

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DANIEL BARLET

Interaction de strates consécutives pour les cycles évanescents

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 24, n° 4 (1991), p. 401-505

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_4_401_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTERACTION DE STRATES CONSÉCUTIVES POUR LES CYCLES ÉVANESCENTS

PAR DANIEL BARLET

à Milène

Introduction

a. Après avoir exploré en détail (*voir* [B. 1], [B. 2], [B. 4] et [B. 5]) comment la monodromie de la fibre de Milnor en un point d'une fonction holomorphe f sur \mathbb{C}^{n+1} provoque des pôles dans le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$, nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier ce qui provient du système local des monodromies ponctuelles de f le long d'une strate du lieu singulier de $\{f=0\}$. De manière plus précise, si l'on considère une fonction holomorphe f définie sur un ouvert X de \mathbb{C}^3 , admettant 0 comme unique valeur critique et ayant comme lieu critique une courbe S de $f^{-1}(0)$, le faisceau des cycles évanescents de f est un système local sur $S-\{0\}$ (on peut aussi supposer $S-\{0\}$ lisse pour X assez petit) et nous mettons en évidence, en nous limitant à une valeur propre $e^{-2i\pi\mu} \neq 1$ pour la monodromie de f , une interaction entre le H^2 de la fibre de Milnor de f en 0 et la cohomologie sur $S-\{0\}$ du système local des H^1 des fibres de Milnor aux points de $S-\{0\}$.

Une construction topologique simple, duale de celle que nous considérerons, permettra peut-être au lecteur de se faire une idée du « phénomène d'emmêlements » :

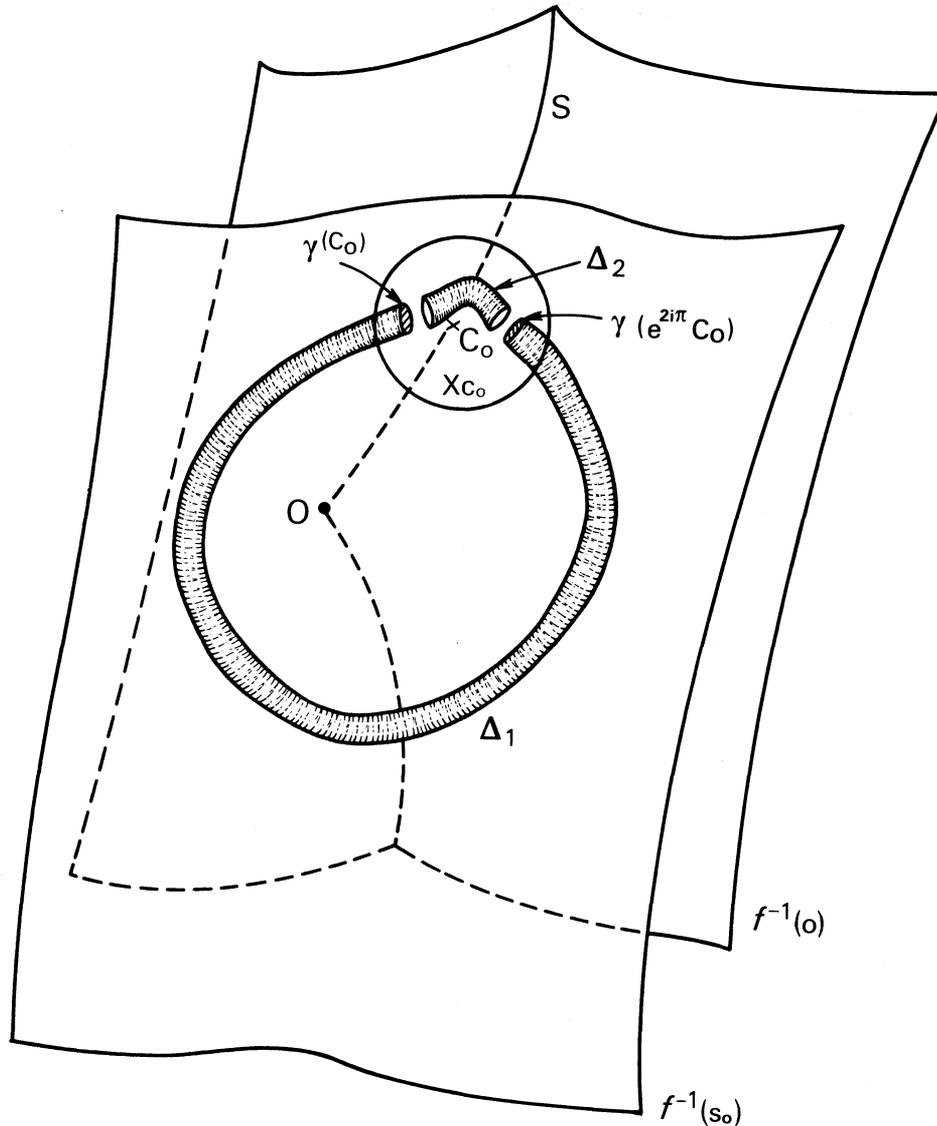
Supposons, pour simplifier, que S soit irréductible. Alors pour X assez petit S est un disque topologique et 0 est l'unique singularité éventuelle de S . Soit C un cercle entourant une fois l'origine dans $S-\{0\}$ et choisissons un représentant de Milnor de f en 0, $f: X \rightarrow D$. Pour $s_0 \in D-\{0\}$ assez voisin de 0 on peut identifier la fibre de Milnor de f en 0 à $f^{-1}(s_0)$ et pour chaque $c \in C$ la fibre de Milnor de f en c à $f^{-1}(s_0) \cap X_c$ où X_c est une boule de Milnor de f en c (ceci est possible car f est topologiquement localement triviale le long de C qui est compact).

Notons par \underline{H} le système local sur C défini par les H_1 des fibres de Milnor de f en $c \in C$. Soit $\Gamma \in H^0(C, \underline{H})$; pour chaque $c \in C$ $\Gamma(c)$ est représentable par un 1-cycle $\gamma(c)$ de $f^{-1}(s_0) \cap X_c$. Quand c décrit le cercle C le cycle $\gamma(c)$ se déplace continûment et décrit une 2-chaîne Δ_1 dans $f^{-1}(s_0)$ dont le bord est $\gamma(e^{2i\pi}c_0) - \gamma(c_0)$ qui est homologue à 0

dans $X_{c_0} \cap f^{-1}(s_0)$. Si Δ_2 est une chaîne de $X_{c_0} \cap f^{-1}(s_0)$ de bord $\gamma(e^{2i\pi} c_0) - \gamma(c_0)$ la 2-chaîne $\Delta_1 - \Delta_2$ est un 2-cycle de $f^{-1}(s_0)$. On a donc une flèche

$$H^0(S - \{0\}, \underline{H}_1) \simeq H^0(C, \underline{H}) \rightarrow H_2(f^{-1}(s_0), \mathbb{C});$$

Cette construction correspond à la figure suivante :



b. Soit $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur une variété connexe lisse X de dimension $n+1$. Soit $Y=f^{-1}(0)$ et notons pour chaque $p \in \mathbb{N}$ par H^p le faisceau constructible sur Y dont la fibre en $x \in Y$ est le p -ième groupe de cohomologie à coefficients complexes de la fibre de Milnor de f en x . Ce faisceau est muni d'un automorphisme constructible T donné par la monodromie de f , et nous noterons par $H^p(u)$ pour $u \in [0, 1[$ le sous-faisceau spectral de T pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$.

Nous allons étudier la situation suivante, qui correspond aux hypothèses standards introduites au I n° 0 :

Fixons $u \in]0, 1[$ et supposons que X est un ouvert de Stein contenant 0 dans \mathbb{C}^{n+1} assez petit pour avoir

- (i) $H^n(u)$ est supporté par $\{0\}$ dans X .
- (ii) $H^{n-1}(u)$ est supporté par une courbe S admettant 0 comme unique point singulier; chaque branche irréductible de S passe par 0 et est un disque topologique.
- (iii) $H^{n-1}(u)$ restreint à $S^* = S - \{0\}$ est un système local.

L'hypothèse restrictive sera

- (iv) $H^{n-i}(u) = 0, \forall i \geq 2$.

Dans cette situation le type topologique de f le long de S^* est localement constant et il est défini par une section hyperplane transverse. Sur une telle section transversale la restriction de f vérifie à nouveau les hypothèses standards (mais n est changé en $n-1 = m$) avec en plus la condition supplémentaire que $H^{m-1}(u)$ est supporté par l'origine⁽¹⁾ (qui est ici l'intersection de S avec la section transverse). Une telle situation est tout à fait analogue au cas d'une singularité isolée d'hypersurface (mais seulement relativement à la valeur propre e^{-2inu} , bien sûr). Le théorème 3 généralise à ce cas les résultats principaux de [B. 3] (valeur propre $\neq 1$). Plus précisément, nous donnons dans ce cas une formule analytique calculant la forme hermitienne d'intersection (via le prolongement méromorphe de la distribution $\int_X |f|^{2\lambda} \square$) qui est bien définie et non dégénérée dans ce cas car, comme pour une singularité isolée ($e^{2inu} \neq 1$) l'application canonique

$$\text{can} : H_c^m(u) \rightarrow H^m(u)$$

est un isomorphisme.

Sous les hypothèses standards, l'emmêlement des strates $\{0\}$ et S pour la valeur propre $e^{-2inu} \neq 1$ (qui correspond au phénomène topologique décrit ci-dessus) sera défini par le fait que $\text{can} : H_c^m(u) \rightarrow H^m(u)$ ne soit pas un isomorphisme, ou de manière équivalente, par l'existence d'au moins une section sur S^* du faisceau constructible $H^{n-1}(u)$ qui ne soit pas prolongeable à S .

Ceci sera mesuré par deux applications

$$\widetilde{\text{ob}}_k : \text{Ker } N^k \rightarrow H_{\{0\}}^1(S, H^{n-1}(u))$$

et

$$\tilde{\theta}_k : \text{Ker } N^k \rightarrow H^1(S^*, H^{n-1}(u))$$

⁽¹⁾ Ce qui implique sa nullité.

définies pour $k \geq k_0$ ⁽²⁾ entier, où N désigne la partie nilpotente de la monodromie agissant sur $H^n(u)$.

La forme d'intersection pour les fibres de Milnor des sections hyperplanes transverses à S^* permet de définir une forme hermitienne localement constante sur le système local $H^{n-1}(u)|_S$, et le premier résultat important consiste en une formule analytique globale pour l'accouplement sesquilinéaire qui s'en déduit :

$$\tilde{h} : H^0(S^*, H^{n-1}(u)) \times H^1(S^*, H^{n-1}(u)) \rightarrow \mathbb{C}$$

par cup-produit et intégration sur le cycle fondamental de S^* (obtenu en coupant S^* par une petite sphère de centre 0).

Cette formule sera un outil essentiel pour la partie difficile de ce travail qui montre en particulier que si $e^{-2inu} \neq 1$ est valeur propre simple (au plus) de la monodromie en chaque point de S , ce phénomène d'emmêlement de strates apparaît si et seulement si le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ admet pour $\lambda = -u - v$ avec $v \in \mathbb{N}$, $v \gg 0$, un pôle d'ordre exactement 2 (dans le cas non emmêlé, on a des pôles d'ordre ≤ 1).

Le lecteur trouvera à la fin de cet article un exemple explicite où le pôle double apparaît, bien que la monodromie soit semi-simple en chaque point de S pour la valeur propre considérée.

Le plan de cet article est le suivant :

Le I donne une description détaillée des principaux résultats que l'on va établir. Il constitue le « fil directeur » de notre démarche.

Le II contient le détail des constructions et démonstrations annoncées au I. Il est structuré de la manière suivante :

a.

n° 1. Le complexe $(\Omega^*(k), \delta_u)$.

n° 2. Le complexe de De Rham relatif.

n° 3. Lien entre ces deux complexes.

b.

n° 1. Hypercohomologie de $(\Omega^*(k), \delta_u)$ sur X : Preuve de la proposition 2.

n° 2. Hypercohomologie de $(\Omega^*(k), \delta_u)$ sur X^* : Preuve de la proposition 5.

n° 3. Les applications $\tilde{\omega}_k$ et $\tilde{\theta}_k$ (définition 6).

c. Le complexe semi-méromorphe $(\mathcal{E}(k), \delta_u)$: Preuve de la proposition 7 et du corollaire 8.

d. Calcul analytique de la forme d'intersection pour une singularité isolée par rapport à la valeur propre $e^{-2inu} \neq 1$: Preuve du théorème 3.

⁽²⁾ k_0 dénote l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur $H^{n-1}(u)$ (sous les hypothèses standards).

- e. Calcul analytique de la forme hermitienne localement constante sur le système local $H^{n-1}(u)|_{S^*}$: Preuve des propositions 11 et 12.
- f. Représentation de \tilde{ob}_k par des fonctionnelles analytiques : Preuve des théorèmes 13 et 14.
- g. Réciproque pour $k_0=1$: La nullité de \tilde{ob}_1 donne l'absence d'emmêlements; preuve du théorème 15 et du corollaire 16.
- h. Calcul explicite d'un exemple.

Avertissement. — Les énoncés du II sont numérotés par paragraphes. Les énoncés auxquels nous nous référons sans précision de paragraphe sont ceux du I.

CONVENTION. — Si $f: X \rightarrow D$ est un représentant de Milnor d'un germe de fonction holomorphe $f: (\mathbb{C}^{n+1}, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ nous noterons par $F(x)$ sa fibre de Milnor que nous définirons comme suit : on choisit un point base $s_0 \in D^* \cap \mathbb{R}^+$ et on pose $F(x) = f^{-1}(s_0)$. Cette fibre de Milnor est donc une variété complexe de dimension n qui dépend de s_0 . Cependant comme X est de Stein (par définition d'un représentant de Milnor) elle sera toujours de Stein. La classe d'isomorphisme de la variété C^∞ sous-jacente à $F(x)$ est indépendante du choix de s_0 et du représentant de Milnor choisi d'après les travaux de Milnor [M].

Par ailleurs, si $\exp: H \rightarrow D^*$ est le revêtement universel de D^* (on a noté $H = \{z \in \mathbb{C}/\text{Re}(z) < \text{Log } \eta\}$ où η désigne le rayon du disque D) nous conviendrons une fois pour toute que le point base \tilde{s}_0 de H est choisi de sorte que $\tilde{s}_0 \in \mathbb{R}$ et $\exp \tilde{s}_0 = s_0$.

Ceci nous permettra, sans autre commentaire, de donner un sens à la restriction d'une fonction multiforme « du type $\text{Log } s$ » sur $F(x)$:

$$\text{Log } s|_{F(x)} = \text{Log } s_0 = \tilde{s}_0 \in \mathbb{R}$$

par convention.

I.

0. Dans toute la suite de cet article nous allons considérer la situation suivante :

— *Les hypothèses standards* :

On suppose que X est un ouvert connexe de Stein de \mathbb{C}^{n+1} contenant 0 avec $n \geq 1$.

Soit $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante vérifiant $f(0) = 0$.

Fixons $u \in]0, 1[$ et notons comme plus haut par $H^p(u)$ le faisceau constructible sur $Y = f^{-1}(0)$ donné par le sous-faisceau spectral de la monodromie pour la valeur propre e^{-2inu} agissant sur le p -ième faisceau de cohomologie du complexe $R\psi_f$ (c'est-à-dire en chaque point sur le p -ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de f en ce point).

On fait les hypothèses suivantes :

- (i) $H^n(u)$ est concentré en 0.
- (ii) $H^{n-1}(u)$ est concentré sur une courbe S admettant 0 comme unique point singulier. On supposera que chaque branche de S contient 0 et est un disque topologique.
- (iii) La restriction de $H^{n-1}(u)$ à $S^* = S - \{0\}$ est un système local.
- (iv) On suppose $H^{n-i}(u) = 0, \forall i \geq 2$ sur X .

Sous ces hypothèses, nous noterons par k_0 l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur le faisceau constructible $H^{n-1}(u)$ ⁽³⁾ et par k_1 l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur $H^n(u)$.

Remarques. — Les hypothèses (i), (ii) et (iii) sont toujours réalisables par localisation à l'origine quel que soit le germe holomorphe f non constant à l'origine de \mathbb{C}^{n+1} que l'on se donne. Ceci résulte des conditions de perversité qui assurent que les faisceaux constructibles $H^n(u)$ et $H^{n-1}(u)$ sont concentrés sur des ensembles analytiques de dimension 0 et 1 respectivement.

Par contre l'hypothèse (iv) est restrictive. Elle est cependant toujours satisfaite dans les cas suivants :

- 1° $n = 1, f$ réduite ou non.
- 2° $n = 2, f$ réduite (ou plus généralement avec des multiplicités telles que $H^0(u)$ soit nul).
- 3° $n \geq 3$, l'hypersurface $\{f=0\}$ ayant un lieu singulier de dimension ≤ 1 .

En fait la situation décrite par les hypothèses standards correspond à l'étude d'une fonction holomorphe générale au voisinage du point générique de la seconde strate associée à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ de la monodromie. En effet, considérons un représentant de Milnor $f: X \rightarrow \mathbb{D}$ d'un germe de fonction holomorphe arbitraire à l'origine de \mathbb{C}^{N+1} et fixons $e^{-2i\pi u} \neq 1$. Le faisceau constructible $H^p(u)$ pour $p \in [0, N]$ a un support S_p qui est analytique de codimension pure p dans $f^{-1}(0)$. Notons par $m-1$ le plus petit p pour lequel le faisceau $H^p(u)$ ne soit pas nul. Soit x_0 un point générique de S_m et soit P un $(m+1)$ -plan transverse en x_0 à S_m (S_m est lisse en x_0 puisque x_0 est générique). Comme on peut choisir P non caractéristique pour $|f|^{2\lambda}$ au sens de [B. M], théorème 4.6, l'étude des pôles du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ près de x_0 se ramène à l'étude correspondante pour la restriction $f|_P$ qui vérifie les hypothèses standards avec origine en x_0 et courbe singulière $S = P \cap S_{m-1}$. Ceci montre que les renseignements que l'on obtiendra sur les pôles congrus à $-u$ modulo \mathbb{Z} sous les hypothèses standards pourront s'appliquer aux pôles congrus à $-u$ modulo \mathbb{Z} du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ près d'un tel x_0 .

1. Un préalable nécessaire à la compréhension de la structure des pôles⁽⁴⁾ de $|f|^{2\lambda}$ dans les hypothèses standards est évidemment une bonne compréhension de ces mêmes

⁽³⁾ Ou sur le système local $H^{n-1}(u)|_{S^*}$, cela revient au même puisque les conditions de perversité donnent $H_{\{0\}}^0(S, H^{n-1}(u)) = 0$.

⁽⁴⁾ Congrus à $-u$ modulo \mathbb{Z} .

pôles près du point générique de S , ce qui revient, dans la situation d'une fonction holomorphe arbitraire à considérer ce qui se passe au voisinage du point générique de la première strate où la valeur propre e^{-2inu} apparaît. Ceci va se ramener, par section plane transverse à cette première strate (toujours grâce à [B.M]) à l'étude des pôles de $|f|^{2\lambda}$ dans le cas (plus restrictif que les hypothèses standards) où seul $H^n(u)$ est non nul. Ceci signifie que la valeur propre e^{-2inu} n'apparaît qu'en des points isolés de $f^{-1}(0)$ (et donc seulement à l'origine, quitte à localiser). Ceci conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 1 ($u \in \mathbb{C}$ arbitraire). — Soit $\tilde{f}: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe non nul de fonction holomorphe. Nous dirons que 0 est une singularité isolée relativement à la valeur propre e^{-2inu} de la monodromie s'il existe un représentant $f: X \rightarrow D$ de ce germe tel que e^{-2inu} ne soit pas valeur propre de la monodromie de f agissant sur la cohomologie réduite de la fibre de Milnor de f en tout point $x \in f^{-1}(0)$ différent de 0.

Il est clair que si le terme \tilde{f} est à singularité isolée au sens habituel, il est à singularité isolée relativement à toute valeur propre de la monodromie. Réciproquement si \tilde{f} est à singularité isolée relativement à toute valeur propre, alors \tilde{f} est à singularité isolée au sens habituel⁽⁵⁾. Cependant le lieu singulier du germe $\{\tilde{f}=0\}$ peut être de codimension 1 (ou même 0) dans $\tilde{f}^{-1}(0)$ et la singularité être isolée relativement à une valeur propre de la monodromie.

Pour pouvoir calculer analytiquement les cycles évanescents de f associés à la valeur propre e^{-2inu} de la monodromie, nous allons utiliser la construction suivante :

Soit V une variété complexe lisse et connexe et soit $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Nous supposons que l'unique valeur critique éventuelle de f est 0. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}$, introduisons sur V les faisceaux

$$\Omega^p(k) := \Omega^p[f^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^k, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

et définissons la différentielle \mathbb{C} -linéaire de degré +1, $\delta^* (= \delta_u^*)$ en posant :

$$\delta^*(w \otimes v) = dw \otimes v - \left(\frac{df}{f} \wedge w \right) \otimes (\text{Id } u + N)(v)$$

où $N \in \text{End}(\mathbb{C}^k)$ est donné dans la base canonique (b_1, \dots, b_k) de \mathbb{C}^k par $Nb_j = b_{j+1}$ (avec $Nb_k = 0$) et où $w \in \Omega^*[f^{-1}]$ et $v \in \mathbb{C}^k$.

Il n'est pas difficile de vérifier que $\delta^* \circ \delta^* = 0$ et $(\Omega^*(k), \delta^*)$ est un complexe de faisceaux sur V . Définissons $\tau_k^*: \Omega^*(k) \rightarrow \Omega^{*+1}(k)$ en posant

$$\tau_k^* \left(\sum_{j=1}^k w_j \otimes b_j \right) = \left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes b_1.$$

⁽⁵⁾ En effet, si on considère un point générique du lieu singulier (supposé non réduit à 0) et si on coupe transversalement, la singularité (isolée) transverse aura un nombre de Milnor nul. Elle sera donc lisse. On conclut alors facilement.

La relation $\tau_k \circ \delta + \delta \circ \tau_k = 0$ montre que τ_k^* est un morphisme de complexe de degré 1.

La proposition suivante nous permettra alors de représenter analytiquement les éléments de $H^n(u)$:

PROPOSITION 2. — Soit $f: X \rightarrow D$ un représentant de Milnor d'un germe non constant de fonction holomorphe $\tilde{f}: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ où $n \geq 1$. On a, sous les hypothèses standards :

1° un isomorphe naturel $\forall i \geq 0$

$$H^i(X, (\Omega^*(k), \delta_u^*)) \simeq H^i(H^0(X, (\Omega^*(k), \delta_u^*)))$$

2° une suite exacte pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \rightarrow H^{n-1}(X, (\Omega^*(k), \delta_u^*)) \xrightarrow{\tau_k^*} H^n(X, (\Omega^*(k), \delta_u^*)) \xrightarrow{r_k} \text{Ker } \mathcal{N} \rightarrow 0$$

où $-2i\pi \mathcal{N}$ désigne le logarithme nilpotent de l'opérateur e^{+2inu} . T agissant sur $H^n(u)$ (où T désigne la monodromie).

Précisons que, via l'isomorphisme 1° de la proposition 2, la surjection r_k est définie de la façon suivante :

$$\text{à } w = \sum_{j=1}^k w_j \otimes b_j \text{ dans } H^0(X, \Omega^n(k))$$

vérifiant $\delta_u w = 0$, ce qui équivaut aux relations

$$dw_j = u \frac{df}{f} \wedge w_j + \frac{df}{f} \wedge w_{j-1}, \quad \forall j \in [1, k]$$

avec la convention $w_0 = 0$, on associe l'élément e de $H^n(u)$ qui est caractérisé par le fait que les sections sur D^* du fibré de Gauss-Manin données par

$$s \rightarrow s^u \sum_{h=0}^{n+1} \frac{1}{h!} \mathcal{N}^h(e) (\text{Log } s)^h$$

et

$$s \rightarrow w_k | f^{-1}(s) \text{ coïncident.}$$

La proposition 2 sera prouvée au paragraphe *b*.

2. La première étape de notre étude sera de décrire de manière précise la structure des pôles du prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$ qui sont congrus à $-u$ modulo \mathbb{Z} pour une singularité isolée relativement à la valeur propre e^{-2inu} . Nous nous contenterons ici du cas $e^{-2inu} \neq 1$, le cas de la valeur propre 1 (qui est spécial) sera traité ailleurs (voir [B. 7]).

THÉORÈME 3. — Soit $f: X \rightarrow D$ un représentant de Milnor d'un germe $\tilde{f}: (\mathbb{C}^{m+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admettant en 0 une singularité isolée relativement à la valeur propre

$e^{-2inu} \neq 1$. Notons par $H^m(u)$ [respectivement $H_c^m(u)$] la partie spectrale pour la valeur propre e^{-2inu} de la monodromie agissant sur la cohomologie (respectivement la cohomologie à support compact) de la fibre de Milnor $F(0)$ de f en 0. On a alors :

- 1° l'application canonique $\text{can} : H_c^m(u) \rightarrow H^m(u)$ est un isomorphisme;
- 2° la forme hermitienne d'intersection sur $H^m(u)$ définie par la formule

$$h(a, b) = \frac{1}{(2i\pi)^m} \int_{F(0)} \text{can}^{-1}(a) \cup \bar{b}, \quad \forall a, b \in H^m(u)$$

est non dégénérée et se calcule analytiquement de la façon suivante :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $\mathcal{N}^k a = 0$ et $\mathcal{N}^k b = 0$ et soient $w, w' \in H^0(X, \Omega^m(k))$ vérifiant $\delta_u w = 0, \delta_u w' = 0$ et $r^m(k)(w) = a, r^m(k)(w') = b$ ⁽⁶⁾. On a alors

$$(1) \quad h(a, b) = \frac{1}{(2i\pi)^m} \frac{i}{2\pi} \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right).$$

Remarques. — 1° Les pôles congrus à $-u$ modulo \mathbb{Z} du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ étant concentrés à l'origine sous l'hypothèse du théorème 3 (d'après [M. 2] ou [K. 3]), on peut appliquer la distribution à support l'origine

$$\text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \square \right)$$

à une forme C^∞ de type $(m+1, m+1)$ au voisinage de l'origine. Dans le membre de droite de la formule (1), w_k et w'_k sont des m -formes méromorphes à pôles dans $\{f=0\}$; il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que la forme

$$|f|^{2N} w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}}$$

soit C^∞ au voisinage de l'origine. Il faut alors interpréter la formule (1) avec la convention

$$\text{Res} \left(\lambda = -u - N, \int_X |f|^{2(\lambda+N)} \varphi \right) = \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \varphi \right).$$

2° Le théorème 3 est la généralisation au cas d'une singularité isolée relativement à la valeur propre $e^{-2inu} \neq 1$ de la monodromie du résultat de [B. 3].

Le théorème 3 admet le corollaire suivant

COROLLAIRE 4. — Soit $f : X \rightarrow D$ un représentant de Milnor d'un germe $\tilde{f} : (C^{m+1}, 0) \rightarrow (C, 0)$ admettant en 0 une singularité isolée relativement à la valeur propre

⁽⁶⁾ Voir la proposition 2.

$e^{-2inu} \neq 1$. Alors l'ordre des pôles du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ en $-u-j$ pour $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 0$ est exactement égal à l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur $H^m(u)$.

Le théorème 3 et le corollaire 4 seront prouvés au paragraphe *d*.

3. La seconde étape de notre étude consiste à calculer l'hypercohomologie du complexe $(\Omega^*(k), \delta_u^*)$ sur $X^* = X - \{0\}$ sous les hypothèses standards. La considération des deux suites spectrales convergeant vers l'hypercohomologie ainsi que l'utilisation du morphisme τ_k^* (qui donne le scindage d'une suite exacte déduite de l'aspect sphérique de la première suite spectrale) permettent d'obtenir le résultat suivant

PROPOSITION 5. — Notons par $h^i(k)$ le i -ième faisceau de cohomologie du complexe $(\Omega^*(k), \delta_u^*)$. Sous les hypothèses standards, on a les isomorphismes suivants ($e^{-2inu} \neq 1$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{n-1}(X^*, (\Omega^*(k), \delta_u^*)) &\simeq H^0(S^*, h^{n-1}(k)) \\ \mathbb{H}^n(X^*, (\Omega^*(k), \delta_u^*)) &\simeq H^0(S^*, h^n(k)) \oplus H^1(S^*, h^{n-1}(k)) \end{aligned}$$

et

$$\forall i \geq 0, \quad \mathbb{H}^i(X^*, (\Omega^*(k), \delta_u^*)) \simeq H^i(H^0(S^*, \Omega^*(k)), \delta_u^*).$$

De plus pour $k \geq k_0$ ⁽⁷⁾ les isomorphismes de faisceaux

$$h^{n-1}(k)|_{S^*} \simeq H^{n-1}(u)|_{S^*} \quad \text{et} \quad \tau_k^* : h^{n-1}(k)|_{S^*} \simeq h^n(k)|_{S^*}$$

permettent de réécrire ces isomorphismes sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{n-1}(X^*, (\Omega^*(k), \delta_u^*)) &\simeq H^0(S^*, H^{n-1}(u)) \\ \text{ob}_k \oplus \theta_k : \mathbb{H}^n(X^*, (\Omega^*(k), \delta_u^*)) &\simeq H^0(S^*, H^{n-1}(u)) \oplus H^1(S^*, H^{n-1}(u)). \end{aligned}$$

DÉFINITION 6. — Sous les hypothèses standards on définit pour chaque entier $k \geq k_0$ deux applications naturelles :

$$\tilde{\text{ob}}_k : \text{Ker } \mathcal{N}^k \rightarrow H_{\{0\}}^1(S, H^{n-1}(u))$$

et

$$\tilde{\theta}_k : \text{Ker } \mathcal{N}^k \rightarrow H^1(S^*, H^{n-1}(u))$$

⁽⁷⁾ Rappelons que sous les hypothèses standards k_0 désigne l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur $H^{n-1}(u)$.

de la manière suivante :
la composée :

$$\mathbb{H}^n(X, (\Omega^\cdot(k), \delta_u^\cdot)) \xrightarrow{\text{res}} \mathbb{H}^n(X^*, (\Omega^\cdot(k), \delta_u^\cdot)) \xrightarrow{\text{ob}_k} \mathbb{H}^0(S^*, \mathbb{H}^{n-1}(u))$$

$$\downarrow \partial$$

$$\mathbb{H}_{(0)}^1(S, \mathbb{H}^{n-1}(u))$$

passse au quotient par $\tau_k \mathbb{H}^{n-1}(X, (\Omega^\cdot(k), \delta_u^\cdot))$ et donne $\tilde{\text{ob}}_k$,
la composée :

$$\mathbb{H}^n(X^*, (\Omega^\cdot(k), \delta_u^\cdot)) \xrightarrow{\text{res}} \mathbb{H}^n(X^*, (\Omega^\cdot(k), \delta_u^\cdot)) \xrightarrow{\theta_k} \mathbb{H}^1(S^*, \mathbb{H}^{n-1}(u))$$

passse également au quotient par $\tau_k \mathbb{H}^{n-1}(X, (\Omega^\cdot(k), \delta_u^\cdot))$ et donne $\tilde{\theta}_k$.

