ses précieuses suggestions et ses nombreux encouragements sans lesquels ce travail n'aurait pas pu être accompli.

1. Introduction

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ et $H^2(\Omega)$ le sous-espace de $L^2(\Omega)$ des fonctions holomorphes, de carré sommable dans Ω.

La résolution de $\overline{\partial} f = g$ (*cf.* [20]), si f est orthogonale à $H^2(\Omega)$, suggère l'étude du projecteur orthogonal de Bergman

$$\mathcal{B} : L^2(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega).$$

On montre, grâce à la formule de Cauchy, que ce projecteur a un noyau $B(z, \overline{w})$ défini pour tout $u \in L^2(\Omega)$ par :

$$\mathcal{B}u\ (z) = \int_\Omega B(z, \overline{w})\ u(w).$$

$B(z, \overline{w})$ est uniquement déterminé par cette relation et par le fait qu'il est holomorphe par rapport à z et $\overline{w}$.

Si $(e_\alpha)_\alpha$ est une base orthonormale de $H^2(\Omega)$ alors

$$B(z,\overline{w}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} e_\alpha(z)\overline{e}_\alpha(w).$$

Si on suppose en plus que Ω est strictement pseudoconvexe et si r est une fonction de définition $\mathcal{C}^\infty$ de $\partial\Omega$ telle que $dr \neq 0$ sur $\partial\Omega$, alors la singularité de B possède un développement asymptotique au voisinage de la diagonale de $\partial\Omega \times \partial\Omega$ donné par des formules polynomiales en les dérivées successives de r et de l'inverse du déterminant de Monge-Ampère :

$$J(r) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} r & r_j \\ r_{\overline{k}} & r_{j\overline{k}} \end{pmatrix}$$

où $r_j = \dfrac{\partial r}{\partial z_j}, r_{\overline{k}} = \dfrac{\partial r}{\partial \overline{z}_k}, r_{j\overline{k}} = \dfrac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}$ pour $j,k = 1, ..., n$.

La condition de stricte pseudoconvexité sur Ω implique que $J(r) \neq 0$ sur $\partial\Omega$. Dans ce cas B est intimement lié à la géométrie de $\partial\Omega$ et permet de faire un lien entre l'analyse et la géométrie d'un tel domaine.

On a la formule de transformation suivante, pour un changement de variables F holomorphe entre deux ouverts Ω et $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}^n$:

$$B_\Omega(z,\overline{w}) = B_{\tilde{\Omega}}(F(z), F(\overline{w})) \ \ |\, \det F'(z)\, | \, . \, |\, \det \overline{F'}(\overline{w})\, | \, .$$

Ceci signifie aussi que la forme différentielle

$$B(z,\overline{w}) \prod_{j=1}^{n} dz_j \prod_{j=1}^{n} d\overline{w}_j$$

est un invariant.

Le noyau de Bergman complexe possède un analogue dans le cas réel qu'on définit comme suit :

Soient X et Y deux variétés analytiques réelles, de même dimension n et $\sum$ une hypersurface d'équation $r(x,y) = 0$ dans $X \times Y$, où r est une fonction analytique réelle ($dr \neq 0$ sur $\sum$). On suppose que la projection du fibré conormal $\Lambda = T^\star_\Sigma(X \times Y) \setminus \{0\}$ sur $T^\star X \setminus \{0\}$ ou $T^\star Y \setminus \{0\}$ est un isomorphisme local, ou de manière équivalente que le déterminant de Monge-Ampère

$$J(r) = \det \begin{pmatrix} r & r_x \\ r_y & r_{xy} \end{pmatrix}$$

ne s'annule pas sur Σ. Autrement dit, localement, Λ est un graphe. Ceci équivaut à la condition de non dégénérescence de la forme de Levi dans le cas complexe, sans la condition de positivité.

On associe à $\sum$ la fonction généralisée $K(x,y) = \mathrm{Log}(ir(x,y) + 0)$ dont la singularité dépend uniquement de $\sum$ et non du choix de r.

Désignons par :

$$\Omega_Y : \text{l'espace des formes de degré } n \text{ sur } Y$$
$$\mathcal{O}_X : \text{l'espace des fonctions sur } X$$

et considérons l'opérateur linéaire $\mathcal{K} : \Omega_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ défini par le noyau K :

$$\mathcal{K}f(x) = \int_Y K(x,y)f(y)$$

qui est apparenté à la transformée de Radon.

