ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

B. COLBOIS
G. COURTOIS

Convergence de variétés et convergence du spectre du laplacien

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 24, nº 4 (1991), p. 507-518
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_4_507_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 24, 1991, p. 507 à 518.

CONVERGENCE DE VARIÉTÉS ET CONVERGENCE DU SPECTRE DU LAPLACIEN

PAR B. COLBOIS (1) ET G. COURTOIS (2)

0. Introduction

Considérons une suite convergente (M_i) de variétés riemanniennes compactes.

Selon la définition que l'on donne du mot « convergence » et les restrictions géométriques que l'on impose sur les éléments de la suite, il est possible de relier le spectre du Laplacien de la suite (M_i) avec le spectre de la limite (*voir* par exemple [RT], [COL], [COUR], [FU], [C-C1], [C-C2] et l'introduction du chapitre 9 de [CH]).

Notre but est ici de généraliser [C-C1] et [C-C2]. Dans [C-C1] nous examinions le cas d'une suite de surfaces de Riemann convergeant vers le bord de l'espace de Teichmüller et dans [C-C2] le cas d'une suite de variétés hyperboliques compactes de dimension 3 convergeant vers une variété hyperbolique de volume fini (*cf.* [TH], [GR]). Alors que dans [C-C1] et [C-C2] nous utilisions la connaissance explicite de la métrique pour étudier les fonctions propres, nous considérons ici une situation générale sans hypothèse géométrique autre que la convergence qui sera précisée plus bas. En particulier, nous ne prenons en compte aucune borne sur la courbure. Notons cependant que les situations décrites dans [C-C1] et [C-C2] restent les exemples de base (*cf.* § 3).

Cette question nous a été suggérée sous cette forme par P. Pansu que nous avons plaisir à remercier ici.

Dans [C-C1] et [C-C2] la notion de convergence sous-jacente est celle de Lipschitz pointée que nous rappelons ici.

DÉFINITION 0.1. — Une suite de variétés riemanniennes pointées (M_i, p_i) converge vers la variété pointée (M, p) si :

$\forall R>0$, $\forall \varepsilon>0$, $B_{M_i}(p_i, R)$ et $B_M(p, R)$ sont quasi isométriques de rapport $1+\varepsilon$ pour i assez grand, où $B_{M_i}(p_i, R)$ [resp. $B_M(p, R)$)] est la boule de centre p_i et de rayon R dans M_i (resp. de centre p et de rayon R dans M).

(1) Le premier auteur était soutenu par le fond national suisse de la recherche scientifique.

(2) Le second auteur était partiellement soutenu par le contrat C.E.E. GADGET n° SC1-0105-C.

Par quasi-isométrie de rapport $1+\varepsilon$, nous entendons un difféomorphisme dont la dérivée est une isométrie à ε près en chaque point. Des exemples sont donnés au paragraphe 1 (pour des développements *voir* [GLP]).

A partir de maintenant, « convergence » d'une suite de variétés signifiera convergence au sens de la définition 0.1. En particulier, la limite est supposée être une variété complète.

Remarque 0.2. — Lorsque M_i et M sont compactes, la convergence de (M_i, p_i) vers (M, p) entraîne la convergence du spectre et des fonctions propres du laplacien, comme on le voit en utilisant le principe du minimax.

On considèrera dans ce qui suit une suite (M_i, p_i) de variétés compactes convergeant vers une variété complète non compacte et nous restreignons notre étude aux valeurs propres inférieures à la borne inférieure du spectre essentiel de M (*cf.* [D-L]).

Nous donnerons des exemples de suites convergentes $(M_i, p_i) \to (M, p)$ où le spectre converge et d'autres exemples où il ne converge pas. Ces derniers permettent de mettre en évidence une condition nécessaire (et en fait suffisante) portant sur les « parties fuyantes » de la suite (M_i, p_i) pour avoir la convergence du spectre vers celui de la limite.

DÉFINITION 0.3. — Soit une suite (M_i, p_i) qui converge vers (M, p). Une suite de parties Ω_i de M_i sera dite « suite de parties fuyantes » si $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i)$ où R_i est une suite croissante vers $+\infty$ telle que $B_{M_i}(p_i, R_i)$ et $B_M(p, R_i)$ sont quasi isométriques de rapport $1+\varepsilon_i$ avec $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$.

On note $A = \inf \operatorname{ess} \operatorname{sp} M$, l'infimum du spectre essentiel de M. Observons que A peut être égal à l'infini [D-L]. Pour toute variété compacte à bord Ω, on note $\lambda_1^D(\Omega)$ la première valeur propre du problème de Dirichlet de Ω.

THÉORÈME 0.4. — *Soit* (M_i, p_i) *convergeant vers* (M, p).