Remarque. — On prendra garde que les $\tilde{\theta}_k$ sont compatibles quand k augmente, alors que ce n'est pas le cas pour les applications $\tilde{\text{ob}}_k$ ⁽⁸⁾

La proposition 5 et les constructions de la définition 6 sont détaillées au paragraphe *b*.

L'importance des applications $\tilde{\text{ob}}_k$ et $\tilde{\theta}_k$ (pour $k \geq k_0$) sous les hypothèses standards apparaît déjà dans les propriétés suivantes :

PROPOSITION 7. — *Sous les hypothèses standards on a, pour $k \geq k_0$,*

$$\text{Im}(\text{can}) \cap \text{Ker } \mathcal{N}^k = \text{Ker } \tilde{\theta}_k$$

et

$$\text{can}(\text{Ker } \mathcal{N}^k) = \text{Ker}(\tilde{\text{ob}}_k) \cap \text{Ker } \tilde{\theta}_k$$

où $-2i\pi \mathcal{N}_c$ désigne le logarithme nilpotent de $e^{2i\pi u} T_c$ où T_c désigne la monodromie agissant sur $\mathbb{H}_c^n(u)$.

Pour $e \in \text{Ker } \mathcal{N}^k$ la nullité de $\tilde{\theta}_k(e)$ est donc une condition nécessaire et suffisante pour que e soit dans l'image de $\text{can} : \mathbb{H}_c^n(u) \rightarrow \mathbb{H}^n(u)$. Mais il se peut que l'on ait $e \in \text{Im}(\text{can})$ sans avoir $e \in \text{can}(\text{Ker } \mathcal{N}^k)$; $\tilde{\text{ob}}_k(e)$ donne exactement l'obstruction pour cela. On déduit de la proposition 7 le corollaire suivant

COROLLAIRE 8. — *Sous les hypothèses standards, l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur le quotient $\mathbb{H}^n(u)/\text{can}(\mathbb{H}_c^n(u))$ est au plus égal à k_0 .*

La proposition 7 et le corollaire 8 sont prouvés au paragraphe *c*.

Définissons maintenant ce que nous appelons le phénomène d'emmêlement de strates sous les hypothèses standards.

⁽⁸⁾ Pour $k \geq k_0$ on montrera que $\tilde{\text{ob}}_{k+1} = \tilde{\text{ob}}_k \circ \mathcal{N}$ (voir § *b*, n° 3).

DÉFINITION 9. — *Sous les hypothèses standards, on dira que l'on a emmèlement des strates $\{0\}$ et S (pour la valeur propre $e^{-2inu} \neq 1$) si l'application canonique*

$$\text{can: } H_c^n(u) \rightarrow H^n(u)$$

n'est pas un isomorphisme.

Remarque. — Si l'origine est une singularité isolée relativement à la valeur propre $e^{-2inu} (\neq 1)$, il résulte du théorème 3 que le phénomène d'emmèlement n'a pas lieu. En fait, sous cette hypothèse, la strate S n'existe pas!

On obtiendra (mais comme conséquence de la proposition 12 ci-dessous) la caractérisation suivante du phénomène d'emmèlement en terme du faisceau $H^{n-1}(u)$.

PROPOSITION 10. — *Sous les hypothèses standards on a emmèlement si et seulement si l'on a*

$$H_{\{0\}}^1(S, H^{n-1}(u)) \neq 0.$$

4. L'étape suivante de notre étude consiste à introduire une forme hermitienne non dégénérée (localement constante) sur le système local $H^{n-1}(u)|_{S^*}$. Celle-ci est définie en utilisant la trivialité topologique locale de f le long de S^* qui permet d'identifier pour chaque $\sigma \in S^*$ la fibre en σ de $H^{n-1}(u)$ avec la partie spectrale pour la valeur propre e^{-2inu} de la monodromie agissant sur la cohomologie en degré $(n-1)$ de la fibre de Milnor de $f|_{P_\sigma}$ où P_σ est un hyperplan transverse à S^* en σ . La situation pour le germe en σ de $f|_{P_\sigma}$ est celle d'une singularité isolée pour la valeur propre e^{-2inu} , ce qui donne (voir le théorème 3) une forme hermitienne d'intersection non dégénérée sur $H^{n-1}(u)_\sigma$.

On obtient ainsi une forme hermitienne localement constante naturelle h sur le système local $H^{n-1}(u)|_{S^*}$. En utilisant le cycle fondamental de S^* qui est l'élément de $H_1(S^*, \mathbb{C})$ défini en coupant S^* par une sphère de centre 0 et de rayon assez petit, on obtient un accouplement sesquilinéaire non dégénéré (donc une dualité hermitienne)

$$\tilde{h}: H^0(S^*, H^{n-1}(u)) \times H^1(S^*, H^{n-1}(u)) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Notre objectif suivant sera de donner une formule analytique permettant de calculer $\tilde{h}(e, \eta)$ pour $e \in H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ et $\eta \in H^1(S^*, H^{n-1}(u))$.

Pour donner une telle formule, il faut évidemment commencer par donner une représentation analytique des éléments de $H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ et $H^1(S^*, H^{n-1}(u))$. Ceci est obtenu grâce à la proposition 5 combinée avec un analogue de la proposition 2 sur un voisinage ouvert de Stein \mathcal{U} de S^* dans X^* .

PROPOSITION 11. — *Sous les hypothèses standards, considérons k et $k' \geq k_0$ et soit $e \in H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ représenté par $v \in H^0(S^*, \Omega^n(k))$ tel que $\delta_u v = 0$ induisant $\tau_k(e)$ dans $H^0(S^*, h^n(k))$ ⁽⁹⁾.*

⁽⁹⁾ Sous nos hypothèses on a des isomorphismes $H^{n-1}(u)|_{S^*} \xrightarrow{r^{n-1}(k)} h^{n-1}(k)|_{S^*} \xrightarrow{\tau_k} h^n(k)|_{S^*}$ (voir proposition 5).

Soit $\eta \in H^1(S^*, H^{n-1}(u))$ induit par $w \in H^0(S^*, \Omega^n(k'))$ vérifiant $\delta w = 0$, au sens que $\theta_k(w) = \eta$ [où θ_k a été définie à la proposition 5; on utilise ici l'analogie sur \mathcal{U} de la proposition 2 pour calculer $H^n(X^*, (\Omega^*(k'), \delta_u^*)) \simeq H^n(\mathcal{U}, (\Omega^*(k'), \delta_u^*))$ puisque les faisceaux de cohomologie du complexe $(\Omega^*(k), \delta_u)|_{X^*}$ sont concentrés sur S^*].

On a alors

$$(2) \quad (2i\pi)^n \tilde{h}(e, \eta) = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^{a-1} P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{d\bar{f}}{f} \wedge \bar{w}_k \wedge v_a \wedge \gamma \right)$$

si γ est une forme C^∞ de degré 1 au voisinage de S^* vérifiant ⁽¹⁰⁾ :

- (i) $\text{Supp } \gamma \cap S^*$ est compact;
- (ii) $d\gamma = 0$ au voisinage de S^* ;
- (iii) γ induit dans $H_c^1(S^*, \mathbb{C})$ la classe du cycle fondamental de S^* .

On a utilisé dans la formule la notation $P_a(\lambda = \lambda_0, F(\lambda))$ pour désigner, si F est méromorphe dans \mathbb{C} , le coefficient de $(\lambda - \lambda_0)^{-a}$ dans le développement de Laurent de F en λ_0 (donc $P_1 = \text{Res}$).

La proposition 11 permet de montrer que l'image de $\tilde{\theta}_k$ (pour $k \geq k_0$) est contenue dans l'orthogonal pour \tilde{h} du sous-espace $H^0(S, H^{n-1}(u))$ de $H^0(S^*, H^{n-1}(u))$. La proposition suivante montre que pour k assez grand on a en fait égalité.

PROPOSITION 12. — Sous les hypothèses standards, pour $k \geq \text{Sup}(k_0, k_1)$ l'image de $\tilde{\theta}_k$ est exactement l'orthogonal pour \tilde{h} du sous-espace $H^0(S, H^{n-1}(u))$ de $H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ dans $H^1(S^*, H^{n-1}(u))$.

Les propositions 11 et 12 seront prouvées au paragraphe d.

Le résultat suivant est un des points clés de notre étude. Il montre que la non-nullité de $\tilde{\theta}_k(e)$ pour $e \in \text{Ker } \mathcal{N}^k (k \geq k_0)$ se traduit par l'apparition d'un pôle d'ordre $\geq k+1$ (lié à e) pour le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ en $\lambda = -u - j$ avec $j \in \mathbb{N}, j \geq 0$ en un sens très fort, puisque l'on obtient la non-nullité de la partie polaire d'ordre $k+1$ comme fonctionnelle analytique (ce qui signifie non seulement la non-nullité d'un courant, mais le fait qu'il n'est pas d'' -exact à support l'origine!).

THÉORÈME 13. — Sous les hypothèses standards, considérons $e \in H^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}^k e = 0$ avec $k \geq k_0$.

⁽¹⁰⁾ Si $\rho \in C_c^\infty(X)$ vaut identiquement 1 près de 0, $\gamma = d\rho$ convient.

On a alors équivalence entre les propriétés suivantes :

1° $\tilde{\text{ob}}_k(e) = 0$;

2° si $w \in H^0(X, \Omega^n(k))$ vérifie $\delta w = 0$ et $r_k^n(w) = e$ ⁽¹¹⁾, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$ la fonctionnelle analytique

$$P_{k+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j} \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \bar{w}_k \wedge \square \right)$$

est nulle.

De plus pour vérifier la condition 2°, il suffit de le faire pour $j \in [0, n+1]$.

Sous les hypothèses standards, on sait d'après [B.M] théorème 4 et le corollaire 4 ci-dessus, puisque la restriction de f à une section hyperplane transverse en un point $\sigma \in S^*$ a une singularité presque isolée pour la valeur propre e^{-2inu} , que le long de S^* les pôles en $-u-j$ pour $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 0$ du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ seront d'ordre exactement k_0 . De plus il résulte de [B. 1] et de la définition de k_1 qu'on aura au voisinage de 0 des pôles d'ordre $\geq k_1$ (toujours $-u-j$ pour $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 0$). Nous allons maintenant montrer que la présence d'un pôle strictement plus grand que le minimum attendu, à savoir $\text{Sup}(k_0, k_1)$, implique l'existence du phénomène d'emmêlement.

THÉORÈME 14. — On se place sous les hypothèses standards et on suppose que le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ admet en $\lambda = -u - v_0$ où $v_0 \in \mathbb{N}$, un pôle d'ordre $k \geq \text{Sup}(k_0, k_1) + 1$. Alors on a $\tilde{\text{ob}}_{k-1} \neq 0$ et donc emmêlement. De plus on a nécessairement

$$k \leq k_0 + \text{Sup}(k_0, k_1).$$

Les théorèmes 13 et 14 seront prouvés au paragraphe *f*.

5. Il est important de remarquer à ce stade que l'on ne peut espérer une réciproque naïve du théorème 14. En effet supposons que $k_1 = 2$, que $k_0 = 1$ et que, de plus, l'emmêlement se produise au niveau non pas d'un bloc de Jordan de taille (2,2) de $H^n(u)$, mais seulement au niveau d'un vecteur propre $e \in H^n(u)$ qui ne soit pas dans $\text{Im } \mathcal{N}$. De manière précise, cela signifie que $\tilde{\text{ob}}_1(e) \neq 0$ mais que $\tilde{\text{ob}}_1$ est nul sur $\text{Im } \mathcal{N}$ (et donc $\tilde{\text{ob}}_2 = \tilde{\text{ob}}_1 \circ \mathcal{N} \equiv 0$).

Le théorème 13 assure alors de l'existence d'un pôle double provoqué par e qui est emmêlé. Mais comme nous avons supposé $k_1 = 2$, il existe $\varepsilon \in H^n(u)$ tel que $\mathcal{N} \varepsilon \neq 0$ et ε va provoquer un pôle double également (d'après [B. 1]) sans que le phénomène d'emmêlement ne se produise au niveau du sous-espace vectoriel engendré par ε et $\mathcal{N} \varepsilon$. Ceci montre que si l'emmêlement a lieu à un niveau de nilpotence trop petit par rapport à k_1 , on peut avoir emmêlement sans qu'apparaisse un pôle d'ordre strictement plus grand que $\text{Sup}(k_0, k_1)$.

(11) Voir la proposition 2.

Une manière d'énoncer une réciproque du théorème 14 consiste alors à demander (au sens du théorème 13) que chaque élément e de $H^n(u)$ ne provoque pas de pôle d'ordre supérieur à l'ordre de nilpotence de \mathcal{N} agissant sur le sous-espace vectoriel \mathcal{N} -stable engendré par e . Ceci peut se formuler de manière simple grâce à la formule $\tilde{\text{ob}}_{k_0+h} = \tilde{\text{ob}}_{k_0} \circ \mathcal{N}^h$ en demandant que la nullité de $\tilde{\text{ob}}_{k_0}$ sur $\text{Ker } \mathcal{N}^{k_0}$ (qui implique celle de $\tilde{\text{ob}}_k$ sur $\text{Ker } \mathcal{N}^k, \forall k \geq k_0$) implique le non-emmèlement.

Ceci est encore trop demander si k_0 est strictement plus grand que 1. En effet il est possible que l'ordre de nilpotence de \mathcal{N} agissant sur $H_{\{0\}}^1(S, H^{n-1}(u))$ soit strictement plus petit que k_0 sans que $H_{\{0\}}^1(S, H^{n-1}(u))$ soit nul (si $k_0 > 1$).

On peut alors avoir emmèlement bien que $\tilde{\text{ob}}_{k_0}$ soit identiquement nulle. Cela montre que dans un tel cas il faudrait, pour décrire complètement le phénomène d'emmèlement, considérer une application

$$\tilde{\text{ob}}_{k_0-1} : \text{Ker } \mathcal{N}^{k_0-1} \rightarrow H_{\{0\}}^1(S, H^{n-1}(u)/\text{Im } \mathcal{N}^{k_0-1})$$

ce que nous ne ferons pas ici.

Le résultat suivant permettra au moins d'obtenir notre réciproque pour $k_0 = 1$.

THÉORÈME 15. — *Sous les hypothèses standards considérons $e \in H^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}^{k_0}(e) = 0$ et $\tilde{\text{ob}}_{k_0}(e) = 0$. Alors on a $\mathcal{N}^{k_0-1}(e) \in \text{Im}(\text{can})$.*

La démonstration de ce théorème est délicate et utilise la stratégie de démonstration élaborée dans [B. 2]. On en déduit facilement la réciproque annoncée.

COROLLAIRE 16. — *Sous les hypothèses standards, supposons que l'on ait $k_0 = 1$. Alors l'emmèlement se produit si et seulement si on a*

$$\tilde{\text{ob}}_1 \neq 0.$$

En particulier pour $k_1 = 1$ l'emmèlement se produit si et seulement si les pôles en $-u - j$ pour $j \in \mathbb{N}, j \geq 0$ du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ sont doubles.

Le théorème 15 et le corollaire 16 seront prouvés au paragraphe g.

Nous terminerons en montrant un exemple simple où le phénomène d'emmèlements à lieu et en détaillant un calcul direct des pôles correspondants du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ au paragraphe h.

II.

a.

N° 1. Soit X une variété complexe (lisse) et soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe. On supposera que f n'est pas identiquement nulle sur une composante connexe de X . Fixons $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{C}$ et introduisons sur X les faisceaux

$$\Omega^p(k) = \Omega_X^p[f^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^k \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}.$$

Définissons la différentielle $\delta: \Omega^p(k) \rightarrow \Omega^{p+1}(k)$ de la façon suivante : pour $a \in \Omega_X^p[f^{-1}]$ et $v \in \mathbb{C}^k$ posons

$$\delta(a \otimes v) = da \otimes v - \left(\frac{df}{f} \wedge a \right) \otimes (u \text{Id} + N_k)(v)$$

où $N_k \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^k)$ est donné par $N_k(b_j) = b_{j+1}$ si $j \in [1, k-1]$ et $N_k(b_k) = 0$ si b_1, \dots, b_k désigne la base canonique de \mathbb{C}^k . On a alors $\delta \circ \delta = 0$ et nous noterons par $h^p(k)$ le p -ième faisceau de cohomologie du complexe $(\Omega^\bullet(k), \delta)$.

VISUALISATION. — Une section sur un ouvert U de X du faisceau $\Omega^p(k)$ est un vecteur colonne de p -formes différentielles méromorphes à pôles dans $(f=0)$ et la différentielle δ est donnée « concrètement » par

$$\delta \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dw_k - u \frac{df}{f} \wedge w_k - \frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \\ \vdots \\ dw_1 - u \frac{df}{f} \wedge w_1 \end{pmatrix}$$

Introduisons maintenant sur les complexes de faisceaux $(\Omega^\bullet(k), \delta)$ les opérations suivantes, où k' est un entier :

$$j_{k, k+k'}: \Omega^\bullet(k) \rightarrow \Omega^\bullet(k+k')$$

est donné par $j_{k, k+k'}(w \otimes b_i) = w \otimes \tilde{b}_{i+k'}$, $i \in (1, k)$ où l'on a noté $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{k+k'}$ la base canonique de l'espace $\mathbb{C}^{k+k'}$. C'est un morphisme de complexes de degré 0 qui se visualise ainsi :

$$j_{k, k+k'} \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad k' \text{ zéros}$$

$$\pi_{k+k', k}: \Omega^\bullet(k+k') \rightarrow \Omega^\bullet(k)$$

est donné par $\pi_{k+k', k}(w \otimes b_j) = w \otimes b_j$ si $j \leq k$ et 0 si $j > k$. C'est également un morphisme de complexes de degré 0 qui se visualise ainsi :

$$\pi_{k+k', k} \begin{pmatrix} w_{k+k'} \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix}$$

${}_k\mathcal{N} : \Omega^\bullet(k) \rightarrow \Omega^\bullet(k)$ est donné par ${}_k\mathcal{N} = j_{k-1, k} \circ \pi_{k, k-1}$. C'est encore un morphisme de complexes de degré 0; il se visualise ainsi :

$${}_k\mathcal{N} \begin{pmatrix} w_k \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ \vdots \\ w_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et enfin pour $k, k' \in \mathbb{N}^*$

$$\tau_{k, k'} : \Omega^\bullet(k) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(k')$$

défini par

$$\tau_{k, k'}(w \otimes b_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ \left(\frac{df}{f} \wedge w \right) \otimes b_1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

On a alors

$$\tau_{k, k'} \circ \delta + \delta \circ \tau_{k, k'} = 0$$

et c'est donc un morphisme de complexes de degré +1. Nous noterons simplement par τ_k l'endomorphisme $\tau_{k, k}$ de $(\Omega^\bullet(k), \delta^\bullet)$.

On a les formules élémentaires suivantes :

$$j_{k+k', k+k'+k''} \circ j_{k, k+k'} = j_{k, k+k'+k''}$$

$${}_k\mathcal{N}^p = j_{k-p, k} \circ \pi_{k, k-p} \quad \text{pour } p \in (0, k-1)$$

et

$${}_k\mathcal{N}^k = 0$$

$$j_{k, k+k'} \circ {}_k\mathcal{N} = {}_{k+k'}\mathcal{N} \circ j_{k, k+k'}, \quad \pi_{k+k'} \circ \tau_{k'', k+k'} = \tau_{k'', k}$$

$$\tau_k \circ \tau_k = 0.$$

Nous noterons par les mêmes symboles les morphismes induits par $j_{k, k+k'}$, $\pi_{k+k', k}$, ${}_k\mathcal{N}$, τ_k au niveau des faisceaux de cohomologie h^\bullet .

LEMME 0. — On a sur $h^\bullet(k)$ l'identité suivante :

$$j_{k, k+k'} \circ \tau_k = \tau_{k+k'} \circ {}_{k+k'}\mathcal{N}^{k'} \circ j_{k, k+k'}$$

Démonstration. — Prouvons déjà l'assertion pour $k' = 1$ avec k arbitraire; on veut donc montrer l'égalité $j_{k, k+1} \circ \tau_k = \tau_{k+1} \circ {}_{k+1}\mathcal{N} \circ j_{k, k+1}$ sur $h^p(k)$. Soit $w \in \Omega^p(k)$ vérifiant $\delta w = 0$;

on a alors :

$$\tau_k(w) = \left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes b_1 \quad \text{dans } \Omega^{p+1}(k)$$

et donc

$$j_{k,k+1}(\tau_k(w)) = \left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes b_2 \quad \text{dans } \Omega^{p+1}(k).$$

Mais

$$j_{k,k+1}(w) = \sum_{i=1}^{k-1} w_i \otimes b_{i+1} \quad \text{et} \quad {}_{k+1}\mathcal{N}(j_{k,k+1}(w)) = \sum_{i=1}^{k-1} w_i \otimes b_{i+2}$$

dans $\Omega^p(k+1)$. On a donc

$$\tau_{k+1}({}_{k+1}\mathcal{N}(j_{k,k+1}(w))) = \left(\frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \right) \otimes b_1.$$

Nous voulons montrer que

$$\left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes b_2 - \left(\frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \right) \otimes b_1$$

induit 0 dans $h^{p+1}(k+1)$ (sous l'hypothèse $\delta w = 0$). Mais on a :

$$\delta(-w_k \otimes b_1) = -dw_k \otimes b_1 + \left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes (ub_1 + b_2)$$

par définition de δ . Comme $\delta w = 0$ donne la relation

$$dw_k = u \cdot \frac{df}{f} \wedge w_k + \frac{df}{f} \wedge w_{k-1}$$

on aura

$$\delta(-w_k \otimes b_1) = \left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes b_2 - \left(\frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \right) \otimes b_1$$

ce qui prouve notre assertion pour $k' = 1$.

Supposons maintenant le résultat prouvé pour $k' \geq 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et considérons la composée :

$$j_{k,k+k'+1} \circ \tau_k = j_{k+1,k+k'+1} \circ j_{k,k+1} \circ \tau_k.$$

D'après le cas $k' = 1$ on aura

$$j_{k, k+k'+1} \circ \tau_k = j_{k+1, k+k'+1} \circ \tau_{k+1} \circ \mathcal{N}_{k+1} \circ j_{k, k+1}.$$

En utilisant le résultat pour k' avec $k+1$ (hypothèse de récurrence)

$$j_{k+1, k+k'+1} \circ \tau_k = \tau_{k+k'+1} \circ \mathcal{N}^{k'} \circ j_{k+1, k+k'+1} \circ \tau_{k+1} \circ \mathcal{N} \circ j_{k, k+1}$$

En utilisant les formules élémentaires

$$j_{k+1, k+k'+1} \circ \tau_{k+1} \circ \mathcal{N} = \tau_{k+k'+1} \circ \mathcal{N} \circ j_{k+1, k+k'+1}$$

et

$$j_{k+1, k+k'+1} \circ j_{k, k+1} = j_{k, k+k'+1}$$

on obtient successivement

$$j_{k, k+k'+1} \circ \tau_k = \tau_{k+k'+1} \circ \mathcal{N}^{k'+1} \circ j_{k+1, k+k'+1} \circ j_{k, k+1} = \tau_{k+k'+1} \circ \mathcal{N}^{k'+1} \circ j_{k, k+k'+1}$$

ce qui achève la preuve du lemme 0.

a.

N° 2. Soit X une variété complexe lisse et connexe et soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur X . Rappelons que le complexe de De Rham relatif ⁽¹²⁾ de f est défini en posant

$$(1) \quad \Omega_{X/f}^i = \Omega_X^i [f^{-1}] / df \wedge \Omega_X^{i-1} [f^{-1}]$$

pour $i \geq 1$ et $\Omega_{X/f}^0 = \Omega_X^0 [f^{-1}]$.

Alors la différentielle d passe au quotient et donne une différentielle

$$d: \Omega_{X/f}^i \rightarrow \Omega_{X/f}^{i+1}, \quad \forall i \geq 0.$$

Nous noterons par \mathcal{H}^p le p -ième faisceau de cohomologie du complexe $(\Omega_{X/f}^\bullet, d)$ restreint à $f^{-1}(0)$. Le faisceau \mathcal{H}^p se décrit directement comme suit :

$$(2) \quad \mathcal{H}^p = \frac{\{ \alpha \in \Omega^p [f^{-1}] / df \wedge d\alpha = 0 \}}{\{ d\Omega^{p-1} [f^{-1}] + df \wedge \Omega^{p-1} [f^{-1}] \}}.$$

Remarquons que pour $p \geq 1$ le faisceau $H^p(\Omega_{X/f}^\bullet, d)$ est de toute façon concentré sur $f^{-1}(0)$ d'après le lemme de Poincaré holomorphe dès que l'on suppose que $\{df_x = 0\}$ est contenu dans $f^{-1}(0)$ [ce qui est automatique au voisinage de $f^{-1}(0)$].

⁽¹²⁾ Localisé en $\{f=0\}$.

Posons $K = \mathbb{C}\{s\}[s^{-1}]$. Alors pour chaque p le faisceau \mathcal{H}^p sur $f^{-1}(0)$ est naturellement muni d'une structure de faisceau de K -espaces vectoriels et d'une K -connexion ∇ , dite connexion de Gauss-Manin.

La structure de faisceau de K -espaces vectoriels est donnée pour U ouvert de $f^{-1}(0)$ et $\alpha \in H^p(U, \Omega^p[f^{-1}])$ vérifiant

$$d\alpha = df \wedge \beta$$

par

$$g \cdot \alpha = (g \circ f) \cdot \alpha \quad \text{où } g \in K.$$

La connexion ∇ est simplement donnée par $\nabla \alpha = \beta$.

Introduisons maintenant le faisceau H^p , $p \geq 0$ sur $f^{-1}(0)$ dont la fibre en $x \in f^{-1}(0)$ est le p -ième groupe de cohomologie à valeur complexe de la fibre de Milnor de f en x .

Il est bien connu (voir [D.2] ou [M.2]) que ces faisceaux sont constructibles et munis d'un automorphisme (constructible) de monodromie que nous noterons T . En $x \in f^{-1}(0)$ T agit sur H_x^p comme opérateur de monodromie pour la fibration de Milnor de f en x .

Notons par $H^p(u)$ le sous-faisceau constructible de H^p donné par

$$H^p(u) = \text{Ker}(T - e^{-2i\pi u})^k$$

pour $k \gg 0$ ($k \geq \dim X$ suffit d'après le théorème de monodromie et on peut se limiter à prendre $u \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$).

Nous noterons par

$$\mathcal{N}_p = -\frac{1}{2i\pi} \text{Log}(e^{2i\pi u} T | H^p(u)).$$

Nous nous proposons de donner une description (désormais plus ou moins classique) du faisceau de K -espaces vectoriels à connexion (\mathcal{H}^p, ∇) sur $f^{-1}(0)$ en termes des faisceaux constructibles $H^p(u)$ munis de leurs endomorphismes nilpotents \mathcal{N}_p .

L'isomorphisme $\kappa: H^p(u) \rightarrow \Gamma^p(u)$: Soit $k \in \mathbb{N}$ assez grand pour avoir $\mathcal{N}_p^k = 0$ ($k \geq \dim_{\mathbb{C}} X$ suffit).

Posons alors

$$\mathcal{H}^p(u) \stackrel{\text{def}}{=} H^p(u) \otimes_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_{j=0}^{k-1} \mathbb{C} s^u (\text{Log } s)^j \right).$$

C'est un faisceau \mathbb{C} -constructible sur $f^{-1}(0)$ et définissons

$$\mathcal{F}: \mathcal{H}^p(u) \rightarrow \mathcal{H}^p(u), \quad \mathbb{C}\text{-linéaire}$$

par

$$\mathcal{F}(e \otimes s^u (\text{Log } s)^j) = T e \otimes e^{2i\pi u} s^u (\text{Log } s + 2i\pi)^j$$

et posons

$$\Gamma^p(u) = \text{Ker}(\mathcal{T} - \text{Id}).$$

LEMME 1. — L'application $\kappa: \mathbb{H}^p(u) \rightarrow \mathcal{K}^p(u)$ donnée par

$$\kappa(e) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \mathcal{N}_p^j(e) \otimes s^u (\text{Log } s)^j$$

induit un isomorphisme de $\mathbb{H}^p(u)$ sur $\Gamma^p(u)$.

Démonstration. — On a

$$\kappa(e) = \exp(\mathcal{N}_p \otimes \text{Log } s)(e \otimes s^u).$$

Donc

$$\mathcal{T}(\kappa(e)) = \exp(\mathcal{N}_p \otimes (\text{Log } s + 2i\pi))(\text{T} e \otimes e^{2inu} s^u)$$

et comme

$$e^{2inu} \text{T} = \exp(-2i\pi \mathcal{N}_p)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\kappa(e)) &= \exp(\mathcal{N}_p \otimes \text{Log } s) \exp(2i\pi \mathcal{N}_p \otimes 1) \exp(-2i\pi \mathcal{N}_p \otimes 1)(e \otimes s^u) \\ &= \exp(\mathcal{N}_p \otimes \text{Log } s)(e \otimes s^u) = \kappa(e). \end{aligned}$$

Donc $\kappa(e) \in \Gamma^p(u)$.

Réciproquement, considérons

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{e_j}{j!} \otimes s^u (\text{Log } s)^j$$

dans $\Gamma^p(u)$.

Comme $\mathcal{T}\varepsilon = \varepsilon$, on aura

$$\sum_{j=0}^{k-1} \exp(-2i\pi \mathcal{N}_p) \left(\frac{e_j}{j!} \right) \otimes s^u (\text{Log } s + 2i\pi)^j = \varepsilon$$

et donc

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{e_j}{j!} \otimes s^u (\text{Log } s + 2i\pi)^j = \sum_0^{k-1} \exp(2i\pi \mathcal{N}_p) \left(\frac{e_j}{j!} \right) \otimes s^u (\text{Log } s)^j.$$

Cela donne le système, $h \in [0, k-1]$

$$(*)_h \quad \sum_{j=h}^{k-1} C_j^h (2i\pi)^{j-h} \frac{e_j}{j!} = \exp(2i\pi \mathcal{N}_p) \left(\frac{e_h}{h!} \right)$$

pour $h = k - 1$ on obtient

$$e_{k-1} = \exp(2i\pi \mathcal{N}_p)(e_{k-1})$$

et donc $\mathcal{N}_p(e_{k-1}) = 0$.

Supposons montrer que $e_{h+1+v} = \mathcal{N}_p^v(e_{h+1})$ pour tout $v \geq 0$. On aura alors d'après $(*)_h$

$$\sum_{j=h}^{h-1} \frac{j!}{h!(j-h)!} (2i\pi)^{j-h} \frac{e_j}{j!} = \exp(2j\pi \mathcal{N}_p) \left(\frac{e_h}{h!} \right)$$

donc

$$e_h + \sum_{\lambda=1}^{+\infty} \frac{(2i\pi)^\lambda}{\lambda!} \mathcal{N}_p^{\lambda-1}(e_{h+1}) = \exp(2i\pi \mathcal{N}_p)(e_h)$$

en posant

$$\Xi = \sum_{\lambda=1}^{+\infty} \frac{(2i\pi)^\lambda}{\lambda!} \mathcal{N}_p^{\lambda-1}$$

on a donc

$$\Xi(e_{h+1} - \mathcal{N}_p(e_h)) = 0$$

et comme Ξ est inversible (car $\mathcal{N}_p^k = 0$) on a $e_{h+1} = \mathcal{N}_p(e_h)$.