$\mathcal{K}$ est un opérateur intégral de Fourier et la non nullité du déterminant de Monge-Ampère signifie que la relation canonique de $\mathcal{K}$ est localement inversible.

$$K(x,y) = pf \int_0^{+\infty} e^{-it(r-i0)} \frac{dt}{t} + \text{Cte}$$

est une distribution intégrale de Fourier qui montre clairement que le symbole de $\mathcal{K}$ est elliptique. On en déduit que $\mathcal{K}$ est, microlocalement, inversible.

D'après l'analyse de Kashiwara [19] la singularité B du noyau de Bergman dans le cas complexe est donné par la formule :

$$\int\int B(z,\overline{w})Y_\Omega(w,\overline{w})u(w) = u(z),$$

où Y_Ω est la fonction d'Heaviside associée à Ω.

Les fonctions Y_Σ et $\operatorname{Log}(r \pm i0)$ ayant microlocalement (à un facteur local constant près) la même singularité on en déduit que formellement B et le noyau de l'inverse (microlocal) de l'opérateur de noyau K.

On note encore ici $\mathcal{B}$ l'opérateur intégral de Fourier inverse (microlocal) de $\mathcal{K}$.

Définition. – La singularité B (*i.e.* modulo les formes $\mathcal{C}^\infty$) du noyau de Bergman associé à $\sum$ est celle du noyau du micro-opérateur de Fourier $\mathcal{B}$ de type $\mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_Y$ inverse de $\mathcal{K}$.

L'analogue réel de l'analyse de Boutet-Sjöstrand [7] peut se résumer alors dans le résultat suivant :

Théorème. – *La singularité B du noyau de Bergman est donnée au voisinage de la diagonale de $\sum \times \sum$ par :*

$$B(x,y) = \frac{F(x,y)}{(-ir(x,y)+0)^{n+1}} + G(x,y)\operatorname{Log}(-ir(x,y)+0),$$

où F et G sont des fonctions analytiques réelles.

L'analogie est due au fait que si on substitue x à z et y à $\overline{z}$, alors les formules qui donnent ici B sont les mêmes que dans le cas complexe.

Exemple. – Supposons que $X = Y = S^n$ soit la sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\sum = \{(x,y) \in X \times Y : x.y = 0\}$. $\sum$ est la relation d'incidence $x \in y$ si Y est considéré comme l'ensemble des hyperplans de X.

Au voisinage du vecteur (e_0, e_1), $e_0 = (1, 0, ..., 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, ..., 0)$, on choisit les coordonnées locales :

$$X_j = \frac{x_j}{x_0} \quad (j \neq 0), \qquad Y_j = \frac{y_j}{y_1} \quad (j \neq 1).$$

Dans ce système de coordonnées l'équation de $\sum$ est :

$$R = X_1 + Y_0 + \sum_{j=2}^{n} X_j Y_j = 0$$

qui est l'analogue réel de l'équation du paraboloïde dans $\mathbb{C}^n$, donnée par :

$$r = z_1 + \overline{z}_1 + z.\overline{z} = 0$$

où $z_1, z = (z_2, ..., z_n)$ est un système de coordonnées locales dans $\mathbb{C}^n$.

On a alors :

$$B_{\sum} = \mathrm{Cte}(\partial_x \partial_y \mathrm{Log} R(x, y))^n = \frac{\mathrm{Cte}}{\mathrm{R}^{\mathrm{n+1}}}$$

qui est l'analogue réel de la singularité du noyau de Bergman B du paraboloïde (ou de la sphère $r = 1 - z.\overline{z} = 0$) dans $\mathbb{C}^n$:

$$B = \mathrm{Cte}(\partial_z \partial_{\overline{w}} \mathrm{Log} r(z, \overline{w}))^n = \frac{n!}{\pi^n (1 - z.\overline{w})^{n+1}}$$

On remarque alors que, comme pour le cas complexe, la singularité du noyau Bergman de la variété d'incidence ne comporte pas de terme logarithmique. Il est alors naturel de poser le problème inverse.

Version réelle de la conjecture de Ramadanov

Soit $\sum$ une hypersurface réelle définie comme ci-dessus.

Si le coefficient du terme logarithmique de la singularité du noyau de Bergman associé à $\sum$ s'annule au voisinage d'un point de $\sum$, alors au voisinage de ce point, $\sum$ est équivalente au modèle (=variété d'incidence).

DÉFINITION. – Deux hypersurfaces Σ et Σ' de $X \times Y$ sont dites équivalentes s'il existe des difféomorphismes ϕ de X et ψ de Y tels que $\Sigma' = (\phi \times \psi)\Sigma$; ceci est l'analogue réel de « Σ est biholomorphiquement équivalente à Σ' ». Dans le cas complexe on prend $X = \mathbf{C}^n$, $Y = \bar{X}$ conjugué de X, l'hypersurface étant définie par une équation réelle $r(x, \bar{x}) = 0$.

