MICHEL BRION

Sur les modules de covariants

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 26, nº 1 (1993), p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_1_1_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 26, 1993, p. 1 à 21.

SUR LES MODULES DE COVARIANTS

PAR MICHEL BRION

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe réductif d'automorphismes d'une algèbre $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$ graduée, de type fini et normale. Les composantes isotypiques du G-module A sont des modules gradués sur l'algèbre B des invariants de G dans A. On établit des propriétés géométriques de ces B-modules; on en déduit les deux premiers termes du développement asymptotique de la multiplicité dans A_n d'un G-module simple donné, quand $n \to \infty$. Lorsque A est l'algèbre des fonctions polynomiales sur un G-module suffisamment grand, on montre qu'aucun module de covariants n'est libre; de plus, la propriété de Cohen-Macaulay n'est vérifiée que pour un nombre fini de ces modules.

ABSTRACT. — Let G be a reductive group of automorphisms of a normal, finitely generated, graded algebra $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$. The isotypical components of the G-module A are graded modules over the algebra B of G-invariants in A. We establish some geometric properties of these B-modules; we deduce the two first terms in the asymptotic expansion as $n \to \infty$, of the multiplicity in A_n of a given simple G-module. When A is the algebra of polynomial functions on a sufficiently large G-module, we show that no module of covariants is free; moreover, only finitely many modules of covariants are Cohen-Macaulay.

0. Introduction

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et G un groupe réductif (non nécessairement connexe) sur k. On suppose que G opère rationnellement, par automorphismes dans une k-algèbre graduée $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$ de type fini, intègre, et que G préserve la graduation. Le comportement du G-module A_n quand $n \longrightarrow \infty$ a été étudié dans [Br-Di], à la suite de R. Howe qui traitait le cas d'un groupe G fini (*cf.* [Ho]). Un des buts du présent travail est de préciser le résultat de [Br-Di]; en gros, on détermine les deux premiers termes du développement asymptotique de la multiplicité dans A_n d'un G-module simple donné (*cf.* 4.1 Corollaire 1, et 4.4 Remarque 1). Pour cela, on établit des propriétés géométriques des modules de covariants, sur l'algèbre B des invariants de G dans A. On en déduit aussi que si A est l'algèbre des fonctions polynomiales sur un G-module suffisamment grand, alors aucun module de covariants non trivial n'est libre (*cf.* 4.3 Corollaire 1); de plus, la propriété de Cohen-Macaulay n'est vérifiée que pour un nombre fini de ces modules (*cf.* 4.4 Théorème). D'autre part, d'après [VdB1], les modules de covariants "assez petits" sont de Cohen-Macaulay. Mais il n'existe pas (à ma connaissance) de caractérisation des modules de covariants qui sont de Cohen-Macaulay. On propose en 4.4 une condition nécessaire (lorsque A est comme ci-dessus, et que G est semisimple connexe) : le degré de la série de Poincaré du module de covariants doit être majoré par le degré de la série de Poincaré de B. L'auteur ignore si cette condition est suffisante.

Dans la première partie de cet article, on définit les modules de covariants et on en rappelle quelques propriétés (*cf.* aussi [Kr], [Ba-Ha]). Les puissances extérieures de ces modules sont étudiées dans la deuxième partie, qui repose sur des résultats de Luna (*cf.* [Lu1], [Lu2], [Sl]). La troisième partie est consacrée au comportement asymptotique d'un module N, gradué fini sur une k-algèbre B graduée de type fini. On établit un lien (assez technique) entre les deux premiers termes du développement asymptotique de la fonction $n \longrightarrow \dim(N_n)$, convenablement régularisée, et ceux du développement asymptotique en $t = 1$ de la série de Poincaré $F_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dim(N_n)\, t^n$. En posant

$$F_N(t) \cdot F_B(t)^{-1} = r(N) + s(N)\,(1-t) + O((1-t)^2)\ ,$$

on montre que $r(N)$ est le rang de N, et que $s(N)$ ne dépend que de la puissance extérieure d'ordre $r(N)$ du B-module N. Enfin, dans la quatrième partie, on combine les résultats précédents pour déterminer l'invariant numérique s d'un module de covariants, et on en déduit les applications annoncées plus haut.

L'auteur remercie J. Bertin, J. Dixmier, M. Lejeune et G. Schwarz pour des discussions utiles, ainsi que le rapporteur pour ses suggestions.

1. Modules de covariants

1.1. Soient G un groupe réductif sur k, et A une k-algèbre commutative, de type fini, dans laquelle G opère par automorphismes; on suppose de plus que le G-module A est rationnel, et on dit que A est une *G-algèbre.* On pose $B = A^G$; c'est une k-algèbre de type fini (*cf.* [Kr] II.3.2). Pour tout G-module M, rationnel de dimension finie, on pose

$$B(M) = (A \otimes_k M)^G\ .$$

C'est un B-module fini (*cf.* loc. cit.), appelé *module des covariants de type M.*

On note Λ l'ensemble des classes d'isomorphisme de G-modules simples, rationnels de dimension finie. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on choisit un tel module M_λ, et on pose $B(\lambda) := B(M_\lambda)$. On note

$$\Phi_\lambda : B(\lambda) \otimes_k M_\lambda^* \longrightarrow A$$

la restriction à $B(\lambda) \otimes_k M_\lambda^*$ de l'application

$$A \otimes_k M_\lambda \otimes_k M_\lambda^* \longrightarrow A\ :\ a \otimes v \otimes f \longrightarrow a\, f(v)$$

L'énoncé suivant est bien connu (*cf.* [Kr] II.3); on en donne une démonstration pour mémoire.

PROPOSITION. — *L'application $\Phi = \oplus_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda : \oplus_{\lambda\in\Lambda} B(\lambda) \otimes_k M_\lambda^* \longrightarrow A$ est un isomorphisme de B-G-modules.*

On rappelle qu'un B-module N est un *B-G-module* si G opère linéairement dans N, et si $g \cdot (b \cdot n) = b \cdot (g \cdot n)$ pour tous $g \in G$, $b \in B$, $n \in N$.

Preuve. — Il est clair que Φ est un morphisme de B-G-modules ; montrons que Φ est bijective. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application Φ_λ se factorise en

$$\Psi_\lambda : B(\lambda) \otimes_k M_\lambda^* = (A \otimes_k M_\lambda \otimes_k M_\lambda^*)^G \longrightarrow (A \otimes_k k[G])^G$$

suivie de

$$\Phi : (A \otimes_k k[G])^G \longrightarrow A$$

où G opère dans $A \otimes_k M_\lambda \otimes_k M_\lambda^*$ par $g(a \otimes r \otimes f) = ga \otimes gr \otimes f$; l'application Ψ_λ est induite par

$$F_\lambda : M_\lambda \otimes_k M_\lambda^* \longrightarrow k[G] \;,\; r \otimes f \longrightarrow \big(g \longrightarrow f(g^{-1}r)\big) \;.$$

Le groupe G opère dans $A \otimes_k k[G]$ par $g \cdot (a \otimes f)(x) = ga \otimes f(g^{-1}x)$. Enfin, Φ est définie par $\Phi(a \otimes f) = a\ f(e)$ où e est l'élément neutre de G.

Puisque $\oplus_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda : \oplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \otimes_k M_\lambda^* \longrightarrow k[G]$ est un isomorphisme, il en est de même de $\oplus_{\lambda \in \Lambda} \Psi_\lambda$. D'autre part, Φ est un isomorphisme, d'où la proposition.

COROLLAIRE (*cf.* aussi [Ba-Ha] § 4). — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le B-module A est plat.

(ii) Le B-module A est projectif.

(iii) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, le B-module $B(\lambda)$ est projectif.

(iv) Pour tout G-module rationnel M, le B-module $B(M)$ est projectif.

Preuves.

$(iv) \Longleftrightarrow (iii)$ résulte du fait que tout G-module rationnel est semi-simple.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ suit de la proposition, et $(ii) \Rightarrow (i)$ est clair.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Soit $\lambda \in \Lambda$. On déduit de la proposition que le B-module $B(\lambda) \otimes_k M_\lambda^*$ est plat, donc aussi $B(\lambda)$. On conclut grâce au fait que $B(\lambda)$ est un B-module fini.