Soient $0 = \mu_0 < \mu_1 \leqq \ldots \leqq \mu_j \leqq \ldots < A$ *les valeurs propres de* M *et* $0 = \lambda_0^i < \lambda_1^i \leqq \ldots \leqq \lambda_{M(i)}^i < A$ *les valeurs propres de* M_i *strictement inférieures à* A. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout k tel que* $\mu_k < A$, $M(i) \geqq k$ *pour i assez grand et* $\lim_{i \to \infty} \lambda_k^i = \mu_k$.

(ii) *Pour toute suite de parties fuyantes* Ω_i *de* (M_i, p_i), $\lim_{i \to \infty} \inf \lambda_1^D(\Omega_i) \geqq A$.

L'idée de la preuve de ce théorème est que lorsque (M_i, p_i) converge vers (M, p), le spectre de M_i est essentiellement la réunion du spectre de Dirichlet de Ω_i et de $B_{M_i}(p_i, R_i) = M_i \setminus \Omega_i$ et le spectre de M strictement inférieur à A essentiellement le spectre de Dirichlet de $B_M(p, R_i)$ pour *i* grand.

Remarque 0.5. — Il découlera de la démonstration du théorème 0.4 un résultat de convergence pour les espaces propres correspondants.

Remarque 0.6. — Lorsque $\lim_{i \to \infty} \inf \lambda_1^D(\Omega_i) = B < A$, on déduit de la preuve du théorème 0.4 que les valeurs propres de M inférieures ou égales à B sont limites des valeurs propres correspondantes de M_i.

Remarque 0.7. — Nous verrons au paragraphe 1 que si M est une variété de volume infini, alors pour toute suite (M_i, p_i) convergeant vers M, on n'a pas convergence du spectre.

Exemples. — Remarquons d'abord que le critère (ii) du théorème 0.4 est difficile à vérifier en général, car il porte sur toutes les suites de parties fuyantes. Nous montrerons au paragraphe 3 qu'il est toutefois vrai pour les variétés hyperboliques de dimension 2 et 3.

Au paragraphe 1, nous précisons la notion de partie fuyante et on démontre l'assertion $[(i) \rightarrow (ii)]$ du théorème 0.4. On constate en particulier qu'une condition nécessaire pour que le spectre converge est que le volume de la limite soit fini (corollaire 1.7). Au paragraphe 2, on termine la preuve de ce théorème et au paragraphe 3, on explicite les exemples de variétés hyperboliques.

1. Parties fuyantes

Soit (M_i, p_i) convergeant vers (M, p). Rappelons qu'une suite de parties fuyantes de (M_i, p_i) est une suite de parties $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i)$ où R_i est une suite croissant vers $+\infty$ telle que $B_{M_i}(p_i, R_i)$ et $B_M(p, R_i)$ sont quasi isométriques de rapport $(1+\varepsilon_i)$ avec $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$.

De telles suites de parties fuyantes existent toujours à cause du procédé diagonal. En revanche, dans les exemples qui suivent, nous allons voir qu'une suite arbitraire $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i)$ où R_i est une suite croissant vers $+\infty$ ne définit pas nécessairement une suite de parties fuyantes. En fait, il faut que R_i ne tende pas trop vite vers $+\infty$.

Exemple 1.1. — Soit M_i une suite de surfaces de Riemann de genre 2 dont une géodésique γ_i devient de plus en plus courte, cf. *fig.* 1 (*voir* [C-C1]).

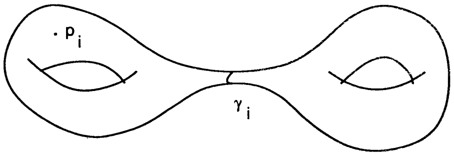

Fig. 1.

Lorsque la longueur l_i de γ_i tend vers 0, (M_i, p_i) converge vers (M, p) où (M, p) est une surface de Riemann non compacte, avec un cusp, cf. *fig.* 2. Remarquons que Vol $M_i = 4\pi$ et vol $M = 2\pi$.

Lorsque l_i tend vers 0, le diamètre de M_i est de l'ordre de $2|\log l_i|$ et dans [C-C1] on montre que $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, |\log l_i|^{1/2})$ est une suite de parties fuyantes de (M_i, p_i).

En fait, $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i)$ où $\lim_{i \to \infty} R_i |\log l_i|^{-1} = 0$ définit une suite de parties fuyantes.

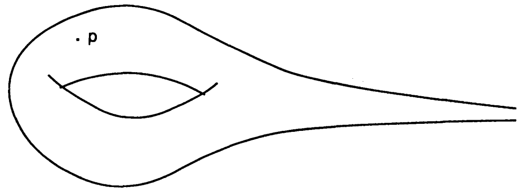

Fig. 2.