Donc l'application κ est surjective sur $\Gamma^p(u)$. Elle est clairement injective, c'est donc bien un isomorphisme, ce qui achève la preuve du lemme 1. ■

Remarquons avant de continuer que l'opérateur $1 \otimes s(d/ds)$ agit sur

$$\kappa(e) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \mathcal{N}^j(e) \otimes s^u (\text{Log } s)^j$$

par $(\text{Id } u + \mathcal{N}_p) \otimes 1$.

Nous définirons alors l'action de \mathcal{N}_p sur $\Gamma^p(u)$ en posant

$$\mathcal{N}_p(\kappa(e)) = \kappa(\mathcal{N}_p(e)).$$

Maintenant pour chaque $x \in f^{-1}(0)$, $\Gamma^p(u)_x$ s'identifie au sous-espace vectoriel engendré par la base de l'extension « à la Deligne » du sous-fibré de Gauss-Manin de f en x relatif à la valeur spectrale e^{-2inu} de la monodromie ⁽¹³⁾, relatif à la cohomologie de

⁽¹³⁾ Si on a choisi $0 \leq u < 1$ c'est l'extension de Deligne [D.1].

degré p . On a donc un morphisme naturel

$$\Gamma^p(u) \rightarrow \mathcal{H}^p$$

qui s'étend en un K -morphisme à connexion

$$\Gamma^p(u) \otimes_{\mathbb{C}} K \rightarrow \mathcal{H}^p$$

où la connexion sur $\Gamma^p(u) \otimes_{\mathbb{C}} K$ est donnée par

$$\nabla(\varepsilon \otimes g) = (\text{Id } u + \mathcal{N}_p)(\varepsilon) \otimes \frac{g}{s} + \varepsilon \otimes \frac{dg}{ds}.$$

LEMME 2. — *L'image naturelle de $\Gamma^p(u)$ dans \mathcal{H}^p est le sous-faisceau $\text{Ker}(s\nabla - u)^k$ pour $k \geq \dim X$.*

Démonstration. — Il est clair que si $\varepsilon \in \Gamma^p(u)$, on a $(s\nabla - u)^k(\varepsilon) = 0$ puisque $s\nabla$ agit sur $\Gamma^p(u)$ via $(\text{Id } u + \mathcal{N}_p) \otimes 1$ comme on l'a remarqué plus haut.

Prouvons la réciproque; soit donc $\alpha \in \mathcal{H}_x^p$ où $x \in f^{-1}(0)$, vérifiant $(s\nabla - u)^k(\alpha) = 0$. Représentons $(s\nabla - u)^{k-j}(\alpha)$ par une forme méromorphe (relativement fermée) α_j pour $j \in [0, k-1]$. En choisissant ces formes méromorphes convenablement ⁽¹⁴⁾ on aura

$$d\alpha_j = u \frac{df}{f} \wedge \alpha_j + \frac{df}{f} \wedge \alpha_{j-1}, \quad \forall j \in [1, k]$$

avec la convention $\alpha_0 = 0$.

Si $N_k \in \text{End}(\mathbb{C}^k)$ est défini (comme au n° 1) par $N_k(b_j) = b_{j+1}$ pour $j \in [1, k-1]$ et $N_k(b_k) = 0$ où $b_1 \dots b_k$ désigne la base canonique de \mathbb{C}^k , posons

$$\vec{\alpha} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \otimes b_j$$

et

$$\vec{e} = \exp(-(\text{Id } u + N_k) \text{Log } s)(\vec{\alpha}).$$

Posons de même $\vec{e} = \sum_{j=1}^k e_j \otimes b_j$.

On aura alors

$$(1) \quad \nabla e = 0$$

⁽¹⁴⁾ Voir le lemme A de [B.1].

et la monodromie de f ($\text{Log } s \rightarrow \text{Log } s + 2i\pi$) agit sur les e_j via

$$(2) \quad T\vec{e} = \exp(-2i\pi(\text{Id } u + N_k))\vec{e}.$$

Donc $e_1 \dots e_k$ sont des sections horizontales du fibré de Gauss-Manin qui engendrent un sous-espace T-stable. On a donc $e_1 \dots e_k \in \mathbb{H}^p(u)$ et l'action de \mathcal{N}_p sur les e_j coïncide avec celle de N_k . On a donc

$$\mathcal{N}_p(e_j) = e_{j-1}, \quad \forall j \in [1, k]$$

avec la convention $e_0 = 0$.

Comme on a $\vec{\alpha} = \exp((\text{Id } u + \mathcal{N}_p) \text{Log } s)(\vec{e})$, on aura

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \mathcal{N}_p^j(e_k) \otimes s^u (\text{Log } s)^j$$

et donc $\alpha = \kappa(e_k)$ où $e_k \in \mathbb{H}^p(u)$.

On a donc bien $\alpha \in \Gamma^p(u)$ ce qui achève la preuve du lemme 2. ■

En introduisant la décomposition spectrale de la monodromie, on a une décomposition

$$\mathcal{H}^p = \bigoplus_{e^{-2i\pi u} \in \text{Spec } T} \mathcal{H}^p(e^{-2i\pi u})$$

en somme directe de faisceaux de K-espaces vectoriels à connexions. Avec ces notations, il devient clair, compte tenu du lemme 2 et du fait que $\mathcal{H}^p(e^{-2i\pi u})$ est le K-espace vectoriel engendré par $\text{Ker}(s\nabla - u)^k$, que le K-morphisme respectant les connexions

$$\Gamma^p(u) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{H}^p$$

que l'on a introduit ci-dessus, est un isomorphisme (de faisceaux de K-espaces vectoriels à connexions) de $\Gamma^p(u) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ sur $\mathcal{H}^p(e^{-2i\pi u})$. En identifiant, via le lemme 2, $\Gamma^p(u)$ et $\text{Ker}(s\nabla - u)^k$, ceci donne la décomposition

$$(3) \quad \mathcal{H}^p \simeq \bigoplus_{e^{-2i\pi u} \in \text{Spec } T} \mathbb{K} \cdot \Gamma^p(u).$$

Ceci va nous permettre de décrire complètement les solutions de l'équation

$$(s\nabla - u)(z) = a$$

pour $a \in \mathcal{H}^p$ donné et $z \in \mathcal{H}^p$ inconnu.

LEMME 3. — On suppose σ et u dans $[0, 1[$. On suppose que $f(x) = 0$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des germes en x de p -formes méromorphes (à pôles dans $f=0$) vérifiant

$$(4) \quad d\alpha_j = \sigma \frac{df}{f} \wedge \alpha_j + \frac{df}{f} \wedge \alpha_{j-1}, \quad \forall j \in [1, k]$$

avec la convention $\alpha_0 = 0$.

1° Si $\sigma \neq u$ alors pour tous $g_1 \dots g_k \in \mathbb{C}\{s\}[s^{-1}]$ il existe h_1, \dots, h_k dans $\mathbb{C}\{s\}[s^{-1}]$ tels que

si

$$a = \sum_1^k g_j \alpha_j \quad \text{et} \quad b = \sum_1^k h_j \alpha_j$$

on ait

$$db - u \frac{df}{f} \wedge b = \frac{df}{f} \wedge a.$$

2° Si $\sigma = u$ la conclusion reste valable dès que g_1, \dots, g_k n'ont pas de terme constant dans leur développement de Laurent en 0 (i.e. par rapport à s). Les h_j peuvent alors être choisis avec la même propriété.

Démonstration. — La relation

$$db - u \frac{df}{f} \wedge b = \frac{df}{f} \wedge a$$

se traduit par

$$\delta(\sum h_j \alpha_j) = \frac{df}{f} \wedge (\sum g_j \alpha_j)$$

où

$$\delta z = dz - u \frac{df}{f} \wedge z.$$

Comme on a

$$\delta(\xi \cdot z) = (\delta \xi) \cdot z + \xi \cdot dz$$

pour $\xi \in \mathbb{C}\{s\}[s^{-1}]$ et $z \in \Omega^p[f^{-1}]$, où on a posé

$$\delta \xi = \frac{d\xi}{ds} - u \frac{ds}{s} \wedge \xi,$$

cela donne en utilisant (4) (avec la convention $h_{k+1} = 0$) :

$$\frac{df}{f} \wedge \sum_{j=1}^k \left(s \frac{dh_j}{ds} + (\sigma - u) h_j + h_{j+1} \right) \alpha_j = \frac{df}{f} \wedge \left(\sum_1^k g_j \alpha_j \right).$$

Il suffit donc de trouver des $h_1 \dots h_k$ dans $\mathbb{C}\{s\}[s^{-1}]$ vérifiant :

$$(5) \quad s \frac{dh_j}{ds} + (\sigma - u)h_j + h_{j+1} = g_j.$$

Posons $g_j = \sum_{m \geq m_0} g_j^m s^m$ et cherchons h_j sous la forme

$$h_j = \sum_{m \geq m_0} h_j^m s^m.$$

L'équation (5) conduit alors à

$$(6) \quad (m + \sigma - u)h_j^m + h_{j+1}^m = g_j^m.$$

Pour $\sigma \neq u$ on a $\forall m \in \mathbb{Z}, m + \sigma - u \neq 0$ (et cela reste minoré en valeur absolue), donc on a existence et unicité des h_j^m . La convergence de $\sum_m g_j^m s^m$ donnant celle de $\sum_m h_j^m s^m$.

Pour $\sigma = u$, seule l'équation pour $m=0$ posera un problème, mais la condition $g_j^0 = 0$ pour $j=1, 2, \dots, k$ assure l'existence et l'unicité de la solution avec $h_j^0 = 0$ pour $j=1, 2, \dots, k$. On obtient également la convergence dans ce cas des séries $\sum_m h_j^m s^m$ de celle des séries $\sum_m g_j^m s^m$.

Ceci achève la preuve du lemme 3.

COROLLAIRE. — Notons par $K^* = \{g \in \mathbb{C}\{s\}[s^{-1}] / g(0) = 0\}$ où $g(0)$ désigne le terme constant du développement de g en série de Laurent en 0.

Alors pour tout $a \in \left(\bigoplus_{\lambda \neq e^{-2i\pi u}} \mathcal{H}^p(\lambda) \right) \oplus K^* \Gamma^p(u)$ il existe

$$b \in \left(\bigoplus_{\lambda \neq e^{-2i\pi u}} \mathcal{H}^p(\lambda) \right) \oplus K^* \Gamma^p(u)$$

tel que

$$(s\nabla - u)(b) = a.$$

Donc pour tout tel a et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe

$$b_k \in \left(\bigoplus_{\lambda \neq e^{-2i\pi u}} \mathcal{H}^p(\lambda) \right) \oplus K^* \Gamma^p(u)$$

tel que

$$(s\nabla - u)^k(b_k) = a.$$

Autrement dit on aura, $\forall k \in \mathbb{N}$, les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^p / (s\nabla - u)^k(\mathcal{H}^p) &\simeq \Gamma^p(u) / (s\nabla - u)^k(\Gamma^p(u)) \\ &\simeq H^p(u) / \text{Im } \mathcal{N}_p^k. \end{aligned}$$

Preuve. — Ceci n'est qu'une reformulation du lemme 3 utilisant les résultats précédents, puisque les décompositions

$$\mathcal{H}^p \simeq \bigoplus_{\lambda} \mathcal{H}^p(\lambda)$$

et

$$\mathcal{H}^p(e^{-2i\pi u}) = K^* \Gamma^p(u) \oplus \Gamma^p(u)$$

respectent l'action de $s\nabla - u$.

a.

N° 3. Notre but maintenant de mettre en évidence des relations précises entre la cohomologie du complexe $(\Omega^*(k), \delta_u^*)$ défini au n° 1 et celle du complexe de De Rham relatif $(\Omega_{X/f}^*, d)$ qui a été décrite au n° 2.

LES MORPHISMES i^* ET r^* . — Définissons $i : \Omega_{X/f}^* \rightarrow \Omega^{*+1}(k)$ en posant

$$i(w) = \left(\frac{df}{f} \wedge w \right) \otimes b_1.$$

On utilise ici les notations du n° 1; on remarquera que, bien que w soit une forme relative, $df/f \wedge w$ est une forme absolue. On vérifie immédiatement que $\delta_u \circ i + i \circ d = 0$ et i^* définit donc un morphisme de complexes de degré +1.

Nous noterons encore par i^* le morphisme induit sur les faisceaux de cohomologie

$$i^p : \mathcal{H}^p \rightarrow h^{p+1}(k).$$

Définissons $r^* : \Omega^*(k) \rightarrow \Omega_{X/f}^*$ en posant

$$r^*(\sum w_i \otimes b_i) = w_k.$$

On a

$$r(\delta_u(\sum w_i \otimes b_i)) = dw_k - u \frac{df}{f} \wedge w_k - \frac{df}{f} \wedge w_{k-1}$$

qui coïncide avec dw_k dans $\Omega_{X/f}^*$; la relation

$$r \circ \delta_u = d \circ r$$

montre que r^* est un morphisme de complexes de degré 0.

Remarquons enfin que le composé $i^* \circ r^*$ coïncide avec le morphisme $\tau_k^* : \Omega^*(k) \rightarrow \Omega^{*+1}(k)$ de degré +1 introduit au n° 1 et que le composé $r^* \circ i^*$ est nul.

PROPOSITION 1. — Soit X une variété complexe connexe et soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe admettant au plus la valeur critique 0 et non identiquement nulle. On a pour

tout $u \in \mathbb{C}$ tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$ une suite exacte de faisceaux sur $Y = f^{-1}(0)$:

$$\mathcal{H}^{p-1} \xrightarrow{i^{p-1}} h^p(k) \xrightarrow{r^p} \mathcal{H}^p$$

où l'on a noté par i^* et r^* les morphismes induits en cohomologie par i^* et r^* .

On a de plus les isomorphismes de faisceaux

$$\text{Im } i^{p-1} \simeq \mathcal{H}^{p-1} / (s\nabla - u)^k (\mathcal{H}^{p-1}) \simeq H^{p-1}(u) / \text{Im } \mathcal{N}_{p-1}^k$$

et

$$\text{Im } r^p \simeq \text{Ker } (s\nabla - u)^k \simeq \text{Ker } \mathcal{N}_p^k \subset H^p(u)$$

où

$$\mathcal{N}_*^k = -\frac{1}{2i\pi} \text{Log}(e^{-2i\pi u} \Gamma / H^*(u)).$$

On a donc une suite exacte courte « naturelle »

$$0 \rightarrow H^{p-1}(u) / \text{Im } \mathcal{N}_{p-1}^k \xrightarrow{i^p} h^p(k) \xrightarrow{r^p(k)} \text{Ker } \mathcal{N}_p^k \rightarrow 0.$$

Remarque. — Si on suppose que, sous les hypothèses de la proposition 1, on a $\mathcal{N}_p^k = 0$ sur $H^p(u)$, les deux suites exactes

$$H^{p-1}(u) \xrightarrow{i^{p-1}} h^p(k) \xrightarrow{r^p} H^p(u) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow H^p(u) \xrightarrow{i^p} h^{p+1}(k) \xrightarrow{r^{p+1}} H^{p+1}(u)$$

se recollent en la suite exacte

$$H^{p-1}(u) \xrightarrow{i^{p-1}} h^p(k) \xrightarrow{\tau_k^p} h^{p+1}(k) \xrightarrow{r^{p+1}} H^{p+1}(u).$$

Si on a $H^{p-1}(u) = 0$ et $H^{p+1}(u) = 0$ sur X , τ_k^p sera donc un isomorphisme.

Preuve de la proposition 1. — (a) $\text{Ker } i^{p-1} = \text{Im } ((s\nabla - u)^k : \mathcal{H}^{p-1} \rightarrow \mathcal{H}^{p-1})$.

Si $w \in \Omega_{X/f}^{p-1}$ vérifie $i^{p-1}(w) = 0$ dans $h^p(k)$, il existe $v_1 \dots v_k \in \Omega^{p-1}[f^{-1}]$ vérifiant

$$(*) \quad \delta \left(\sum_k v_j \otimes b_j \right) = \left(\frac{df}{f} \wedge w \right) \otimes b_1.$$

On a alors

$$(**) \quad dv_j = u \frac{df}{f} \wedge v_j + \frac{df}{f} \wedge v_{j-1}$$

pour $j \in [1, k]$ avec la convention $v_0 = w$. On en déduit que $v_k \in \mathcal{H}^{p-1}$ et que $(s\nabla - u)^k v_k = w$ dans \mathcal{H}^{p-1} .

Réciproquement si $w = (s\nabla - u)^k(v)$ où $v \in \mathcal{H}^{p-1}$, choisissons $v_j \in \Omega_X^{p-1}[f^{-1}]$ induisant $(s\nabla - u)^{k-j}(v)$ et vérifiant (**). On en déduit (*) et donc que $i^{p-1}(w) = 0$.

(b) $\text{Im } r^p = \text{Ker}((s\nabla - u)^k : \mathcal{H}^p \rightarrow \mathcal{H}^p)$.

Par définition de r^p , si $w \in h^p(k)$, on a $(s\nabla - u)^k(w_k) = 0$ dans \mathcal{H}^p .

La réciproque est donnée par le lemme A de [B.1], compte tenu de l'isomorphisme $\kappa : H^p(u) \rightarrow \Gamma^p(u)$ et du lemme 2 du n° 2.

(c) $\text{Im } i^{p-1} = \text{Ker } r^p$.

Si $w \in \mathcal{H}^{p-1}$ on a $df/f \wedge i^{p-1}(w)_k = 0$, ce qui montre que $i^{p-1}(w)_k = r^p(i^{p-1}(w)) = 0$ dans \mathcal{H}^p et donne l'inclusion $\text{Im } i^{p-1} \subset \text{Ker } r^p$.

Réciproquement, considérons $\tilde{w} \in h^p(k)$ vérifiant $r^p(\tilde{w}) = 0$. Représentons \tilde{w} par un cocycle $w = \sum w_j \otimes b_j \in \Omega^p(k)$, $\delta_u w = 0$. Comme $r^p(\tilde{w}) = w_k$ induit 0 dans \mathcal{H}^p , on peut trouver $a, b \in \Omega^{p-1}[f^{-1}]$ vérifiant

$$w_k = da + \frac{df}{f} \wedge b.$$

Le résultat découle alors des deux lemmes suivants :

LEMME 4. — Si $a \in \Omega^{p-1}(k)$ vérifie $(df/f) \wedge da = 0$, alors la classe de $(df/f) \wedge a$ dans $h^p(k)$ est dans le sous-faisceau $i(\mathcal{H}^{p-1})$.

Démonstration. — Par linéarité, il suffit de voir que si $a_j = 0$ pour $j \neq j_0$ et si $da_{j_0} \wedge df/f = 0$ alors la classe de $(df/f) \wedge a$ dans $h^p(k)$ est bien dans $i(\mathcal{H}^{p-1})$, ce que nous allons prouver par récurrence sur j_0 .

Pour $j_0 = 1$,

$$\frac{df}{f} \wedge a = \left(\frac{df}{f} \wedge a_1 \right) \otimes b_1 \quad \text{et} \quad \frac{df}{f} \wedge da_1 = 0$$

par hypothèse; c'est un élément de $i(\mathcal{H}^{p-1})$ par définition [$a_1 \in \mathcal{H}^{p-1}$ et $i(a_1) = ((df/f) \wedge a_1) \otimes b_1$].

Supposons le résultat établi pour $1 \leq j_0 \leq k-1$ et montrons-le pour $j_0 + 1$. Définissons b dans $\Omega^{p-1}(k)$ par $b_j = 0$ pour $j \neq j_0$ et $b_{j_0} = -a_{j_0+1}$. Alors on a

$$(\delta b)_{j_0} = -da_{j_0+1} + u \frac{df}{f} \wedge a_{j_0+1}$$

$$(\delta b)_{j_0+1} = \frac{df}{f} \wedge a_{j_0+1}$$

et $(\delta b)_j = 0$ pour $j \neq j_0, j_0 + 1$.

Donc

$$\left(\frac{df}{f} \wedge a - \delta b \right)_j = 0 \quad \text{pour } j \neq j_0$$

et

$$\left(\frac{df}{f} \wedge a - \delta b \right)_{j_0} = da_{j_0+1} - u \frac{df}{f} \wedge a_{j_0+1}.$$

Posons $da_{j_0+1} = (df/f) \wedge \alpha$. On aura alors

$$\left(\frac{df}{f} \wedge a - \delta b \right)_j = 0 \quad \text{pour } j \neq j_0$$

et

$$\left(\frac{df}{f} \wedge a - \delta b \right)_{j_0} = \frac{df}{f} \wedge \gamma \quad \text{avec } \gamma = \alpha - ua_{j_0+1}$$

et

$$\frac{df}{f} \wedge d\gamma = \frac{df}{f} \wedge d\alpha - u \frac{df}{f} \wedge da_{j_0+1} = 0$$

car

$$\frac{df}{f} \wedge d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{f} \wedge da_{j_0+1} = 0$$

d'après notre hypothèse.

L'hypothèse de récurrence sur j_0 donne alors que la classe dans $h^p(k)$ de $(df/f) \wedge a - \delta b$ est dans $i(\mathcal{H}^{p-1})$; c'est donc aussi le cas pour $(df/f) \wedge a$ et le lemme 4 est démontré.

LEMME 5. — Soit $w \in \Omega^p(k)$ vérifiant $\delta w = 0$ et $w_k = da + (df/f) \wedge b$ avec $a, b \in \Omega^{p-1}[f^{-1}]$. Alors la classe de w dans $h^p(k)$ est dans $i(\mathcal{H}^{p-1})$.

Démonstration. — La relation $\delta w = 0$ donne en particulier

$$dw_k - u \frac{df}{f} \wedge w_k - \frac{df}{f} \wedge w_{k-1} = 0$$

et comme $w_k = da + (df/f) \wedge b$, on aura

$$(1) \quad \frac{df}{f} \wedge (d(ua + b) + w_{k-1}) = 0.$$

Définissons $\xi \in \Omega^{p-1}(k)$ en posant si $k=1$, $\xi = a$ et si $k \geq 2$, $\xi_k = a$, $\xi_{k-1} = -(ua+b)$ et $\xi_j = 0$ si $j \leq k-2$.

On a alors pour $k=1$, $w = \delta\xi + (df/f) \wedge (ua+b)$ et comme (1) montre que $ua+b \in \mathcal{H}^{p-1}$, on a $w = i(ua+b)$ dans $h^p(1)$.

Pour $k \geq 2$ on a

$$(2) \quad w = \delta(\xi) + w'$$

avec

$$\begin{aligned} w'_k &= w_k - \left(da - u \frac{df}{f} \wedge a - \frac{df}{f} \wedge [-(ua+b)] \right) \\ &= w_k - da - \frac{df}{f} \wedge b = 0 \\ w'_{k-1} &= w_{k-1} - \delta(-(ua+b)) = w_{k-1} + \delta(ua+b) \quad (1^5) \end{aligned}$$

et

$$w'_j = w_j \quad \text{pour } j \leq k-2.$$

Alors $v \in \Omega^p(k-1)$ défini par

$$(3) \quad \begin{cases} v_{k-1} = w'_{k-1} = w_{k-1} + \delta(ua+b) \\ v_j = w'_j = w_j \quad \text{pour } j \leq k-2 \end{cases}$$

vérifie $\delta v = 0$ et $v_{k-1} = da' + (df/f) \wedge b'$ puisque $w_k = 0$ dans \mathcal{H}^p et $w_{k-1} = s \nabla w_k - u w_k$ implique $w_{k-1} = 0$ dans \mathcal{H}^p . Alors par récurrence sur k (on a déjà traité le cas $k=1$) on aura $v \in i(\mathcal{H}^{p-1})$ dans $h^p(k-1)$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \Omega^{p-1}[f^{-1}]$ telle que $(df/f) \wedge d\alpha = 0$ et $\beta' \in \Omega^{p-1}(k-1)$ vérifiant

$$(4) \quad v = \left(\frac{df}{f} \wedge \alpha \right) \otimes b_1 + \delta\beta'$$

dans $\Omega^p(k-1)$. Notons par β l'élément de $\Omega^p(k)$ défini par $\beta_k = 0$ et $\beta_j = \beta'_j$ si $1 \leq j \leq k-1$. Les relations (2), (3) et (4) donnent dans $\Omega^p(k)$

$$(5) \quad w = \delta(\xi) + \left(\frac{df}{f} \wedge \alpha \right) \otimes b_1 + \delta\beta + \gamma$$

où

$$\gamma_j = 0 \quad \text{pour } j \neq k$$

(¹⁵) Ici δ dénote l'opérateur « scalaire » $d - u(df/f) \wedge$.

et où

$$\gamma_k = -\frac{df}{f} \wedge \beta'_{k-1}.$$

Comme on a d'après (4)

$$\begin{aligned} \frac{df}{f} \wedge d\beta'_{k-1} &= \frac{df}{f} \wedge v_{k-1} = \frac{df}{f} \wedge (w_{k-1} + \delta(au + b)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après la relation (1), le lemme 4 donne $\gamma \in i(\mathcal{H}^{p-1})$ dans $h^p(k)$, ce qui achève la démonstration du lemme 5 par récurrence sur k .

Comme conséquence immédiate de la proposition 1, on obtient le

COROLLAIRE. — *Les faisceaux $h^i(k)$ sur $f^{-1}(0)$ sont \mathbb{C} -constructibles. De plus le support de $h^i(k)$ est de codimension au moins égale à i dans X .*

Preuve. — Ceci résulte de la constructibilité de la cohomologie de $R\psi$ qui en degré p est égale à H^p (avec nos notations) ainsi que de la constructibilité de l'automorphisme de monodromie sur ces faisceaux.

Remarque. — On peut facilement prouver le corollaire ci-dessus en utilisant directement le théorème de constructibilité de M. Kashiwara [K.1] : il n'est pas difficile d'identifier le complexe de De Rham du module holonôme régulier

$$\mathcal{M} = \left(\bigoplus_{j=0}^{k-1} D_X f^{-u} (\text{Log } f)^j \right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[f^{-1}]$$

au complexe $(\Omega^*(k), \delta)$.

Nous allons compléter la description du faisceau $i(\mathcal{H}^{p-1})$:

LEMME 6. — *Pour $k' \in \mathbb{N}^*$ l'image du morphisme (défini au n° 1)*

$$\tau_{k',k} : h^{p-1}(k') \rightarrow h^p(k)$$

est contenue dans $i(\mathcal{H}^{p-1})$ et correspond via l'isomorphisme

$$i(\mathcal{H}^{p-1}) \simeq H^{p-1}(u)/\text{Im } \mathcal{N}_{p-1}^k$$

décrit dans la proposition 1 au faisceau

$$\text{Ker } \mathcal{N}_{p-1}^{k'} / \text{Ker } \mathcal{N}_{p-1}^{k'} \cap \text{Im } \mathcal{N}_{p-1}^k.$$

Si on a $H^{p-2}(u) = 0$ et $\mathcal{N}_{p-1}^k = \mathcal{N}_{p-1}^{k'} = 0$, alors $\tau_{k',k}$ est un isomorphisme de $h^{p-1}(k')$ sur $i(\mathcal{H}^{p-1}) \subset h^p(k)$, donc sur $H^{p-1}(u)$.

Preuve. — Il résulte clairement de la définition de $\tau_{k',k}$ et du lemme 4 que l'image de $\tau_{k',k}$ est contenue dans $i(\mathcal{H}^{p-1}) \subset h^p(k)$. De plus si $a \in h^{p-1}(k')$, on a $i(a_{k'}) = \tau_{k',k}(a)$ et donc via l'isomorphisme

$$i(\mathcal{H}^{p-1}) \simeq H^{p-1}(u)/\text{Im } \mathcal{N}_{p-1}^k$$

$\tau_{k',k}(a)$ s'envoie dans $\text{Ker } \mathcal{N}_{p-1}^{k'}$. Réciproquement tout élément de $\text{Ker}(s\nabla - u)^{k'}$ dans \mathcal{H}^{p-1} est induit par $a_{k'}$ où $a \in h^{p-1}(k')$ d'après lemme A de [B. 1]. Ceci prouve la première assertion du lemme 6.

Si on a $H^{p-2}(u) = 0$, alors la proposition 1 affirme que $r^{p-1}(k') : h^{p-1}(k') \rightarrow \text{Ker } \mathcal{N}_{p-1}^{k'}$ est un isomorphisme. Si $\mathcal{N}_{p-1}^k = 0$ on a donc des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} h^{p-1}(k') & \xrightarrow{r^{p-1}(k')} & \Gamma^{p-1}(u) \xrightarrow{\kappa^{-1}} H^p(u) \\ & \searrow \tau_{k',k} & \downarrow i \\ & & i(\mathcal{H}^{p-1}) \subset h^p(k) \end{array}$$

ce qui achève la preuve du lemme 6.

LEMME 7. — On a les diagrammes commutatifs suivants, qui montreront la compatibilité des morphismes $r^p(k)$ avec les morphismes $j_{k,k+k'}$ et ${}_k\mathcal{N}$ que l'on a définis sur les faisceaux h au n° 1 :

$$\begin{array}{ccc} h^p(k) & \xrightarrow{r^p(k)} & \text{Ker } \mathcal{N}_p^k & h^p(k) & \xrightarrow{r^p(k)} & \text{Ker } \mathcal{N}_p^k \\ \downarrow j_{k,k+k'} & & \downarrow i & \downarrow j_{k,k'} & & \downarrow i_p \\ h^p(k+k') & \xrightarrow{r^p(k+k')} & \text{Ker } \mathcal{N}_p^{k+k'} & h^p(k) & \xrightarrow{r^p(k)} & \text{Ker } \mathcal{N}_p^k \end{array}$$

où i est l'inclusion évidente.

Démonstration. — Si $a \in h^p(k)$ on a

$$j_{k,k+k'}(a) = \begin{pmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$r^p(k+k')(j_{k,k+k'}(a)) = \kappa^{-1}(a_k) = r^p(k)(a).$$

De même ${}_k\mathcal{N}(a) = \sum_1^{k-1} a_i \oplus b_{i+1}$ et donc $r^p(k)({}_k\mathcal{N}(a)) = \kappa^{-1}(a_{k-1})$.

Comme on a $\mathcal{N}_p = s(d/ds) - u$ sur $\Gamma^p(u)$ (voir le n° 2), on obtient

$$\mathcal{N}_p(\kappa^{-1}(a_k)) = \kappa^{-1}(a_{k-1})$$

ce qui prouve la commutativité du second diagramme.

b.