Dans le cas où $n \geq 3$ on donne le contre-exemple simple suivant qui montre que cette conjecture est, en géneral, fausse :

THÉORÈME 1. – *Supposons l'équation de Σ mise sous la forme :*

$$r = u + v - x.y + x_1^2 y_2^2$$

où $x = (x_1, ..., x_{n-1})$, $x_n = u$, resp. $y = (y_1, ..., y_{n-1})$, $y_n = v$ est un système de coordonnées locales sur X, resp. sur Y. Ici le coefficient de $x_1^2 y_2^2$, qui est un coefficient de la courbure d'E. Cartan [9], est non nul. Donc Σ n'est pas équivalente au modèle.

La singularité de l'analogue du noyau de Bergman associé à $\sum$ est alors donnée, au voisinage de 0*, par :*

$$B = \frac{\mathrm{Cte}}{\mathrm{r}^{\mathrm{n}+1}}$$

qui ne contient pas de terme logarithmique.

Remarque. – Ce contre-exemple ne marche pas dans le cas complexe car, si on substitue z à x et $\overline{z}$ à y, alors l'équation obtenue de l'hypersurface $\sum$ n'est pas réelle.

On donne aussi une réponse positive à cette conjecture dans le cas $n = 2$:

THÉORÈME 2. – *Si $n = 2$ et si le coefficient du terme logarithmique de la singularité de l'analogue du noyau de Bergman associé à $\sum$ s'annule à l'ordre* 4 *au voisinage d'un point de $\sum$ alors au voisinage de ce point, $\sum$ est équivalente au modèle.*

2. Calcul du noyau de Bergman (*cf.* [4])

Soit $x = (x_1, ..., x_n)$, resp. $y = (y_1, ..., y_n)$ un système de coordonnées sur X, resp. sur Y. On posera $x' = (x_1, ..., x_{n-1}), y' = (y_1, ..., y_{n-1})$.

D'après la théorie des opérateurs intégraux de Fourier (*cf.* introduction pour la définition de l'analogue réel de la singularité du noyau de Bergman) et modulo le choix d'un système de coordonnées convenable, B est de la forme (unique) :

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{itr(x,y)}\, b(t,x,y')dt \tag{2.1}$$

où le symbole b est indépendant de y_n et l'intégrale est au sens de la partie principale d'Hadamard.

Ceci conduit à une formule du type phase stationnaire et donne dans le cas $\mathcal{C}^\infty$ un développement asymptotique (une égalité dans le cas analytique) de la singularité du noyau de Bergman au voisinage de la diagonale de $\sum \times \sum$:

$$B(x,y) \sim \mathrm{c}J(r)\left[\frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{r^{n-k+1}} b_k + \sum_{k \geq n+1} \frac{r^{k-n-1}}{(k-n-1)!} b_k \mathrm{Log}\, r\right] \tag{2.2}$$

où c est une constante et les b_k sont des fonctions de x, y' et de l'inverse du déterminant de Monge-Ampère. Elles contiennent des dérivées d'ordre ≥ 2 et $\leq 2k + 2$ de r.

Si les données sont analytiques on peut montrer que la série ci-dessus est convergente.

Pratiquement, la formule (2.2) n'est pas très maniable. Pour faire des calculs nous allons considérer la variante suivante qui a le désavantage de n'être pas invariante et de dépendre du choix de système de coordonnées (x, y) sur $X \times Y$.

On peut toujours choisir un tel système de coordonnées au voisinage de 0 (car $dr(0) \neq 0$) tel que l'hypersurface $\sum$ soit mise sous la forme :

$$r = r_0 + \rho(x, y'),$$

où

$$r_0 = x_n + y_n - x'.y'$$

est l'équation du paraboloïde et ρ est indépendante de y_n et s'annule à l'ordre 2 pour $x' = y' = 0$ $(\rho = O(|\, x'\,|^2|\, y'\,|^2)$. On imposera à ρ de satisfaire en plus les conditions de normalité de Chern-Moser [10], c'est-à-dire $\Delta\rho$ s'annule à l'ordre 3, $\Delta^2\rho$ s'annule à l'ordre 2, $\Delta^3\rho$ s'annule à l'ordre 1 pour $x' = y' = 0$ $\left(\text{où } \Delta = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_j}\right)$.