1.2. Soit X (resp. Y) le spectre de la k-algèbre A (resp. B). L'inclusion de B dans A définit un morphisme $\pi : X \longrightarrow Y$ appelé le *quotient par* G ; on note $Y = X//G$. Pour tout point fermé y de Y, on pose $A(y) := A/yA$. C'est une G-algèbre, formée des fonctions régulières sur $\pi^{-1}(y)$, et $A(y)^G = k$; donc pour tout $\lambda \in \Lambda$, la dimension du k-espace vectoriel $A(y)^G(\lambda) = \big(A(y) \otimes_k M_\lambda\big)^G$ est finie. On la note $m_\lambda(y)$; c'est aussi la multiplicité de M_λ^* dans $A(y)$.

PROPOSITION (*cf.* aussi [Ba-Ha] 3.3). — *On suppose Y irréductible. Soit U l'ouvert (non vide) de Y formé des points où π est plat. Alors $m_\lambda(y)$ est le rang du B-module $B(\lambda)$, pour tout $y \in U$ et tout $\lambda \in \Lambda$.*

Preuve. — Soit $y \in U$. Puisque A est un G-module rationnel, on peut choisir un G-sous-module M de A, tel que l'application canonique $A \longrightarrow A(y)$ se restreint en un isomorphisme de M sur $A(y)$. La multiplication de A définit alors un morphisme de B-G-modules

$$f : B \otimes_k M \longrightarrow A \;,$$

qui induit un isomorphisme de $(B/yB) \otimes_k M$ sur $A/yA = A(y)$. Le B_y-module A_y est plat et somme directe de B_y-modules finis, donc il est libre ; d'où f induit un isomorphisme de $B_y \otimes_k M$ sur A_y comme B_y-G-modules. Par suite, pour tout $\lambda \in \Lambda$, le B_y-module $B(\lambda)_y$ est libre, de rang $m_\lambda(y)$.

COROLLAIRE (*cf.* aussi [Sc1] Prop. 4.6). — *On suppose que X est irréductible, et que l'orbite générique de G dans X est fermée, isomorphe à G/H. Alors, pour tout G-module M, rationnel de dimension finie, le rang du B-module $B(M)$ est égal à* $\dim(M^H)$.

Preuve. — Il existe un ouvert non vide U' de Y tel que pour tout $y \in U'$, la G-algèbre $A(y)$ est isomorphe à $k[G/H]$. D'où

$$\mathrm{rg}_B\, B(M) = \dim(k[G/H] \otimes_k M)^G = \dim(M^H) ,$$

la première égalité résultant de la proposition et du fait que le G-module M est semi-simple.

1.3. Pour tout B-module N, le *dual* de N est le B-module $\mathrm{Hom}_B(N, B)$. Lorsque l'application naturelle de N vers son bidual est un isomorphisme, N est dit *réflexif.*

PROPOSITION. — *Si l'algèbre A est normale, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Tout module de covariants est réflexif.

(ii) L'image par π de tout diviseur irréductible de X, est de codimension 0 ou 1.

(i.e. le morphisme π ne contracte aucun diviseur).

Preuve. — Soit M un G-module rationnel de dimension finie. On note $\mathcal{O}_Y(M)$ le faisceau sur Y associé au B-module $B(M)$. Puisque l'algèbre B est normale et que le B-module $B(M)$ est fini, sans torsion, la réflexivité de $B(M)$ équivaut à la propriété suivante : pour tout ouvert U de Y, et tout fermé Z de U tel que $\mathrm{codim}_U(Z) \geq 2$, la restriction $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y(M)) \longrightarrow \Gamma(U \setminus Z, \mathcal{O}_Y(M))$ est surjective (*cf.* [Ha] Prop. 1.6). Donc d'après 1.1 Proposition, la réflexivité de tout module de covariants équivaut à : pour tous U et Z comme ci-dessus, la restriction $\Gamma(U, \pi_*\mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U \setminus Z, \pi_*\mathcal{O}_X)$ est surjective. Mais puisque A est normale, cette propriété signifie que π ne contracte aucun diviseur.

2. La classe de diviseurs associée à un module de covariants

2.1. On conserve les notations et hypothèses de 1.1, 1.2, et on suppose de plus que l'algèbre A est normale; alors B l'est aussi. On va rappeler quelques notions et résultats de [Lu1] et [Lu2].

Pour tout $y \in Y$, la fibre $\pi^{-1}(y)$ contient une unique orbite fermée de G, qu'on note $T(y)$. Le point y est dit *principal* s'il existe un voisinage V de y tel que $T(y') \simeq T(y)$ pour tout $y' \in V$. On note Y_{pr} l'ensemble des points principaux de Y ; c'est un ouvert dense de Y. On choisit $y \in Y_{pr}$ et $x \in T(y)$, et on note H le groupe d'isotropie de x; la classe de conjugaison de H dans G ne dépend pas de y, et s'appelle *l'isotropie principale*. On note $\mathcal{C}$ l'adhérence de $\pi^{-1}(Y_{pr})^H$ dans X. C'est une sous-variété fermée de X, stable par le normalisateur $N_G(H)$ de H dans G, et appelée *sous-espace de Cartan* de X. On pose $W := N_G(H)/H$. Alors l'application naturelle

$$B = k[X]^G \longrightarrow k[\mathcal{C}]^W$$

est un isomorphisme (*cf.* [Lu2] Cor. 4).

Soient M un G-module rationnel, et r un entier positif. L'application

$$(A \otimes_k M)^r \longrightarrow A \otimes_k \wedge_k^r M$$

$$(a_1 \otimes m_1, \ldots, a_r \otimes m_r) \longrightarrow a_1 \cdots a_r \otimes (m_1 \wedge \cdots \wedge m_r)$$

est un morphisme alterné de A-G-modules, qui définit donc un morphisme de B-modules

$$\alpha_r : \wedge_B^r B(M) \longrightarrow B(\wedge_k^r M) .$$

En composant α_r avec la restriction à $\mathcal{C}$, on obtient

$$\beta_r : \wedge_B^r B(M) \longrightarrow (k[\mathcal{C}] \otimes_k \wedge_k^r M)^W .$$

Via l'isomorphisme de B sur $k[\mathcal{C}]^W$, l'application β_r est un morphisme de B-modules. En outre, puisque H est réductif, il existe un unique supplémentaire H-stable de M^H dans M. D'où une unique projection $p : M \longrightarrow M^H$, commutant à l'action de $N_G(H)$. En composant β_r avec

$$\wedge^r p : \wedge_k^r M \longrightarrow \wedge_k^r(M^H) ,$$

on définit un morphisme de B-modules

$$\gamma_r : \wedge_B^r B(M) \longrightarrow \left(k[\mathcal{C}] \otimes_k \wedge_k^r(M^H)\right)^W = B\left(\wedge_k^r(M^H)\right) .$$

2.2. Soit $G \cdot x$ une orbite fermée de G dans X. D'après [Lu2] Cor. 4, cette orbite rencontre $\mathcal{C}$, donc on peut supposer que $x \in \mathcal{C}$. En particulier, H est contenu dans le groupe d'isotropie G_x. Soit S un slice en x (*cf.* [Lu1], [Sl]) : c'est une sous-variété (localement fermée) affine de X, contenant x et stable par G_x, telle que le morphisme naturel $X' = G \times_{G_x} S \longrightarrow X$ est étale. De plus, si on note Y' le quotient de S par G_x (i.e. de X' par G), et $\Psi : Y' \longrightarrow Y$ le morphisme induit par l'inclusion de S dans X, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} G \times_{G_x} S = & X' & \longrightarrow & X \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est cartésien, et Ψ est étale. On pose $B' := k[Y']$.

LEMME.

(i) Un groupe d'isotropie principale de G_x dans S est H.

(ii) Le sous-espace de Cartan correspondant est $\mathcal{C} \cap S$.

(iii) Pour tout G-module rationnel M, et tout entier positif r, l'application

$$\gamma'_r : \wedge_{B'}^r B'(M) \longrightarrow B'\left(\wedge_k^r(M^H)\right)$$

coïncide avec $B' \otimes_B \gamma_r$ au voisinage de $\pi(x)$.

Preuve. — (*cf.* aussi [Sc2] Th. 11.3 pour (i) et (ii)). De la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}//W & \simeq & X//G \end{array}$$

résulte que $\mathcal{C} \cap \pi^{-1}(\pi(x))$ contient une seule orbite fermée de W ; en particulier, $\mathcal{C} \cap G \cdot x$ contient une seule orbite fermée de W. Mais $\mathcal{C} \cap G \cdot x$ s'injecte dans l'ensemble $(G/G_x)^H$ des points fixes de H dans G/G_x ; en outre, toute orbite de W dans $(G/G_x)^H$ est fermée. Par suite, $\mathcal{C} \cap G \cdot x$ est égale à $W \cdot x \simeq W/W_x$.