N° 1. Les faisceaux $\Omega^p(k)$ ne sont pas cohérents sur X. Pour étudier les dégénérescences de suites spectrales, il sera plus commode de remplacer le complexe $(\Omega^*(k), \delta_u^*)$ par un sous-complexe quasi-isomorphe dont les faisceaux sont cohérents, ce qui permettra d'utiliser le théorème B de H. Cartan.

Introduisons pour $q \in \mathbb{N}$ les faisceaux cohérents

$$\Omega^p(k, q) = \frac{1}{f^{p+q}} \Omega_X^p \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^k.$$

On obtient ainsi un sous-complexe $(\Omega^*(k, q), \delta_u^*)$ du complexe $(\Omega^*(k), \delta_u^*)$. Il résulte alors du théorème de comparaison de A. Grothendieck ([G], [BJ], p. 276 adapté à un système local) que l'on a la

PROPOSITION 1. — *Supposons $k \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{C}$ fixés. Pour tout compact K de X, il existe $q(K) \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $q \geq q(K)$ l'inclusion*

$$(\Omega^*(k, q), \delta_u^*) \rightarrow (\Omega^*(k), \delta_u^*)$$

soit un quasi-isomorphisme au voisinage de K.

Passons à la preuve de la proposition 2 :

Comme, sous l'hypothèse de la proposition 2 on peut toujours remplacer X par un ouvert relativement compact dans X, la première assertion se déduit immédiatement de la proposition 1 [on utilise ici le fait que $H^0(X, \Omega^*(k)) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ q}} H^0(X, \Omega^*(k, q))$, ce qui

résulte du fait que $\{f=0\}$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles dans X].

Pour prouver la seconde assertion de la proposition 2, remarquons déjà que les faisceaux constructibles $h^j(k)$ sont acycliques sur X car à support dans $S^{(16)}$. On a donc $H^i(X, h^j(k)) = 0, \forall i \geq 1$, ce qui donne les isomorphismes

$$\mathbb{H}^j(X, \Omega^*(k), \delta_u^*) \simeq H^0(X, h^j(k)), \quad \forall j \geq 0.$$

En particulier la suite exacte

$$0 \rightarrow h^{n-1}(k) \xrightarrow{\tau_k^{n-1}} h^n(k) \xrightarrow{r^n(k)} \text{Ker } \mathcal{N}^k \rightarrow 0$$

qui résulte, grâce aux hypothèses $k \geq k_0$ et $H^{n-2}(u) = 0$, de la remarque qui suit la proposition 1 du paragraphe a, n° 3, donnera via les isomorphismes ci-dessus (qui sont compatibles avec le morphisme de complexe τ_k) la suite exacte désirée :

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^{n-1}(X, \Omega^*(k), \delta_u^*) \xrightarrow{\tau_k} \mathbb{H}^n(X, \Omega^*(k), \delta_u^*) \xrightarrow{r_k} \text{Ker } \mathcal{N}^k \rightarrow 0,$$

(16) Rappelons que S est une union finie de disques ayant leurs centres en commun.

ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

b.

N° 2. Nous nous proposons maintenant de démontrer la proposition 5. Commençons par un résultat d'algèbre homologique.

PROPOSITION 2. — Soit $n \geq 1$ un entier, et soit Z un espace topologique. Soit (Ω^\bullet, δ) un complexe de faisceaux de groupes abéliens sur Z vérifiant les propriétés suivantes :

H. 1° $\Omega^i = 0$ pour $i < 0$ et $H^k(Z, \Omega^i) = 0, \forall k \geq 1, \forall i \in \mathbb{N}$.

H. 2° Si h^j désigne le j -ième faisceau de cohomologie du complexe (Ω^\bullet, δ) on a :

a. $h^j = 0$ pour $j \neq n-1, n$;

b. $H^k(Z, h^j) = 0, \forall k \geq 2$ et $\forall j$.

On a alors les conclusions suivantes :

C.

1° $\mathbb{H}^j(Z, \Omega^\bullet, \delta) \simeq H^j(H^0(Z, \Omega^\bullet), \delta), \forall j \geq 0$;

2° $\mathbb{H}^{n-1}(Z, \Omega^\bullet, \delta) \simeq H^0(Z, h^{n-1})$;

3° $\mathbb{H}^{n+1}(Z, \Omega^\bullet, \delta) \simeq H^1(Z, h^n)$;

4° on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow H^1(Z, h^{n-1}) \rightarrow \mathbb{H}^n(Z, \Omega^\bullet, \delta) \rightarrow H^0(Z, h^n) \rightarrow 0$$

5° $\mathcal{H}^i(Z, \Omega^\bullet, \delta) = 0$ pour $i \neq n-1, n, n+1$.

Si de plus, on suppose donné un morphisme $\tau: \Omega^\bullet \rightarrow \Omega^{\bullet+1}$ vérifiant :

H. 3° $\tau_0 \delta + \delta_0 \tau = 0$ et τ induit un isomorphisme de h^{n-1} sur h^n , alors la suite exacte courte de C. 4° est scindée par un morphisme

$$\theta: \mathbb{H}^n(Z, \Omega^\bullet, \delta) \rightarrow H^1(Z, h^{n-1})$$

qui se déduit naturellement de τ .

Démonstration. — L'hypothèse H. 1° donne déjà la dégénérescence de la suite spectrale :

$${}^p E_2^{p,q} = H^q(H^p(Z, \Omega^\bullet), \delta) = 0 \quad \text{si } q \neq 0$$

qui converge vers $H^{p+q}(Z, \Omega^\bullet, \delta)$. On a donc ainsi C. 1°.

L'hypothèse H. 2°, a montre que la seconde suite spectrale :

$${}'' E_2^{p,q} = H^q(Z, h^p) = 0 \quad \text{si } q \neq 0, 1$$

qui converge également vers $H^{p+q}(Z, \Omega^\bullet, \delta)$ est sphérique. On a donc la longue suite exacte (voir [Go.], p. 85)

$$\dots \rightarrow H^0(Z, h^j) \rightarrow H^1(Z, h^j) \rightarrow \mathbb{H}^{j+1}(Z, \Omega^\bullet, \delta) \rightarrow H^0(Z, h^{j+1}) \rightarrow \dots$$

qui donne 5° grâce à H. 2°, a. Il reste donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^{n-1} \rightarrow H^0(Z, h^{n-1}) \xrightarrow{\partial_1} H^1(Z, h^{n-1}) \rightarrow \mathbb{N}^n \rightarrow H^0(Z, h^n) \xrightarrow{\partial_2} H^1(Z, h^n) \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow 0.$$

Nous allons montrer que ∂_1 et ∂_2 sont nuls, ce qui prouvera C. 2°, 3°, 4°. Notons par K_i le noyau de $\delta^i: \Omega^i \rightarrow \Omega^{i+1}$. On a alors les suites exactes de faisceaux :

$$0 \rightarrow K_{i-1} \rightarrow \Omega^{i-1} \rightarrow K_i \rightarrow 0$$

pour $i \leq n-2$ puisque la nullité de h^i donne l'égalité $\text{Im } \delta^{i-1} = K_i$. Comme on a $K_0 = h^0 = 0$ pour $n \geq 2$, l'acyclicité sur Z des faisceaux Ω^i donne celle des K_i pour $i \leq n-2$ (assertion évidente pour $n=1$). La suite exacte

$$0 \rightarrow K_{n-2} \rightarrow \Omega^{n-2} \rightarrow \Omega^{n-2}/K_{n-2} \rightarrow 0$$

donne alors l'acyclicité sur Z du faisceau $\Omega^{n-2}/K_{n-2} \xrightarrow{\delta} \text{Im } \delta^{n-2}$. Alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Im } \delta^{n-2} \rightarrow K_{n-1} \rightarrow h^{n-1} \rightarrow 0$$

donne un morphisme surjectif

$$H^0(Z, K_{n-1}) \rightarrow H^0(Z, h^{n-1}).$$

On déduit alors de C. 1° que la flèche

$$\mathbb{H}^{n-1}(Z, \Omega^*, \delta) \rightarrow H^0(Z, h^{n-1})$$

est surjective, et donc que $\partial_1 = 0$.

Pour montrer la nullité de ∂_2 il suffit de montrer (voir ci-dessus) la surjectivité de l'application naturelle $H^0(Z, K_n) \rightarrow H^0(Z, h^n)$. La suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega^{n-1}/K_{n-1} \rightarrow K_n \rightarrow h^n \rightarrow 0$$

montre qu'il suffit de prouver la nullité de $H^1(Z, \Omega^{n-1}/K_{n-1})$, et la suite exacte

$$0 \rightarrow K_{n-1} \rightarrow \Omega^{n-1} \rightarrow \Omega^{n-1}/K_{n-1} \rightarrow 0$$

montre qu'il suffit de prouver la nullité de $H^2(Z, K_{n-1})$ puisque Ω^{n-1} est acyclique sur Z . Mais la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega^{n-2}/K_{n-2} \rightarrow K_{n-1} \rightarrow h^{n-1} \rightarrow 0$$

et l'acyclicité sur Z de Ω^{n-2}/K_{n-2} que l'on a obtenue plus haut, montrent que la nullité de $H^2(Z, h^{n-1})$ qui est partie de notre hypothèse H. 2°, entraîne celle de $H^2(Z, K_{n-1})$. Ceci montre que $\partial_2 = 0$.

Il nous reste à construire le scindage θ sous les hypothèses supplémentaires H. 3°.

D'après ce qui précède et le fait que τ soit un morphisme de complexe de degré 1, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{H}^{n-1}(Z, \Omega^*, \delta) & \xrightarrow{r_0} & \mathbb{H}^0(Z, h^{n-1}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau_1 & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{H}^1(Z, h^{n-1}) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{H}^n(Z, \Omega^*, \delta) & \xrightarrow{r_1} & \mathbb{H}^0(Z, h^n) \rightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et où τ_1 est un isomorphisme, ce qui donne immédiatement le scindage désiré en posant

$$\theta = 1 - \tau \circ (r_0^{-1}) \circ (\tau_1^{-1}) \circ r_1$$

en effet, par commutativité du diagramme ci-dessus on a $r_1 \circ \theta = 0$ et donc θ prend bien ses valeurs dans $\mathbb{H}^1(Z, h^{n-1})$. C'est bien un scindage car on a $\theta \circ \rho = \rho$ puisque $r_1 \circ \rho = 0$.

Ce scindage correspond à la construction suivante : comme on a

$$\mathbb{H}^n(Z, \Omega^*, \delta) \simeq \mathbb{H}^0(Z, K_n) / \delta \mathbb{H}^0(Z, \Omega^{n-1})$$

tout $e \in \mathbb{H}^n(Z, \Omega^*, \delta)$ peut se représenter par $w \in \mathbb{H}^0(Z, \Omega^n)$ vérifiant $\delta w = 0$. Comme $\tau : h^{n-1} \rightarrow h^n$ est un isomorphisme par hypothèse, il existe $\tilde{a} \in \mathbb{H}^0(Z, h^{n-1})$ tel que $\tau(\tilde{a}) = \tilde{w}$, où $\tilde{w} = r_1(e)$ est l'image de w dans $\mathbb{H}^0(Z, h^n)$. Si $a \in \mathbb{H}^0(Z, K_{n-1})$ a pour image \tilde{a} dans $\mathbb{H}^0(Z, h^{n-1})$ [on a vu plus haut la surjectivité de $\mathbb{H}^0(Z, K_{n-1}) \rightarrow \mathbb{H}^0(Z, h^{n-1})$], on aura localement sur Z

$$w|_{Z_\sigma} = \tau(a)|_{Z_\sigma} + \delta b_\sigma$$

où $b_\sigma \in \mathbb{H}^0(Z_\sigma, \Omega^{n-1})$. Alors $b_\sigma - b_{\sigma'}$ définit un 1-cocycle à valeurs dans h^{n-1} , et on vérifie facilement que l'image de ce cocycle dans $\mathbb{H}^1(Z, h^{n-1})$ est $\theta(e)$.

Remarque. — Il est facile de voir que la considération du diagramme commutatif déduit de τ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{H}^1(Z, h^{n-1}) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{H}^n(Z, \Omega^*, S) & \xrightarrow{r_1} & \mathbb{H}^0(Z, h^n) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \tau_1 & & \downarrow \tau & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{H}^1(Z, h^n) & \xrightarrow{\rho_1} & \mathbb{H}^{n+1}(Z, \Omega^*, \delta) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

conduit à un autre scindage de ρ . Il est facile de vérifier que si on a $\tau \circ \tau = 0$ alors ces deux scindages coïncident au signe près. La relation $\tau \circ \tau = 0$ sera effectivement vérifiée dans les situations où nous utiliserons la proposition précédente.

Plaçons nous maintenant sous les hypothèses standards. Quitte à rétrécir X , nous pouvons supposer qu'il existe un entier q (dépendant de k) tel que le morphisme de

complexes de faisceaux

$$(\Omega^*(k, q), \delta) \rightarrow (\Omega^*(k), \delta)$$

soit un quasi-isomorphisme sur X , d'après la proposition 1 précédente. Montrons qu'alors les hypothèses H. 1°, 2° et 3° de la proposition 2 sont satisfaites pour le complexe $(\Omega^*(k, q), \delta)$ restreint (topologiquement) à $S^* = S - \{0\}$, dès que l'on a $k \geq k_0$.

D'abord S^* est de Stein et admet donc une base de voisinage de Stein dans X d'après [S]. Les faisceaux $\Omega^*(k, q)$ étant cohérents sur X , l'hypothèse H. 1° résulte donc du théorème B de H. Cartan.

L'hypothèse H. 2°, *a* est conséquence des hypothèses standards d'après le paragraphe *a* proposition 1, et H. 2°, *b* résulte de la constructibilité des faisceaux $h^j(k)$ et du fait que S^* est une réunion disjointe de disques épointés. Vérifions H. 3° : la première assertion est une conséquence facile de la définition de τ_k ; la proposition 1 du paragraphe *a* et la remarque qui suit donnent que

$$\tau_k: h^{n-1}(k) \xrightarrow{\sim} h^n(k) \quad \text{pour } k \geq k_0$$

est un isomorphisme sur S^* , d'où la seconde assertion de H. 3°.

La proposition 5 résulte alors de la proposition 2 précédente.

b.

N° 3. L'objet de ce numéro est de prouver les assertions de la définition 6 et de la remarque qui la suit. Ceci nous conduira à détailler la construction des applications \tilde{b}_k et $\tilde{\theta}_k$ de manière explicite.

Nous prouverons « dans la foulée » les formules suivantes ($k \geq k_0, k' \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{k+k'} &= \tilde{b}_k \circ \mathcal{N}_n^{k'} & \text{sur } \text{Ker } \mathcal{N}_n^{k+k'} \\ \tilde{\theta}_{k+k'} &= \tilde{\theta}_k & \text{sur } \text{Ker } \mathcal{N}_n^k \end{aligned}$$

qui précisent la remarque qui suit la définition 6.

On se place sous les hypothèses standards et on fixe $k \geq k_0$ où k_0 est l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur $H^{n-1}(u)$. On note par \mathcal{N}_n le logarithme nilpotent de $e^{-2i\pi u}$. T où T est la monodromie agissant sur $H^n(u)$.

Soit $e \in \text{Ker } \mathcal{N}_n^k$, il existe, d'après la proposition 2, $w \in H^0(X, \Omega^n(k))$ vérifiant $\delta w = 0$ et $r^n(k)(w) = e$. Pour chaque $\sigma \in S^*$ on aura sur une boule de Milnor X_σ de f en σ (assez petite) :

$$(1) \quad w|_{X_\sigma} = \tau_k(a_\sigma) + \delta b_\sigma$$

où a_σ et b_σ sont dans $H^0(X_\sigma, \Omega^{n-1}(k))$ et $\delta a_\sigma = 0$. En effet, sur S^* on a, d'après la proposition 1 du paragraphe *a*, la suite exacte de faisceaux

$$(2) \quad 0 \rightarrow H^{n-1}(u)/\text{Im } \mathcal{N}_{n-1}^k \rightarrow h^n(k) \rightarrow 0$$

puisque $H^n(u)$ est concentré en 0; on a de plus, puisque $k \geq k_0$, la nullité de $\text{Im } \mathcal{N}_{n-1}^k$ et un isomorphisme $\tau_k: h^{n-1}(k) \rightarrow h^n(k) \simeq H^{n-1}(u)$. L'écriture locale (1) le long de S^* ne fait que traduire l'isomorphisme de faisceaux $\tau_k: h^{n-1}(k) \simeq h^n(k)$ sur S^* .

Sur $X_\sigma \cap X_{\sigma'}$ on aura bien sur

$$\tau_k(a_\sigma) + \delta b_\sigma = \tau_k(a_{\sigma'}) + \delta b_{\sigma'}$$

et donc $\tau_k(a_\sigma - a_{\sigma'}) = 0$ dans $H^0(X_\sigma \cap X_{\sigma'}, h^{n-1}(k))$. Ceci montre que les a_σ se recollent en une section globale $a \in H^0(S^*, h^{n-1}(k))$ telle que $a|_{X_\sigma} = a_\sigma$ dans $H^0(X_\sigma, h^{n-1}(k))$ pour chaque $\sigma \in S^*$. Montrons que l'image de a dans $H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(u))$ via la composée

$$H^0(S^*, h^{n-1}(k)) \xrightarrow{r^{n-1}(k)} H^0(S^*, H^{n-1}(u)) \xrightarrow{\partial} H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(u))$$

est indépendante des choix effectués; ceci définit concrètement l'application $\tilde{\text{ob}}_k$. Le changement d'écriture locale (1) donne :

$$w|_{X_\sigma} = \tau_k(\tilde{a}_\sigma) + \delta \tilde{b}_\sigma$$

avec $\delta \tilde{a}_\sigma = 0$ (quitte à raffiner on peut supposer que l'on ne change pas le recouvrement considéré), et donc

$$\tau_k(\tilde{a}_\sigma - a_\sigma) + \delta(\tilde{b}_\sigma - b_\sigma) = 0 \quad \text{sur } X_\sigma.$$

Par injectivité de $\tau_k: h^{n-1}(k) \rightarrow h^n(k)$ (sur S avec $k \geq k_0$) on aura $\tilde{a}_\sigma = a_\sigma$ dans $H^0(X_\sigma, h^{n-1}(k))$ ce qui montre déjà que la section $a \in H^0(S, h^{n-1}(k))$ ne dépend pas des choix locaux pour w donnée. Si on change le choix de w qui représente e , on aura d'après la proposition 2 :

$$\tilde{w} = w + \tau_k(a') + \delta(b')$$

avec a' et b' dans $H^0(X, \Omega^{n-1}(k))$ et $\delta a' = 0$.

Dans l'écriture locale de \tilde{w} on pourra prendre :

$$\tilde{w}|_{X_\sigma} = \tau_k(\tilde{a}_\sigma) + \delta \tilde{b}_\sigma$$

avec $\tilde{a}_\sigma = a_\sigma + a'|_{X_\sigma}$ et $\tilde{b}_\sigma = b_\sigma + b'|_{X_\sigma}$. On remplace donc a par $a + a'$ dans $H^0(S, h^{n-1}(k))$. Comme a' est la restriction à S^* d'une section prolongeable à S de $h^{n-1}(k) \simeq H^{n-1}(u)$ via τ_k , l'image de $a + a'$ est la même que celle de a dans $H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(u))$.

On a donc bien vérifié le passage au quotient qui définit $\tilde{\text{ob}}_k$.

Avant d'établir la formule

$$\tilde{\text{ob}}_{k+k'} = \tilde{\text{ob}}_k \circ \mathcal{N}_n^{k'} \quad \text{sur } \text{Ker } \mathcal{N}_n^k, \quad k \geq k_0,$$

remarquons que dans l'écriture locale précédente, à savoir

$$w|_{X_\sigma} = \tau_k(a_\sigma) + \delta b_\sigma$$

on peut remplacer l'isomorphisme $\tau_k = \tau_{k,k} : h^{n-1}(k) \rightarrow h^n(k)$ sur S^* par

$$\tau_{k_0, k} : h^{n-1}(k_0) \rightarrow h^n(k) \quad (\text{voir § } a, \text{ n}^\circ 3, \text{ lemme } 6).$$

On aura alors

$$w|_{X_\sigma} = \tau_{k_0, k}(\hat{a}_\sigma) + \delta \hat{b}_\sigma$$

avec $\hat{a}_\sigma \in H^0(X_\sigma, \Omega^{n-1}(k_0))$, $\delta \hat{a}_\sigma = 0$ et $\hat{b}_\sigma \in H^0(X_\sigma, \Omega^{n-1}(k))$ le recollement des \hat{a}_σ ayant lieu dans $H^0(X_\sigma \cap X_{\sigma'}, h^{n-1}(k_0))$, l'isomorphisme $h^{n-1}(k_0) \simeq H^{n-1}(u)$ sur S^* permettant de représenter $\tilde{\text{ob}}_k(e) \in H^1_{\{0\}}(S, H^{n-1}(u))$ par la section (\hat{a}_σ) de $h^{n-1}(k_0)$ sur S^* .

Si $e \in \text{Ker } \mathcal{N}^{k+k'}$ et si $w \in H^0(X, \Omega^n(k+k'))$ vérifie $\delta w = 0$, $r^n(k+k')(w) = e$, on pourra représenter $\mathcal{N}^{k'} e$ par $v = \pi_{k+k', k}(w)$ ($\pi_{k+k', k} : \Omega^*(k+k') \rightarrow \Omega^*(k)$ est le morphisme de complexe défini au paragraphe a , n° 1).

En appliquant à l'écriture locale

$$w|_{X_\sigma} = \tau_{k_0, k+k'}(\hat{a}_\sigma) + \delta \hat{b}_\sigma$$

le morphisme $\pi_{k+k', k}$, on obtiendra

$$v|_{X_\sigma} = \pi_{k+k', k} \circ \tau_{k_0, k+k'}(\hat{a}_\sigma) + \delta(\pi_{k+k', k} \hat{b}_\sigma).$$

Comme on a $\pi_{k+k', k} \circ \tau_{k_0, k+k'} = \tau_{k_0, k}$ (voir § a , n° 1), cela donnera l'écriture locale

$$v|_{X_\sigma} = \tau_{k_0, k}(\hat{a}_\sigma) + \delta(\pi_{k+k', k} \hat{b}_\sigma)$$

qui montre que $\tilde{\text{ob}}_k(\mathcal{N}^{k'}(e)) = \tilde{\text{ob}}_{k+k'}(e)$, c'est-à-dire la formule désirée.

Passons à la description de $\hat{\theta}_k$:

D'après la proposition 1 du paragraphe b , les hypothèses standards permettent d'appliquer la proposition 5 au calcul de l'hypercohomologie sur S^* de $(\Omega^*(k), \delta)$. On a donc une application naturelle

$$\hat{\theta}_k : \mathbb{H}^n(S^*, \Omega^*(k), \delta) \rightarrow H^1(S^*, h^{n-1}(k)).$$

L'isomorphisme $r^{n-1}(k) : h^{n-1}(k) \rightarrow H^{n-1}(u)$ (on suppose $k \geq k_0$) et la restriction

$$\mathbb{H}^n(X, \Omega^*(k), \delta) \rightarrow \mathbb{H}^n(S^*, \Omega^*(k), \delta)$$

donne alors une application $\hat{\theta}_k : \mathbb{H}^n(X, \Omega^*(k), \delta) \rightarrow H^1(S^*, H^{n-1}(u))$. La proposition 2 donne alors

$$\mathbb{H}^n(X, \Omega^*(k), \delta) \simeq H^n(H^0(X, \Omega^*(k)), \delta).$$

Il résulte alors de la construction de θ_k (voir proposition 5) que pour w dans $H^0(X, \Omega^n(k))$ vérifiant $\delta w = 0$ et s'écrivant localement sur S^* sous la forme

$$w|_{X_\sigma} = \tau_k(a_\sigma) + \delta b_\sigma$$

on aura $\hat{\theta}_k(w)$ qui sera représenté par le 1-cocycle à valeurs dans $h^{n-1}(u) \simeq H^{n-1}(u)$ $b_\sigma - b_{\sigma'}$. On constate alors que $\hat{\theta}_k$ passe au quotient par $\tau_k(\text{Ker } \delta : H^0(X, \Omega^{n-1}(k)) \rightarrow H^0(X, \Omega^n(k)))$; alors l'isomorphisme de la proposition 2

$$\text{Ker } \mathcal{N}_n^k \simeq H^n(H^0(X, \Omega^*(k)), \delta) / \tau_k(H^{n-1}(X, \Omega^*(k)), \delta)$$

achève la construction de $\tilde{\theta}_k$.

Pour prouver la formule $\tilde{\theta}_{k+k'}|_{\text{Ker } \mathcal{N}_n^k} = \tilde{\theta}_k$ considérons w dans $H^0(X, \Omega^n(k))$ vérifiant $\delta w = 0$. D'après la proposition 5 on peut trouver $a \in H^0(S^*, \Omega^{n-1}(k))$ vérifiant $\delta a = 0$ et dont l'image par τ_k est la section de $h^n(k)$ sur S^* définie par w . Ceci signifie que l'on aura sur S^* une écriture locale :

$$w|_{X_\sigma} = \tau_k(a)|_{X_\sigma} + \delta b_\sigma \quad \text{avec } b_\sigma \in H^0(X_\sigma, \Omega^{n-1}(k)).$$

En appliquant $j_{k, k+k'}$ à cette égalité, on obtient

$$j_{k, k+k'}(w)|_{X_\sigma} = j_{k, k+k'}(\tau_k(a))|_{X_\sigma} + \delta j_{k, k+k'}(b_\sigma)$$

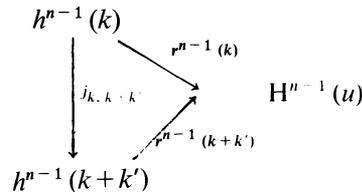
puisque $j_{k, k+k'}$ commute à δ ; le lemme 0 du n° 1 donne l'égalité dans $H^0(S^*, h^{n-1}(k+k'))$ de $j_{k, k+k'}(\tau_k(a))$ et $\tau_{k+k'}(j_{k, k+k'}(a))$. D'après la proposition 5 il existe alors $b \in H^0(S^*, \Omega^{n-1}(k+k'))$ donnant

$$j_{k, k+k'}(w)|_{X_\sigma} = \tau_{k+k'}(j_{k, k+k'}(a))|_{X_\sigma} + \delta(j_{k, k+k'}(b_\sigma) + b|_{X_\sigma}).$$

On constate alors que $\tilde{\theta}_{k+k'}(e)$ est donné (par définition de $\tilde{\theta}$) par le cocycle $(j_{k, k+k'}(b_\sigma) + b|_{X_\sigma}) - (j_{k, k+k'}(b_{\sigma'}) + b|_{X_{\sigma'}})$ c'est-à-dire par le cocycle $j_{k, k+k'}(b_\sigma - b_{\sigma'})$; ceci montre que

$$\tilde{\theta}_{k+k'}(e) = j_{k, k+k'}(\tilde{\theta}_k(e)).$$

Mais l'isomorphisme (sur S^* pour $k \geq k_0$), $r^{n-1}(k) : h^{n-1}(k) \rightarrow H^{n-1}(u)$ rend commutatif le diagramme



et donc $j_{k, k+k'}$ induit l'identité sur $H^1(S^*, H^{n-1}(u))$, ce qui achève notre démonstration.

Donnons enfin un résultat de compatibilité à \mathcal{N}_n des applications $\tilde{\theta}_k$ et $\tilde{\theta}_k$.

LEMME 1. — On a $\mathcal{N}_{n-1} \circ \tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_k \circ \mathcal{N}_n$ et

$$\mathcal{N}_{n-1} \circ \tilde{\theta}_k = \tilde{\theta}_k \circ \mathcal{N}_n \quad \text{sur } \text{Ker } \mathcal{N}_n^k, \quad k \geq k_0.$$

La démonstration du lemme 1 utilisera le résultat suivant :

LÉMME 2. — Soit $t_k: \Omega^*(k) \rightarrow \Omega^*(k)$ le morphisme de faisceaux défini par

$$t_k \left(\sum_{i=1}^k w_i \otimes b_i \right) = w_k \otimes b_1.$$

On a alors l'identité suivante sur $\Omega^*(k)$:

$$\tau_k \circ {}_k\mathcal{N} - {}_k\mathcal{N} \circ \tau_k = \delta \circ t_k - t_k \circ \delta.$$

Démonstration. — On a

$$\tau_k(w) = \left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes b_1$$

et donc

$${}_k\mathcal{N}(\tau_k(w)) = \left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes b_2;$$

mais

$$t_k({}_k\mathcal{N}(w)) = \left(\frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \right) \otimes b_1, \quad \delta(t_k(w)) = \delta(w_k) \otimes b_1 - \left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes b_2$$

et

$$t_k(\delta(w)) = \delta(w_k) \otimes b_1 - \left(\frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \right) \otimes b_1$$

où l'on a noté

$$\delta(w_k) = dw_k - u \frac{df}{f} \wedge w_k$$

pour simplifier.

On obtient donc

$$\delta(t_k(w)) - t_k(\delta(w)) = \left(\frac{df}{f} \wedge w_{k-1} \right) \otimes b_1 - \left(\frac{df}{f} \wedge w_k \right) \otimes b_2$$

ce qui prouve bien la formule du lemme 2.

Démonstration du lemme 1. — Soit $w \in H^0(X, \Omega^n(k))$ vérifiant $\delta w = 0$ où l'on suppose $k \geq k_0$. Alors on a pour chaque $\sigma \in S^*$

$$w|_{X_\sigma} = \tau_k(a)|_{X_\sigma} + \delta b_\sigma$$

où $a \in H^0(S, h^{n-1}(k))$ vérifie $\delta a = 0$, et où $b_\sigma \in H^0(X_\sigma, \Omega^{n-1}(k))$. On aura donc sur X_σ :

$${}_k\mathcal{N}(w)|_X = {}_k\mathcal{N}(\tau_k(a))|_{X_\sigma} + {}_k\mathcal{N}(\delta(b_\sigma));$$

en utilisant le lemme 2 et l'identité ${}_k\mathcal{N} \circ \delta = \delta \circ {}_k\mathcal{N}$ on obtient

$${}_k\mathcal{N}(w)|_{X_\sigma} = \tau_k({}_k\mathcal{N}(a))|_{X_\sigma} - \delta(t_k(a))|_{X_\sigma} + \delta({}_k\mathcal{N}(b_\sigma))$$

car $\delta a = 0$; on a donc

$${}_k\mathcal{N}(w)|_{X_\sigma} = \tau_k({}_k\mathcal{N}(a))|_{X_\sigma} + \delta({}_k\mathcal{N}(b_\sigma) - t_k(a))|_{X_\sigma}$$

ce qui prouve les deux formules désirées puisque $t_k(a)$ est globale sur S^* .

c.

Soit X une variété complexe connexe et soit $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Notons par \mathcal{E}^p le faisceau sur X des formes différentielles de degré p à coefficients C^∞ et notons par $\mathcal{E}^p[f^{-1}]$ le faisceau des p -formes semi-méromorphes à pôles dans $\{f=0\}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ définissons, en analogie avec le complexe $(\Omega^*(k), \delta)$ du paragraphe a, n° 1, avec $u \in \mathbb{C}$ fixé

$$\mathcal{E}^p(k) = \mathcal{E}^p[f^{-1}] \oplus_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^k$$

et définissons sur le faisceau gradué

$$\mathcal{E}^*(k) = \bigotimes_p \mathcal{E}^p(k)$$

une différentielle δ de degré $+1$.