En revanche $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, |\log l_i|)$ n'est pas une suite de parties fuyantes de (M_i, p_i) car $B_{M_i}(p_i, |\log l_i|)$ et $B_M(p, |\log l_i|)$ ne sont pas quasi isométriques de rapport $(1+\varepsilon_i)$ avec $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$. En effet, soit h_i l'horocycle de M de longueur l_i. La métrique de M au voisinage de h_i s'écrit en coordonnées de Fermi $g = dr^2 + l_i e^{2r} d\theta^2$. Par ailleurs, la métrique de M_i s'écrit au voisinage de $\gamma_i : g_i = dr^2 + l_i^2 \operatorname{ch}^2 r \, d\theta^2$, de sorte que le rapport des longueurs dans M_i et M de la courbe fermée de coordonnée $r=1$ vaut $e^{-1} \operatorname{ch} 1$ et ne tend pas vers 1 lorsque i tend vers l'infini.

Exemple 1.2. — Soit M une variété hyperbolique complète de dimension 3, non compacte, de volume fini. La variété M se décompose en une partie épaisse $M_{[\mu, \infty[}$ et une partie mince $M_{[0, \mu[}$, où $M_{[\mu, \infty[}$ (resp. $M_{[0, \mu[}$) désigne l'ensemble des points de M où le rayon d'injectivité est supérieur ou égal à μ (resp. strictement inférieur à μ) ([BGS], [GR]). En outre, il existe $\mu_0 > 0$ (indépendant de M) tel que la partie mince $M_{[0, \mu_0[}$ de toute variété hyperbolique de dimension 3 et de volume fini soit une réunion finie de tubes et de cusps. Les tubes sont des voisinages tubulaires de géodésiques fermées et les cusps sont les parties non compactes de M, isométriques à $T^2 \times [0, \infty[$ avec la métrique $ds^2 = dr^2 + e^{-2r} g$ où (T^2, g) est un tore plat.

Un théorème de W. Thurston montre qu'il est possible de « fermer les cusps » de M en les remplaçant par des tubes sans beaucoup changer la partie épaisse et d'approximer ainsi les variétés hyperboliques non compactes par des variétés compactes.

THÉORÈME ([TH], [GR]. — *Soit* M *une variété hyperbolique de dimension* 3, *non compacte et de volume fini. Il existe une suite* M_i *de variétés hyperboliques compactes de dimension* 3 *telle que* (M_i, p_i) *converge vers* (M, p), *où* $p_i \in (M_i)_{[\mu_0, \infty[}$ *et* $p \in M_{[\mu_0, \infty[}$.

Lorsqu'une suite de variétés hyperboliques compactes M_i converge vers M comme dans le théorème de Thurston, les suites de parties fuyantes Ω_i sont contenues dans une réunion disjointe finie de tubes.

Nous allons maintenant donner une condition nécessaire portant sur les parties fuyantes pour assurer la convergence du spectre.

PROPOSITION 1.3. — *Soit* (M_i, p_i) *convergeant vers* (M, p) *où les* M_i *sont compactes et* M *est complète non compacte. Soit* $A = \inf \operatorname{ess} \operatorname{sp} M$. *Supposons que les valeurs propres de* M *strictement inférieures à* A *sont limites de celles de* M_i. *Alors toute suite de parties fuyantes* Ω_i *de* (M_i, p_i) *vérifie* $\lim_{i \to \infty} \inf \lambda_1^D(\Omega_i) \geqq A$.

L'idée de la preuve est que si $\liminf \lambda_1^D(\Omega_i) < A$, pour i grand, $\lambda_1^D(\Omega_i)$ apparaîtrait en surnombre dans le spectre de M_i inférieur à A.

Preuve. — On choisit $t < A$ de sorte que t n'est pas valeur propre de M. Soit $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i)$ une suite de parties fuyantes de (M_i, p_i). Soient $\mu_0 < \mu_1 \leqq \ldots \leqq \mu_N < t$ les valeurs propres de M inférieures à t et $\mu_0^i < \mu_1^i \leqq \ldots \leqq \mu_{N(i)}^i < t$ celles de $B_M(p, R_i)$ pour le problème de Dirichlet.

Alors pour i assez grand, $N(i) = N$ et

$$(1.4) \qquad \lim_{i \to \infty} \mu_k^i = \mu_k, \qquad 0 \leqq k \leqq N.$$

En effet, le minimax entraîne d'une part $\mu_k \leqq \mu_k^i$.

D'autre part, soient $g_0, g_1, \ldots, g_N$ les fonctions propres de L^2-norme 1 associées aux μ_k, $0 \leqq k \leqq N$.