Si F est une fonction (ou plus généralement une hyperfonction), on peut facilement vérifier qu'on a :

$$F(r) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}\, \rho^k(x, y')\, \partial_{x_n}^k\, F(r_0)$$

et

$$(\partial_{x'}\, \partial_{x_n}^{-1})^\beta\, F(r_0) = (-y')^\beta\, F(r_0). \tag{2.3}$$

Soit alors A l'opérateur microdifférentiel de symbole total :

$$\sigma_A(x, \tau, \xi) = e^{a(x, \tau, \xi)}$$

où

$$a(x, \tau, \xi) = \rho(x, \tau^{-1}\xi)\tau$$

et τ, ξ sont les opérateurs différentiels $\partial_{x_n} = \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \partial_{x'} = \dfrac{\partial}{\partial x'}$.

A possède alors un développement asymptotique de la forme :

$$A \simeq \sum_{\substack{p,q \geq 0 \\ |\alpha|,|\beta| \geq 2}} a_{pq\alpha\beta} x_n^p x'^\alpha (\partial_{x'} \partial_{x_n}^{-1})^\beta \partial_{x_n}^q$$

α, β étant des multi-indices.

On a alors :

$$\operatorname{Log} r = A \operatorname{Log} r_0$$

et plus généralement : $AF(r_0) = F(r)$.

La singularité B du noyau de Bergman est alors donnée par :

$$\begin{aligned} B &\sim \text{Cte}\ {}^tA^{-1}(r_0^{-n-1}) \\ &\sim \sum_{\substack{p \geq 0, q \leq 0 \\ |\alpha|,|\beta| \geq 0}} b_{pq\alpha\beta} x_n^p x'^\alpha y'^\beta r_0^q + \sum_{\substack{p \geq 0, q \geq 0 \\ |\alpha|,|\beta| \geq 0}} \tilde{b}_{pq\alpha\beta} x_n^p x'^\alpha y'^\beta r_0^q \operatorname{Log} r_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

On peut montrer que ces séries convergent si les données sont analytiques.

3. Analogue réel de la forme normale de Chern-Moser [10] (*cf.* [6])

Soient X et Y deux variétés analytiques réelles, de même dimension n et $\sum$ une hypersurface d'équation $r(x,y)=0$ dans $X\times Y$, où r est une fonction analytique réelle ($dr\neq 0$ sur $\sum$). On suppose que la projection du fibré conormal $\Lambda = T^\star_\Sigma(X\times Y)\setminus\{0\}$ sur $T^\star X\setminus\{0\}$ ou $T^\star Y\setminus\{0\}$ est un isomorphisme local, ou de manière équivalente que le déterminant de Monge-Ampère ne s'annule pas sur Σ.

Si (x_0,y_0) est un point de $\sum$, alors il existe deux difféomorphismes Φ de X et Ψ de Y tels que $(\Phi\times\Psi)(x_0,y_0)=0$ et $(\Phi\times\Psi)(\sum)$ est donnée au voisinage de 0 par l'analogue de la forme normale de Chern-Moser :

$$u+v=x.y+\sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 2}\rho_{\alpha\beta}(v)x^\alpha y^\beta \tag{3.1}$$

où $x=(x_1,...,x_{n-1}), x_n=u$, resp. $y=(y_1,...,y_{n-1}), y_n=v$ est un système de coordonnées locales sur X, resp. sur Y; α,β sont des multi-indices et $\rho = \sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 2}\rho_{\alpha\beta}(v)\ x^\alpha y^\beta$ vérifie :

(i) $\Delta\rho$ s'annule à l'ordre 3, $\Delta^2\rho$ s'annule à l'ordre 2 et $\Delta^3\rho$ s'annule à l'ordre 1 pour $x=y=0$ $\left(\text{où } \Delta=\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j\partial y_j}\right)$.

(ii) $\rho_{\alpha\beta}$ est indépendant de l'ordre des indices dans α et β.

Dans le cas complexe on impose en plus à $\rho_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\beta\alpha}$d'être conjugués. Ici on perd cette condition.

ρ est une fonction si r est analytique réelle et c'est seulement un développement asymptotique si r est C^∞.

Si $n=2$ alors $\rho=\sum_{\alpha+\beta\geq 6}\rho_{\alpha\beta}\ (v)\ x^\alpha y^\beta$ avec $\rho_{33}=0$. La réduction de l'hypersurface $\sum$ sous forme normale dépend des conditions initiales suivantes :

a) Le point $(x_0,y_0)\in\sum$ correspondant à l'origine de la forme normale.

b) Le choix de deux bases en dualité dans l'espace tangent à $\sum$.

c) Le choix d'une direction dans l'espace tangent à $\sum$ qui définit une courbe γ (d'équation $x=0, v=0$ en coordonnées normales).

d) Deux paramètres réels fixant la paramétrisation de γ.