Elle sera définie par

$$(1) \quad \delta = \delta' + d''$$

où pour $\alpha \in \mathcal{E}^p$, $v \in \mathbb{C}^k$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$(2) \quad \delta' \left(\frac{\alpha}{f^m} \otimes v \right) = d' \left(\frac{\alpha}{f^m} \right) \otimes v - \left(\frac{df}{f} \wedge \frac{\alpha}{f^m} \right) \otimes (\text{Id } u + N_k)(v)$$

avec

$$d' \left(\frac{\alpha}{f^m} \right) = \frac{d' \alpha}{f^m} - m \frac{df \wedge \alpha}{f^{m+1}}$$

et

$$(3) \quad d'' \left(\frac{\alpha}{f^m} \otimes v \right) = \frac{d'' \alpha}{f^m} \otimes v$$

l'élément $N_k \in \text{End}(\mathbb{C}^k)$ étant le même que celui du paragraphe a, n° 1.

On a alors immédiatement les relations

$$(4) \quad \delta'^2 = 0, \quad d''^2 = 0 \quad \text{et} \quad d'' \delta' + \delta' d'' = 0$$

qui impliquent $\delta^2 = 0$.

De plus si $\mathcal{E}^{p,q}(k)$ désigne la partie de type (p, q) de $\mathcal{E}^{p+q}(k)$, les différentielles δ' et d'' sont de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$ respectivement.

On a alors la

PROPOSITION 1. — *Le morphisme naturel (dédduit de l'inclusion $\Omega^*[f^{-1}] \rightarrow \mathcal{E}^*[f^{-1}]$) de complexes de faisceaux*

$$\mathcal{J}_k: (\Omega^*(k), \delta) \rightarrow (\mathcal{E}^*(k), \delta)$$

est un quasi-isomorphisme pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — Il suffit évidemment de prouver que pour chaque $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ le complexe

$$(\mathcal{E}^{m,\cdot}(k), d'')$$

est une résolution (fine) de $\Omega^m(k)$. On pourra alors interpréter le double complexe $(\mathcal{E}^{\cdot,\cdot}(k), \delta', d'')$ comme une (hyper)-résolution fine du complexe $(\Omega^*(k), \delta)$, ce qui prouvera l'assertion.

Le fait que $(\mathcal{E}^{m,\cdot}(k), d'')$ soit une résolution de $\Omega^m(k)$ est une conséquence immédiate du lemme de Dolbeault. Ceci achève la preuve de la proposition.

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses standards, notons par can l'application canonique*

$$\text{can}: H_c^n(F(0), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}} \rightarrow H^n(F(0), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$$

où $F(0)$ désigne la fibre de Milnor en 0.

Alors on a $\tilde{\theta} \circ \text{can} = 0$, où $\tilde{\theta}$ désigne l'application

$$\tilde{\theta}: H^n(F(0), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}} \rightarrow H^0(S^*, H^{n-1}(u))$$

définie dans la proposition 5 du n° 3.

Démonstration. — Précisons ici la construction de Milnor. Si on a

$$X = B(0, \varepsilon) \cap f^{-1}(D)$$

où $D = D(0, \eta)$ avec $0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$, considérons $\varepsilon' < \varepsilon$ tel que $\varepsilon - \varepsilon' \ll \varepsilon$ de sorte que $X' = B(0, \varepsilon') \cap f^{-1}(D)$ soit encore un représentant de Milnor de f en 0.

Il résulte des travaux de Milnor [M] que pour $s \neq 0$ dans D l'image de l'application canonique $\text{can}: H_c^*(f^{-1}(s), \mathbb{C}) \rightarrow H^*(f^{-1}(s), \mathbb{C})$ est le noyau de la restriction

$$\text{res}: H^*(f^{-1}(s), \mathbb{C}) \rightarrow H^*(f^{-1}(s) \cap (X - \bar{X}'), \mathbb{C})$$

si ε' est assez voisin de ε .

Considérons alors $w \in H^0(X, \Omega^n(k))$ vérifiant $\delta w = 0$ et $r^n(k)(w) = e$ où $e \in H^n(F(0), C)_{e^{-2i\pi u}}$ est dans l'image de can.

Pour exploiter cette dernière hypothèse, nous allons calculer sur $X - \bar{X}'$ avec le complexe $(\mathcal{E}^*(k), \delta)$ qui est quasi-isomorphe à $(\Omega^*(k), \delta)$ mais qui est fin. Le théorème de comparaison de Grothendieck en fait appliqué au $D_{\bar{X}}$ -module :

$$\mathcal{M} = \left[\bigoplus_{j=0}^{k-1} D_{\bar{X}} f^{-u} (\text{Log } f)^j \right] \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} [f^{-1}]$$

où $\bar{X} = X - \bar{X}'$ nous dit que $\mathbb{R}^p \check{f}_*(\mathcal{E}^*(k), \delta)$ est l'extension (méromorphe) de Deligne du fibré de Gauss-Manin ⁽¹⁷⁾ pour l'application $\check{f}: \bar{X} \rightarrow D$ qui est la restriction à $\bar{X} = X - \bar{X}'$ de f .

Les faisceaux $\mathcal{E}^*(k)$ étant fins, on a dégénérescence de la suite spectrale et donc, l'isomorphisme

$$\mathbb{R}^p \check{f}_*(\mathcal{E}^*(k), \delta) \cong H^p(H^0(X - \bar{X}', \mathcal{E}^*(k)), \delta).$$

Maintenant l'hypothèse $e \in \text{Im can}$ se traduit par le fait que $w|_{X - \bar{X}'}$ induit 0 dans

$$H^n(H^0(X - \bar{X}', \mathcal{E}^*(k)), \delta).$$

L'analogue immédiat de la suite exacte de la proposition 1 du paragraphe *a* [rappelons que les faisceaux de cohomologie du complexe $(\mathcal{E}^*(k), \delta)$ sont encore les $h^i(k)$ du paragraphe *a*, n° 1 et que les $\mathcal{E}^*(k)$ sont acycliques sur $X - \bar{X}'$ car fins] donne alors l'existence de α et β dans $H^0(X - \bar{X}', \mathcal{E}^{n-1}(k))$ vérifiant

$$(i) \quad \delta\alpha = 0;$$

$$(ii) \quad w|_{X - \bar{X}'} = \tau_k(\alpha) + \delta\beta.$$

Utilisons maintenant la définition de $\check{\theta}_k$ en écrivant pour $\sigma \in S^*$ sur l'ouvert $X_\sigma \ni \sigma$

$$w|_{X_\sigma} = \tau_k(\alpha_0) + \delta\beta_\sigma$$

où $\alpha_0 \in H^0(S^*, \Omega^{n-1}(k))$ vérifie $\delta\alpha_0 = 0$ et où $\beta_\sigma \in H^0(S^* \cap X_\sigma, \Omega^{n-1}(k))$ (voir § *b*, n° 3).

On aura alors pour $\sigma \in S^* \cap (X - \bar{X})$

$$\tau_k(\alpha) + \delta\beta|_{X_\sigma} = \tau_k(\alpha_0) + \delta\beta_\sigma$$

et comme $\tau_k: h^{n-1}(k) \rightarrow h^n(k)$ est injectif le long de S^* , on aura

$$\alpha - \alpha_0 = 0 \quad \text{dans } H^0(S^* \cap (X - \bar{X}'), h^{n-1}(k)).$$

⁽¹⁷⁾ Plus précisément du sous-fibré de Gauss-Manin engendré par les sections horizontales vérifiant $(T - e^{-2i\pi u} \text{Id})^k = 0$; comme l'on suppose ici k grand, cela revient à considérer l'extension méromorphe de Deligne du sous-fibré caractéristique pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ de T .

Comme $S^* \cap (X - \bar{X}')$ est un ouvert de Stein de S^* , on pourra écrire sur $S^* \cap (X - \bar{X}')$ ⁽¹⁸⁾

$$\alpha - \alpha_0 = \delta\gamma$$

où

$$\gamma \in H^0(S^* \cap (X - \bar{X}'), \Omega^{n-2}(k))$$

et donc

$$\tau_k(\alpha - \alpha_0) = \tau_k \delta\gamma = -\delta(\tau_k \gamma) \quad \text{sur } S^* \cap (X - \bar{X}').$$

Ceci donne

$$\delta(\beta - \tau_k \gamma)|_{X_\sigma} = \delta\beta_\sigma \quad \text{sur } S^* \cap X_\sigma$$

si $\sigma \in X - \bar{X}'$, ce qui montre que $\beta_{\sigma, \sigma'} = \beta_\sigma - \beta_{\sigma'}$ est le bord de la 0-cochaîne $-\beta + \tau_k \gamma + \beta_\sigma$ à valeurs dans $h^{n-1}(k)$ sur $S^* \cap (X - \bar{X}')$. On a donc ainsi la nullité de la restriction de $\tilde{\theta}_k(e)$ dans

$$H^1(S^* \cap (X - \bar{X}'), h^{n-1}(k)).$$

Mais $h^{n-1}(k)$ est un système local sur S^* et chaque composante connexe de S^* est un disque pointé qui rencontre $X - \bar{X}$ en une couronne. La restriction

$$H^1(S^*, h^{n-1}(k)) \rightarrow H^1(S^* \cap X - \bar{X}', h^{n-1}(k))$$

est donc un isomorphisme et on a $\tilde{\theta}_k(e) = 0$.

Ceci achève la preuve de la proposition 2.

PROPOSITION 3. — *Sous les hypothèses standards on a, pour $k \geq k_0$ l'égalité*

$$\text{can}(\text{Ker } \mathcal{N}_c^k) = \text{Ker } \tilde{\text{ob}}_k \cap \text{Ker } \tilde{\theta}_k$$

dans $\text{Ker } \mathcal{N}_n^k$, où l'on a noté par \mathcal{N}_c la partie nilpotente de $\Gamma|_{\mathbb{H}_c^0(w)}$.

Démonstration. — Soit donc $e \in \text{Ker } \mathcal{N}_n^k$ vérifiant $\tilde{\text{ob}}_k(e) = 0$ et $\tilde{\theta}_k(e) = 0$. Soit $w \in H^0(X, \Omega^n(k))$ vérifiant

$$\delta w = 0 \quad \text{et} \quad r^n(k)(w) = e.$$

Puisque $\tilde{\text{ob}}_k(e) = 0$, si on écrit le long de S^*

$$w|_{X_\sigma} = \tau_k(\alpha)|_{X_\sigma} + \delta(\beta_\sigma)$$

⁽¹⁸⁾ On raisonne ici comme à la proposition 3 pour obtenir l'acyclicité de $\text{Ker } \delta^{n-2}$ sur $S^* \cap (X - \bar{X}')$ et la suite exacte $0 \rightarrow \text{Ker } \delta^{n-2} \rightarrow \Omega^{n-2}(k) \rightarrow \text{Im } \delta^{n-2} \rightarrow 0$.

avec $\alpha \in H^0(S^*, \Omega^{n-1}(k))$ $\delta\alpha=0$ et $\beta_\sigma \in H^0(S^* \cap X_\sigma, \Omega^{n-1}(k))$, la section induite par α dans $H^0(S^*, h^{n-1}(k))$ se prolonge à S . Quitte à changer le choix de w , ceci permet de supposer que $\alpha=0$ et donc que w est localement δ -exacte sur S^* et donc sur $X^*=X-\{0\}$ puisque le support de $h^n(k)$ est contenu dans S .

Posons $Y^*=f^{-1}(0)-\{0\}$.

Pour tout $x \in Y^*$, on peut donc écrire sur une boule de Milnor en $x \in X_x$:

$$w|_{X_x} = \delta\beta_x$$

où

$$\beta_x \in H^0(X_x, \Omega^{n-1}(k)) \subset H^0(X_x, \mathcal{E}^{n-1}(k)).$$

Alors le cocycle $\beta_x - \beta_{x'}$ représente un élément de $H^0(Y^*, \text{Ker } \delta^{n-1})$ où

$$\text{Ker } \delta^j = \text{Ker } \delta : \mathcal{E}^j(k) \rightarrow \mathcal{E}^{j+1}(k).$$

Les suites exactes

$$0 \rightarrow \text{Ker } \delta^{j-1} \rightarrow \mathcal{E}^{j-1}(k) \rightarrow \text{Ker } \delta^j \rightarrow 0, \quad 0 \leq j \leq n-2$$

et

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^{n-2}(k)/\text{Ker } \delta^{n-2} \rightarrow \text{Ker } \delta^{n-1} \rightarrow h^{n-1}(k) \rightarrow 0$$

montrent l'acyclicité sur Y^* des faisceaux $\text{Ker } \delta^j$ pour $0 \leq j \leq n-2$ ainsi que celle du quotient $\mathcal{E}^{n-2}(k)/\text{Ker } \delta^{n-2}$ puisque les faisceaux $\mathcal{E}^j(k)$ sont des faisceaux fins. On obtient ainsi l'isomorphisme

$$\begin{aligned} H^1(Y^*, \text{Ker } \delta^{n-1}) &\simeq H^1(Y^*, h^{n-1}(k)) \\ &\simeq H^1(S^*, h^{n-1}(k)) \end{aligned}$$

puisque le support de $h^{n-1}(k)$ est contenu dans S . On constate alors que le cocycle $\beta_{x, x'}$ qui a pour image $\tilde{\theta}_k(e)=0$ dans $H^1(S^*, h^{n-1}(k))$ ⁽¹⁹⁾ est donc nul dans $H^1(Y^*, \text{Ker } \delta^{n-1})$.

Si γ_x est une 0-cochaîne à valeurs dans $\text{Ker } \delta^{n-1}$ dont le cobord de Čech est $\beta_{x, x'}$, on aura sur $X_x \cap X_{x'}$ (quitte à raffiner...)

$$\beta_{x, x'} = \gamma_x - \gamma_{x'}$$

et donc

$$\beta_x - \gamma_x = \beta_{x'} - \gamma_{x'} \quad \text{sur } X_x \cap X_{x'}.$$

⁽¹⁹⁾ Par construction de l'application $\tilde{\theta}_k$.

Donc $\beta_x - \gamma_x$ définit une section globale sur Y^* du faisceau $\mathcal{E}^{n-1}(k)$, notons-la β , qui vérifiera

$$w|_{Y^*} = \delta\beta \quad \text{sur } Y^*.$$

Soit \mathcal{U} un voisinage ouvert de Y^* dans X sur lequel un représentant du germe β est défini, et soit $\rho \in C_c^\infty(X)$ vérifiant $\rho \equiv 1$ sur la boule B de centre 0.

Posons

$$\tilde{\beta} = (1 - \rho)\beta \quad \text{sur } \mathcal{U}$$

et

$$\tilde{\beta} = 0 \quad \text{sur } B.$$

Comme sur $\mathcal{U} \cap B$ ces deux définitions coïncident, $\tilde{\beta}$ est une $(n-1)$ -forme semi-méromorphe à pôle dans $\{f=0\}$ définie sur $\mathcal{U} \cup B$ qui est un ouvert contenant $Y = f^{-1}(0)$.

Alors la forme $\tilde{w} = w - \delta\tilde{\beta}$ est semi-méromorphe et δ -fermée au voisinage de $f^{-1}(0)$. Pour $s \in D^*$ assez proche de 0, quitte à remplacer X par

$$X'' = B(0, \varepsilon'') \cap f^{-1}(0)$$

où

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2},$$

on aura

$$f^{-1}(s) \subset \mathcal{U} \cup B$$

et la forme \tilde{w} induit sur $f^{-1}(s)$ le même élément de $H^n(f^{-1}(s), \mathbb{C})$ que w [puisque $\delta\tilde{\beta}|_{f^{-1}(s)} = d\tilde{\beta}|_{f^{-1}(s)}$ est d -exacte].

Comme pour s assez voisin de 0, $w|_{f^{-1}(s)}$ est à support compact, ceci montre que $e = r^n(k)(w)$ est dans l'image de $\text{Ker } \mathcal{N}_c^k$ par can, ce qui prouve l'inclusion :

$$\text{Ker } \tilde{\text{ob}}_k \cap \text{Ker } \tilde{\theta}_k \subset \text{can}(\text{Ker } \mathcal{N}_c^k).$$

Il nous reste à montrer, puisque l'on a vu que $\tilde{\theta}_k \circ \text{can} = 0$ à la proposition 2, que l'on a

$$\tilde{\text{ob}}_k(\text{can}(\text{Ker } \mathcal{N}_c^k)) = 0.$$

Mais si e_c est dans $\text{Ker } \mathcal{N}_c^k$, un travail analogue au lemme A de [B.1], mais en calculant $\mathbb{R}f_1(\Omega_{X/f}^0)$ grace au quasi-isomorphisme de la proposition 1, permet de trouver $w \in H^n(H_{c/f}^0(X, \mathcal{E}^*(k)), \delta)$ (où $H_{c/f}^0$ désigne l'espace des sections à supports f -propres) tel

que l'on ait l'égalité

$$e_c = \exp(-(\text{Id} \cdot u + N_k) \text{Log } s)(w)|_{F(0)}$$

dans $H_c^n(F(0), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$. Supposons alors (ce qui n'est pas restrictif) que l'on ait $\text{Supp}(w) \cap f^{-1}(0) \subset \bar{X}'$ au voisinage de $f^{-1}(0)$, où $X' \subset X$ est choisi comme plus haut [$X' = B(0, \varepsilon') \cap X$ avec $\varepsilon' < \varepsilon$ et $\varepsilon - \varepsilon' \ll \varepsilon$]. On a alors près de chaque $\sigma \in S \cap (X - \bar{X}')$

$$w|_{X_\sigma} = 0$$

et si $a \in H^0(S^*, h^{n-1}(k))$ induit $\tilde{ob}_k(\text{can}(e_c))$ dans $H_{\{0\}}^1(S, H^{n-1}(u))$, on aura $a|_{S \cap X - \bar{X}'} = 0$. Comme $H^{n-1}(u)$ est un système local et comme chaque branche de S rencontre $X - \bar{X}'$, on aura $a = 0$ dans $H^0(S^*, H^{n-1}(u))$, et donc *a fortiori* $\tilde{ob}_k(\text{can}(e_c)) = 0$. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.

Donnons deux conséquences des propositions 2 et 3.

COROLLAIRE 1. — Pour $k \geq k_0$ on a $\text{Ker } \tilde{\theta}_k = \text{Im can} \cap \text{Ker } \mathcal{N}_n^k$. En particulier pour $k \geq k_0$ et $k \geq k_1$, on a $\text{Ker } \tilde{\theta}_k = \text{Im can}$.

Démonstration. — On a déjà vu dans la proposition 2 que l'on avait, pour $k \geq k_0$, l'inclusion de $\text{Im can} \cap \text{Ker } \mathcal{N}_n^k$ dans $\text{Ker } \tilde{\theta}_k$; si $e \in \text{Ker } \mathcal{N}_n^k$ vérifie $\tilde{\theta}_k(e) = 0$, pour tout $h \geq 0$ on aura encore $\tilde{\theta}_{k+h}(e) = 0$ (voir § b, n° 3). Si on choisit $h \geq k_0$ on aura, d'après la remarque qui suit la définition 6, $\tilde{ob}_{k+h}(e) = 0$. On aura donc à la fois $\tilde{\theta}_{k+h}(e) = 0$ et $\tilde{ob}_{k+h}(e) = 0$. Alors la proposition 3 donne que $e \in \text{Im can}$, ce qui prouve le corollaire 1.

Les propositions 2 et 3 ainsi que le corollaire 1 donnent la proposition 7.

Démonstration du corollaire 8. — Soit $e \in H^n(u)$; il s'agit de montrer que $\mathcal{N}_n^{k_0}(e) \in \text{Im can}$. Choisissons $k \geq k_0$ tel que $e \in \text{Ker } \mathcal{N}_n^k$. On aura alors

$$\mathcal{N}_n^{k_0-1}(\tilde{\theta}_k(e)) = 0$$

car $\mathcal{N}_n^{k_0-1}$ est nul sur $H^{n-1}(u)$; le lemme 1, § b, n°3 nous donne alors

$$\tilde{\theta}_k(\mathcal{N}_n^{k_0}(e)) = 0$$

et on en conclut, grace au corollaire 1, que $\mathcal{N}_n^{k_0}(e) \in \text{Im can}$ ce qui achève la démonstration du corollaire 8.

Remarque. — Ce corollaire 8 montre que la nullité du faisceau $H^{n-1}(u)$ sous les hypothèses standards implique la surjectivité de l'application can, qui est alors un isomorphisme puisqu'elle est auto-duale!

d.

L'objet de ce paragraphe est de prouver le théorème 3 et son corollaire 4.

Commençons par remarquer que l'hypothèse de singularité isolée relativement à la valeur propre $e^{-2i\pi u} \neq 1$ implique que les hypothèses standards sont satisfaites avec un choix arbitraire de la courbe S puisque le faisceau $H^{m-1}(u)$ est nul. On en déduit aussitôt que $k_0 = 0$ et que les applications \tilde{ob}_{k_0} et $\tilde{\theta}_{k_0}$ [définies sur $\text{Ker } \mathcal{N}^{k_0} = H^m(u)$] sont nulles.

Ceci donne, d'après la proposition 7, la surjectivité de $\text{can} : H_c^m(u) \rightarrow H^m(u)$. On en déduit que c'est un isomorphisme, puisqu'elle est auto-duale pour la dualité de Poincaré.

Passons donc au calcul analytique de la forme hermitienne d'intersection sur $H^m(u)$ définie dans l'énoncé du théorème 3 et qui est non dégénérée par dualité de Poincaré entre $H_c^m(u)$ et $H^m(u)$.

Partons maintenant de a et b dans $H^m(u)$ et de w, w' dans $H^0(X, \Omega^m(k))$ vérifiant $\delta w = 0, \delta w' = 0, r^m(k)(w) = a$ et $r^m(k)(w') = b$.

Comme a est dans l'image de can (car on vient de voir qu'elle est bijective), on peut reprendre la construction de la proposition 2 du paragraphe c et écrire sur $X - \bar{X}'$

$$(1) \quad w|_{X - \bar{X}'} = \tau_k \alpha + \delta \beta$$

où $\alpha, \beta \in H^0(X - \bar{X}', \mathcal{O}^{m-1}(k))$ et $\delta \alpha = 0$ sur $X - \bar{X}'$.

Réécrivons l'égalité (1) sous la forme

$$w|_{X - \bar{X}'} = d\alpha_1 + \frac{df}{f} \wedge \beta_1$$

où $\alpha_1, \beta_1 \in H^0(X - \bar{X}', \mathcal{O}^{m-1}(k))$ et où $d = d \otimes \text{Id}_k$. Si $X'' = X \cap B(0, \varepsilon')$ avec $\varepsilon' = (\varepsilon + \varepsilon')/2$ et si $\rho_1 \in C_c^\infty(X)$ vérifie $\rho_1 \equiv 1$ sur \bar{X}' et $\text{Supp } \rho_1 \subset X''$, posons $\tilde{\alpha} = (1 - \rho_1)\alpha_1$ et $\tilde{\beta} = (1 - \rho_1)\beta_1$, puis

$$(2) \quad \tilde{w} = w - d\tilde{\alpha} - \frac{df}{f} \wedge \tilde{\beta}.$$

Alors $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ et \tilde{w} sont des formes semi-méromorphes (à valeurs dans \mathbb{C}^k) sur X . On a $\text{Supp } \tilde{w} \subset \bar{X}''$ et \tilde{w} est relativement fermée sur X (i.e. $d\tilde{w} \wedge df = 0$).

Pour $\text{Re}(\lambda) \gg 0$ on aura, si $\rho \in C_c^\infty(X)$ vérifie $\rho \equiv 1$ près de 0

$$(3) \quad \int_X |f|^{2\lambda} \rho w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \\ = \int_X |f|^{2\lambda} \rho \tilde{w}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} + \int_X |f|^{2\lambda} \rho d\tilde{\alpha}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}}.$$

Mais on a, toujours pour $\text{Re}(\lambda) \gg 0$

$$d\left(|f|^{2\lambda} \rho \tilde{\alpha}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}}\right) \\ = |f|^{2\lambda} d\rho \wedge \tilde{\alpha}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} + |f|^{2\lambda} \rho d\tilde{\alpha}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}}.$$

Ce qui donne, d'après la formule de Stokes

$$(4) \quad - \int_X |f|^{2\lambda} d\rho \wedge \tilde{\alpha}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} = \int_X |f|^{2\lambda} \rho d\tilde{\alpha}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}}$$

ce qui montre que le prolongement méromorphe du membre de droite n'a jamais de pôle en $\lambda = -u - v$, $\forall v \in \mathbb{Z}$ car on a $dp \equiv 0$ près de 0 (voir la remarque qui suit l'énoncé du théorème 3).

Donc on aura

$$(5) \quad \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \rho w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right) \\ = \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \tilde{w}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right).$$

Considérons maintenant la fonction sur D^*

$$G_{k,k}(s) = \int_{f=s} \tilde{w}_k \wedge \bar{w}'_k.$$

Comme $\text{Supp } \tilde{w}_k \subset \bar{X}''$ et comme $f^{-1}(s) \cap \bar{X}''$ est compact pour chaque s ceci est bien défini pour $s \in D^*$.

Maintenant l'égalité (2) montre que la classe de cohomologie à support compact induite sur $f^{-1}(s)$ par \tilde{w}_k correspond via $\text{can} : H_c^m(f^{-1}(s), \mathbb{C}) \rightarrow H^m(f^{-1}(s), \mathbb{C})$ à la classe de cohomologie induite sur $f^{-1}(s)$ par w_k . Cette dernière est donnée par

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \mathcal{N}_m^j(a) \otimes s^u (\text{Log } s)^j.$$

De même la classe induite par w'_k est donnée par

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \mathcal{N}_m^j(b) \otimes s^u (\text{Log } s)^j.$$

En particulier on a

$$(6) \quad G_{k,k}(s) = |s|^{2u} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} (\text{Log } |s|^2)^j \int_{F(0)} \text{can}^{-1}(a) \cup \overline{\mathcal{N}_m^j(b)}$$

puisque la forme hermitienne d'intersection est horizontale sur le fibré de Gauss-Manin [le calcul ici utilise la relation $h(\mathcal{N}a, b) = h(a, \mathcal{N}b)$ qui se déduit de l'invariance de h par la monodromie].

La relation (6) est simplement

$$(6 \text{ bis}) \quad G_{k,k}(s) = |s|^{2u} \sum_{j=0}^{k-1} (2i\pi)^m h(a, \mathcal{N}_m^j(b)) (\text{Log } |s|^2)^j.$$

Si $\theta \in C_c^\infty(D)$ vérifie $\theta \equiv 1$ près de 0, nous nous proposons de calculer le nombre

$$\text{Res} \left(\lambda = -u, \int_D \theta(s) G_{k,k}(s) |s|^{2\lambda} \frac{ds}{s} \wedge \frac{\bar{d}\bar{s}}{\bar{s}} \right).$$

On a déjà le lemme élémentaire suivant

LEMME. — Pour $a > 0$ et $j \in \mathbb{N}$ la partie polaire en $\lambda = -u$ du prolongement méromorphe de la fonction

$$F_j(\lambda) = \int_0^a x^{\lambda+u} (\text{Log } x)^j \frac{dx}{x}$$

est égale à $(-1)^j (j! / (\lambda + u)^{j+1})$.

Preuve. — Pour $j=0$, $F_0(\lambda) = a^{\lambda+u} / (\lambda + u)$ et la partie polaire est bien $1 / (\lambda + u)$. On a

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} F_0(\lambda) = F_j(\lambda)$$

et donc la partie polaire de F_j est $d^j / d\lambda^j (1 / (\lambda + u))$, ce qui achève la preuve du lemme. ■

Grâce à la formule (6 bis) on aura

$$(7) \quad \int_{\mathbb{D}} \theta(s) G_{k,k}(s) |s|^{2\lambda} \frac{ds}{s} \wedge \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \\ = (2i\pi)^m \int_{\mathbb{D}} \theta(s) |s|^{2(\lambda+u)} \left[\sum_{j=0}^{k-1} h(a, \mathcal{N}_m^j(b)) (\text{Log } |s|^2)^j \right] \frac{ds}{s} \wedge \frac{d\bar{s}}{\bar{s}}$$

et comme

$$\int_{|s| \leq a^2} |s|^{2(\lambda+u)} (\text{Log } |s|^2)^j \frac{ds}{s} \wedge \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} = -2i\pi \int_0^a x^{\lambda+u} (\text{Log } x)^j \frac{dx}{x}$$

n'a de résidu en $\lambda = -u$ que pour $j=0$ d'après le lemme, il restera

$$(8) \quad \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_{\mathbb{D}} \theta(s) G_{k,k}(s) |s|^{2\lambda} \frac{ds}{s} \wedge \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} \right) = -(2i\pi)^{m+1} h(a, b).$$

Mais d'après le théorème de Fubini, on a, au moins pour $\text{Re}(\lambda) \gg 0$:

$$(9) \quad \int_{\mathbb{D}} \theta(s) G_{k,k}(s) |s|^{2\lambda} \frac{ds}{s} \wedge \frac{d\bar{s}}{\bar{s}} = \int_{\mathbb{X}} |f|^{2\lambda} f^*(\theta) \tilde{w}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}}$$

et comme $f^*(\theta)$ est C^∞ sur \mathbb{X} et vaut $\equiv 1$ près de 0 [remarquer que $f^*(\theta) \tilde{w}_k$ est à support compact dans \mathbb{X}] on a bien établi la formule du théorème 3 puisque le prolongement méromorphe de

$$\int_{\mathbb{X}} |f|^{2\lambda} (\rho - f^*(\theta)) \tilde{w}_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}}$$

ne peut avoir de pôle en $\lambda = -u - v$, $\forall v \in \mathbb{Z}$ dès que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{X})$ vérifie $\rho \equiv 1$ près de 0.

Ceci achève la preuve du théorème 3.

Avant de passer à la démonstration du corollaire 4, nous allons déduire du théorème 3 le corollaire 3 bis suivant qui mettra en évidence l'apparition des pôles d'ordre k_1 [k_1 désigne l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur $H^m(u)$] pour le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ en $\lambda = -u - j$ avec $j \in \mathbb{N}, j \gg 0$.

ment méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ en $\lambda = -u - j$ avec $j \in \mathbb{N}, j \gg 0$.

COROLLAIRE 3 bis. — Dans la situation du théorème 3, on a pour tout $a, b \in H^m(u)$ et pour $w, w' \in H^0(X, \Omega^m(k))$ vérifiant $\delta w = 0, \delta w' = 0, r^m(k)(w) = a$ et $r^m(k)(w') = b$

$$(10) \quad h(\mathcal{N}_m^\alpha a, \mathcal{N}_m^\beta b) = \frac{(-1)^{\alpha+\beta+1}}{(2i\pi)^{m+1}} P_{\alpha+\beta+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{f} \right).$$

Ici on a posé comme plus haut

$$\mathcal{N}_m = -\frac{1}{2i\pi} \text{Log}(e^{-2i\pi u} T | H^m(u))$$

et $P_\nu(\lambda = -u, F(\lambda))$ désigne le coefficient de $(\lambda + u)^{-\nu}$ dans le développement de Laurent en $\lambda = -u$ de la fonction méromorphe F .