Il est clair que $\lim_{i \to \infty} \| g_k \|_{H_1 (M/B_M(p, R_i))} = 0$ à cause du théorème de convergence dominée de Lebesgue. On définit la fonction $u_i : M \to \mathbb{R}$ par :

$$u_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in B_M(p, R_i - 1) \\ 0 & \text{si} \quad x \in M \setminus B_M(p, R_i) \\ R_i - d(x, p) & \text{si} \quad x \in B_M(p, R_i) \setminus B_M(p, R_i - 1) \end{cases}$$

Pour chaque k, $0 \leqq k \leqq N$, on considère l'espace vectoriel $< g_0, g_1, \ldots, g_k >$ engendré par $g_0, \ldots, g_k$.

On vérifie facilement que si $g \in < g_0, \ldots, g_k >$, $\| g - u_i g \|_{H_1(M)} \leqq \delta_i \| g \|_{H_1(M)}$ où $\lim_{i \to \infty} \delta_i = 0$ et, comme $u_i g \in H_0^1(B_M(p, R_i))$, le principe du minimax entraîne $\mu_k^i \leqq \mu_k + \delta_i$ avec $\lim_{i \to \infty} \delta_i = 0$, ce qui achève la preuve de (1.4).

Soient $\lambda_0^i \leqq \ldots \leqq \lambda_k^i \leqq \ldots$ les valeurs propres de M_i et $\nu_0^i < \nu_1^i \leqq \ldots \leqq \nu_k^i \leqq \ldots$ celles de $B_{M_i}(p_i, R_i)$ pour le problème de Dirichlet.

Comme $B_{M_i}(p_i, R_i)$ et $B_M(p, R_i)$ sont quasi isométriques de rapport $(1 + \varepsilon_i)$ où $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$, le principe du minimax entraîne :

$$(1.5) \qquad \lim_{i \to \infty} \nu_k^i - \mu_k^i = 0, \qquad 0 \leqq k \leqq N;$$

on déduit de (1.4) et (1.5) que

$$(1.6) \qquad \lim_{i \to \infty} \lambda_k^i - \nu_k^i = 0, \qquad 0 \leqq k \leqq N.$$

Supposons à présent que $\liminf \lambda_1^D(\Omega_i) = B < A$. On choisit dans ce qui précède $B < t < A$ et on considère $\psi_0^i, \ldots, \psi_N^i$ les fonctions propres de $B_{M_i}(p_i, R_i)$ associées aux ν_k^i, $0 \leqq k \leqq N$, ainsi que la première fonction propre ψ^i de Ω_i. Comme le support de ψ^i, c'est-à-dire $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i)$, est disjoint de celui des ψ_k^i, l'espace vectoriel

$E_i = \langle \psi_0^i, \ldots, \psi_N^i, \psi^i \rangle$ est de dimension $N+2$. Le quotient de Rayleigh de n'importe quelle fonction ζ de E_i est inférieur à t (pour i assez grand). Avec le principe du minimax, ceci contredit le fait que les valeurs propres de M_i inférieures à t convergent vers celle de M *i.e.* $\mu_0, \ldots, \mu_N$. Ceci achève la preuve de la proposition 1.3.

Cette proposition a comme première conséquence que, lorsque le volume de M est infini, on ne peut pas avoir de convergence du spectre.

COROLLAIRE 1.7. — *Soit* (M_i, p_i) *convergeant vers* (M, p). *Si le volume de* M *est infini et* $A = \inf \operatorname{ess} \operatorname{sp} M > 0$, *il existe une suite* Ω_i *de parties fuyantes avec* $\lim \inf \lambda_1^D(\Omega_i) = 0$. *En particulier, les valeurs propres de* M_i *ne convergent pas vers celles de* M.

Preuve. — Remarquons d'abord que, sous les hypothèses, la croissance du volume des boules de M est exponentielle.

LEMME 1.8. — *Supposons que* $\operatorname{Vol} M = \infty$ *et* $A = \inf \operatorname{ess} \operatorname{spec} M > 0$. *Alors* $\lim\limits_{r \to \infty} \inf \operatorname{Vol} C_p(r, r+1)/\operatorname{Vol} B(p, r) > 0$ *où* $C_p(r, r+1) = B(p, r+1) \setminus B(p, r)$.

Preuve du lemme. — Dans le cas contraire, on construit une suite d'espaces vectoriels de dimension tendant vers $+\infty$ de fonctions dont le quotient de Rayleigh tend vers 0 ce qui entraîne que 0 est dans le spectre essentiel de M.

Par quasi isométrie, pour $R_i/2 \leqq r \leqq R_i$, les boules $B_{M_i}(p, r)$ sont aussi à croissance exponentielle; il est facile de construire sur $\Omega_i = M_i / B_{M_i}(p_i, R_i/2)$ une fonction dont le quotient de Rayleigh tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$ de sorte que $\lim \inf \lambda_1^D(\Omega_i) = 0$ et les valeurs propres de M_i strictement inférieures à A ne convergent pas vers celles de M d'après la proposition 1.3.