Ces conditions sont aussi une interprétation géométrique des conditions initiales des équations différentielles définies dans (i).

4. Groupe d'Heisenberg

L'analogue réel du groupe $PU(n,1)$ des transformations holomorphes de la boule est le groupe $SL(n+1,\mathbb{R})$: groupe des difféomorphismes de $\mathbb{P}_n\times\mathbb{P}_n^*$ qui préservent la relation d'incidence, où $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace projectif réel de dimension n et $\mathbb{P}_n^*$ son dual.

Le groupe d'Heisenberg désigne le sous-groupe H de $SL(n+1,\mathbb{R})$ des transformations homographiques qui fixent l'origine O du modèle (= la relation d'incidence). Un élément h de H est donné par :

$$u \longmapsto U = \frac{\lambda^2 u}{1+a.x+\mu u}; \qquad v \longmapsto V = \frac{\lambda^2 v}{1+b.y+\mu v}$$

$$x \longmapsto X = \frac{\lambda O(x+bu)}{1+a.x+\mu u}; \qquad y \longmapsto Y = \frac{\lambda O(y+av)}{1+b.y+\mu v}$$

avec $2\mu - a.b = 0$, où $\mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^*, a \in \mathbb{R}^{n-1}, b \in \mathbb{R}^{n-1}, O \in \mathcal{O}(n-1)$.

Soit N une forme normale, c'est-à-dire une hypersurface $\sum$ sous la forme (3.1) avec la condition de normalité i. Si $h \in H$, alors

$$hN = \{(X,U;Y,V) = h(x,u;y,v),\ (x,u;y,v) \in N\}$$

peut se mettre sous la forme

$$U + V = X.Y + \rho(V,X,Y)$$

où $\rho(V,X,Y)$ est une fonction analytique réelle qui peut avoir la forme (3.1), mais sans la condition de normalité i. Donc hN n'est pas nécessairement sous forme normale.

Mais il existe un unique changement de coordonnées $\Phi(X,U;Y,V) = (\tilde{X},\tilde{U};\tilde{Y},\tilde{V})$ tel que :

$\tilde{U} - U, \tilde{V} - V$ s'annule à l'ordre 3, $\tilde{X} - X, \tilde{Y} - Y$ s'annule à l'ordre 2 en 0 et $\tilde{N} = \Phi hN$ est une forme normale.

Φh est un élément de H qui opère donc librement sur les formes normales.

5. Analogue réel de la courbure d'E. Cartan

Chern-Moser [10] ont généralisé, pour $n \geq 3$, les travaux d'E. Cartan [9] dans le cas $n = 2$ pour construire une connexion associée à une hypersurface $\sum$ de $\mathbb{C}^n$ strictement pseudoconvexe suffisamment différentiable. On donne ici l'analogue réel de cette construction :

On considère le fibré P des repères au dessus de $\sum$, qui est un fibré principal de groupe H. Un point d'une fibre $P_{(x_0,y_0)}$, si $(x_0,y_0) \in \sum$, est une classe d'équivalence de systèmes de coordonnées : $u, v(\mathrm{mod}.\mathcal{M}^3_{(x_0,y_0)})$, $x, y(\mathrm{mod}.\ \mathcal{M}^2_{(x_0,y_0)})$ telle que $u + v - x.y \in \mathcal{M}^3_{(x_0,y_0)}$ (où $\mathcal{M}_{(x_0,y_0)}$ est l'idéal maximal dans l'algèbre des germes en (x_0,y_0) des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, resp. analytiques réelles sur $\sum$). $\sum$ est alors tangente d'ordre ≥ 3 au paraboloïde.

La connexion (d'E. Cartan) ω est une 1-forme équivariante sur P, à coefficients dans $sl(n+1,\mathbb{R})$ dont les coefficients de la courbure $K = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$, satisfont un certain nombre d'équations qui déterminent de manière unique ω.

L'un de ces coefficients est, pour $n \geq 3$, le tenseur S dont les composantes (au voisinage de 0) sont des fonctions des coefficients de $\rho_{22}(0)$. Si $S \equiv 0$, alors la courbure est nulle et l'hypersurface est localement équivalente au modèle.

Si $n = 2$, alors $S \equiv 0$ et on considère dans ce cas les coefficients Q et T qui sont resp. (à des constantes près) des multiples de $\rho_{42}(0)$ et $\rho_{24}(0)$. Là encore si $Q \equiv 0$ et $T \equiv 0$, alors la courbure est nulle et l'hypersurface est localement équivalente au modèle.