Puisque $X' = Y' \times_Y X$, l'isotropie principale de G dans X' est H ; d'où un sous-espace de Cartan $\mathcal{C}'$ de X'. L'image de $\mathcal{C}'$ par le morphisme canonique $X' \longrightarrow G/G_x$ est contenue dans $(G/G_x)^H$, et le quotient $\mathcal{C}'//W$ est irréductible. Par l'argument ci-dessus, on en déduit que $\mathcal{C}' = W \times_{W_x} (\mathcal{C} \cap S)$. Les assertions *(i)* et *(ii)* en résultent aussitôt. Pour *(iii)*, on observe que, quitte à localiser en $\pi(x)$, on a :

$$B' \otimes_B B(M) = B' \otimes_B (A \otimes_k M)^G = (k[X'] \otimes_k M)^G = (k[S] \otimes_k M)^{G_x}$$

puisque $k[X'] = B' \otimes_B A$. D'autre part, puisque $W \times_{W_x} (\mathcal{C} \cap S) = \mathcal{C}' = Y' \times_Y \mathcal{C}$, on a :

$$B' \otimes_B B(\wedge_k^r(M^H)) = B' \otimes_B \left(k[\mathcal{C}] \otimes_k \wedge_k^r(M^H)\right)^W = \left(k[\mathcal{C}'] \otimes_k \wedge_k^r(M^H)\right)^W$$

$$= \left(k[W \times_{W_x} (\mathcal{C} \cap S)] \otimes_k \wedge_k^r(M^H)\right)^W = \left(k[\mathcal{C} \cap S] \otimes_k \wedge_k^r(M^H)\right)^{W_x} = B'(\wedge_k^r(M^H)) .$$

2.3. THÉORÈME. — *Soient A une G-algèbre normale, et $B = A^G$. On suppose que l'orbite générique de G dans $X = \mathrm{Spec}(A)$ est fermée, isomorphe à G/H. Alors pour tout G-module rationnel M, et pour tout entier positif r, le morphisme*

$$\gamma_r : \wedge_B^r B(M) \longrightarrow B(\wedge_k^r(M^H))$$

défini en 2.1, est un isomorphisme en tout point principal. De plus, γ_r est pseudo-injectif.

On rappelle (*cf.* [Bo] VII, § 4, n. 4) qu'un module est dit *pseudo-nul* si son support est de codimension au moins 2. Un morphisme de modules est *pseudo-injectif* si son noyau est pseudo-nul.

Preuve. — Soit $x \in X$ tel que l'orbite $G \cdot x$ est fermée, et que $G_x = H$. Soit S un slice en x : alors H opère trivialement dans S, donc (avec les notations de 2.2)

$$Y' \times_Y \pi : G \times_H S \longrightarrow Y'$$

s'identifie à la projection de $G/H \times S$ sur S. Par suite, π est plat en x, donc les B-modules $B(M)$ et $B(\wedge_k^r(M^H))$ sont projectifs en $\pi(x)$ grâce au corollaire 1.1. Du corollaire 1.2 résulte que les B-modules $\wedge_B^r B(M)$ et $B(\wedge_k^r(M^H))$ sont de même rang. Pour montrer la première assertion, il suffit donc de vérifier que γ_r est surjective en $\pi(x)$. Mais grâce au lemme 2.2 *(iii)*, on peut supposer que $X = G/H \times Y$; alors l'énoncé est évident.

Pour la seconde assertion, puisque les B-modules $B(M)$ et $B(\wedge_k^r(M^H))$ sont finis et sans torsion, il existe un fermé F de Y tel que $\mathrm{codim}_Y(F) \geq 2$ et que $B(M)$, $B(\wedge_k^r(M^H))$ sont projectifs au-dessus de $Y \setminus F$. Par suite, γ_r est injectif au-dessus de $Y \setminus F$, car la source et le but de γ_r sont projectifs de même rang.

REMARQUE .— On peut montrer que même si l'orbite générique de G dans X n'est pas fermée, γ_r est surjective en tout point principal.

2.4. On conserve les hypothèses de 2.3, et on prend $r = \dim(M^H)$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des composantes irréductibles de codimension 1 de $Y \setminus Y_{pr}$. Pour tout $Z \in \mathcal{S}$, on note $\mathcal{O}_{Y,Z}$ l'anneau local de Y en Z. Puisque Y est normale, chaque $\mathcal{O}_{Y,Z}$ est un anneau de valuation discrète; on note v_Z la valuation normalisée correspondante. Pour tout G-module M, rationnel de dimension finie, le $\mathcal{O}_{Y,Z}$-module $\mathcal{O}_{Y,Z}(M)$ est fini et sans torsion, donc libre de rang r. On en choisit une base $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$. Soit Φ un générateur du $\mathcal{O}_{Y,Z}$-module (libre de rang 1) $\mathcal{O}_{Y,Z}\big(\wedge_k^r(M^H)\big)$. Soit f l'élément de $\mathcal{O}_{Y,Z}$ défini par :

$$\gamma_r(\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_r) = f \cdot \Phi \ .$$

On pose $a_Z(M) := v_Z(f)$. C'est un entier non négatif, indépendant des choix de $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, Φ. D'après le théorème 2.3, le conoyau de

$$\gamma_r : \wedge_B^r B(M) \longrightarrow B\big(\wedge_k^r(M^H)\big)$$

est un B-module de torsion, à support dans $Y \setminus Y_{pr}$. L'entier $a_Z(M)$ est la longueur en Z de ce conoyau.

On va préciser la valeur de $a_Z(M)$ *lorsqu'il existe $z \in Z$ tel que $\pi^{-1}(z)$ est formée de points lisses de X;* cette hypothèse est vérifiée si X est lisse, ou s'il existe $z \in Z$ tel que la fibre $\pi^{-1}(z)$ est une seule orbite de G, de dimension $\dim(G/H)$. Il existe alors un ouvert non vide U_Z de Z, un sous-groupe H_Z de G qui contient H, et un H_Z-module N_Z tels que $T(z)$ est isomorphe à G/H_Z pour tout $z \in U_Z$, et que cet isomorphisme identifie le fibré normal à $T(z)$ dans X avec $G \times_{H_Z} N_Z$. On note V_Z l'unique supplémentaire de $N_Z^{H_Z}$ dans N_Z qui est stable par H_Z. On voit facilement que le quotient $V_Z//H_Z$ est de dimension 1, *i.e.* que l'algèbre $k[V_Z]^{H_Z}$ est engendrée par un élément homogène F_Z, dont on note m_Z le degré. Le $k[V_Z]$-module $(k[V_Z] \otimes M)^{H_Z}$ est libre gradué, de rang r. On en choisit une base homogène $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$, et on note δ_i le degré de Ψ_i pour $1 \leq i \leq r$. On note δ le degré d'un générateur homogène Ψ du $k[V_Z]^{H_Z}$-module $k[V_Z]^{H_Z}\big(\wedge_k^r(M^H)\big)$.

PROPOSITION. — *Avec les notations et hypothèses précédentes, on a :*

$$a_Z(M) = m_Z^{-1}(-\delta + \sum_{i=1}^{r} \delta_i) \ .$$

Preuve. — On choisit un point lisse $x \in \pi^{-1}(Z)$ tel que $G \cdot x$ est fermé dans X, que $G_x = H_Z$ et que le H_Z-module $T_x(X)/T_x(G \cdot x)$ est isomorphe à N_Z. Grâce au lemme 2.2 et au bon comportement de la longueur par changement de base étale (*cf.* [Bo] VII, § 4, n. 8), on se ramène au cas où $H_Z = G$. Ensuite, puisque X est lisse en x, il existe un ouvert affine U de X, stable par G et contenant x, et un G-morphisme $\Phi : (U, x) \longrightarrow (N_Z, O)$, tels que $U = \pi^{-1}(\pi(U)$ et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & N_Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi(U) & \longrightarrow & N_Z//G \end{array}$$

est cartésien, avec $\Phi//G$ étale. On peut donc se ramener au cas où $X = N_Z = N_Z^G \times V_Z$. Alors

$$\gamma_r = \gamma_{r,N_Z} : \wedge^r_{k[N_Z]^G}(k[N_Z] \otimes_k M)^G \longrightarrow k[N_Z]^G(\wedge^r_k(M^H))$$

s'identifie à $id_{k[N_Z^G]} \otimes \gamma_{r,V_Z}$. Par suite, on peut supposer que $N_Z^G = \{0\}$. Alors Y (resp. Z) s'identifie à la droite affine (resp. à l'origine). De plus, on a :

$$\gamma_r(\Psi_1 \wedge \cdots \wedge \Psi_r) = c\, F_Z^a\, \Psi$$

avec $c \in k^*$ et $a = a_Z(M)$. D'où, en prenant les degrés :

$$\delta_1 + \cdots + \delta_r = a\, m_Z + \delta\ .$$

2.5. On note $Cl(B)$ le groupe des classes de diviseurs de B. A tout B-module fini N, on associe un élément $c(N)$ de $Cl(B)$, comme dans [Bo] VII, § 4, n. 7. On a les propriétés suivantes, dont les trois premières caractérisent $c(N)$:

(i) Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N \longrightarrow N_2 \longrightarrow 0$$

de B-modules finis, on a :

$$c(N) = c(N_1) + c(N_2)\ .$$

(ii) Si N est pseudo-nul (*cf.* 2.3), alors $c(N) = 0$.