2. Fin de la preuve du théorème 0.4

On considère une suite (M_i, p_i) convergeant vers (M, p) et on suppose dans ce paragraphe que $\operatorname{Vol} M < \infty$. Rappelons que A désigne inf ess spec M. Notre but est de prouver que la condition portant sur les parties fuyantes est suffisante, à savoir que si pour toute suite de parties fuyantes Ω_i, $\lim \inf \lambda_1^D(\Omega_i) \geqq A$, alors les valeurs propres de M strictement inférieures à A sont limites de celles de M_i.

On choisit une suite de parties fuyantes $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i)$. On choisit également $t < A$ tel que t n'est pas valeur propre de M et rappelons que $0 = \mu_0 < \mu_1 \leqq \ldots \leqq \mu_N$ désignent les valeurs propres de M inférieures à t et $0 < \mu_0^i < \mu_1^i \leqq \ldots \leqq \mu_{N(i)}^i < t$ celles de $B_M(p, R_i)$ pour la condition de Dirichlet.

Les valeurs propres de M_i inférieures à t sont notées $\lambda_0^i < \lambda_1^i \leqq \ldots \leqq \lambda_{M(i)}^i < t$ et celles de $B_{M_i}(p_i, R_i)$ pour le problème de Dirichlet sont notées $\nu_0^i < \nu_1^i \leqq \ldots \leqq \nu_{K(i)}^i < t$.

Rappelons que $\lim\limits_{i \to \infty} \mu_k^i = \mu_k$, $0 \leqq k \leqq N$, *cf.* 1.4. De plus, lorsque i est assez grand, $K(i) = N$ à cause de la quasi isométrie dont le rapport tend vers 1, et donc $\lim\limits_{i \to \infty} \mu_k^i - \nu_k^i = 0$, $0 \leqq k \leqq N$.

Nous avons donc à prouver que lorsque i est assez grand $M(i)=N$ et (2.1) $\lim_{i \to \infty} \lambda_k^i - \nu_k^i = 0, \quad 0 \leqq k \leqq N$.

D'après le minimax, nous avons

$$\lambda_k^i \leqq \nu_k^i \quad \text{pour tout } k. \tag{2.2}$$

On choisit f_k^i des fonctions propres de L^2-norme égale à 1 associées aux λ_k^i.

Nous allons montrer la

PROPOSITION 2.3. — $\lim_{i \to \infty} \| f_k^i \|_{H_1(\Omega_i)} = 0$ *pour tout* k *fixé.*

Cette proposition permet de conclure de la façon suivante :

On considère les fonctions v_i définies sur M_i par

$$v_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in B_{M_i}(p_i, R_i) \\ 0 & \text{si} \quad x \in M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i + 1) \\ R_i + 1 - d(x, p_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $f \in \langle f_0^i, \ldots, f_k^i \rangle$ la proposition 2.3 entraîne que $\lim_{i \to \infty} \| f - v_i f \|_{H_1(M_i)} = 0$. Donc le quotient de Rayleigh de $f v_i$ est arbitrairement proche de celui de f lorsque i est assez grand. Comme $f v_i \in H_0^1(B_{M_i}(p_i, R_i))$, le principe du minimax entraîne

$$\nu_j^i \leqq \lambda_j^i + \delta_i \qquad \text{avec} \quad \lim_{i \to \infty} \delta_i = 0 \text{ pour } 0 \leqq j \leqq k.$$

Cela achève de prouver $M(i)=N$ et (2.1).

Prouvons à présent la proposition 2.3. Nous distinguons deux cas :

Premier cas : $k=0$. – Nous avons $f_0^i = (\operatorname{Vol} M_i)^{-1/2}$ et $\| f_0^i \|_{H_1(\Omega_i)} = \operatorname{Vol} \Omega_i / \operatorname{Vol} M_i$. Comme $\operatorname{Vol} M_i \geqq \operatorname{Vol} B_{M_i}(p_i, R_i)$ et que $B_{M_i}(p_i, R_i)$ et $B_M(p, R_i)$ sont quasi isométriques de rapport $1+\varepsilon_i$ avec $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$, on a $\operatorname{Vol} \Omega_i / \operatorname{Vol} M_i \leqq C \operatorname{Vol} \Omega_i$ dès que i est assez grand, de sorte qu'il nous suffit de prouver que $\operatorname{Vol} \Omega_i \to 0$ lorsque $i \to \infty$.

Supposons que $\lim_{i \to \infty} \operatorname{Vol} \Omega_i \neq 0$. Il existe alors une sous-suite (notée Ω_j) telle que $\operatorname{Vol} \Omega_j \geqq c' > 0$.