6. Démonstrations des résultats

a) Démonstration du contre-exemple en dimension $n \geq 3$

Posons :

$$a(u, x, \partial_u, \partial_x) = x_1^2 \partial_{x_2}^2 \partial_u^{-1}$$
$$A(u, x, \partial_u, \partial_x) = \exp(a(u, x, \partial_u, \partial_x))$$

Comme x_1, ∂_{x_2} et ∂_u^{-1} commutent, on a alors :

$$^t a(u, x, \partial_u, \partial_x) = -\ a(u, x, \partial_u, \partial_x)$$

et par suite $^t A^{-1} = A$.

Rappelons que l'opérateur A possède la propriété suivante :

$$AF(r_0) = F(r),$$

si $r_0 = u + v - x.y$ est l'équation du modèle et F est une fonction.

D'où :

$$B = \text{ Cte } {}^t A^{-1}(r_0^{-n-1}) = \text{Cte } A(r_0^{-n-1}) = \text{Cte } r^{-n-1}.$$

Donc B ne contient pas de terme logarithmique.

Remarquons que ceci ne fournit pas de contre-exemple dans le cas complexe, car si on substitue z à x et $\overline{z}$ à y, alors l'équation obtenue n'est pas réelle.

b) Étude du cas $n = 2$

Supposons que l'équation de l'hypersurface Σ est mise sous la forme normale :

$$r = u + v - xy + \rho(u, x, y)$$

où $(u, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(v, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et :

(6.1) $$\rho(u, x, y) = \sum_{\substack{p,q \geq 2 \\ p+q \geq 6}} \rho_{pq}(u) x^p y^q$$

est indépendante de v et $\rho_{33} \equiv 0$.

Le raisonnement qui dans le cas complexe (*cf.* [5]) donne

$$\rho_{24}(0).\rho_{42}(0) = 0,$$

a un caractère purement algébrique. Donc si on suppose que le coefficient du terme logarithmique de B dans (2.4) s'annule à l'ordre 2 au voisinage de 0 on obtient encore la même équation dans le cas réel. On ne peut plus affirmer ici que ρ_{24} et ρ_{42} s'annulent tous les deux puisqu'ils ne sont plus conjugués, mais seulement que l'un des deux est nul.

Supposons alors que $\rho_{24} = 0$ dans tout système de coordonnées. En dérivant cette relation (*cf.* [5]), on voit que les coefficients ρ_{pq} d'une forme normale de l'hypersurface $\sum$ au voisinage de 0 sont tous nuls pour $p \geq 2$ et $q \geq 4$:

Faisons subir à notre forme normale (6.1) un changement d'origine réel infiniment petit dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$(0,0,0,0) \longmapsto (0,\tau,0,\xi)$$

avec $\tau^2 = \xi^2 = \tau\xi = 0$.

Autrement dit nous considérons le changement de coordonnées suivant :

$$(u,x) \longmapsto (U = u - \xi x, X = x)$$

$$(v,y) \longmapsto (V = v - \tau y, Y = y).$$

Quand on remet la nouvelle équation de notre hypersurface sous forme normale, on remarque que le nouveau coefficient de X^2Y^4 est:

$$5\rho_{25}\,\tau \;+\; 3\rho_{34}\,\xi.$$

Ce terme doit être aussi nul pour tout $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Donc $\rho_{25} = \rho_{34} = 0$.

On peut alors continuer facilement la récurrence pour montrer que $\rho_{p+1,q} = \rho_{p,q+1} = 0$ si $\rho_{p,q} = 0$.

L'équation normale (6.1) de Σ est donc de la forme :

$$\begin{aligned} r = u + v - xy &+ x^4y^2(\rho_{42}(u) + \rho_{52}(u)x + \rho_{62}(u)x^2 + \ldots) \\ &+ x^4y^3(\rho_{43}(u) + \rho_{53}(u)x + \rho_{63}(u)x^2 + \ldots). \end{aligned}$$

Pour faciliter le calcul des coefficients du terme logarithmique de la singularité du noyau de Bergman B, nous introduisons la notion de poids comme suit :

On attribue à u, v le poids 2, à x, y le poids 1. Ainsi ∂_u, ∂_v sont de poids -2; ∂_x, ∂_y sont de poids -1, etc.; où ∂ désigne la dérivée partielle par rapport à la variable donnée. Donc

$$a(u,x,\partial_u,\partial_x) = \rho(u,x,\partial_x\partial_u^{-1})\partial_u$$

est de poids 4 (ρ est de poids 6).