(iii) Pour tout idéal divisoriel I de B, on a : $c(I) = -[I]$ où $[I]$ désigne l'image de I dans $Cl(B)$.

(iv) Pour tout B-module N, fini, sans torsion, de rang r, on a :

$$c(N) = c(\wedge^r_B\, N)\ .$$

Cette notion permet d'assembler les résultats des sections précédentes en le

THÉORÈME. — *Soient A une G-algèbre normale, et $B = A^G$. On suppose que l'orbite générique de G dans $X = \mathrm{Spec}(A)$ est fermée, isomorphe à G/H. Alors pour tout G-module M, rationnel de dimension finie, on a :*

$$c\big(B(M)\big) = c\Big(B\big(\wedge_k^r(M^H)\big)\Big) - \sum_{Z\in\mathcal{S}} a_Z(M)[Z]$$

où r est la dimension de M^H ; l'ensemble $\mathcal{S}$ est formé des composantes irréductibles de codimension 1 de $Y \setminus Y_{pr}$, et les entiers non négatifs $a_Z(M)$ sont définis en 2.4.

Preuve. — D'après le corollaire 1.2, le rang de $B(M)$ est égal à r. De plus, grâce aux propriétés ci-dessus et au théorème 2.3, on a :

$$c\big(B(M)\big) = c\Big(B\big(\wedge_k^r(M^H)\big)\Big) - c(\mathrm{coker}\ \gamma_r)$$

et aussi

$$c(\mathrm{coker}\ \gamma_r) = \sum_{Z\in\mathcal{S}} a_Z(M)[Z]\ .$$

REMARQUES.

1) La classe de diviseurs associée à $B\big(\wedge_k^r(M^H)\big)$ est nulle lorsque le caractère de $N_G(H)$ dans $\wedge_k^r(M^H)$ est trivial. C'est le cas en particulier, lorsque M possède une forme bilinéaire alternée non dégénérée, invariante par G.

2) Les résultats précédents s'étendent sans changement au cas où G opère dans une variété irréductible normale X (non nécessairement affine) avec un quotient $\pi : X \longrightarrow Y$, i.e. un morphisme affine G-invariant tel que l'application naturelle $\mathcal{O}_Y \longrightarrow (\pi_*\mathcal{O}_X)^G$ est un isomorphisme.

3. Série de Poincaré et comportement asymptotique des modules gradués

3.1. Soit $B = \oplus_{n=0}^{\infty} B_n$ une k-algèbre graduée intègre, de type fini, avec $B_0 = k$. Soit $N = \oplus_{n=-\infty}^{\infty} N_n$ un B-module fini gradué. La *série de Poincaré* de N est définie par

$$F_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dim_k(N_n)\, t^n\ .$$

Cette série formelle est le développement à l'origine d'une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbf{Q}$, et on a :

$$F_N(t) = e(N)\,(1-t)^{-d(N)}\big(1 + O(1-t)\big)$$

où $d(N) \in \mathbf{N}$ est la *dimension* de N, et $e(N) \in \mathbf{Q}_{>0}$ est sa *multiplicité*. On pose $d = d(B)$ et $e = e(B)$. On montre facilement (cf. par exemple [Sp] § 6) que

$$F_N(t) = r(N)\, e\,(1-t)^{-d}\big(1 + O(1-t)\big)$$

où $r(N)$ est le rang du B-module N. Par suite, il existe $s(N) \in \mathbf{Q}$ tel que

$$F_N(t) \cdot F_B(t)^{-1} = r(N) + s(N)\,(1-t) + O((1-t)^2)\ .$$

PROPOSITION.

(i) Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

de B-modules gradués finis, on a :

$$s(N) = s(N') + s(N'')\ .$$

(ii) Si N est pseudo-nul (cf. 2.3), alors $s(N) = 0$.

(iii) Pour tout idéal gradué P de B, premier de hauteur 1, on a :

$$s(B/P) = e(B/P)\,e^{-1}\ .$$

(iv) Si B est normale et N sans torsion, de rang r, alors

$$s(N) = s(\wedge_B^r N)\ .$$

(v) Pour tout $q \in \mathbf{Z}$, on a : $s\big(N(q)\big) = s(N) + q\, r(N)$.

On désigne par $N(q)$ le B-module N, gradué par $N(q)_n = N(n+q)$.

Preuves.

(i) résulte du fait que $F_N(t) = F_{N'}(t) + F_{N''}(t)$, et *(v)* de $F_{N(q)}(t) = t^{-q} F_N(t)$.

(ii) et *(iii)* sont immédiats.

Pour montrer *(iv)*, choisissons des éléments $x_1, \ldots, x_r$ de N, homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_r$, et linéairement indépendants sur B. Notons L le sous-module de N qu'ils engendrent ; alors

$$s(L) = \sum_{i=1}^{r} s\big(B(-d_i)\big) = -\sum_{i=1}^{r} d_i\ .$$

En outre, le B-module N/L est de torsion, donc il admet une filtration par des B-modules gradués, avec sous-quotients de la forme $(B/P)(n)$, où P est un idéal premier gradué non nul de B, et $n \in \mathbf{Z}$. A l'aide de *(i)*, *(ii)*, *(v)*, on en déduit que

$$s(N) = s(L) + s(N/L) = -\sum_{i=1}^{r} d_i + \sum_{P} l_P(N/L)\, s(B/P)$$

où la somme porte sur les idéaux premiers gradués de hauteur 1 de B. D'autre part, le morphisme naturel $\wedge_B^r L \longrightarrow \wedge_B^r N$ est pseudo-injectif (*cf.* [Bo] VII, § 4, ex. 12), d'où

$$s(\wedge_B^r N) = s(\wedge_B^r L) + s(\wedge_B^r N / \wedge_B^r L)\ .$$

Or $\wedge_B^r L$ est libre, engendré par $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$; donc $s(\wedge_B^r L) = -\sum_{i=1}^r d_i$. En outre,

$$s(\wedge_B^r N / \wedge_B^r L) = \sum_{P} l_P(\wedge_B^r N / \wedge_B^r L)\, s(B/P)\ .$$

On conclut grâce au fait que

$$l_P(\wedge_B^r N / \wedge_B^r L) = l_P(N/L)$$

pour tout idéal P de B, premier de hauteur 1 (*cf.* loc. cit.).