Remarque. — Comme on a $\mathcal{N}_m^{k_1-1} \neq 0$ par définition de l'entier k_1 , la non-dégénérescence de la forme hermitienne d'intersection sur $H^m(u)$ qui résulte du fait que can est un isomorphisme et de la dualité de Poincaré, montre l'existence d'un pôle d'ordre au moins k_1 en $\lambda = -u - \nu$ pour $\nu \in \mathbb{N}, \nu \gg 0$ pour le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ grâce à ce corollaire. On retrouve donc ici, dans un cas particulier, le résultat de [B. 1].

La formule (10) ne peut, malgré les apparences, produire des pôles d'ordre $> k_1$ car l'invariance de la forme d'intersection par la monodromie donne que

$$h(\mathcal{N}_m^\alpha a, \mathcal{N}_m^\beta b) = h(a, \mathcal{N}_m^{\alpha+\beta}(b))$$

qui vaut donc 0 pour $\alpha + \beta \geq k_1$.

Démonstration du corollaire 3 bis. — Soit $\gamma \in [1, k-1]$ et définissons

$$v_j = w_{j-\gamma} \quad \text{pour } j \in [\gamma + 1, k]$$

et

$$v_j = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq \gamma.$$

On a alors $v \in H^0(X, \Omega^m(k))$ et $\delta v = 0$.

De plus on a

$$r^m(k)(v) = \mathcal{N}^\gamma a.$$

En effet avec les notations du paragraphe a , n° 2, on a

$$\kappa(a) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{N}_m^j(a) \otimes s^u (\text{Log } s)^j$$

et

$$\kappa(\mathcal{N}_m^\gamma(a)) = \mathcal{N}_m^\gamma(\kappa(a)).$$

Comme $r^m(k)(w) = a$ signifie que $w_k = \kappa(a)$ dans \mathcal{H}_0^m [en fait $\kappa(a) \in \Gamma^m(u)$], il suffit de voir que $v_k = w_{k-\gamma}$ correspond bien à $\mathcal{N}_m^\gamma(a)$ dans \mathcal{H}_0^m . Mais comme $s\nabla - u = \mathcal{N}_m$ sur $\Gamma^m(u)$, cela revient à vérifier que $(s\nabla - u)^\gamma w_k = w_{k-\gamma}$, ce qui résulte de $\delta w = 0$.

Alors en appliquant le théorème 3 avec $\mathcal{N}_m^\gamma a$ au lieu de a et v au lieu de w , on obtient

$$h(\mathcal{N}_m^\gamma a, b) = \frac{-1}{(2i\pi)^{m+1}} \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_{k-\gamma} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right).$$

Pour achever la preuve du corollaire, il suffit alors d'établir que pour $l \geq 1$ et pour $1 \leq \gamma \leq k-1$, on a l'identité

$$(11) \quad \text{P}_l \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_{k-\gamma} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right) \\ = -\text{P}_{l+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_{k-\gamma+1} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right).$$

Fixons $\rho \in C_c^\infty(X)$ vérifiant $\rho \equiv 1$ près de 0.

Pour $\text{Re}(\lambda) \gg 0$, on a sur X

$$(12) \quad d \left(|f|^{2\lambda} \rho w_{k-\gamma+1} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right) \\ = |f|^{2\lambda} d\rho \wedge w_{k-\gamma+1} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} + (\lambda + u) |f|^{2\lambda} \rho w_{k-\gamma+1} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \\ + |f|^{2\lambda} \rho w_{k-\gamma+1} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}}$$

où l'on a utilisé l'identité sur X

$$dw_{k-\gamma+1} = u \frac{df}{f} \wedge w_{k-\gamma+1} + \frac{df}{f} \wedge w_{k-\gamma}.$$

En intégrant (12) et en utilisant la formule de Stokes, on obtient

$$0 = \int_X |f|^{2\lambda} d\rho \wedge w_{k-\gamma+1} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \\ + (\lambda + u) \int_X |f|^{2\lambda} \rho w_{k-\gamma+1} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \\ + \int_X |f|^{2\lambda} \rho w_{k-\gamma} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f}.$$

Comme la première intégrale n'a pas de pôle en $\lambda = -u$ (car $d\rho \equiv 0$ près de 0 et la remarque 1 qui suit le théorème 3), on obtient en prenant le coefficient de $1/(\lambda + u)^l$ dans les développements de Laurent en $\lambda = -u$, pour $l \geq 1$:

$$P_{l+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_{k-\gamma+1} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \right) \\ = -P_l \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_{k-\gamma} \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \right).$$

Ceci suffit à conclure la preuve du corollaire, compte tenu de la remarque 1° qui suit son énoncé. ■

Preuve du corollaire 4. — Si k_1 désigne l'ordre de nilpotence de la monodromie agissant sur $H^m(u)$, il existe $a \in H^m(u)$ tel que $\mathcal{N}^{k_1-1} a \neq 0$. Comme h est non dégénérée, il existe alors $b \in H^m(u)$ vérifiant $h(\mathcal{N}^{k_1-1} a, b) \neq 0$. Alors d'après le corollaire 3 bis, on aura

$$P_k \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_{k_1} \wedge \bar{w}'_{k_1} \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \right) \neq 0$$

où $w, w' \in H^0(X, \Omega^m(k_1))$ vérifiant $\delta w = \delta w' = 0$ et $r^m(k_1)(w) = a$ $r^m(k_1)(w') = b$.

Ceci prouve l'existence d'un pôle d'ordre au moins k_1 en $-u-j$ pour $j \in \mathbb{N}, j \gg 0$, pour le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$.

Nous monterons plus loin (voir le théorème 14) que l'ordre d'un tel pôle ne peut être strictement plus grand que k_1 sous nos hypothèses.

e.

Dans tout ce paragraphe, on se place sous les hypothèses standards et on utilise les notations correspondantes. Notre objectif est de démontrer les propositions 11 et 12.

N° 1. Considérons un point $\sigma \in S^*$ et soit P_σ un hyperplan générique passant par σ (ou plus généralement une hypersurface lisse transversale à S^* en σ). Alors la trivialité topologique locale de f le long de S^* , que l'on peut déduire, au moins au niveau qui nous intéresse, du théorème de constructibilité de Kashiwara et du fait que P_σ n'est pas caractéristique pour la restriction à $\{f=0\}$ du D_X -module $D_X[\lambda]f^\lambda$, montre que si $F(\sigma)$

désigne la fibre de Milnor de f en σ et $\Phi(\sigma)$ désigne la fibre de Milnor de $f|_{P_\sigma}$ en σ [on peut supposer $\Phi(\sigma) = F(\sigma) \cap P_\sigma$], la restriction

$$(1) \quad H^{n-1}(F(\sigma), \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(\Phi(\sigma), \mathbb{C})$$

induit un isomorphisme d'espaces vectoriels munis de monodromies.

Partons maintenant d'un voisinage tubulaire holomorphe de S^* dans $X - \{0\}$ (ceci existe car S^* est une réunion finie de disques pointés disjoints et on est dans \mathbb{C}^{n+1}). Notons-le $\mathcal{U} \rightarrow S^*$. En prenant $P_\sigma = \pi^{-1}(\sigma)$ pour $\sigma \in S^*$ on voit que l'isomorphisme (1) donne naissance à un isomorphisme sur S^* du système local $H^{n-1}(u)$ muni de sa monodromie sur le système local des $H^{n-1}(\Phi(\sigma), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$ munis de leurs monodromies.

Maintenant les hypothèses standards et la transversalité à S^* de $\pi^{-1}(\sigma)$ pour chaque $\sigma \in S^*$ impliquent, grâce à [B.M] et au théorème de Malgrange-Kashiwara ([M.2], [K.3]), que les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées pour $f|_{\pi^{-1}(\sigma)}$ pour chaque $\sigma \in S^*$. On a donc, en particulier, un isomorphisme pour chaque σ de S^*

$$\text{can: } H_c^{n-1}(\Phi(\sigma), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}} \rightarrow H^{n-1}(\Phi(\sigma), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$$

et donc, chaque $H^{n-1}(\Phi(\sigma), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$ est muni d'une forme hermitienne (d'intersection) non dégénérée. Ceci donne une forme hermitienne non dégénérée localement constante sur ce système local d'espaces vectoriels avec monodromies, qui est compatible aux monodromies [c'est-à-dire que pour chaque $\sigma \in S^*$ elle est invariante par la monodromie de $H^{n-1}(\Phi(\sigma), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$] et via les isomorphismes (1) (recollés par le voisinage tubulaire holomorphe π et le choix $P_\sigma = \pi^{-1}(\sigma)$) elle nous fournit une forme hermitienne localement constante, non dégénérée

$$(2) \quad h: H^{n-1}(u)|_{S^*} \times H^{n-1}(u)|_{S^*} \rightarrow \mathbb{C}_{S^*}.$$

LEMME 1. — *La forme hermitienne (2) qui est non dégénérée et compatible à la monodromie induite par f sur $H^{n-1}(u)$, est intrinsèque.*

Preuve. — L'assertion est en fait ponctuelle sur S^* . Il suffit donc de vérifier que pour deux choix d'hypersurfaces transverses en σ à S^* les restrictions

$$H^{n-1}(F(\sigma), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}} \rightarrow H^{n-1}(\Phi_j(\sigma), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$$

conduisent pour $j=1, 2$ à la même forme hermitienne sur $H^{n-1}(F(\sigma), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$.

Pour deux hypersurfaces transverses voisines les couples $(F(\sigma), \Phi_1(\sigma))$ et $(F(\sigma), \Phi_2(\sigma))$ seront isotopes, ce qui donne facilement le résultat. On obtient le cas général par un argument de connexité. ■

Notre objectif dans les paragraphes suivants est de donner un calcul analytique de h correspondant à une variante relative du théorème 3. Le calcul local sur S^* qui suit contient une autre preuve du lemme précédent.

La proposition 1 du paragraphe *a* appliquée sur S^* nous donne un isomorphisme pour $k \geq k_0$

$$r^{n-1}(k): h^{n-1}(k) \rightarrow H^{n-1}(u)$$

qui nous permettra de représenter, localement au moins, les sections de $H^{n-1}(u)$ par des formes méromorphes à pôles dans $\{f=0\}$.

PROPOSITION 1. — Soit V un ouvert de $X^* = X - \{0\}$ et soient w et w' des sections sur V de $\Omega^{n-1}(k) = \Omega^{n-1}[f^{-1}] \otimes \mathbb{C}^k$, vérifiant $\delta w = 0$ et $\delta w' = 0$ (voir § a). Notons par e et e' les sections correspondantes de $H^{n-1}(u)$ sur $U = V \cap S^*$ [via le morphisme $r^{n-1}(k)$]. Alors la fonction $h(e, e')$ sur U est localement constante. Pour chaque forme différentielle $\varphi \in C^\infty(V)$ de degré 2 vérifiant :

- (i) $\text{Supp } \varphi \cap S^*$ est compact;
- (ii) $d\varphi \equiv 0$ au voisinage de $U = V \cap S^*$,

on aura la formule :

$$(3) \quad (2i\pi)^n \int_U h(e, e') \varphi = -\text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right).$$

Remarques. — 1° Comme $h(e, e')$ est localement constante sur U et que $\varphi|_U$ est C^∞ à support compact de degré 2, l'intégrale du membre de gauche de (3) est bien définie.

2° Comme les parties polaires en $\lambda = -u - v, \forall v \in \mathbb{N}$ du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ sont à support dans S le nombre $\text{Res} \left(\lambda = -u - v, \int_X |f|^{2\lambda} \psi \right)$ est bien défini dès que ψ est une forme C^∞ de degré maximal sur un ouvert de X telle que $\text{Supp } \psi \cap S$ soit compact :

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^N w$ et $f^N w'$ soient holomorphes au voisinage du compact $\text{Supp } \varphi \cap S^*$. Alors $f^N w_k \wedge \bar{f}^N \bar{w}'_k \wedge \varphi \wedge df \wedge \bar{d}\bar{f}$ est une forme $C^\infty \psi_0$ de degré maximal au voisinage de S (on prolonge par 0 hors de $\text{Supp } \varphi$ près de S) et donc le nombre

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\lambda = -u - N - 1, \int_X |f|^{2\lambda} |f|^{2N+2} w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right) \\ = \text{Res} \left(\lambda = -u - N - 1, \int_X |f|^{2\lambda} \psi_0 \right) \end{aligned}$$

est bien défini.

De plus ce nombre est indépendant du choix de N assez grand; c'est pourquoi en posant $\mu = \lambda + N + 1$ on peut raisonnablement le noter par

$$\text{Res} \left(\mu = -u, \int_X |f|^{2\mu} w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right)$$

ce que l'on a fait.

Ceci précise la signification du membre de droite de la formule (3).

3° Si V est un voisinage tubulaire C^∞ de $U = V \cap S^*$ de projection $\pi: V \rightarrow U$, pour toute 2-forme $C^\infty \varphi_0$ à support compact dans U on peut choisir $\varphi = \pi^* \varphi_0$ qui est une 2-forme C^∞ sur V vérifiant les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. Comme $\varphi|_U = \varphi_0$, ceci

montre que la formule (3) permet effectivement de déterminer la fonction localement constante $h(e, e')$ sur U grâce à la proposition 1 (sans utiliser de voisinage tubulaire holomorphe).

Démonstration de la proposition 1. — Avant de traiter le cas général nous allons examiner le cas particulier suivant :

Soit $\sigma_0 \in S^*$ et soit P un hyperplan générique passant σ_0 tel que :

1° L'hypersurface $\{f=0\} \cap P$ de P ne présente la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ pour sa monodromie qu'en σ_0 , au voisinage de σ_0 .

2° Pour tout $\sigma \in U$ voisinage ouvert de σ_0 dans S^* , la projection parallèle à P définit une fibration complexe triviale $\pi: V \rightarrow U$ d'un voisinage ouvert V de U dans X tel que la famille d'hypersurfaces $\pi^{-1}(\sigma) \cap \{f=0\}$ soit topologiquement triviale pour $\sigma \in U$ et tel que pour chaque $\sigma \in U$, $\pi^{-1}(\sigma)$ soit une boule de Milnor en σ pour $f|_{\pi^{-1}(\sigma)}$.

Nous noterons par $\Phi(\sigma)$ la fibre de Milnor correspondante.

3° On suppose que pour chaque $\sigma \in U$ la restriction naturelle $H^{n-1}(F(\sigma), \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-1}(\Phi(\sigma), \mathbb{C})$ est un isomorphisme compatible avec les monodromies induites par f . Ceci permet, comme on l'a dit plus haut, d'identifier le système local $\sigma \rightarrow H^{n-1}(\Phi(\sigma), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}}$ au faisceau $H^{n-1}(u)/U$.

Il résulte de la trivialité topologique locale de $\{f=0\}$ le long de S^* (voir plus haut) que localement sur S^* on peut réaliser les conditions 1°, 2° et 3°.

Considérons alors une 2-forme C^∞ φ_0 à support compact dans U et posons $\varphi = \pi^* \varphi_0$. On a alors $d\varphi \equiv 0$ sur V (car $d\varphi_0 = 0$ sur U puisque $\dim_{\mathbb{C}} U = 1$) et $\text{Supp } \varphi \cap S^* = \text{Supp } \varphi_0$ est un compact de U .

Soient w et w' dans $H^0(U, \Omega^{n-1}(k))$ vérifiant $\delta w = 0$ et $\delta w' = 0$ et induisant les sections e et $e' \in H(U, H^{n-1}(u))$ via le morphisme $r^{n-1}(k): H^{n-1}(k) \rightarrow H^{n-1}(u)$. Remarquons que comme U est de Stein, il admet un voisinage de Stein dans X et quitte à restreindre V l'existence de w et w' sera toujours assurée dès que $\mathcal{N}_{n-1}^k(e) = \mathcal{N}_{n-1}^k(e') = 0$ (ce qui est toujours réalisé pour $k \geq k_0$).

Montrons que la fonction $h(e, e')$ qui est localement constante vérifiera la formule

$$(3 \text{ bis}) \quad (2i\pi)^n \int_U h(e, e') \varphi_0 = -\text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right)$$

sous ces hypothèses [reprendre les remarques qui suivent (3) pour donner un sens à (3 bis)].

Fixons $\sigma \in \text{Supp } \varphi_0$. Pour $w(\sigma)$ et $w'(\sigma)$ dans $\Omega^{n-1}[f^{-1}] \otimes \mathbb{C}^k$ vérifiant $\delta w(\sigma) = 0$ et $\delta w'(\sigma) = 0$ la valeur en σ de $\pi^{-1}(\sigma)$

$$h(e, e')(\sigma) = h(e(\sigma), e'(\sigma))$$

est donnée par la formule du théorème 3

$$(4) \quad h(e, e')(\sigma) = -(2i\pi)^{-n} \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_{\pi^{-1}(\sigma)} |f|^{2\lambda} w_k(\sigma) \wedge \bar{w}'_k(\sigma) \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right).$$

En intégrant (4) sur U avec la densité φ_0 on obtient

$$\int_U h(e, e') \varphi_0 = -(2i\pi)^{-n} \int_U \varphi_0 \operatorname{Res} \left(\lambda = -u, \int_{\pi^{-1}(\sigma)} |f|^{2\lambda} w_k(\sigma) \wedge \bar{w}'_k(\sigma) \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right)$$

et comme la direction de projection P qui définit π est non caractéristique pour $D_x f^\lambda$, le théorème de Fubini pour une distribution non caractéristique donnera (voir [B.M]) :

$$\int_U h(e, e') \varphi_0 = -(2i\pi)^{-n} \operatorname{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \varphi \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right)$$

qui est bien la formule désirée (3 bis) dans ce cas.

Pour achever la preuve de la proposition 1, nous allons montrer que :

1° on peut trouver, pour chaque $\varphi_0 \in C^\infty$ à support compact et de degré 2 sur U, une forme φ_1 vérifiant les conditions (i) et (ii) de l'énoncé et satisfaisant la formule (3) ainsi que $\varphi|_U = \varphi_0$;

2° que si φ vérifie les conditions de l'énoncé et si $\varphi|_U = 0$, alors on a bien l'égalité (3) pour φ .

Preuve de l'assertion 1°. — Quitte à utiliser une partition de l'unité $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ sur le support de φ_0 , on se ramène à traiter le cas local précédent. La forme φ_1 est alors construite comme somme (finie) des $\pi_\alpha^*(\rho_\alpha \varphi_0)$. On utilise ici que toute forme de degré 2 sur U est d -fermée.

Preuve de l'assertion 2°. — Le courant

$$\operatorname{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} w_k \wedge \bar{w}'_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \square \right)$$

qui est défini au voisinage de U, de degré $2n$ à support dans U est d -fermé. Ceci résulte facilement de la formule de Stokes car on a $dw_k \wedge df = 0$ et $d\bar{w}'_k \wedge d\bar{f} = 0$. Il définit donc une classe de $H_U^{2n}(V, \mathbb{C})$.

Comme S^* est une sous-variété de dimension réelle 2 et orientée, on a

$$H_{S^*}^i(\mathbb{C}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 2n \\ \mathbb{C}_{S^*} & \text{si } i = 2n \end{cases}$$

On a donc un isomorphisme naturel

$$H^0(U, \mathbb{C}) \cong H_U^{2n}(V, \mathbb{C}).$$

La dualité $H^0(U, \mathbb{C}) \times H_c^2(U, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ s'interprète alors comme la dualité entre les quotients (de dimension finie si U n'a qu'un nombre fini de composantes connexes)

$$E = \frac{\text{courants } d\text{-fermés à support dans U de degré } 2n}{d \text{ de courant de degré } 2n-1 \text{ à support dans U}}$$

et

$$F = \frac{\text{formes } \varphi \text{ } C^\infty \text{ } d\text{-fermées de degré } 2 \text{ au voisinage de } U \text{ telles que } \text{Supp } \varphi \cap U \subset \subset U}{d \text{ formes } C^\infty \text{ de degré } 1 \text{ au voisinage de } U \text{ telles que } \text{Supp } \varphi \cap U \subset \subset U}$$

la dualité entre E et F étant donnée simplement par évaluation :

$$\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi) \quad \text{si } T \in E \quad \text{et} \quad \varphi \in F.$$

Donc si T est d -fermé de degré $2n$ et à support dans U, $T(\varphi)$ ne dépend, pour une telle φ , que de l'image de φ dans $H_c^2(U, \mathbb{C})$.

En particulier si $\varphi|_U = 0$ on aura $T(\varphi) = 0$ ⁽²⁰⁾.

Ceci prouve l'assertion 2° et achève donc la preuve de la proposition 1.

Remarque. — La proposition 1 n'utilise qu'un voisinage tubulaire C^∞ de S^* dans $X^* = X - \{0\}$ et contient une preuve du lemme 1. Ceci montre que l'on peut éviter l'utilisation du voisinage tubulaire holomorphe pour définir la forme hermitienne localement constante h sur $H^{n-1}(u)|_{S^*}$.

Un complément à la proposition 1.

LEMME 2. — *Sous les hypothèses standards on considère $k \geq k_0$ et on suppose donné sur V ouvert de X^* : $v \in H^0(V, \Omega^{n-1}(k))$ arbitraire, ainsi que $w_k \in H^0(V, \Omega^{n-1}[f^{-1}])$ vérifiant $df \wedge dw_k = 0$.*

Alors on a, pour chaque 2-forme C^∞ φ sur V vérifiant :

- (i) $\text{Supp } \varphi \cap S^*$ est compact;
- (ii) $d\varphi \equiv 0$ au voisinage de $U = V \cap S^*$

$$(1) \quad \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_V |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge (\bar{\delta}v)_a \wedge \varphi \right) = 0.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que, comme pour $a \geq 1$ les courants $P_a \left(\lambda = -u, \int_V |f|^{2\lambda} \square \right)$ sont à supports dans S^* , la condition (i) sur le support de φ montre que le membre de gauche de (1) est bien défini.

Considérons maintenant le courant T sur V, à support dans $V \cap S^*$ et de type $(n, n-1)$ donné par

$$T = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_V |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \bar{v}_a \wedge \square \right).$$

⁽²⁰⁾ Attention, ceci n'implique pas que T est d'ordre 0!

On a pour $\text{Re}(\lambda) \gg 0$ sur V

$$d\left(|f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \bar{v}_a\right) = (\lambda + u) |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \bar{v}_a$$

$$+ (-1)^n |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \left(dv_a - u \frac{df}{f} \wedge v_a - \frac{df}{f} \wedge v_{a-1} \right) + |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \bar{v}_{a-1}$$

avec la convention $v_0 = 0$.

On obtient donc, par prolongement analytique

$$dT = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_{a+1} \left(\lambda = -u, \int_V |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \bar{v}_a \wedge \square \right)$$

$$+ \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_V |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \bar{v}_{a-1} \wedge \square \right)$$

$$+ (-1)^n \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_V |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge (\bar{\delta}v)_a \wedge \square \right).$$

Comme $\langle dT, \varphi \rangle = \pm \langle T, d\varphi \rangle = 0$ et comme les deux premières sommes dans l'expression de dT se détruisent, puisque $P_{k_0+1} \left(\lambda = -u, \int_V |f|^{2\lambda} \square \right) = 0$ sur S^* et puisque $v_0 = 0$, le lemme est démontré.

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 1. — *Sous les hypothèses de la proposition, donnons-nous $v \in H^0(V, \Omega^n(k))$ vérifiant sur V*

$$(2) \quad v = \tau_k(w') + \delta\xi$$

où $\xi \in H^0(V, \Omega^{n-1}(k))$, $w' \in H^0(V, \Omega^{n-1}(k))$ vérifie $\delta w' = 0$, c'est-à-dire explicitement

$$(2 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{df}{f} \wedge w'_k + d\xi_1 - u \frac{df}{f} \wedge \xi_1 \\ \text{et} \\ v_j = d\xi_j - u \frac{df}{f} \wedge \xi_j - \frac{df}{f} \wedge \xi_{j-1} \quad \text{pour } j \in [2, k]. \end{array} \right.$$

Alors on a, dans les conditions de la proposition 1

$$(3) \quad -(-2i\pi)^n \int_U h(e, e') \varphi = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_V |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \bar{v}_a \wedge \varphi \right).$$

Preuve. — En remplaçant \bar{v}_a par sa valeur donnée par (2 bis) dans (3), on retrouve la formule de la proposition 1 puisque la somme des termes en ξ est nulle d'après le lemme précédent.

Remarque. — On peut se contenter de demander à v d'être localement le long de $U = V \cap S^*$ de la forme (2) (w' global mais ξ local) en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 1 : en effet on prouve la formule désirée pour une φ obtenue par partition de l'unité sur $S^* \cap V = U$. On montre alors que la formule générale est indépendante du choix de φ vérifiant (i) et (ii) en raisonnant comme dans la proposition 1, puisque la condition $\delta v = 0$ [qui est conséquence de l'écriture locale (2)] donne la fermeture du $2n$ -courant à support U

$$\sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \bar{v}_a \wedge \square \right).$$

N° 2. Nous nous proposons maintenant de donner une formule globale pour la dualité

$$\tilde{h}: H^0(S^*, H^{n-1}(u)) \times H^1(S^*, H^{n-1}(u)) \rightarrow \mathbb{C}$$

déduite de h par composition avec le morphisme de trace

$$\text{tr}: H^1(S^*, \mathbb{C}_{S^*}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est défini par le 1-cycle compact de S^* obtenu en coupant S^* par une sphère de centre 0 et de rayon assez petit dans X .

Ceci est précisé par le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit S un germe de courbe (complexe) irréductible en 0 dans \mathbb{C}^{n+1} . Supposons le représentant de ce germe assez petit pour que S soit un disque topologique, et notons par $\gamma(S^*)$ le 1-cycle de $S^* = S - \{0\}$ orienté dans le sens direct (l'orientation de S^* est donnée par la structure complexe). Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la sphère de centre 0 et de rayon ε coupe S^* transversalement en un 1-cycle homologue à $\gamma(S^*)$.*

DÉFINITION 1. — Pour S germe de courbe en 0 dans \mathbb{C}^{n+1} nous appellerons cycle fondamental de S^* le 1-cycle de $S^* = S - \{0\}$ obtenu en coupant S^* par une sphère de centre 0 assez petite.

Si $S = \bigcup_{j=1}^N S_j$ est la décomposition de S en composantes irréductibles en 0, alors le cycle

fondamental de S^* est homologue à $\sum_{j=1}^N \gamma(S_j^*)$ où $\gamma(S_j^*)$ désigne le cercle orienté positivement du disque pointé S_j^* .

Le lemme ci-dessus est laissé en exercice au lecteur. Il assure que notre définition est bien indépendante du rayon (assez petit) de la sphère considérée.

Une conséquence immédiate est alors que \tilde{h} est bien une dualité hermitienne non dégénérée. Elle est de plus compatible aux actions de la monodromie de f sur $H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ et $H^1(S^*, H^{n-1}(u))$.

Démonstration de la proposition 11. — Nos hypothèses signifient déjà (voir § b) que l'on a, au voisinage de chaque point σ de S^* une écriture

$$(1) \quad v|_{x_\sigma} = \tau_k(\varepsilon)|_{x_\sigma} + \delta\xi^\sigma$$

où $\varepsilon \in H^0(S^*, \Omega^{n-1}(k))$ vérifie $\delta\varepsilon=0$, où X_σ désigne une boule de Milnor (assez petite) pour f en σ , et où $\xi^\sigma \in H^0(S^* \cap X_\sigma, \Omega^{n-1}(k))$.

De plus ε induit e dans $H^0(S^*, H^{n-1}(u))$.

De même on aura

$$w|_{X_\sigma} = \tau_{k'}(\alpha)|_{X_\sigma} + \delta\beta^\sigma$$

où $\alpha \in H^0(S^*, \Omega^{n-1}(k'))$ vérifie $\delta\alpha=0$ et où $\beta^\sigma \in H^0(S^* \cap X_\sigma, \Omega^{n-1}(k'))$.

L'élément η de $H^1(S^*, H^{n-1}(u))$ est alors représenté [via l'isomorphisme $h^{n-1}(k') : h^{n-1}(k') \rightarrow H^{n-1}(u)$] par le 1-cocycle [à valeurs dans $h^{n-1}(k')$]

$$\beta^{\sigma, \sigma'} = \beta^\sigma - \beta^{\sigma'}.$$

Fixons alors un voisinage tubulaire $C^\infty \pi : V \rightarrow S^*$ de S^* dans $X^* = X - \{0\}$.

Choisissons une 1-forme C^∞ à support compact γ_0 sur S^* d -fermée et représentant dans $H_c^1(S^*, \mathbb{C})$ la classe du cycle fondamental de S^* . Si Γ désigne ce dernier, pour toute 1-forme C^∞ d -fermée ψ sur S^* on aura donc

$$\int_{S^*} \psi \wedge \gamma_0 = \int_\Gamma \psi.$$

Posons alors $\gamma = \pi^* \gamma_0$; c'est une 1-forme C^∞ d -fermée sur V qui vérifiera les conditions (i), (ii) et (iii). Soit $K = S^* \cap \text{Supp } \gamma$.

Soit $(\rho_\sigma)_{\sigma \in S^*}$ une partition C^∞ de l'unité subordonnée à un recouvrement fini de K extrait du recouvrement $(X_\sigma)_{\sigma \in S^*}$ de S^* par les boules de Milnor considérées ci-dessus. Notons $\tilde{\rho}_\sigma = \pi^* \rho_\sigma$. On a donc

$$\sum \tilde{\rho}_\sigma \equiv 1 \text{ au voisinage de } K \text{ dans } V.$$

Appliquons le corollaire de la proposition 1 avec comme ouvert $X_\sigma \cap X_{\sigma'}$, $V|_{X_\sigma \cap X_{\sigma'}}$ et $\beta^{\sigma, \sigma'} = \beta^\sigma - \beta^{\sigma'}$. On obtient alors pour $\varphi = \tilde{\rho}_\sigma \tilde{\rho}_{\sigma'} \wedge \gamma$:

$$\begin{aligned} & -(-2i\pi)^n \int_{S^*} h(\beta^{\sigma, \sigma'}, e) \rho_\sigma d\rho_{\sigma'} \wedge \gamma \\ & = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \beta_k^{\sigma, \sigma'} \wedge \bar{v}_a \wedge \tilde{\rho}_\sigma \tilde{\rho}_{\sigma'} \wedge \gamma \right). \end{aligned}$$

En sommant cette égalité en σ, σ' on obtient

$$\begin{aligned} & -(-2i\pi)^n \int_{S^*} \sum \rho_\sigma d\rho_{\sigma'} \wedge \gamma_0 h(\beta^{\sigma, \sigma'}, e) \\ & = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \xi_{k'} \wedge \bar{v}_a \wedge \gamma \right) \end{aligned}$$

où

$$\xi = \sum_{\sigma, \sigma'} \rho_{\sigma} d\rho_{\sigma'} \wedge (\beta^{\sigma} - \beta^{\sigma'}).$$

Commençons par remarquer que le membre de gauche de la formule ci-dessus est simplement l'évaluation sur le cycle fondamental de S^* de l'élément de $H^1(S^*, \mathbb{C})$ défini par le 1-cocycle $c^{\sigma, \sigma'} = h(\beta^{\sigma, \sigma'}, e) \in Z^1((X_{\sigma})_{\sigma \in S^*}, \mathbb{C}_{S^*})$.