Les termes en $ux^2 \mathrm{Log}\, r_0$ (où $r_0 = u + v - xy$), $x^2r_0 \mathrm{Log}\, r_0$ et $x^3y \mathrm{Log}\, r_0$ dans le développement asymptotique (2.4) de B, doivent s'annuler si le coefficient du terme logarithmique de B s'annule à l'ordre 4.

Les termes en $ux^2\text{Log}\, r_0$ (resp. $r_0x^2\text{Log}\, r_0$, $yx^3\text{Log}\, r_0$) proviennent des termes en $ux^2\partial_u^{-3}$ (resp. $x^2\partial_u^{-4}$, $x^3\partial_x\partial_u^{-4}$, *cf.* (2.3)) dans ${}^tA^{-1}$ et ils sont tous de poids 10. Comme a est de poids 4, donc a^2 est de poids 8 et a^3 est de poids 12. On peut alors, pour les calculer, se contenter de prendre

$$A \sim 1 + a + \frac{a^2}{2},$$

d'où

$${}^tA^{-1} \sim 1 - {}^ta - \frac{{}^ta^2}{2} + {}^t a \circ {}^t a.$$

Le coefficient non nul de $ux^2\text{Log}\, r_0$ dans $-{}^ta$ est $12\rho_{42}'''(0) - 5!\rho_{53}''(0)$. Dans $\frac{-{}^ta^2}{2}$ et ${}^ta \circ {}^t a$ il n'y a pas de coefficient non nul.

Le coefficient non nul de $r_0x^2\text{Log}\, r_0$ dans $-{}^ta$ est $-12\rho_{42}'''(0) + \frac{3}{2}5!\rho_{53}''(0)$. Dans $\frac{-{}^ta^2}{2}$ c'est $-2 \times 7!\rho_{43}^2(0)$ et dans ${}^ta \circ {}^t a$ c'est $1440\rho_{43}^2(0)$.

Le coefficient non nul de $yx^3\text{Log}\, r_0$ dans $-{}^ta$ est $\frac{3}{2}5!\rho_{53}''(0) - 8\rho_{42}'''(0)$. Dans $\frac{-{}^ta^2}{2}$ c'est $-4 \times 7!\rho_{43}^2(0)$ et dans ${}^ta \circ {}^t a$ c'est $5472\rho_{43}^2(0)$.

Ceci donne trois équations linéaires en $\rho_{42}'''(0)$, $\rho_{53}''(0)$ et $\rho_{43}^2(0)$:

$$\begin{cases} 12\rho_{42}'''(0) - 120\rho_{53}''(0) & = 0 \\ -12\rho_{42}'''(0) + 180\rho_{53}''(0) - 8640\rho_{43}^2(0) & = 0 \\ -8\rho_{42}'''(0) + 180\rho_{53}''(0) - 14.688\rho_{43}^2(0) & = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est non nul et ceci implique que $\rho_{43}^2(0) = 0$, donc $\rho_{43} \equiv 0$.

Ainsi le coefficient ρ_{43} est nul dans tout système de coordonnées normales.

Montrons que ceci implique alors aussi que $\rho_{42} \equiv 0$ (donc que l'hypersurface Σ est équivalente au modèle).

Désignons par H le groupe d'Heisenberg, et soit h un élément de H donné par :

$$u \mapsto u' = \frac{u}{1 + ax + \lambda u} \quad ; \qquad v \mapsto v' = \frac{v}{1 + by + \lambda v}$$

$$x \mapsto x' = \frac{x + bu}{1 + ax + \lambda u} \quad ; \qquad y \mapsto y' = \frac{y + av}{1 + by + \lambda v}$$

avec $2\lambda - ab = 0$.

D'après Chern-Moser [10], il existe un unique repère normal $(\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{y})$ déduit du repère donné par h (*i.e.* $\tilde{x} - x'$, $\tilde{y} - y'$ s'annulent à l'ordre 2, $\tilde{u} - u'$, $\tilde{v} - v'$ s'annulent à l'ordre 3 au point considéré) ; dans ce repère l'équation normale de Σ est de la forme $\tilde{r} = 0$ où les nouveaux coefficients $\tilde{\rho}_{pq}$ sont des polynômes des anciens et des coefficients de h.

D'après les formules de R. Graham [15], le coefficient $\tilde{\rho}_{43}(0)$ de x^4y^3 dans le nouveau repère est donné par :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{43}(0) &= \rho_{43}(0) + \frac{1}{3}a\rho_{42}(0)\\ &= \frac{1}{3}a\rho_{42}(0).\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, ce coefficient doit être aussi nul, ce qui donne $\rho_{42}(0) = 0$ donc $\rho_{42} \equiv 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ATTIOUI, *Version réelle de la conjecture de I. P. Ramadanov* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 317, Série I, 1993, p. 283-287).