Soit la fonction $v_j : M_j \to \mathbb{R}$ définie par :

$$v_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad d(x, p_j) \geqq R_j \\ 0 & \text{si} \quad d(x, p_j) \leqq R_j - 1 \\ d(p_j, x) - R_j + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors

$$\frac{\displaystyle\int_{M_j} |dv_j|^2}{\displaystyle\int_{M_j} v_j^2} \leqq \frac{\operatorname{Vol}[B_{M_j}(p_j, R_j) \setminus B_{M_j}(p_j, R_j-1)]}{\operatorname{Vol}\Omega_j}$$

$$\leqq \frac{1}{c'} \operatorname{Vol}[B_{M_j}(p_j, R_j) \setminus B_{M_j}(p_j, R_j-1)]$$

Mais, par ailleurs, $\operatorname{Vol} B_{M_j}(p_j, R_j) - \operatorname{Vol} B_{M_j}(p_j, R_j-1)$ tend vers 0 lorsque j tend vers l'infini car $B_{M_j}(p_j, R_j)$ est quasi isométrique à $B_M(p, R_j)$ de rapport $1+\varepsilon_j$ avec $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$ et $\lim_{j\to\infty} [\operatorname{Vol} B_M(p, R_j) - \operatorname{Vol} B_M(p, R_j-1)] = 0$ car $\operatorname{Vol} M < \infty$.

Cela entraîne $\int_{M_j} |dv_j|^2 \Big/ \int_{M_j} v_j^2 \to 0$ lorsque $j \to \infty$ donc $\lim\inf \lambda_1^D(\Omega'_j) = 0$ où $\Omega'_j = M_j \setminus B_{M_j}(p_j, R_j - 1)$ est une suite de parties fuyantes de (M_j, p_j) ce qui contredit l'hypothèse.

Deuxième cas : $k > 0$. — On considère $\Omega''_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i/2)$.

Pour chaque $(r, s) \in \mathbb{R}_+^2$, on note $C_i(r, s) = B_{M_i}(p_i, s)/B_{M_i}(p_i, r)$.

LEMME 2.4. — *Il existe* $r_i \in [R_i/2, R_i - 1]$ *tel que :*

(i) $\| f_k^i \|_{H_1(C_i(r_i, r_i+1))} \to 0$ *lorsque* $i \to \infty$;

(ii) $\| |df_k^i| \|^2_{L^2(\partial B_{M_i}(p_i, R_i))} + \| f_k^i \|^2_{L^2(\partial B_{M_i}(p_i, R_i))} \to 0$ *lorsque* $i \to \infty$ *pour tout* k *tel que* $\lambda_k^i < t$.

Preuve. — On pose $F_i = (f_k^i)^2 + |df_k^i|^2$. On a : $\int_{M_i} F_i < 1 + t$.

Soit r la distance à p_i sur M_i. On a

$$\int_{M_i} F_i \geqq \int_{C_i(R_i/2,\, R_i)} F_i = \int_{Ri/2}^{R_i} dr \int_{\partial B_{M_i}(p_i, r)} F_i.$$

Soit

$$A_k = \int_{(R_i/2)+k}^{(R_i/2)+(k+2)} dr \int_{\partial B_{M_i}(p_i, r)} F_i \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq E\left(\frac{R_i}{2} - 2\right).$$

Comme $\sum A_k < 1 + t$, il existe k_i tel que

$$A_{k_i} \leqq \frac{(1+t)}{E(R_i/2 - 3)} = \delta_i$$

Il existe de plus $r_i \in [(R_i/2)+k_i, (R_i/2)+k_i+1]$ tel que $\int_{\partial M_i(p_i, r_i)} F_i \leqq \delta_i$ et le lemme est prouvé.

On considère maintenant f_k^i sur $X_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, r_i)$ où r_i est comme dans le lemme 2.4.

D'après la formule de Green, on a :

$$\int_{X_i} |df_k^i|^2 = \lambda_k^i \int_{X_i} (f_k^i)^2 + \int_{\partial B_{M_i}(p_i, r_i)} f_k^i \frac{\partial f_k^i}{\partial r} \tag{2.5}$$

où $\partial f_k^i/\partial r$ est la dérivée normale de f_k^i le long de $\partial B_{M_i}(p_i, r_i)$.