En effet on a $\beta^{\sigma\sigma'} + \beta^{\sigma'\sigma''} + \beta^{\sigma''\sigma} = 0$ sur $X_{\sigma} \cap X_{\sigma'} \cap X_{\sigma''}$. Par ailleurs l'isomorphisme Čech \simeq De Rham pour le calcul de $H^1(S^*, \mathbb{C})$ envoie le 1-cocycle c sur la 1-forme d -fermée

$$\sum_{\sigma, \sigma'} \rho_{\sigma} d\rho_{\sigma'} c^{\sigma, \sigma'}$$

et par choix de γ_0 , le membre de gauche donne l'intégrale de cette forme sur le cycle fondamental, d'où notre assertion.

Comme le cocycle $\beta^{\sigma, \sigma'} \in Z^1((X_{\sigma})_{\sigma \in S^*}, h^{n-1}(k'))$ représente bien η dans $H^1(S^*, H^{n-1}(u))$ d'après notre hypothèse, on a établi la formule

$$-(2i\pi)^n \tilde{h}(e, \eta) = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{\xi}_{k'} \wedge v_a \wedge \gamma \right)$$

en conjuguant (on peut supposer γ réelle, c'est-à-dire $\bar{\gamma} = \gamma$).

Maintenant, comme $\sum \tilde{\rho}_{\sigma} \equiv 1$ au voisinage de $K = \text{Supp } \gamma \cap S^*$, on aura

$$\sum_{\sigma, \sigma'} \tilde{\rho}_{\sigma} d\tilde{\rho}_{\sigma'} \wedge (\beta^{\sigma} - \beta^{\sigma'}) = -\sum_{\sigma'} d\tilde{\rho}_{\sigma'} \wedge \beta^{\sigma'}$$

et donc

$$w - \delta(\sum \tilde{\rho}_{\sigma} \beta^{\sigma}) = \tau_{k'}(\alpha) - \sum_{\sigma} d\tilde{\rho}_{\sigma} \wedge \beta^{\sigma}$$

au voisinage de K , puisque l'on a

$$w|_{X_{\sigma}} = \tau_k(\alpha)|_{X_{\sigma}} + \delta\beta^{\sigma}$$

et

$$\delta(\tilde{\rho}_{\sigma} \beta^{\sigma}) = d\tilde{\rho}_{\sigma} \wedge \beta^{\sigma} + \tilde{\rho}_{\sigma} \delta\beta^{\sigma}.$$

Quitte à choisir les fonctions ρ_{σ} réelles (ce qui est possible), on aura donc

$$\xi = w - \delta(\sum \rho_{\sigma} \beta^{\sigma}) - \tau_{k'}(\alpha)$$

et en posant $\zeta = \sum \tilde{\rho}_{\sigma} \beta^{\sigma}$ cela donne, puisque $(df/f) \wedge \tau_{k'}(\alpha) = 0$

$$\frac{df}{f} \wedge \xi_{k'} = \frac{df}{f} \wedge d\zeta_{k'}.$$

Montrons que

$$0 = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge d\bar{\zeta}_{k'} \wedge v_a \wedge \gamma \right).$$

Pour $\operatorname{Re} \lambda \gg 0$ on a, puisque $d\gamma = 0$

$$\begin{aligned} d \left(|f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{\zeta}_{k'} \wedge v_a \wedge \gamma \right) &= -|f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge d\bar{\zeta}_{k'} \wedge v_a \wedge \gamma \\ &\quad + (\lambda + u) |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{\zeta}_{k'} \wedge v_a \wedge \gamma \\ &\quad + |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{\zeta}_{k'} \wedge v_{a-1} \wedge \gamma \end{aligned}$$

puisque $\delta v = 0$, en utilisant la convention $v_0 = 0$. Cela donne d'après Stokes

$$\begin{aligned} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{\zeta}_{k'} \wedge v_a \wedge \gamma \right) \\ = (-1)^a P_{a+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{\zeta}_{k'} \wedge v_a \wedge \gamma \right) \\ + (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{\zeta}_{k'} \wedge v_{a-1} \wedge \gamma \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne 0 en sommant de $a=1$ à k_0 puisque le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ n'a pas de pôle d'ordre $> k_0$ en $-u-j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$ le long de S^* .

Pour achever la preuve de la proposition 11, il suffit de constater que le membre de droite de la formule de l'énoncé ne dépend pas du choix précis de la forme γ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de l'énoncé, ce qui résulte de la fermeture du courant de type $(n, n+1)$ à support dans S^* :

$$\sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{w}_{k'} \wedge v_a \wedge \square \right).$$

Ce calcul analogue au lemme qui précède le corollaire de la proposition 1 est laissé au lecteur.

COROLLAIRE 1 (proposition 11). — *Supposons, sous les hypothèses de la proposition 11, que la section $e \in H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ se prolonge à S en $\hat{e} \in H^0(S, H^{n-1}(u))$ et que la forme w se prolonge également à S [alors si $r^n(k')(w) = e'$ on a $\eta = \bar{\theta}_{k'}(e')$]. Alors on a*

$$\tilde{h}(e, \eta) = 0.$$

Preuve. — Sous notre hypothèse on peut choisir

$$v = \tau_k(\varepsilon) \quad \text{où } \varepsilon \in H^0(S, \Omega^{n-1}(k)) \text{ vérifie } \delta\varepsilon = 0.$$

La proposition 11 donne alors

$$-(2i\pi)^n \tilde{h}(e, \eta) = -\text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{w}_{k'} \wedge \frac{df}{f} \wedge \varepsilon_k \wedge \gamma \right).$$

Mais on peut choisir $\gamma = d\tau$ avec $\tau \in C_c^\infty(X)$ et $\tau \equiv 1$ près de 0. Comme ε_k et $w_{k'}$ sont méromorphes sur X (0 inclus) la formule de Stokes donne le résultat. ■

Ce dernier corollaire montre en particulier que pour $e \in \text{Ker } \mathcal{N}_n^k$, $e' \in \text{Ker } \mathcal{N}_n^{k'}$ avec $k, k' \geq k_0$ le nombre

$$\tilde{h}(\tilde{\text{ob}}_k(e), \tilde{\theta}_{k'}(e'))$$

est bien défini, bien que $\tilde{\text{ob}}_k(e)$ soit un élément de

$$H_{(0)}^1(S, H^{n-1}(u)) \simeq \frac{H^0(S^*, H^{n-1}(u))}{H^0(S, H^{n-1}(u))}.$$

Pour k et $k' \geq k_0$ considérons e et $e' \in H^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}_n^k e = 0$ et $\mathcal{N}_n^{k'} e' = 0$. Nous allons déduire de la proposition 11 une formule permettant de calculer analytiquement le nombre (qui est bien défini d'après la remarque précédente)

$$\tilde{h}(\tilde{\text{ob}}_k(e), \tilde{\theta}_{k'}(e')).$$

COROLLAIRE 2. — Pour $k, k' \geq k_0$ et $e, e' \in H^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}_n^k e = 0$ et $\mathcal{N}_n^{k'} e' = 0$ on a

$$\tilde{h}(\tilde{\text{ob}}_k(e), \tilde{\theta}_{k'}(e')) = \frac{(-1)^k}{(2i\pi)^n} P_{k+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{w}_{k'} \right)$$

si $w \in H^0(X, \Omega^n(k))$ et $w' \in H^0(X, \Omega^n(k'))$ vérifient $\delta w = 0$, $\delta w' = 0$ et $r^n(k)(w) = e$, $r^n(k')(w') = e'$.

Démonstration. — En choisissant $\tau \in C_c^\infty(X)$ valent $\equiv 1$ près de 0, on peut choisir $\gamma = d\tau$ dans la formule de la proposition 11. On obtient donc en appliquant la proposition 11 à $\tilde{\text{ob}}_k(e)$ et $\tilde{\theta}_{k'}(e')$ (modulo le corollaire 1 qui donne un sens à notre calcul)

$$-(2i\pi)^n \tilde{h}(\tilde{\text{ob}}_k(e), \tilde{\theta}_{k'}(e')) = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{w}_{k'} \wedge w_a \wedge d\tau \right).$$

Mais puisque $\delta w = 0$ on a pour $a \in [1, k_0]$

$$\begin{aligned} d \left(|f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{w}_{k'} \wedge w_a \cdot \tau \right) &= (\lambda + u) |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{w}_{k'} \wedge w_a \cdot \tau \\ &+ |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{w}_{k'} \wedge w_{a-1} \cdot \tau + |f|^{2\lambda} d\tau \wedge \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \bar{w}_{k'} \wedge w_a \end{aligned}$$

avec la convention $w_0 = 0$.

En appliquant la formule de Stokes et le prolongement analytique, on en déduit que

$$0 = \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_{a+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge w_a \cdot \tau \right) \\ + \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge w_{a-1} \cdot \tau \right) \\ - \sum_{a=1}^{k_0} (-1)^a P_a \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge w_a \wedge d\tau \right).$$

Ceci nous donne donc

$$(-2i\pi)^n \tilde{h}(\tilde{\text{ob}}_k(e), \tilde{\theta}'_k(e')) = (-1)^{k_0} P_{k_0+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge w_{k_0} \cdot \tau \right).$$

Considérons $h \in [1, k - k_0]$; on a (pour $\text{Re } \lambda \gg 0$)

$$d \left(|f|^{2\lambda} \tau \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge w_{k_0+h} \right) = |f|^{2\lambda} d\tau \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge w_{k_0+h} \\ + (\lambda + u) |f|^{2\lambda} \tau \frac{df}{f} \wedge \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge w_{k_0+h} + |f|^{2\lambda} \tau \frac{df}{f} \wedge \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge w_{k_0+h-1}$$

toujours grâce à l'hypothèse $\delta w = 0$.

On aura donc, puisque $d\tau \equiv 0$ près de 0 et que pour $h \geq 1$ le support des courants

$$P_{k_0+h} \left(\lambda = -u - \nu, \int_X |f|^{2\lambda} \square \right), \forall \nu \in \mathbb{N} \text{ est contenu dans } \{0\},$$

$$P_{k_0+h+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \tau \frac{df}{f} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_{k_0+h} \right) \\ = -P_{k_0+h} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \tau \frac{df}{f} \wedge \overline{w}'_{k'} \wedge \frac{df}{f} \wedge w_{k_0+h-1} \right)$$

ce qui donne, par récurrence sur $h \in [1, k - k_0]$

$$\tilde{h}(\tilde{\text{ob}}_k(e), \tilde{\theta}'_k(e')) = \frac{(-1)^k}{(2i\pi)^n} P_{k+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \overline{w}'_{k'} \right)$$

ce qui achève la démonstration du corollaire 2.

N° 3.

Démonstration de la proposition 12. — Commençons par rappeler que l'image de $\tilde{\theta}'_k$ est déjà contenue dans le sous-espace $H^0(S, H^{n-1}(u))^\perp$ d'après le corollaire 1 de la

proposition 11 précédente. Pour prouver la proposition, il suffit donc de voir que l'adjoint

$${}^t\tilde{\theta}_k: H^0(S^*, H^{n-1}(u)) \rightarrow H_c^n(u)$$

a pour noyau le sous-espace $H^0(S, H^{n-1}(u))$ de $H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ [le fait que la restriction à S^* de $H^0(S, H^{n-1}(u))$ soit injective vient de la nullité de $H_{\{0\}}^0(S, H^{n-1}(u))$ qui résulte de la perversité].

Commençons par expliciter l'application ${}^t\tilde{\theta}_k$.

Précisons déjà que ${}^t\tilde{\theta}_k$ est une application à valeurs dans $H_c^n(u)$ via l'identification naturelle de l'anti-dual de $H^n(u)$ avec $H_c^n(u)$ à l'aide de la forme sesquilinéaire non dégénérée

$$\text{Trace}: H_c^n(u) \times H^n(u) \rightarrow \mathbb{C}$$

donnée par

$$\text{Trace}(a, b) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{F(0)} a \cup \bar{b}$$

où $F(0)$ désigne la fibre de Milnor de f en 0.

Soit $\alpha \in H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ et notons par $(\mathcal{E}(k), \delta)$ le complexe semi-méromorphe introduit au paragraphe *c*. Comme on a sur $Y^* = f^{-1}(0) - \{0\}$, $h^i(k) = H^i(\mathcal{E}(k), \delta) = 0$ pour $i < n-1$, la proposition 1 du paragraphe *c* nous donne l'isomorphisme

$$(1) \quad H^0(S^*, h^{n-1}(k)) \simeq \mathbb{H}^{n-1}(Y^*, \mathcal{E}(k), \delta)$$

et comme les faisceaux $\mathcal{E}(k)$ sont fins, on aura simplement

$$(2) \quad H^0(S^*, h^{n-1}(k)) \simeq H^{n-1}(H^0(Y^*, \mathcal{E}(k)), \delta).$$

On peut donc, puisque $k \geq k_0$ et donc que $h^{n-1}(k) \xrightarrow{r^{n-1}} H^{n-1}(u)$ est un isomorphisme (voir § *a*, proposition 1) trouver $\tilde{\alpha} \in H^0(Y^*, \mathcal{E}^{n-1}(k))$ vérifiant $\delta\tilde{\alpha} = 0$ et représentant α via les isomorphismes (1), (2).

Quitte à rétrécir X autour de $f^{-1}(0)$ [c'est-à-dire quitte à remplacer X par $X \cap f^{-1}(D_1)$ où $D_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| < \eta_1\}$ avec η_1 assez petit] on peut supposer que $\tilde{\alpha}$ est définie, semi-méromorphe et vérifie $\delta\tilde{\alpha} = 0$ au voisinage de $\partial X'$, où $X' = X \cap B(0, \varepsilon')$, où ε' est choisi comme au paragraphe *c* [c'est-à-dire $\varepsilon - \varepsilon' \ll \varepsilon$ si X est défini par la boule $B(0, \varepsilon)$].

Soit γ une 1-forme C^∞ d -fermée sur X' à support concentré au voisinage de $\partial X'$ [par exemple $\gamma = d\tau$ où $\tau \in C_c^\infty(X)$ est une régularisation de la fonction caractéristique de X'] représentant en cohomologie la sphère $\partial B(0, \varepsilon')$. Alors la forme C^∞ à support compact sur la fibre de Milnor $F(0)$ de f en 0 [identifiée à $f^{-1}(s_0)$ où $s_0 \in D \cap \mathbb{R}^{+*}$] à valeurs dans \mathbb{C}^k

$$(4) \quad a = \gamma \wedge \exp(-\text{Id } u + N) \text{Log } f(\tilde{\alpha})|_{F(0)}$$

est d -fermée sur $F(0)$ de degré n et à support compact. Elle définit donc une classe dans $H_c^n(F(0), \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^k$.

LEMME 4. — *La classe induite par a_k dans $H_c^n(F(0), \mathbb{C})$ est égale à $(1/2i\pi) {}^t\tilde{\theta}_k(\alpha)$.*

Démonstration. — Par définition de l'adjoint ${}^t\tilde{\theta}_k$, pour chaque $e \in H^n(u)$ on a

$$(5) \quad \tilde{h}(\alpha, \tilde{\theta}_k(e)) = \text{Trace}({}^t\tilde{\theta}_k(\alpha), e).$$

Pour prouver le lemme, il suffit donc de montrer que la classe définie par a_k est dans $H_c^n(u)$ et que $\forall e \in H^n(u)$ on a l'identité

$$(6) \quad 2i\pi \text{Trace}(a_k, e) = \tilde{h}(\alpha, \tilde{\theta}_k(e)).$$

La première assertion est facile car la monodromie T agit manifestement sur a par

$$(7) \quad Ta = \exp(-2i\pi(\text{Id } u + N))(a)$$

d'après (4), puisque γ est uniforme sur X . On a donc bien $a|_{F(0)} \in H_c^n(u) \otimes \mathbb{C}^k$.

Soit $w \in H^0(X, \Omega^n(k))$ vérifiant $\delta w = 0$ et $r^n(k)(w) = e$ (voir proposition 2). Considérons alors les fonctions

$$(8) \quad F_{i,j}(s) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{f=s} \gamma \wedge \tilde{\alpha}_i \wedge \bar{w}_j, \quad i, j \in [1, k].$$

Elles sont bien définies pour $|s|$ assez petit $s \neq 0$ puisque γ est à support f -propre, et elles vérifient le système étudié au paragraphe g , n° 3 qui se déduit des égalités

$$(9) \quad d\gamma = 0, \quad \delta\tilde{\alpha} = 0, \quad \delta w = 0.$$

On aura donc

$$(10) \quad F_{k,k}(s) = |s|^{2u} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{c_p}{p!} (\text{Log } |s|^2)^p$$

avec

$$c_p = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{F(0)} a_k \wedge \overline{N^p e}.$$

On a donc, en particulier

$$(11) \quad c_0 = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{F(0)} a_k \wedge \bar{e} = \text{Trace}(a_k, e).$$

Maintenant par transformation de Mellin (complexe) on obtient, pour $\chi \in C_c^\infty(D)$ vérifiant $\chi \equiv 1$ près de 0

$$(12) \quad c_0 = \frac{1}{(2i\pi)^{n+1}} \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_D |s|^{2\lambda} F_{k,k}(s) \chi(s) \frac{ds}{s} \wedge \frac{\bar{ds}}{s} \right)$$

ce qui donne par Fubini

$$(13) \quad \text{Trace}(a_k, e) = \frac{1}{(2i\pi)^{n+1}} \text{Res}(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \gamma \wedge \tilde{\alpha}_k \wedge \bar{w}_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{\bar{f}})$$

où l'on a omis $f^* \chi$ qui vaut identiquement 1 au voisinage de $f^{-1}(0)$ qui contient le support des courants

$$\text{Res}\left(\lambda = -u - v, \int_X |f|^{2\lambda} \square\right), \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

En utilisant la proposition 11 précédente pour calculer $\tilde{h}(\alpha, \tilde{\theta}(e))$, on obtient

$$(14) \quad \tilde{h}(\alpha, \tilde{\theta}(e)) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \text{Res}\left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \gamma \wedge \tilde{\alpha}_k \wedge \bar{w}_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{\bar{f}}\right)$$

où $\tilde{\alpha} \in H^0(S^*, \Omega^{n-1}(k))$ vérifie $\delta\tilde{\alpha} = 0$ et $r^{n-1}(k)(\tilde{\alpha}) = \alpha$ (on utilise ici $k \geq k_0$).

On peut en fait remplacer $\tilde{\alpha}$ par $\tilde{\alpha}$ dans (14) car on aura

$$\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha} = \delta\tilde{\beta} \quad \text{au voisinage de } S^*$$

où $\tilde{\beta} \in H^0(S^*, \mathcal{E}^{n-2}(k))$, et on en déduit

$$\frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_k = \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_k - d\left(\frac{df}{f} \wedge \tilde{\beta}_k\right)$$

près de S^* . La formule de Stokes montre alors que

$$\text{Res}\left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \gamma \wedge d\left(\frac{df}{f} \wedge \tilde{\beta}_k\right) \wedge \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \bar{w}_k\right) = 0.$$

En comparant (13) et (14) dans laquelle on a remplacé $\tilde{\alpha}_k$ par $\tilde{\alpha}_k$, on en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \tilde{h}(\alpha, \tilde{\theta}_k(e)) = \text{Trace}(a_k, e)$$

c'est-à-dire (6), et ceci achève la preuve du lemme 4. ■

Achevons la preuve de la proposition en montrant que $\text{Ker } {}^i\tilde{\theta}_k \subset H^0(S, H^{n-1}(u))$.

Soit donc $\alpha \in H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ vérifiant ${}^i\tilde{\theta}_k(\alpha) = 0$ dans $H_c^n(u)$. Considérons la suite exacte du couple $(\overline{F(0)}, \partial F(0))$:

$$0 \rightarrow H^{n-1}(F(0), \mathbb{C}) \xrightarrow{i} H^{n-1}(F(0) \cap (X - \bar{X}'), \mathbb{C}) \xrightarrow{\partial} H_c^n(F(0), \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{can}} H^n(F(0), \mathbb{C}) \dots$$

L'écriture ci-dessus est justifiée par les considérations suivantes :

- $F(0)$ est une variété de Stein de dimension n et donc $H_c^{n-1}(F(0), \mathbb{C}) = 0$.
- Le bord de $F(0)$ est homotopiquement équivalent à $F(0) \cap (X - \bar{X}'')$ où $X'' = X \cap B(0, \varepsilon'')$ avec $\varepsilon'' < \varepsilon' < \varepsilon$ [par exemple $\varepsilon'' = \varepsilon - 2(\varepsilon - \varepsilon')$] puisque $F(0)$ est transverse au bord de la boule de Milnor.

D'après notre hypothèse ${}^i\tilde{\theta}_k(\alpha) = 0$ et le calcul du lemme précédent, l'élément défini par

$$\exp(-(\text{Id } u + N) \text{Log } f)(\tilde{\alpha})$$

dans

$$H^{n-1}(F(0) \cap (X - \bar{X}''), \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^k$$

aura une image nulle par $\partial \otimes \text{Id}_{\mathbb{C}^k}$ (puisque ∂ est précisément donné par produit extérieur par γ). On peut donc trouver $\varepsilon \in H^{n-1}(F(0), \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^k$ vérifiant

$$i(\varepsilon) = \exp(-(\text{Id } u + N) \text{Log } f)(\tilde{\alpha})$$

dans

$$H^{n-1}(F(0) \cap (X - \bar{X}''), \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^k.$$

La compatibilité de i à la monodromie de f ainsi que l'injectivité de i montrent que l'on a nécessairement $\varepsilon \in H^{n-1}(F(0), \mathbb{C})_{e^{-2i\pi u}} \otimes \mathbb{C}^k$ et que $N_{n-1} \varepsilon_j = \varepsilon_{j-1}$ pour $j \in [1, k]$ avec la convention $\varepsilon_0 = 0$.

Soit $v \in H^0(X, \Omega^{n-1}(k))$ vérifiant $\delta v = 0$ et $r^{n-1}(k)(v) = \varepsilon_k$. Alors la forme semi-méromorphe $v - \tilde{\alpha}$ sur $X - \bar{X}''$ induira 0 dans

$$H^{n-1}(H^0(X - \bar{X}'', \mathcal{E}(k)), \delta) \simeq H^{n-1}(X - \bar{X}'', \mathcal{E}(k), \delta).$$

Il existera donc $\varphi \in H^0(X - \bar{X}'', \mathcal{E}^{n-2}(k))$ vérifiant $\delta\varphi = v - \tilde{\alpha}$ sur $X - \bar{X}''$.

Alors l'image de v dans $H^0(S^* \cap (X - \bar{X}''), H^{n-1}(u))$ coïncide avec celle de $\alpha|_{X - \bar{X}''}$.

Comme $H^{n-1}(u) (\simeq h^{n-1}(k))$ est un système local sur S^* et comme chaque composante connexe de S^* rencontre $X - \bar{X}''$, on aura $\varepsilon_k = r^{n-1}(k)(v)$ qui prolongera à S la section $\alpha \in H^0(S^*, H^{n-1}(u))$. Ceci montre que ${}^i\tilde{\theta}_k(\alpha) = 0$ implique $\alpha \in H^0(S, H^{n-1}(u))$ et achève la preuve de la proposition 12. ■

f.

Le but de ce paragraphe est de démontrer les théorèmes 13 et 14.

Démonstration du théorème 13. — Commençons par établir que la non-nullité de $\tilde{\text{ob}}_k(e)$ implique la non-nullité d'une fonctionnelle analytique écrite en 2°. Pour cela, considérons la forme sesquilinéaire non dégénérée (voir § e)

$$\tilde{h}: H_{(0)}^1(S^*, H^{n-1}(u)) \times H^1(S^*, H^{n-1}(u))^\perp \rightarrow \mathbb{C}.$$

Il existe $\eta \in H^1(S^*, H^{n-1}(u))^\perp$ tel que l'on ait

$$\tilde{h}(\tilde{\partial}b_k(e), \eta) \neq 0.$$

Comme l'application $\tilde{\theta}_k : H^n(u) \rightarrow H^1(S^*, H^{n-1}(u))^\perp$ est surjective pour $k' \geq k_{(0)}$, k_1 d'après la proposition 12 ci-dessus, il existe $e' \in H^n(u)$ tel que $\tilde{\theta}_k(e') = \eta$ et on aura donc

$$\tilde{h}(\tilde{\partial}b_k(e), \tilde{\theta}_k(e')) \neq 0.$$

Considérons $w' \in H^0(X, \Omega^n(k'))$ vérifiant $\delta w' = 0$ et $r^n(k')(w') = e'$ et appliquons la formule du corollaire 2 de la proposition 11. On obtient

$$P_{k+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{df}{f} \wedge w_{k'} \right) \neq 0$$

et comme il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $f^j (df/f) \wedge w_{k'}$ soit holomorphe au voisinage de 0, on en conclut que les fonctionnelles analytiques de 2° ne sont pas toutes nulles.

Réciproquement, s'il existe une forme holomorphe $\omega \in \Omega_{X,0}^{n+1}$ et $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$P_{k+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \omega \right) \neq 0.$$

Posons alors $\omega/f^j = (df/f) \wedge v$ avec $v \in H^0(X, \Omega^n[f^{-1}])$.

Utilisons maintenant le corollaire du lemme 3 du paragraphe *a* pour écrire dans \mathcal{H}^n , le n -ième faisceau de cohomologie du complexe de De Rham relatif de f , pour chaque $v \in \mathbb{N}$

$$v = (s\nabla - u)^v(a_v) + \tilde{v}$$

où $a_v \in \mathcal{H}^n$ et $\tilde{v} \in \Gamma^n(u) = \text{Ker}(s\nabla - u)^{k'}$ pour $k' \gg 0$. Au niveau des formes méromorphes, cela donne

$$v = \xi + \tilde{v} + d\alpha + \frac{df}{f} \wedge \beta$$

avec

$$\alpha, \beta \in H^0(X, \Omega^{n-1}[f^{-1}]),$$

$$\xi, \tilde{v} \in H^0(X, \Omega^n[f^{-1}])$$

$$da_p - u \frac{df}{f} \wedge a_p = \frac{df}{f} \wedge a_{p-1} \quad \text{pour } 2 \leq p \leq v,$$

$$da_1 - u \frac{df}{f} \wedge a_1 = \frac{df}{f} \wedge \xi$$

et

$$\tilde{v} = w_{k'}.$$

où

$$w' \in H^0(X, \Omega^n(k')) \text{ vérifie } \delta w' = 0.$$

On aura donc près de 0

$$\frac{\omega}{f^j} = \frac{df}{f} \wedge w = \frac{df}{f} \wedge \xi + \frac{df}{f} \wedge d\alpha + \frac{df}{f} \wedge w'_k.$$

Montrons que si v est choisi assez grand, on a

$$P_{k+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \overline{\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \xi} \right) = 0.$$

Pour simplifier nos notations, posons $\xi = a_0$. On a, pour $\text{Re}(\lambda) \gg 0, 1 \leq p \leq v$

$$\begin{aligned} d \left(|f|^{2\lambda} \overline{\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge a_p} \right) &= (\lambda + u) |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \bar{w}_k \wedge a_p \\ &\quad + (-1)^{n+1} |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \bar{w}_k \wedge \left(da_p - u \frac{df}{f} \wedge a_p \right). \end{aligned}$$

Comme on a

$$da_p - u \frac{df}{f} \wedge a_p = \frac{df}{f} \wedge a_{p-1} \quad \text{pour } 1 \leq p \leq v,$$

cela donne, d'après Stokes (pour $h \geq k_0 + 1$)

$$\begin{aligned} P_{h+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \bar{w}_k \wedge \frac{df}{f} \wedge a_p \right) \\ = -P_h \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \wedge \bar{w}_k \wedge \frac{df}{f} \wedge a_{p-1} \right). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} P_{k+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \overline{\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \xi} \right) \\ = (-1)^p P_{k+1+p} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \overline{\frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{df}{f} \wedge a_p} \right) \end{aligned}$$

pour $0 \leq p \leq v$. Il est clair que pour p assez grand (par exemple $p = n$; il suffit donc de prendre $v = n$) on obtient 0 car le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ n'a jamais de pôle d'ordre $\geq n + 2$ ($X \subset \mathbb{C}^{n+1}$), d'où notre assertion.

La nullité de

$$P_{k+1} \left(\lambda = -u, \int_X \overline{|f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{df}{f} \wedge d\alpha} \right)$$

résulte immédiatement de la formule de Stokes (on a $k \geq k_0$ donc P_{k+1} est à support 0) puisque

$$(-1)^n d \left(\overline{|f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{df}{f} \wedge \alpha} \right) = \overline{|f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{df}{f} \wedge d\alpha}.$$

Il restera donc de notre hypothèse

$$P_{k+1} \left(\lambda = -u, \int_X \overline{|f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \frac{df}{f} \wedge w'_k} \right) \neq 0.$$

Maintenant la formule du corollaire 2 de la proposition 11 donne

$$\tilde{h}(\tilde{\omega}_k(e), \tilde{\theta}_k(e')) \neq 0$$

où $e' = r^n(k')(w')$, ce qui achève la preuve de la réciproque.

Montrons, pour finir, que la non-nullité d'une fonctionnelle analytique

$$P_{k+l} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j_0} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \square \right)$$

implique la non-nullité de la fonctionnelle analytique

$$P_{k+l} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-(n+1)} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \square \right).$$

Si la forme holomorphe $\omega \in H^0(X, \Omega_X^{n+1})$ n'est pas annulée par la première fonctionnelle analytique, écrivons

$$f^{-j_0} \omega = \frac{df}{f} \wedge v$$

où $v \in H^0(X, \Omega^n[f^{-1}])$ et décomposons v dans le \mathcal{H}_0^n de la cohomologie du complexe de De Rham de f (voir § a, n° 2).

On aura

$$v = v_1 + d\alpha - u \frac{df}{f} \wedge \alpha + da + \frac{df}{f} \wedge b$$

où $(s\nabla - u)^{n+1}(v_1) = 0$ et où α , a et b sont des $n-1$ -formes méromorphes près de 0. On aura donc

$$\frac{df}{f} \wedge v = \frac{df}{f} \wedge v_1 + \frac{df}{f} \wedge d(\alpha + a).$$

La formule de Stokes montre alors que l'on aura

$$P_{k+l} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \tau \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \overline{\frac{df}{f}} \wedge d(\alpha + a) \right) = 0$$

puisque $k+l \geq k_0+1$ et $\tau \equiv 1$ près de 0.