REMARQUE .— Nous allons donner une interprétation de $s(N)$ à l'aide d'une version graduée de la classe de diviseurs associée à N, définie en 2.5. On note $D_g(B)$ le groupe abélien libre sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des idéaux premiers de hauteur 1, gradués, de B. On note $F_g(B)$ le sous-groupe de $D_g(B)$ engendré par les $\mathrm{div}(b)$, b élément homogène non nul de B. Soient $\tilde{D}_g(B) = D_g(B) \times \mathbf{Z}$, et $\tilde{F}_g(B)$ le sous-groupe de $\tilde{D}_g(B)$ engendré par les couples $\big(\mathrm{div}(b), \deg(b)\big)$. Posons

$$\widetilde{Cl}(B) = \tilde{D}_g(B)/\tilde{F}_g(B) \ .$$

La projection de $\tilde{D}_g(B)$ sur $D_g(B)$ induit un morphisme surjectif de $\widetilde{Cl}(B)$ dans $D_g(B)/F_g(B)$. Ce dernier groupe est canoniquement isomorphe à $Cl(B)$, d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widetilde{Cl}(B) \longrightarrow Cl(B) \longrightarrow 0 \ .$$

Soit N un B-module gradué fini, de rang r. Soit $Bx_1 + \cdots + Bx_r = L \subset N$ comme dans la démonstration de la proposition ci-dessus. Posons

$$\tilde{\chi}(N/L) = \Big(\sum_{p\in\mathcal{P}} l_P(N/L)\,[P],\ \sum_{i=1}^{r}\deg(x_i)\Big) \ .$$

C'est un élément de $\tilde{D}_g(B)$. On montre comme dans [Bo] VII, § 4, n. 7, que l'image de $\tilde{\chi}(N/L)$ dans $\widetilde{Cl}(B)$ ne dépend pas du choix de $x_1, \ldots, x_r$; on la note $-\tilde{c}(N)$. Alors $\tilde{c}(N)$ est un représentant de $c(N) \in Cl(B)$ dans $\tilde{C}l(B)$, et $\tilde{c}$ vérifie les propriétés *(i)* à *(iv)* de 2.5 (preuves analogues à loc. cit.). De plus, on peut montrer que le morphisme

$$S : \tilde{D}_g(B) \longrightarrow \mathbf{Q},\ \ ([P], n) \longrightarrow -e(B/P)e^{-1} + n$$

est nul sur $\tilde{F}_g(B)$; d'où un morphisme $S : \widetilde{Cl}(B) \longrightarrow \mathbf{Q}$ qui vérifie : $S(\tilde{c}(N)) = s(N)$.

3.2. On conserve les notations de 3.1, et on note n_0 le p.g.c.d. des $n \neq 0$ tels que $B_n \neq 0$. Alors, pour tout n assez grand, $B_n \neq 0$ si et seulement si n_0 divise n.

Soit N un B-module fini gradué ; alors

$$F_N(t) = (1-t)^{-d}\Big(\varepsilon(N) + f(N)(1-t) + O\big((1-t)^2)\big)\Big)$$

où $\varepsilon(N) = e\ r(N)$ et $f(N) = f(B)\ r(N) +\ e\ s(N)$ (d'où $\varepsilon(N) = 0$ si N est un module de torsion, et $\varepsilon(N) = e(N)$ sinon). On pose

$$N_{\leq n} = \bigoplus_{p=-\infty}^{n} N_p \ .$$

D'après [Sp], on a :

$$\dim(N_{\leq n}) = \varepsilon(N)\frac{n^d}{d!} + O(n^{d-1}) \ .$$

Cependant, la fonction

$$n \longrightarrow \dim(N_{\leq n}) - \varepsilon(N)\frac{n^d}{d!}$$

est très irrégulière, comme on le voit dans l'exemple suivant : $N = B = k[t]$ où t est une indéterminée de degré $n_0 \geq 2$. On régularise $\dim(N_{\leq n})$ en posant

$$\overline{\dim}(N_{\leq n}) = n_0^{-1} \sum_{p=n}^{n+n_0-1} \dim(N_{\leq p}) \ .$$

PROPOSITION. — *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\overline{\dim}(N_{\leq n}) = \varepsilon(N)\frac{n^d}{d!} + \big(f(N) + \varepsilon(N)\frac{d+n_0}{2}\big)\frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) \ .$$

Preuve. — Comme dans la preuve de la proposition 3.1, on se ramène au cas où $N = (B/P)(q)$ avec P un idéal premier gradué de B, et $q \in \mathbf{Z}$.

Si la hauteur de P est au moins 2, alors $\varepsilon(N) = f(N) = 0$ et d'autre part $\dim(N_{\leq n}) = O(n^{d-2})$, d'où le résultat dans ce cas.

Si P est de hauteur 1, alors $\varepsilon(N) = 0$, $f(N) = e(N)$ et

$$\dim(N_{\leq n}) = e(N)\frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) \ .$$

Enfin, si $P = \{0\}$, et si on suppose le résultat démontré pour le B-module gradué B, alors

$$\begin{aligned}\overline{\dim}(N_{\leq n}) &= \overline{\dim}(B_{\leq n+q}) \\ &= e\ \frac{(n+q)^d}{d!} + \big(f(B) + e\ \frac{d+n_0}{2}\big)\frac{(n+q)^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) \\ &= e\ \frac{n^d}{d!} + \big(e\ q + f(B) + e\ \frac{d+n_0}{2}\big)\frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) \ .\end{aligned}$$

Mais d'autre part, on a : $\varepsilon\big(B(q)\big) = e$ et $f\big(B(q)\big) = e\ q + f(B)$.

On peut donc supposer que $N = B$. Il existe alors des fonctions périodiques $c_0, \ldots, c_{d-1} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Q}$ telles que

$$\dim(B_{nn_0}) = c_0(n) + c_1(n)n + \cdots + c_{d-1}(n)n^{d-1}$$

pour tout n assez grand. De plus, c_{d-1} est constante (*cf.* [Ho] p. 377). On a :

$$\overline{\dim}(B_{\leq n}) = n_0^{-1} \sum_{p=n}^{n+n_0-1} \dim(B_{\leq p}) = n_0^{-1} \sum_{p=n}^{n+n_0-1} \sum_{0 \leq qn_0 \leq p} \dim(B_{qn_0}) \ .$$

Par un calcul élémentaire mais long, on vérifie l'existence de constantes α, β telles que

$$n_0^{-1} \sum_{p=n}^{n+n_0-1} \sum_{0 \leq q n_0 \leq p} q^{d-1} = \alpha \frac{n^d}{d!} + \beta \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) \ .$$

D'autre part, il existe une constante γ telle que

$$n_0^{-1} \sum_{p=n}^{n+n_0-1} \sum_{0 \leq q n_0 \leq p} \big(c_0(q) + c_1(q) q + \cdots + c_{d-2}(q) q^{d-2}\big) = \gamma \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) \ .$$

On a donc des constantes α', β' telles que

$$\overline{\dim}(B_{\leq n}) = \alpha' \frac{n^d}{d!} + (\beta' + \alpha' \frac{d+1}{2}) \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) \ .$$

Par suite, pour $0 \leq t < 1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{\dim}(B_{\leq n})\ t^n = \alpha'(1-t)^{-d-1} + \beta'(1-t)^{-d} + O\big((1-t)^{-d+1}\big) \ .$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{\dim}(B_{\leq n})\ t^n = n_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{p=n}^{n+n_0-1} \dim(B_{\leq p})$$

$$= n_0^{-1} (\sum_{q=0}^{n_0-1} t^{-q}) \cdot (\sum_{p=0}^{\infty} t^p \ \dim(B_{\leq p})) = n_0^{-1} (\sum_{q=0}^{n_0-1} t^{-q}) (1-t)^{-1} F_B(t)$$

(égalités mod. $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$). D'où $\alpha' = e$ et $\beta' = f(B) + e\ (n_0 - 1)/2$.

Par un calcul immédiat, on en déduit le

COROLLAIRE. — *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\overline{\dim}(N_{\leq n}) \cdot \overline{\dim}(B_{\leq n})^{-1} = r(N) + s(N)\ d\ n^{-1} + O(n^{-2}) \ .$$

3.3. On conserve les notations de 3.1, et on suppose de plus que l'algèbre B est de Cohen-Macaulay. On note K son module canonique (*cf.* [He-Ku]). C'est un B-module fini gradué, de rang 1. Pour tout B-module fini gradué N, on pose

$$\tilde{N} = \mathrm{Hom}_B(N, K)$$

(en particulier, $\tilde{B} = K$). Alors $\tilde{N}$ est un B-module fini, gradué. De plus, si N est de Cohen-Macaulay de dimension d, alors il en est de même de $\tilde{N}$, et on a :

$$F_{\tilde{N}}(t) = (-1)^d\ F_N(t^{-1})$$

(*cf.* loc. cit. et [St1]). En particulier, on a : $F_K(t) = (-1)^d\ F_B(t^{-1})$.

LEMME. — *Pour tout B-module fini gradué N, on a :*

$$r(\tilde{N}) = r(N) \text{ et } s(\tilde{N}) + s(N) = r(N)\, s(K)$$

lorsque N est de Cohen-Macaulay, de dimension maximale.