D'après le lemme 2.4 (ii) on a :

$$\left| \int_{\partial B_{M_i}(p_i, r_i)} f_k^i \frac{\partial f_k^i}{\partial r} \right| \leqq \left(\int_{\partial B_{M_i}(p_i, r_i)} (f_k^i)^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\partial B_{M_i}(p_i, r_i)} \left(\frac{\partial f_k^i}{\partial r} \right)^2 \right)^{1/2} \leqq \delta_i$$

où $\lim_{i \to \infty} \delta_i = 0$ d'où l'on déduit :

$$\left| \left(\int_{X_i} |df_k^i|^2 \right) - \lambda_k^i \left(\int_{X_i} (f_k^i)^2 \right) \right| \leqq \delta_i. \tag{2.6}$$

Supposons que $\lim_{i \to \infty} \int_{X_i} (f_k^i)^2 \neq 0$. Il existe alors une sous-suite de (f_k^i) notée (f_k^j) telle que $\int_{X_j} (f_k^j)^2 \geqq C > 0$. Dans ce cas, on déduit de (2.6) que

$$\int_{X_j} |df_k^j|^2 \Big/ \int_{X_j} (f_k^j)^2 = \lambda_k^j + \varepsilon_j' \qquad \text{avec} \quad \lim_{j \to \infty} \varepsilon_j' = 0. \tag{2.7}$$

On considère alors $\tilde{f}_k^j = f_k^j u_j$ où $u_j : M_j \to \mathbb{R}$ est définie par

$$u_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad d(x, p_j) \leqq r_j \\ 1 & \text{si} \quad d(x, p_j) \geqq r_j + 1 \\ d(x, p_j) - r_j & \text{sinon} \end{cases}$$

A cause du lemme 2.4 (i), lorsque $j \to \infty$, on a :

$$\int_{X_j} |d\widetilde{f}_k^j|^2 \Big/ \int_{X_j} (\widetilde{f}_k^j)^2 \sim \int_{X_j} |df_k^j|^2 \Big/ \int_{X_j} (f_k^j)^2 \sim \lambda_k^j$$

Comme $\lambda_k^j \leqq t < A$, on déduit que $\lim \inf \lambda_1^D(\Omega_j'') < A$ où $\Omega_j'' = M_j \setminus B_{M_j}(p_j, r_j)$ est une suite de parties fuyantes de (M_j, p_j), ce qui contredit l'hypothèse.

On a donc $\lim_{i \to \infty} \int_{X_i} (f_k^i)^2 = 0$ ce qui entraîne d'après (2.6)

$$\lim_{i \to \infty} \int_{X_i} |df_k^i|^2 = 0. \tag{2.8}$$

Ainsi on a montré que $\lim_{i \to \infty} \| f_k^i \|^2_{H_1(X_i)} = 0$ et donc que $\lim_{i \to \infty} \| f_k^i \|_{H_1(\Omega_i)} = 0$, ce qui achève la preuve de la proposition 2.3, et donc du théorème 0.4.

Remarque 2.9. — Dans la preuve du théorème 0.4, on voit implicitement que la convergence des valeurs propres strictement inférieures à A de M_i vers celles de M s'accompagne de la convergence des espaces propres correspondants.

En effet, soit $\mu_k < A$ une valeur propre de M, E_k l'espace propre associé et E_k^i la somme des espaces propres associés aux λ_j^i qui convergent vers μ_k.

Soit $\Omega_i = M_i \setminus B_{M_i}(p_i, R_i)$ une suite de parties fuyantes et $\widetilde{E_k^i}$ l'espace des fonctions de E_k^i tronquées sur Ω_i et transplantées sur M par la quasi isométrie. Alors on déduit facilement de la preuve du théorème 0.4 que la distance au sens de H_1 entre $\widetilde{E_k^i}$ et E_k tend vers 0 lorsque i tend vers ∞.

3. Exemples

Nous allons à présent appliquer le théorème 0.4 à deux situations où une variété complète, non compacte, de volume fini, est naturellement limite de variétés compactes.

I. *Surface de Riemann.* — C'est le cas particulier examiné dans [C-C1].

On considère le cas d'une surface de Riemann à cusps qui est une limite d'une famille à un paramètre de surfaces de Riemann compactes dans l'espace de Teichmüller. Considérons le cas du genre 2, introduit au paragraphe 1. On a convergence du spectre si et seulement si le volume de la surface limite S est égal au volume des éléments S_i de la suite (ce qui est équivalent au fait que les géodésiques qui dégénèrent ne disconnectent pas la surface).

En effet dans le cas où $\mathrm{Vol}\, S_i = \mathrm{Vol}\, S$ les parties fuyantes sont contenues dans des tubes. Comme la constante de Cheeger d'un tube est supérieure ou égale à 1 [BU] et que 1/4 est la borne inférieure du spectre essentiel de S l'inégalité de Cheeger permet d'appliquer le théorème 0.4 et de conclure.

Au cas où le volume de S est strictement inférieur à celui des S_i, c'est-à-dire lorsque la géodésique de S_i qui dégénère est séparante, les parties fuyantes de S_i contiennent une surface de genre 1 à bord géodésique dont la longueur tend vers 0 (*cf.* § 1) de sorte que leur première valeur propre pour le problème de Dirichlet tend vers 0. Le théorème 0.4 permet de conclure.