[2] M. BEALS, C. FEFFERMAN and R. GROSSMAN, *Strictly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$ (*Bull. A.M.S.*, vol. 8, 1983, p. 125-322).

[3] D. BOICHU and G. COEURÉ, *Sur le noyau de Bergman des domaines de Reinhardt* (*Invent. Math.*, vol. 72, 1983, p. 131-152).

[4] L. BOUTET DE MONVEL, *Complément sur le noyau de Bergman*, Séminaire E.D.P. Ecole Polytechnique, 1985-86, exposé n° 20.

[5] L. BOUTET DE MONVEL, *Le noyau de Bergman en dimension 2 (suite)*, Séminaire E.D.P., Ecole Polytechnique, 1987-88, exposé n° 22.

[6] L. BOUTET DE MONVEL, *Singularity of the Bergman kernel*, Complex Geometry, (Osaka, 1990), 13-29, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 143, Dekker, New York, 1993.

[7] L. BOUTET DE MONVEL and J. SJÖSTRAND, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö* (*Soc. Math. de France, Astérisque*, vol. 34-35, 1976, p. 123-164).

[8] D. BURNS, non publié.

[9] E. CARTAN, *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de deux variables complexes I* (*Ann. Math. Pures Appl.*, (4), vol. 11, 1932, p. 17-90 et *II, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* 2,1, 1932, p. 333-354).

[10] S. S. CHERN and J. MOSER, *Real hypersurfaces in complex manifolds* (*Acta Math.*, vol. 133, 1974, p. 219-271).

[11] C. FEFFERMAN, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvexdomains* (*Invent. Math.*, vol. 26, 1974, p. 1-65).

[12] C. FEFFERMAN, *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel and geometry of pseudoconvex domains* (*Ann. Math.*, vol. 103, 1976, p. 395-416).

[13] C. FEFFERMAN, *Parabolic invariant theory in complex analysis* (*Adv. in Math.*, vol. 31, 1979, p. 131-262).

[14] C. FEFFERMAN and R. GRAHAM, *Conformal invariants* (*Astérisque hors série : E. Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, 1985, p. 95-116).

[15] R. GRAHAM, *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel* in "Complex analysis II" (C. A. BERENSTEIN ed.) (*Springer Lecture Notes in Math*, vol. 1276, 1987, p. 108-135).

[16] R. GRAHAM, *Higher asymptotics of the complex Monge-Ampère equation* (*Compositio Math.*, vol. 64, 1987, p. 133-155).

[17] R. GRAHAM, *Invariant Theory of Parabolic Geometries* (*Lecture Notes in Pure and App. Math.*, vol. 143, Dekker, 1993, p. 53-66).

[18] K. HIRACHI, *The Second Variation of the Bergman Kernel of Ellipsoids*, non publié.

[19] M. KASHIWARA, *Analyse microlocale du noyau de Bergman* (Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, exposé n° 8, Ecole Polytechnique).

[20] N. KERZMAN, *The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary* (*Math. Ann.*, vol. 195, 1972, p. 149-158, Springer-Verlag, 1972).

[21] M. KURANISHI, *Cartan connections and CR structures with non-degenerate Levi-form* (*Astérisque hors série : E. Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, 1985, p. 273-288).

[22] J. LEE and R. MELROSE, *Boundary behaviour of the complex Monge-Ampère equation* (*Acta Math.*, vol. 148, 1982, p. 159-192).

[23] N. NAKAZAWA, *Asymptotic expansion of the Bergman karnel for strictly pseudoconvex complete Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^2$ (*Proc. Japan Acad.*, vol. 66A, 1990, p. 39-41).

[24] I. P. RAMADANOV, *A characterisation of the balls in* $\mathbb{C}^n$ *by means of the Bergman kernel* (*C. R. Acad. Bulgare des Sciences*, vol. 34, n° 7, 1981).

[25] S. WEBSTER, *On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces* (*Invent. Math.*, vol. 43, 1977, p. 53-68).

(Manuscrit reçu le 15 février 1995;
révisé le 1er août 1995.)

A. ATTIOUI
Institut de Mathématiques
(UMR 9994 du C.N.R.S),
Equipe d'Analyse Algébrique,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
Tour 46-00 - 3e ét. - Boîte 172,
4, place Jussieu, 75252, Paris Cedex 05, France.