Preuve. — Puisque

$$F_{\tilde{N}}(t) \cdot F_B(t)^{-1} = (-1)^d\, F_N(t^{-1}) \cdot F_B(t)^{-1} = F_N(t^{-1}) \cdot F_B(t^{-1})^{-1} \cdot F_K(t) \cdot F_B(t)^{-1} ,$$

on a :

$$r(\tilde{N}) + s(\tilde{N})(1-t) + O\big((1-t)^2\big)$$
$$= \Big(r(N) + s(N)(1-t^{-1}) + O\big((1-t^{-1})^2\big)\Big)\ \Big(1 + s(K)(1-t) + O\big((1-t)^2\big)\Big)$$

d'où le résultat.

Lorsque l'algèbre B est de Gorenstein, il existe $q \in \mathbf{Z}$ tel que le B-module gradué K est isomorphe à $B(-q)$ (*cf.* [St1] Th. 4.1). Alors

$$F_B(t^{-1}) = (-1)^d\, t^q\, F_B(t)$$

d'où, par un calcul immédiat :

$$F_B(t) = e\,(1-t)^{-d}\ \Big(1 + \frac{q-d}{2}(1-t) + O\big((1-t)^2\big)\Big) .$$

On en déduit que

$$F_N(t) = e\,(1-t)^{-d}\ \Big(r(N) + \big(s(N) + r(N)\frac{q-d}{2}\big)(1-t) + O\big((1-t)^2\big)\Big) ,$$

puis, grâce à la proposition 3.2, que

$$\overline{\dim}(N_{\leq n}) = e\, r(N)\frac{n^d}{d!} + e\ \big(s(N) + r(N)\frac{q+n_0}{2}\big)\frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) .$$

4. Comportement asymptotique des modules de covariants, et propriété de Cohen-Macaulay

4.1. Soient A une G-algèbre graduée normale; alors $B := A^G$ est une algèbre graduée de type fini, normale. Pour tout G-module M, rationnel de dimension finie, le B-module $B(M) = (A \otimes_k M)^G$ est gradué par $B(M)_n = (A_n \otimes_k M)^G$. Nous allons déterminer le nombre rationnel $s(B(M))$ défini en 3.1, sous l'hypothèse que l'orbite générique de G dans $X = \operatorname{Spec}(A)$ est fermée. On note H un groupe d'isotropie générique de G dans X, et on pose $r = \dim(M^H)$. Les graduations de A et de B définissent des actions de k^* dans X et dans $Y = \operatorname{Spec}(B)$. Le sous-espace de Cartan $\mathcal{C}$ et l'ouvert Y_{pr} (définis en 2.1) sont stables par k^*, donc toute composante irréductible de codimension 1 de $Y \setminus Y_{pr}$ l'est aussi. Comme en 2.4, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ces composantes, et on définit pour tout $Z \in \mathcal{S}$ un entier $a_Z(M) \geq 0$. On note P_Z l'idéal de Z dans B, et on pose : $s_Z = e(B/P_Z)\, e(B)^{-1}$.

THÉORÈME. — *Avec les notations de cette section, on a :*

$$s(B(M)) = s\Big(B(\wedge_k^r(M^H))\Big) - \sum_{Z\in\mathcal{S}} a_Z(M)\, s_Z \ .$$

Preuve. — L'application

$$\gamma_r : \wedge_B^r B(M) \longrightarrow B(\wedge_k^r(M^H))$$

définie en 2.1, est un morphisme de B-modules gradués. D'après 2.3, ce morphisme est pseudo-injectif, et toute composante irréductible de codimension 1 du support de son conoyau est dans $\mathcal{S}$. D'après 2.4, la longueur en $Z \in \mathcal{S}$ du conoyau de γ_r est égale à $a_Z(M)$. On conclut grâce à la proposition 3.1.

Le corollaire suivant précise le résultat principal de [Br-Di].

COROLLAIRE 1. — *On conserve les hypothèses du théorème, et on suppose de plus que $N_G(H)$ opère trivialement dans $\wedge_k^r(M^H)$. Alors*

$$\overline{\dim}(B(M)_{\leq n}) \cdot \overline{\dim}(B_{\leq n})^{-1} = r - d(\sum_{Z\in\mathcal{S}} a_Z(M)\, s_Z)\, n^{-1} + O(n^{-2}) \ .$$

Rappelons (*cf.* 3.2) qu'on pose

$$\overline{\dim}(B(M)_{\leq n}) = n_0^{-1} \sum_{p=n}^{n+n_0-1} \sum_{q=0}^{p} \dim\big(B(M)_q\big)$$

où n_0 désigne le p.g.c.d. des $n \neq 0$ tels que $B_n \neq 0$.

Preuve. — Cela résulte aussitôt du corollaire 3.2 et du théorème 4.1.

COROLLAIRE 2. — *On conserve les hypothèses du théorème, et on suppose de plus que l'ensemble $\mathcal{S}$ est vide, que G n'opère pas trivialement dans M, mais que $N_G(H)$ opère trivialement dans $\wedge_k^r(M^H)$. Alors le B-module $B(M)$ n'est pas libre.*

Preuve. — D'après le théorème, on a : $s\big(B(M)\big) = 0$. Mais $B(M)$ ne contient pas d'elément de degré < 0; de plus, puisque G n'opère pas trivialement dans M, le B-module $B(M)$ n'est pas engendré par ses éléments de degré 0. D'après la proposition 3.1 (v), si $B(M)$ est un B-module libre, alors $s\big(B(M)\big) < 0$, contradiction.

4.2. Dans cette section, on suppose que G n'a qu'un nombre fini de caractères multiplicatifs. Soient A une G-algèbre graduée normale, et $X = \mathrm{Spec}(A)$. On suppose que l'ouvert X^s, formé des $x \in X$ dont l'orbite est fermée dans X et dont le groupe d'isotropie est fini, est non vide, et que $X \setminus X^s$ est de codimension au moins 2 dans X. On suppose enfin que le groupe d'isotropie générique de G dans X est trivial.

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe une constante c telle que tout module de covariants qui est de Cohen-Macaulay contient un élément non nul, de degré au plus c.*

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses précédentes, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de G-modules simples M telles que le module des covariants de type M est de Cohen-Macaulay.*

Preuve. — Soit M un G-module rationnel, de dimension r. On utilise les notations de 2.4. Pour tout $Z \in \mathcal{S}$, il existe $z \in Z$ tel que $\pi^{-1}(z)$ est formé de points lisses de X. De plus, le groupe H_Z est fini; comme le quotient $V_Z//H_Z$ est de dimension 1, on a : $\dim(V_Z) = 1$, et H_Z est cyclique d'ordre m_Z. Par suite, on a : $\delta_i \leq m_Z - 1$ pour $1 \leq i \leq r$. D'où

$$a_Z(M) = m_Z^{-1}(-\delta + \sum_{i=1}^{r} \delta_i) \leq r \ .$$

Grâce à 4.1, on a donc :

$$s\big(B(M)\big) = s\big(B(\wedge_k^r M)\big) - \sum_{Z \in \mathcal{S}} a_Z(M)\, s_Z \geq s\big(B(\wedge_k^r M)\big) - r \sum_{Z \in \mathcal{S}} s_Z \geq -c_0\, r$$

où c_0 est une constante; en effet, puisque G n'a qu'un nombre fini de caractères multiplicatifs, le nombre $s\big(B(\wedge_k^r M)\big)$ est borné. Si le B-module $B(M)$ est de Cohen-Macaulay, alors il existe une sous-algèbre graduée régulière R de B telle que le R-module B est fini, et que le R-module $B(M)$ est fini, libre (*cf.* par exemple [Sp] VI, 4.3). Soit $(d_1, \ldots, d_p)$ la suite ordonnée des degrés d'une base homogène de $B(M)$ sur R. Alors

$$F_{B(M)}(t) = (\sum_{i=1}^{p} t^{d_i}) \cdot F_R(t) \ .$$

De même, on a : $F_B(t) = P(t) \cdot F_R(t)$ où $P(t) \in \mathbf{Z}[t]$ et $P(1) \neq 0$. Par suite, on a :

$$(\sum_{i=1}^{p} t^{d_i}) \cdot P(t)^{-1} = F_{B(M)}(t) \cdot F_B(t)^{-1} = r + s\big(B(M)\big)(t-1) + O\big((t-1)^2\big)$$

d'où (valeur en 1) $p\, P(1)^{-1} = r$ et (dérivée en 1)

$$\big((\sum_{i=1}^{p} d_i)\, P(1) - p\, P'(1)\big)\, P(1)^{-2} = -s\big(B(M)\big) \ .$$

On a donc :

$$rp^{-1}(\sum_{i=1}^{p} d_i) - rP'(1)P(1)^{-1} = -s(B(M))$$

d'où

$$p^{-1}(\sum_{i=1}^{p} d_i) \leq P'(1)P(1)^{-1} + c_0 \ .$$

En posant $c = P'(1)P(1)^{-1} + c_0$, on a donc :

$$\min_{1 \leq i \leq p}\, (d_i) \leq c$$

i.e. $B(M)$ contient un élément non nul, de degré au plus c.