Dans [C-C1], on montre en général, que le spectre strictement inférieur à 1/4 d'une suite S_i de surface converge vers le spectre inférieur ou égal à 1/4 de la réunion de surfaces de Riemann à volume fini déterminé par la suite.

II. *Variétés hyperboliques de dimension* 3. — Cet exemple a été introduit au paragraphe 1. Le résultat de [D-L] implique que le spectre essentiel d'une variété de dimension 3 de volume fini à cusps est $[1, \infty[$. En outre, puisque la partie épaisse est connexe, les parties fuyantes sont toujours contenues dans une réunion de tubes (la perte de connexité limite décrite en dimension 2 ne se produit pas en dimension 3).

Or, la constante de Cheeger d'un tube est supérieure ou égale à 2 [BU]. Dès lors, à cause de l'inégalité de Cheeger, la première valeur propre du problème de Dirichlet des parties fuyantes est supérieure ou égale à 1, et le théorème 0.4 permet de déduire le

THÉORÈME 3.1. — *Soit* (M_i, p_i) *une suite de variétés hyperboliques compactes de dimension* 3 *qui converge vers une variété hyperbolique non compacte de volume fini. Les valeurs propres de* M *strictement inférieures à* 1 *sont limites de celles de* M_i.

Remarque 3.2. — Dans les exemples qui précèdent, il est possible de perturber la métrique dans la partie épaisse sans modifier le résultat de convergence. Au contraire, par de faibles perturbations de la partie mince (par exemple en « allongeant » l'extrémité des parties fuyantes) on peut obtenir des situations où la convergence du spectre n'est plus vraie.

Remarque 3.3. — Il n'est pas facile de construire des exemples naturels de convergence d'une suite de variétés compactes vers une variété de volume fini. Par exemple, si la courbure de M_i est comprise entre $-a^2$ et $-b^2<0$ pour tout i et que $\dim M_i>3$, alors $\mathrm{Vol}\, M_i \to \infty$ si $\mathrm{diam}\, M_i \to \infty$. Ainsi, si de plus M_i a une limite M, le corollaire 1.7 entraîne qu'il n'y a pas convergence du spectre de M_i vers celui de M.

BIBLIOGRAPHIE

[B-G-S] W. BALLMANN, M. GROMOV et V. SCHRÖDER, *Manifolds of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser.

[BU] N. BUSER, *On Cheeger's Inequality:* $\lambda_1 \geqq h^2/4$ (*Am. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 36, 1980, p. 29-77).

[C-C1] B. COLBOIS et G. COURTOIS, *Les valeurs propres inférieures à* 1/4 *des surfaces de Riemann de petit rayon d'injectivité* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 64, 1989, p. 349-362).

[C-C2] B. COLBOIS et G. COURTOIS, *Sur les petites valeurs propres des variétés hyperboliques de dimension* 3, prépublication de l'Institut Fourier, Grenoble, n° 130, 1989.

[CH] I. CHAVEL, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Ac. Press, 1984.

[COL] B. COLBOIS, Petites valeurs propres du laplacien sur une surface de Riemann compacte et graphes, (*C. R. Acad. Sci., Paris*, t. 301, série I, 1985, p. 927-930).

[COUR] G. COURTOIS, *Comportement d'une variété riemannienne compacte sous perturbation topologique par excision d'un domaine* (*Thèse*, Grenoble, 1987).

[D-L] H. DONNELY et P. LI, *Pure Point Spectrum and Negative Curvature for Noncompact Manifolds* (*Duke Math. J.*, vol. 46, 1979, p. 497-503).

[FU] K. FUKAYA, *Collapsing of Riemannian Manifolds and Eigenvalues of Laplace Operator* (*Invent. Math.*, vol. 87, 1987, p. 517-547).

[G-L-P] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, J. LAFONTAINE et P. PANSU éd., Paris, 1981.

[GR] M. GROMOV, *Hyperbolic Manifold According to Thurston and Jorgensen* (*Séminaire Bourbaki*, n° 546, 1979-80).

[R-T] J. Rauch et M. Taylor, *Potential and Scattering on Widly Perturbed Domains* (*J. Funct. Anal.*, vol. 18, 1975, p. 27-59).

[TH] W. Thurston, *The Geometry and Topology of* 3-*Manifolds* (*Lect. Notes*, Princeton Univ., 1977-78).

(Manuscrit reçu le 5 septembre 1989,
révisé le 20 novembre 1990).

B. Colbois,
E.P.F.L.-D.M.A.,
CH-1015, Lausanne, Suisse.

G. Courtois,
Université de Grenoble-I,
Institut Fourier,
B. P. n° 74,
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.