4.3. On revient au cas où G est un groupe réductif (non nécessairement connexe). Soit V un G-module rationnel de dimension finie. On note A la G-algèbre formée des fonctions polynomiales sur V, et on pose $B = A^G$. On note $\pi : V \longrightarrow V//G$ le morphisme quotient, dual de l'inclusion de B dans A. Pour tout $\xi \in V//G$, on désigne par G_ξ un groupe d'isotropie de l'unique orbite fermée de G dans $\pi^{-1}(\xi)$; la classe de conjugaison de G_ξ dans G est uniquement déterminée par ξ.

On note V_{pr} l'ensemble des points principaux de V (voir 2.1). On suppose que la codimension de $V \setminus V_{pr}$ est au moins 2, et que de plus, l'orbite générique de G dans V est fermée, avec isotropie finie. Un G-module V qui vérifie ces hypothèses, est appelé *général*.

THÉORÈME. — *Soit V un G-module général. Pour tout G-module M, rationnel de dimension finie, et tout $\xi \in V//G$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le B-module $B(M) = (A \otimes_k M)^G$ est localement libre en ξ.

(ii) Le groupe G_ξ opère trivialement dans M.

Preuve. — Grâce au théorème du slice étale, on se ramène au cas où $\xi = \pi(0)$; alors $(ii) \Rightarrow (i)$ est évident. Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$. Puisque $B(M)$ est un B-module fini gradué, s'il est localement libre en $\pi(0)$, alors il est libre.

En composant l'isomorphisme

$$(A \otimes_k M^*)^G \longrightarrow \left(\mathrm{Hom}_A(A \otimes_k M, A)\right)^G$$

avec la restriction

$$\left(\mathrm{Hom}_A(A \otimes_k M, A)\right)^G \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\left(B(M), B\right) ,$$

on obtient un morphisme de B-modules :

$$\delta : B(M^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\left(B(M), B\right) .$$

On montre comme en 2.3 que δ est un isomorphisme en tout point principal. D'après 1.3, la source et le but de δ sont des B-modules réflexifs ; donc δ est un isomorphisme. Par suite, le B-module $B(M^*)$ est libre, donc aussi $B(M \oplus M^*)$. De plus, le groupe G opère trivialement dans $\wedge_k^{2r}(M \oplus M^*)$ où $r = \dim(M)$. Grâce au corollaire 4.2.2, on conclut que G opère trivialement dans $M \oplus M^*$.

COROLLAIRE 1 (*cf.* [Sh] § 3 lorsque G est fini). — *Si le G-module M n'est pas trivial, alors le B-module $B(M)$ n'est pas libre.*

COROLLAIRE 2. — *Le morphisme quotient est plat en un point ξ de $V//G$ si et seulement si ξ est principal.*

Preuve. — Si ξ est principal, alors tout module de covariants est localement libre en ξ, donc le B_ξ-module A_ξ est libre d'après 1.1. Réciproquement, soit ξ un point non principal ; alors G_ξ n'est pas trivial. Choisissons un G-module rationnel simple M dans lequel G_ξ opère non trivialement. Alors le B_ξ-module $B(M)_\xi$ n'est pas plat, donc A_ξ n'est pas plat sur B_ξ.

REMARQUES.

1) Lorsque G est fini, le G-module V est général si et seulement si l'image de G dans $GL(V)$ ne contient aucune pseudo-réflexion.

2) Lorsque G est semisimple connexe, il n'y a qu'un nombre fini de G-modules simples fidèles qui ne sont pas généraux. Cet énoncé est probablement bien connu; faute de référence, en voici une démonstration.

Soit V un G-module simple fidèle; notons $Z(V)$ le fermé G-stable de V, formé des $v \in V$ dont l'isotropie est infinie. D'après [Kn-Li] Korollar, quitte à exclure un nombre fini de V, on peut supposer que $\dim Z(V) < \dim(V) - \dim(G)$. En particulier, le stabilisateur générique est fini, donc l'orbite générique est fermée. Montrons que V est général. Sinon, on peut trouver une composante Z de codimension 1 de $(V//G) \setminus (V//G)_{pr}$; soient U_Z, H_Z, V_Z comme en 2.4. Alors la réunion Σ_Z des $T(z)$, $z \in U_Z$ est une partie localement fermée de V. De plus, comme la dimension de U_Z est égale à $\dim V//G - 1 = \dim V - \dim G - 1$, la dimension de Σ_Z est :

$$\dim G/H_Z + \dim U_Z = \dim V - \dim H_Z - 1$$

On en déduit que Σ_Z rencontre $V \setminus Z(V)$, c'est-à-dire que H_Z est fini. Alors, comme V_Z/H_Z est de dimension 1, le groupe H_Z est cyclique (et non trivial). Par suite, le quotient $V_Z \to V_Z/H_Z$ n'est pas lisse en 0; donc $\pi : V \to V//G$ n'est lisse en aucun point de $\pi^{-1}(U_Z)$. Mais cela contredit [Kn1] Korollar 1.

4.4. On conserve les notations et hypothèses de 4.3; en particulier, on suppose que V est général. Rappelons que l'algèbre B est de Cohen-Macaulay; de plus, d'après [Kn2] Kor. 2, il existe un caractère χ de G, et $q \in \mathbf{Z}$, tels que le module canonique K de B est isomorphe à $B(k_\chi)(-q)$ comme B-module gradué (on désigne par k_χ le G-module simple de caractère χ).

On peut trouver une sous-algèbre graduée régulière R de B telle que B est finie sur R; alors B est libre sur R. On note δ_R la moyenne des degrés d'une base homogène du R-module B. On note δ le minimum des δ_R pour tous les R possibles; ce nombre mesure la différence entre B et une algèbre de polynômes.

THÉORÈME. — *Soit M un G-module rationnel simple tel que le B-module $B(M)$ est de Cohen-Macaulay. Alors M ou $M^* \otimes_k k_\chi$ apparaît dans une puissance symétrique de V, de degré au plus $\big(\delta - q - s(K)\big)/2$.*

Preuve. — Considérons le B-module

$$B(M^* \otimes_k k_\chi) = (A \otimes_k M^* \otimes_k k_\chi)^G \simeq \big(\mathrm{Hom}_k(M, A \otimes_k k_\chi)\big)^G$$

$$\simeq \big(\mathrm{Hom}_A(A \otimes_k M, A \otimes_k k_\chi)\big)^G .$$

Par restriction aux invariants de G, on a un morphisme (de degré 0) de B-modules gradués

$$B(M^* \otimes_k k_\chi) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\big(B(M), B(k_\chi)\big)$$

d'où un morphisme (de degré 0) de B-modules gradués

$$\varphi : B(M^* \otimes_k k_\chi) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\big(B(M), K(q)\big) = \widetilde{B(M)}(q)$$

avec les notations de 3.3. Comme dans la preuve du théorème 2.3, on montre que φ est un isomorphisme. Par suite, si le B-module $B(M)$ est de Cohen-Macaulay, alors $B(M^* \otimes_k k_\chi)$ l'est aussi, et on a d'après 3.1 et 3.3 :

$$s\Big(B\big(M \oplus (M^* \otimes_k k_\chi)\big)\Big) = s\big(B(M)\big) + s\big(B(M^* \otimes_k k_\chi)\big) = r\big(s(K) + q\big)$$

où r est le rang du B-module $B(M)$, i.e. la dimension de M. Soit R une sous-algèbre graduée régulière de B telle que B est finie sur R. En suivant la preuve du théorème 4.2, on montre que $B\big(M \oplus (M^* \otimes_k k_\chi)\big)$ contient un élément non nul, de degré au plus $\big(\delta_R - q - s(K)\big)/2$.

REMARQUES.

1) Lorsque l'algèbre B est de Gorenstein (i.e. le caractère χ est trivial), on a : $s(K) = -q$, et $2\delta_R$ est le maximum des degrés d'une base homogène de B sur R. En outre, avec les notations de 3.2, on a :

$$\overline{\dim}\big(B(M)_{\leq n}\big) = e\ r\ \frac{n^d}{d!} + e\ r\ \frac{q + n_0}{2}\frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2})\ .$$

2) Les observations qui suivent m'ont été suggérées par le rapporteur.

a) Si $B(M)$ est de Cohen-Macaulay, alors $B(M^* \otimes \chi)$ l'est aussi, et on a :

$$F_{B(M^* \otimes \chi)}(t^{-1}) = (-1)^d\, t^q\, F_{B(M)}(t)$$

Si de plus G n'a pas de caractère non trivial, alors $q = \dim(V)$.

Cela résulte aussitôt de la preuve ci-dessus, et de [Kn2] Satz 3 (ii). Cette remarque permet de simplifier des conditions sur les modules de covariants, considérées par R. Stanley (voir [St2] Property 1 et Property 2, p. 348).

b) On suppose que l'algèbre B est de Gorenstein. Si $B(M)$ est de Cohen-Macaulay, et si le G-module M n'est pas trivial, almors le degré de la fraction rationnelle $F_{B(M)}(t)$ est majoré strictement par le degré de $F_B(t)$.

En effet, avec les notations de la preuve ci-dessus, on a :

$$F_{B(M)}(t) = P_M(t) \cdot F_R(t) \text{ et } F_B(t) = P(t) \cdot F_R(t)$$

où P et P_M sont des polynômes à coefficients entiers positifs. Des égalités

$$F_{B(M^*)}(t^{-1}) = (-1)^d\, t^q\, F_{B(M)}(t) \text{ et } F_B(t^{-1}) = (-1)^d\, t^q\, F_B(t)$$

on déduit que :

$$P_{M^*}(t^{-1}) = P(t^{-1}) \cdot P_M(t) \cdot P(t)^{-1}$$

Mais $P_{M^*}(0) = 0$ et $P(0) = 1$. Par suite, le degré de $P_M(t) \cdot P(t)^{-1}$ est négatif, d'où l'assertion.

Cette inégalité conduit à une autre démonstration du théorème ci-dessus, avec une meilleure borne sur M ; voir l'exemple 2 ci-dessous.

Exemples.

1) Lorsque $G = SL_n(k)$ et que V est la somme directe de $n+1$ copies du G-module k^n, alors B est une k-algèbre graduée de polynômes en $n+1$ variables, d'après la théorie classique des invariants. En outre, l'ensemble V_{pr} est égal à

$$\{(v_1, \ldots, v_{n+1}) \in (k^n)^{n+1} \mid v_1, \ldots, v_{n+1} \text{ engendrent } k^n\} .$$

Par suite, la codimension de $V \setminus V_{pr}$ est égale à 2. Les hypothèses du théorème sont donc vérifiées; de plus, on a : $s(K) = -q$, et $\delta = 0$. Donc aucun module de covariants de type non trivial n'est de Cohen-Macaulay (bien sûr, on peut le vérifier directement).

2) Lorsque $G = SL_2(k)$ et que $V := V_d$ est le G-module formé des polynômes homogènes en deux variables, de degré d, alors V et général si et seulement si $d \geq 5$; de plus, on a : $s(K) = -q$. Tout G-module rationnel simple est auto-dual, et isomorphe à un V_n. Par suite, si le B-module $B(V_n)$ est de Cohen-Macaulay, alors V_n apparaît dans une puissance symétrique de V_d de degré au plus δ, d'où $n \leq d\delta$. Pour d= 5; 6; 7; 8, on a : 2δ= 18; 15; 48; 18 (*cf.* [Di]), d'où $d\delta$= 45; 45; 168; 72. Mais on sait (*cf.* [VdB1]) que $B(V_n)$ est de Cohen-Macaulay pour tout $n \leq s-2$ où

$$s = (d+1)^2/4 \text{ si } d \text{ est impair, et } s = d(d+2)/4 \text{ si } d \text{ est pair} .$$

Pour d= 5; 6; 7; 8, on a : $s-2$=7; 10; 14; 18. De plus, d'après [Br] et [VdB2], le B-module $B(V_n)$ n'est de Cohen-Macaulay pour aucun $n \geq s-2$. La borne de notre théorème n'est donc pas optimale dans ce cas.

Par ailleurs, le degré de $F_{B(V_n)}$ est calculé dans [Br] Proposition 7.5. Il en résulte que $B(V_n)$ est de Cohen-Macaulay si et seulement si le degré de $F_{B(V_n)}(t)$ est majoré par celui de $F_B(t)$. Ce résultat peut-il s'étendre à un groupe semisimple quelconque?

BIBLIOGRAPHIE

[Ba-Ha] H. BASS et W. HABOUSH, *Linearizing certain reductive group actions* (*Trans. A.M.S.*, vol. 292, n° 2, 1985, p. 463-482).

[Bo] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative* (Hermann, Paris, 1965).

[Br-Di] M. BRION et J. DIXMIER, *Comportement asymptotique des covariants* (*Bull. Soc. math. France*, vol. 119, 1991, p. 217-230).

[Br] B. BROER, *On the generating function associated to a system of binary forms* (*Indag. Mathem.*, vol. 1, 1990, p. 15-25).

[Di] J. DIXMIER, *Quelques résultats et conjectures concernant les séries de Poincaré des invariants des formes binaires* (*dans : Séminaire d'algèbre*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1146, 1985, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York).

[Ha] R. HARTSHORNE, *Stable reflexive sheaves* (*Math. Ann.*, vol. 254, 1980, p. 121-176).

[He-Ku] J. HERZOG et E. KUNZ, *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay Rings* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 238, 1971, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York).

[Ho] R. HOWE, *Asymptotics of dimensions of invariants for finite groups* (*J. of Alg.*, vol. 122, 1989, p. 374-379).

[Kn1] F. KNOP, *Über die Glattheit von Quotientenabbildungen* (*Manuscripta Math.*, vol. 56, 1986, p. 419-427).

[Kn2] F. KNOP, *Der kanonische Modul eines Invariantenringes* (*J. of Alg.*, vol. 127, 1989, p. 40-54).

[Kn-Li] F. KNOP et P. LITTELMANN, *Der Grad erzeugender Funktionen von Invariantenringen* (*Math. Z.*, vol. 196, 1987, p. 211-229).

[Kr] H. KRAFT, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie* (Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1985).

[Lu1] D. LUNA, *Slices étales* (*Bull. Soc. math. France*, *Mémoire*, vol. 33, 1973, p. 81-105).

[Lu2] D. LUNA, *Adhérences d'orbites et invariants* (*Invent. Math.*, vol. 29, 1975, p. 231-238).

[Sc1] G. SCHWARZ, *Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants* (*Invent. Math.*, vol. 49, 1978, p. 167-191).

[Sc2] G. SCHWARZ, *Lifting smooth homotopies of orbit spaces* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 51, 1980, p. 37-135).

[Sh] O. V. SHCHVARTSMAN, *Some remarks on the Chevalley theorem* (*Funct. Anal. and its Appl.*, vol. 16, n° 3, 1982, p. 237-238).

[Sl] P. SLODOWY, *Der Scheibensatz für algebraische Transformationsgruppen* (*dans* Kraft, Slodowy, Springer *éd.: Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 1989).

[Sp] T. SPRINGER, *Aktionen reduktiver Gruppen* (*dans* Kraft, Slodowy) Springer *éd.: Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 1989).

[St1] R. P. STANLEY, *Hilbert functions of graded algebras* (*Adv. Math.*, vol. 28, 1978, p. 57-83).

[St2] R. P. STANLEY, *Combinatorics and invariant theory* (*dans* D. K. RAY-CHAUDHURI *éd.: Relations between combinatorics and other parts of mathematics*, *Proc. in Symp. in Pure Math.*, vol. 34, 1979, p. 345-356).

[VdB1] M. VAN DEN BERGH, *Cohen-Macaulayness of modules of covariants* (*Invent. Math.*, vol. 106, 1991, p. 389-410).

[VdB2] M. VAN DEN BERGH, *A converse of Stanley's conjecture for* $SL(2)$ (preprint, 1991, Antwerpen).

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1991;
révisé le 11 septembre 1992).

M. BRION,
Institut Fourier,
Laboratoire de Mathématiques,
Université de Grenoble-I.