On a donc

$$P_{k+l} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \overline{\frac{df}{f} \wedge v_1} \right) \neq 0.$$

Maintenant, d'après [B. 4] on peut induire le même élément de $\mathcal{H}_0^n(u)$ que v_1 avec une forme ayant un pôle d'ordre $\leq n$, c'est-à-dire que l'on peut choisir v_1 de sorte que $f^{n+1}(df/f) \wedge v_1$ soit holomorphe au voisinage de l'origine. Ceci achève la preuve du théorème 13. ■

Remarque. — Le théorème 13 contient le fait que la nullité $\forall j \in \mathbb{N}, \forall l \geq 1$ des fonctionnelles

$$P_{k+l} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \overline{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \square \right) \quad \text{pour } w \in H^0(X, \Omega^n(k))$$

vérifiant $\delta w = 0$ avec $k \geq k_0$, est une propriété qui ne dépend que de $e = r^n(k)(w)$. Il est facile de voir que plus généralement si $w' = w + \delta \xi$ ou $\xi \in H^0(X, \Omega^{n-1}(k))$ on a

$$P_{k+l} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \overline{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge (w'_k - w_k) \wedge \square \right) = 0$$

comme fonctionnelle analytique $\forall l \geq 1, \forall j$ en utilisant la formule de Stokes.

Démonstration du théorème 14. — On a par hypothèse

$$T = P_k \left(\lambda = -u - v_0, \int_X |f|^{2\lambda} \square \right) \neq 0$$

et comme notre hypothèse implique $k \geq k_0 + 1$, on aura $\text{Supp } T \subset \{0\}$ (les pôles congrus à $-u$ modulo \mathbb{Z} sont d'ordre $\leq k_0$ le long de S^*).

Posons $M = \text{ordre}(T)$ et considérons $\varphi \in C_c^\infty(X)^{n+1, n+1}$ une forme différentielle vérifiant

$$\langle T, \varphi \rangle \neq 0.$$

Écrivons le développement de Taylor de φ en 0 sous la forme

$$\varphi = \rho \sum_1^J w_j \wedge \bar{w}'_j + \psi$$

où $\psi \in C_c^\infty(X)^{n+1, n+1}$ est plate à l'ordre M en 0, où $w_j, w'_j \in \Gamma(X, \Omega_X^{n+1})$ et où $\rho \in C_c^\infty(X)$ vaut identiquement 1 près de 0.

On a alors, vu la définition de M ,

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^J \langle T, \rho w_j \wedge \bar{w}'_j \rangle \neq 0.$$

Il existe donc $j_0 \in [1, J]$ tel que l'on ait

$$\langle T, \rho w_{j_0} \wedge \bar{w}'_{j_0} \rangle \neq 0.$$

Notons pour abrégier par w et w' les formes holomorphes w_{j_0} et w'_{j_0} .

Considérons alors la décomposition de w/df dans \mathcal{H}_0^n ⁽²¹⁾. On peut écrire

$$f \frac{w}{df} = \omega + \xi + da + \frac{df}{f} \wedge b$$

avec $\omega \in \Gamma(u + v_0)$, $\xi \in \text{Im}(s\nabla - (u + v_0))^{n+1}$ et $a, b \in \Omega^{n-1}[f^{-1}]$. Ceci équivaut à l'écriture de w sous la forme

$$w = \frac{df}{f} \wedge \omega + \frac{df}{f} \wedge \xi - d\left(\frac{df}{f} \wedge a\right)$$

avec l'existence de $v_1 \dots v_{n+1} \in \Gamma(X, \Omega^n[f^{-1}])$ vérifiant

$$(*) \quad dv_j = (u + v_0) \frac{df}{f} \wedge v_j + \frac{df}{f} \wedge v_{j-1}$$

avec la convention $v_0 = \xi$.

La formule de Stokes donne déjà que le prolongement méromorphe de

$$\int_X |f|^{2\lambda} \rho d\left(\frac{df}{f} \wedge a\right) \wedge \bar{w}'$$

n'a pas de pôle au voisinage de l'origine.

⁽²¹⁾ Voir § a, n° 2.

De même la formule de Stokes donne, en utilisant (*), que la non-nullité de

$$P_{j+1}\left(\lambda = -u - v_0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge v_j \wedge \bar{w}'\right)$$

donne la non-nullité de

$$P_{j+2}\left(\lambda = -u - v_0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge v_{j+1} \wedge \bar{w}'\right)$$

puisque

$$\begin{aligned} d(|f|^{2\lambda} \rho v_{j+1} \wedge \bar{w}') &= |f|^{2\lambda} d\rho \wedge v_{j+1} \wedge \bar{w}' \\ &+ (\lambda + u + v_0) |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge v_{j+1} \wedge \bar{w}' + |f|^{2\lambda} \rho \left(dv_{j+1} - (u + v_0) \frac{df}{f} \wedge v_{j+1} \right) \wedge \bar{w}'. \end{aligned}$$

Donc par récurrence sur j , la non-nullité de

$$P_l\left(\lambda = -u - v_0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \xi \wedge \bar{w}'\right) \quad \text{pour } l \geq 1$$

donne celle de

$$P_{l+n+1}\left(\lambda = -u - v_0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge v_{n+1} \wedge \bar{w}'\right)$$

qui est absurde car $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ n'a jamais de pôle d'ordre $\geq n+2$ dans \mathbb{C}^{n+1} ($l \geq 1$). On en conclut à la non-nullité de

$$P_k\left(\lambda = -u - v_0, \int_X |f|^{2\lambda} \rho \frac{df}{f} \wedge \omega \wedge \bar{w}'\right)$$

où $\omega = f^{v_0} W_l$ avec $W \in H^0(X, \Omega^n(l))$ vérifie $\delta W = 0$ et $l = \text{Sup}(k_0, k_1)$.

Si on pose $e = r^n(l)(W)$ on aura donc, d'après le théorème 13, $\tilde{\omega}_{k-1}(e) \neq 0$.

Pour achever la preuve du théorème 14, il suffit de remarquer que si $l = \text{Sup}(k_0, k_1)$ on a

$$\tilde{\omega}_{l+k_0} = \mathcal{N}_{n-1}^{k_0} \tilde{\omega}_l = 0 \quad (\text{voir } \S b, n^\circ 3)$$

car $\mathcal{N}_{n-1}^{k_0} = 0$ par définition de k_0 .

On a donc $k-1 < l+k_0$ soit $k \leq l+k_0$ sous l'hypothèse du théorème 14. ■

g.

Nous allons dans ce paragraphe prouver le théorème 15 et le corollaire 16.

N° 1. *Construction de \tilde{w} .* — Comme on a supposé que $\tilde{ob}_{k_0}(e)=0$, commençons par choisir w de sorte que le long de S^* [et donc de $Y^*=f^{-1}(0)-\{0\}$] w soit localement δ -exacte.

Fixons maintenant une boule de Milnor $X' \subset X$ avec un rayon très voisin du rayon de la boule définissant X et posons

$$L = \partial X' \cap Y - \partial X' \cap \mathcal{U} \cap Y$$

où \mathcal{U} est un voisinage ouvert de S^* dans X^* que l'on supposera fixé assez petit une fois pour toutes ⁽²²⁾. Alors L est un compact de $Y-S = Y^* - S^*$.

Considérons maintenant le complexe de faisceaux $(\mathcal{E}(k_0), \delta)$ introduit au paragraphe *c*. Comme les faisceaux $\mathcal{E}^j(k_0)$ sont fins et que le complexe est acyclique sur $Y-S$, les faisceaux $\text{Ker } \delta^j$ sont acycliques sur $Y-S$ et $\text{Ker } \delta^{j+1} = \text{Im } \delta^j, \forall j$ toujours sur $Y-S$. Par hypothèse on a $w \in H^0(Y-S, \text{Im } \delta^{n-1})$ et la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } \delta^{n-1} \rightarrow \mathcal{E}^{n-1}(k_0) \xrightarrow{\delta} \text{Ker } \delta^n \rightarrow 0$$

et l'acyclicité de $\text{Ker } \delta^{n-1}$ sur $Y-S$ donne donc l'existence de $\tilde{\beta} \in H^0(Y-S, \mathcal{E}^{n-1}(k_0))$ vérifiant

$$\delta \tilde{\beta} = w \quad \text{sur } Y-S.$$

Si $\rho \in C_c^\infty(X)$ vérifie $\rho \equiv 1$ au voisinage du compact L , $\rho \equiv 0$ près de S et si le support de ρ est assez voisin de Y on aura $\rho \tilde{\beta}$ qui sera semi-méromorphe sur X tout entier et

$$\tilde{w} = w - \delta(\rho \tilde{\beta})$$

qui sera une forme semi-méromorphe sur X vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\delta \tilde{w} = 0$;
- (ii) $\tilde{w} \equiv 0$ au voisinage de L ;
- (iii) $\tilde{w} \equiv w$ au voisinage de S ,

qui résultent immédiatement de notre construction.

Si on considère maintenant une section $\tilde{\alpha}$ du faisceau $\Omega^{n-1}(k_0)$ sur un voisinage ouvert de $\partial X' \cap \mathcal{U} \cap Y$, alors pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand le produit

$$|f|^{2N} \tilde{w}_i \wedge \tilde{\alpha}_j, \quad \forall i, j \in [1, k]$$

sera bien défini au voisinage de $Y \cap \partial X'$ et y sera C^∞ : en effet si \mathcal{V} est l'ouvert de définition de $\tilde{\alpha}$, la compacité de $\text{supp } \tilde{w} \cap \mathcal{V} \cap \partial W' \cap Y$, qui résulte de la propriété de (ii) de \tilde{w} , permet de trouver un entier N tel que $f^{2N} \tilde{w}$ et $f^N \tilde{\alpha}$ soient respectivement C^∞ et holomorphes au voisinage de cet ensemble. Notre assertion en résulte (par prolongement par 0).

⁽²²⁾ Il sera précisé plus loin.

Considérons maintenant $\tau \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ de support un voisinage assez petit de ε' (le rayon de la boule de Milnor donnant X') et vérifiant

$$\int_0^{+\infty} \tau(x) dx = 1.$$

Posons alors $\gamma = C \pi^*(\tau(x) dx)$ où $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est donnée par $\pi(z) = \|z\|^2$ et où C est choisie de sorte que l'on ait, pour toute forme C^∞ ψ d -fermée de degré $2n+1$ définie sur un voisinage ouvert de la sphère de centre 0 et de rayon ε' dans \mathbb{C}^{n+1} contenant $\pi^{-1}(\text{supp } \tau) = \text{supp } \gamma$:

$$\int_{\partial B(0, \varepsilon')} \psi = \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \psi \wedge \gamma.$$

Ceci signifie que γ représente la classe fondamentale du cycle $\partial B(0, \varepsilon')$ dans un voisinage ouvert de cette sphère. Il en résulte que γ induira dans S^* la classe du cycle fondamental de S^* dans $H_c^1(S^*, \mathbb{C})$ puisque l'on a une intersection transversale $\partial B(0, \varepsilon') \cap S^*$.

Pour γ choisie de cette façon, on pourra donc trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que les formes

$$|f|^{2N} \tilde{w}_i \wedge \tilde{\alpha}_j; \wedge \gamma, \quad \forall i, j \in [1, k_0]$$

soient C^∞ et à support f -propre dans X . En effet il suffit de choisir le voisinage ouvert \mathcal{U} de S^* (qui a présidé à la construction de \tilde{w}) de sorte que $\tilde{\alpha}$ soit une section sur \mathcal{U} de $\Omega^{n-1}(k_0)$ (vérifiant $\delta \tilde{\alpha} = 0$) : de par ce choix le compact $\text{supp } \gamma \wedge \text{supp } \tilde{w}$ ne rencontrera pas un voisinage du compact $\text{supp } \gamma \cap (Y - \mathcal{U} \cap Y)$. On peut donc prolonger de manière C^∞ (par 0) au voisinage de Y la forme (C^∞ au voisinage de $\text{supp } \gamma \cap \text{supp } \tilde{w}$) $|f|^{2N} \tilde{w}_i \wedge \tilde{\alpha}_j \wedge \gamma$.

On peut ensuite restreindre X autour de Y (ceci revient à diminuer le rayon du disque dans \mathbb{C} pour le représentant de Milnor) de sorte que ces formes C^∞ soient définies et C^∞ à support f -propre sur X tout entier.

N° 2. *Cup-produit dans le bord de la fibre de Milnor.* — Nous allons maintenant raisonner par l'absurde et faire l'hypothèse que

$$\mathcal{N}_{n-1}^{k_0-1}(\tilde{\theta}_{k_0}(e)) \neq 0$$

dans $H^1(S^*, H^{n-1}(u))$. La dualité hermitienne (globale) introduite au paragraphe e

$$\tilde{h}: H^0(S^*, H^{n-1}(u)) \times H^1(S^*, H^{n-1}(u)) \rightarrow \mathbb{C}$$

nous fournit alors une section $\alpha \in H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ vérifiant

$$(1) \quad \tilde{h}(\alpha, \mathcal{N}_{n-1}^{k_0-1}(\tilde{\theta}_k(e))) \neq 0.$$

Considérons $\tilde{\alpha}$ une section $\Omega^{n-1}(k_0)$ définie sur un voisinage ouvert \mathcal{U} de S^* vérifiant $\delta \tilde{\alpha} = 0$ sur \mathcal{U} et induisant α dans $H^0(S^*, H^{n-1}(u))$ grâce à l'isomorphisme sur S^*

$$r^{n-1}(k_0): h^{n-1}(k_0) \rightarrow H^{n-1}(u).$$

Ceci est possible grâce aux hypothèses standards, à la définition de k_0 et à la proposition 5.

Comme on a, d'après le lemme 1, § b, n° 3

$$\mathcal{N}_{n-1}^{k_0-1}(\tilde{\theta}_{k_0}(e)) = \tilde{\theta}_{k_0}(\mathcal{N}_n^{k_0-1}(e))$$

et aussi

$$r^n(k_0)({}_{k_0}\mathcal{N}^{k_0-1}(w)) = \mathcal{N}_n^{k_0-1}(e)$$

d'après le lemme 7, § a, n° 3, la proposition 1 du paragraphe e permet de réécrire (1) sous la forme (compte tenu de ce qui précède)

$$(2) \quad \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \tilde{\alpha}_{k_0} \wedge \tilde{w}_1 \wedge \gamma \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \right) \neq 0.$$

On remarquera que l'on a pu remplacer \tilde{w}_1 par \tilde{w}_1 dans la formule (2) sans changer le résultat puisque l'on a

$$w \equiv \tilde{w} \quad \text{au voisinage de } S^*$$

d'après la condition (ii) obtenue sur \tilde{w} lors de sa construction.

Remarquons maintenant que la \mathcal{N}_{n-1} -invariance de \tilde{h} montre que les nombres

$$(3) \quad \text{Res} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{w}_j \wedge \gamma \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \right)$$

ne dépendent que de $i+j$ et sont nuls pour $i+j \leq k_0$. Cette assertion résulte de la proposition 1 du paragraphe e qui nous dit que, à $-(1/2i\pi)^n$ près, le nombre donné par (3) est égal à

$$(4) \quad \tilde{h}(\mathcal{N}_{n-1}^{k_0-i} \alpha, \mathcal{N}_{n-1}^{k_0-j}(\tilde{\theta}_{k_0}(e)))$$

(on utilise ici encore le lemme 1 du paragraphe b, n° 3).

Mais on a

$$(4) = \tilde{h}(\alpha, \mathcal{N}_{n-1}^{2k_0-(i+j)}(\tilde{\theta}_{k_0}(e)))$$

qui ne dépend donc que de $i+j$ et qui vaudra 0 dès que l'on aura

$$2k_0 - (i+j) \geq k_0$$

c'est-à-dire $i+j \leq k_0$, puisque, par définition de k_0 , on a $\mathcal{N}_{n-1}^{k_0} = 0$ sur $H^{n-1}(u)$.

Définissons alors pour $i, j \in [1, k_0]$ et s voisin de 0 les fonctions

$$(5) \quad F_{i,j}(s) = \int_{f=s} \tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{w}_j \wedge \gamma.$$

Comme on a sur X

$$d(\tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{w}_j \wedge \gamma) = u \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{w}_j \wedge \gamma + \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{i-1} \wedge \tilde{w}_j \wedge \gamma + u \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{w}_j \wedge \gamma + \frac{\overline{df}}{\overline{f}} \wedge \tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{w}_{j-1} \wedge \gamma$$

avec les conventions $\tilde{\alpha}_0 = 0$ et $\tilde{w}_0 = 0$, on en déduit que les $F_{i,j}$ sont solutions du système différentiel

$$(6) \quad \begin{cases} s \frac{\partial}{\partial s} F_{i,j} = u F_{i,j} + F_{i-1,j} & (F_{0,j} \equiv 0) \\ s \frac{\partial}{\partial s} F_{i,j} = u F_{i,j} + F_{i,j-1} & (F_{i,0} \equiv 0). \end{cases}$$

Nous allons montrer que le système (6) permet de calculer les $F_{i,j}$ de manière précise.

N° 3. *Étude du système (6).* — Posons $D^* = \{s \in \mathbb{C} / 0 < |s| < \eta\}$.

SORITE 0. — Si a_0, \dots, a_n sont dans $\mathcal{O}(D^*)$ et si

$$a_0 + a_1 (\text{Log } |s|^2) + \dots + a_n (\text{Log } |s|^2)^n \equiv 0$$

sur D^* , alors $a_0 \equiv a_1 \equiv \dots \equiv a_n \equiv 0$.

Preuve. — C'est immédiat par récurrence sur n en utilisant l'opérateur $\overline{s}(\partial/\partial \overline{s})$.

SORITE 1. — Si $a \in \mathcal{O}(D^*)$ vérifie pour un $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s}\right)^n (a) \equiv 0$$

alors on a $a \in \mathbb{C}$.

Preuve. — Pour $n=1$ c'est clair. Si $n \geq 2$ on a

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s}\right)^{n-1} \left(s \frac{\partial}{\partial s} a\right) \equiv 0$$

et donc $s(\partial/\partial s)a \in \mathbb{C}$ par hypothèse de récurrence.

On a donc $a \in \mathbb{C}$.

SORITE 2. — Si a_0, \dots, a_n sont dans $\mathcal{O}(D^*)$ et si

$$(*) \quad \left(s \frac{\partial}{\partial s}\right)^{n+1} \left(\sum_0^n a_p \frac{(\text{Log } |s|^2)^p}{p!}\right) \equiv 0$$

alors on $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

Preuve. — Supposons déjà démontré que a_{q+1}, \dots, a_n sont dans \mathbb{C} (avec $q \leq n$). Le terme de plus haut degré en $\text{Log}|s|^2$ est $(s(\partial/\partial s))^{n+1}(a_q)(\text{Log}|s|^2)^q/q!$. Il est donc nul d'après 0 et donc d'après 1, $a_q \in \mathbb{C}$.

SORITE 3. — Si $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^*)$ et $b_0, \dots, b_n \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^*)$ vérifient

$$(**) \quad \sum_0^n a_p \frac{(\text{Log}|s|^2)^p}{p!} \equiv \sum_0^n \bar{b}_p \frac{(\text{Log}|s|^2)^p}{p!}$$

alors on a $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ et $a_p = \bar{b}_p$ pour chaque p .

Preuve. — On a

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s}\right)^{n+1} \left(\sum_0^n \bar{b}_p \frac{(\text{Log}|s|^2)^p}{p!}\right) \equiv 0$$

et donc aussi

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s}\right)^{n+1} \left(\sum_0^n a_p \frac{(\text{Log}|s|^2)^p}{p!}\right) \equiv 0.$$

Le 2 donne alors $a_p \in \mathbb{C}, \forall p \in [0, n]$.

On réécrit (***) sous la forme

$$\sum_0^n (b_p - \bar{a}_p) \frac{(\text{Log}|s|^2)^p}{p!} \equiv 0$$

et on conclut grâce à 0.

SORITE 4. — Si $f \in C^\infty(\mathbb{D}^*)$ vérifie

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s}\right)^{k_0}(f) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}}\right)^{k_0}(f) = 0.$$

Alors on a

$$f(s) \equiv \sum_{p=0}^{k_0-1} a_p \frac{(\text{Log}|s|^2)^p}{p!} \quad \text{avec} \quad a_p \in \mathbb{C}.$$

Preuve. — Par récurrence sur k_0 ; le cas $k_0 = 1$ est clair.

Supposons le résultat vrai pour $k_0 - 1$. Alors on a, grâce à l'hypothèse de récurrence

$$s \frac{\partial}{\partial s} \left(\bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}}(f)\right) = \sum_{p=0}^{k_0-2} a_p \frac{(\text{Log}|s|^2)^p}{p!}$$

et donc

$$\bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} f - \sum_{p=0}^{k_0-2} a_p \frac{(\text{Log } |s|^2)^{p+1}}{(p+1)!} = g$$

est annulée par $s(\partial/\partial s)$; donc g est antiholomorphe.

Mais $(\bar{s}(\partial/\partial \bar{s}))^{k_0}$ annule

$$\bar{s} \frac{\partial f}{\partial \bar{s}} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{k_0-2} a_p \frac{(\text{Log } |s|^2)^{p+1}}{(p+1)!}$$

et donc d'après 1 conjuguée, on aura $g \in \mathbb{C}$.

Alors

$$\bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} f = \sum_{p=0}^{k_0-1} b_p \frac{(\text{Log } |s|^2)^p}{p!} \quad \text{avec } b_p \in \mathbb{C}$$

et comme $(\bar{s}(\partial/\partial \bar{s}))^{k_0-1}$ annule $\bar{s}(\partial/\partial \bar{s}) f$ on aura $b_{k_0-1} = 0$.

Ensuite

$$\bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left(f - \sum_{p=0}^{k_0-2} b_p \frac{(\text{Log } |s|^2)^p}{p!} \right) \equiv 0,$$

donc la fonction

$$h = f - \sum_{p=0}^{k_0-2} b_p \frac{(\text{Log } |s|^2)^{p+1}}{(p+1)!}$$

est holomorphe. Comme elle est annulée par $(s(\partial/\partial s))^{k_0}$ elle est constante d'après 1 et donc

$$f(s) = \sum_{p=0}^{k_0-1} c_p \frac{(\text{Log } |s|^2)^p}{p!} \quad \text{avec } c_p \in \mathbb{C}.$$

SORITE 5. — Si on pose $G_{i,j}(s) = |s|^{-2i} F_{i,j}$ le système (6) sur D^* devient

$$(6') \quad \begin{cases} s \frac{\partial}{\partial s} G_{i,j} = G_{i-1,j} \\ \bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} G_{i,j} = G_{i,j-1} \end{cases} \quad i, j \in [1, k_0]$$

avec $G_{0,j} \equiv G_{i,0} \equiv 0$ par convention.

On a donc

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s}\right)^{k_0} G_{k_0, k_0} = 0$$

et

$$\left(\bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}}\right)^{k_0} G_{k_0, k_0} = 0$$

ce qui donne grâce à 4

$$G_{k_0, k_0}(s) = \sum_{p=0}^{k_0-1} C_p \frac{(\text{Log}|s|^2)^p}{p!}$$

avec $C_0 \dots C_{k_0-1} \in \mathbb{C}$.

On a alors d'après (6')

$$G_{i,j}(s) = \left(s \frac{\partial}{\partial s}\right)^{k_0-i} \left(\bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}}\right)^{k_0-j} G_{k_0, k_0}(s).$$

On a donc $G_{i,j} = 0$ si $i+j \leq k_0$ et pour $i+j = k_0 + 1 + h$, $h \in [0, k_0 - 1]$

$$G_{i,j}(s) = \sum_{q=0}^h C_{q+k_0-h-1} \frac{(\text{Log}|s|^2)^q}{q!}.$$

Finalement il existe des constantes C_0, \dots, C_{k_0-1} telles que pour $i+1 = k_0 + 1 + h$ on ait

$$F_{i,j}(s) = \sum_{q=0}^h C_{q+k_0-h-1} |s|^{2u} \frac{(\text{Log}|s|^2)^q}{q!}$$

et

$$F_{i,j} \equiv 0 \quad \text{si } i+j \leq k_0.$$

N° 4. — Par transformation de Mellin (complexe; voir [B.M]) on obtient

$$\text{Res} \left(\lambda = -u, \int_{\mathbf{X}} |f|^{2\lambda} \tilde{\alpha}_i \wedge \bar{w}_j \wedge \gamma \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}\bar{f}}{\bar{f}} \right)$$

qui vaut 0 pour $i+j \leq k_0$ et qui vaut C_{k_0-1} pour $i+j = k_0 + 1$ et donc $C_{k_0-1} \neq 0$ d'après (2).

On a donc pour $i+j = k_0 + 1$

$$F_{i,j}(s) = C_{k_0-1} |s|^{2u} \quad \text{avec } C_{k_0-1} \neq 0$$

et donc

$$\int_{F(0)} \tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{w}_j \wedge \gamma \neq 0 \quad \text{pour } i+j=k_0+1.$$

Comme γ induit sur $F(0)$ (qui est aussi transverse à $\partial X'$) la classe fondamentale du $(2n-1)$ -cycle $\partial X' \cap F(0)$, ceci montre que la $(2n-1)$ -forme $\tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{w}_j|_{F(0)}$ qui est d -fermée ($F(0)=f^{-1}(s_0)$) induit sur le bord $\partial X' \cap F(0)$ de la fibre de Milnor $F(0)$ un élément non nul dans $H^{2n-1}(F(0) \cap \partial X', \mathbb{C})$.

On remarquera que dès que $F(0)$ est connexe, $H^{2n-1}(F(0) \cap \partial X', \mathbb{C})$ est isomorphe à \mathbb{C} car $F(0) \cap \partial X'$ est compacte connexe orientée de dimension $2n-1$ et que la monodromie agit comme l'identité sur cet espace. Notre hypothèse se traduit donc par un cup-produit non trivial dans le bord de la fibre de Milnor.

On remarquera que la formule

$$F_{k_0, k_0}(s) = \sum_{q=0}^{k_0-1} C_q |s|^{2u} \frac{(\text{Log}|s|^2)^q}{q!}$$

montre que l'on a

$$P_{k_0} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \tilde{\alpha}_{k_0} \wedge \tilde{w}_{k_0} \wedge \gamma \wedge \frac{df}{f} \wedge \frac{\bar{d}f}{\bar{f}} \right) = (-1)^{k_0} 4i\pi C_{k_0-1} \neq 0$$

et donc que notre hypothèse $\mathcal{N}^{k_0-1}(\tilde{\theta}(e)) \neq 0$ permet de produire de manière assez constructive un pôle d'ordre exactement k_0 le long de S^* .

Comme $\tilde{\alpha}_i \wedge \tilde{w}_j$ devient C^∞ au voisinage de $\partial X' \cap Y$ après multiplication par $|f|^{2N}$ (voir plus haut) nous pouvons définir le courant T de type $(n-1, n)$ au voisinage de $\partial X' \cap Y$ en posant

$$(5) \quad T = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{a+b} P_{a+b} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \tilde{\alpha}_{k_0+a} \wedge \tilde{w}_{b+1} \wedge \square \right)$$

où les sommes sont en fait finies et on a utilisé la convention $\tilde{\alpha}_j = 0 = \tilde{w}_j$ si $j \notin [1, k_0]$.

Posons également au voisinage de $\partial X' \cap Y$ pour $i \geq 0, a$ et $b \in [1, k_0]$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j^{i,b} &= \sum_{a \in \mathbb{Z}} (-1)^{a+b} P_{a+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \tilde{\alpha}_a \wedge \tilde{w}_b \wedge \square \right) \\ \mathcal{F}_j^{a,i} &= \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{a+b} P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \tilde{\alpha}_a \wedge \tilde{w}_b \wedge \square \right) \end{aligned}$$

Remarque importante. — Les courants $\mathcal{F}_j^{i,b}$ et $\mathcal{F}_j^{a,i}$ sont *a priori* définis près de $\partial X' \cap Y$. En fait comme on somme respectivement pour $a \in [1, k_0]$ et $b \in [1, k_0]$ avec

$i \geq 0$, le support des courants,

$$P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \square \right) \quad \text{et} \quad P_{a+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \square \right)$$

sont contenus dans S. Comme pour chaque compact K de S^* , il existe un entier N_K tel que

$$|f|^{2N_K} \tilde{\alpha}_i \wedge \bar{w}_j \quad \text{soit } C^\infty, \quad \forall i, j \in [1, k_0]$$

au voisinage de K, on voit que les $\check{\mathcal{T}}_j^{i,b}$ (resp. $\mathcal{T}_j^{a,i}$) sont des courants sur \hat{X}^* à support dans S^* où \hat{X} désigne la boule de centre 0 et de rayon ε qui a donné la boule de Milnor X [par intersection avec $f^{-1}(D)$ où D est disque de centre 0 dans \mathbb{C} et de rayon $\eta \ll \varepsilon$; c'est la construction de Milnor!].

LEMME 1. — 1° On a, au voisinage de $\partial X' \cap Y$

$$(6') \quad d' T = (-1)^{k_0+1} df \wedge \mathcal{T}_0^{k_0,0}$$

et

$$(6'') \quad d'' T = (-1)^{k_0+1} d\bar{f} \wedge \check{\mathcal{T}}_0^{0,k_0}.$$

2° On a sur \hat{X}^* les relations

$$(7') \quad d' \check{\mathcal{T}}_j^{i,b} = 0$$

$$(7'') \quad d'' \check{\mathcal{T}}_j^{i,b} + (j+1) d\bar{f} \wedge \check{\mathcal{T}}_{j+1}^{i,b} - d\bar{f} \wedge (\check{\mathcal{T}}_{j+1}^{i+1,b} - \check{\mathcal{T}}_{j+1}^{i,b-1}) = 0$$

$$(7') \quad d' \mathcal{T}_j^{a,i} + (j+1) df \wedge \mathcal{T}_{j+1}^{a,i} - df \wedge (\mathcal{T}_{j+1}^{a,i+1} - \mathcal{T}_{j+1}^{a-1,i}) = 0$$

$$(7'') \quad d'' \mathcal{T}_j^{a,i} = 0$$

avec $i \geq 0$, a et $b \in [1, k_0]$ et $j \in \mathbb{Z}$.

Remarque. — Le courant T n'est pas, a priori de type pure $(n-1, n)$ au voisinage de $\partial X' \cap Y$ car \tilde{w} n'est pas de type pure $(n, 0)$: on n'a pas de contrôle du type de la forme semi-méromorphe $\check{\beta}$ utilisée dans la construction de \tilde{w} . Cependant le type de T est bien $(n-1, n)$ près de $S \cap \partial X' \cap Y$ puisque près de S on a $\tilde{w} = w$.

Par contre les courants \mathcal{T} et $\check{\mathcal{T}}$ sont de type pur $(n-1, n)$ puisque $\tilde{w} = w$ près de S et qu'ils sont nuls hors de S. Les formules (6') et (6'') montrent que $d' T$ et $d'' T$ sont de types pur (n, n) et $(n-1, n+1)$ près de $\partial X' \cap Y$ tout entier (mais ils sont nuls loin de S).

Preuve du lemme. — Comme

$$\begin{aligned} d' (|f|^{2\lambda} f^{-j-1} \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b) \\ = |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \left[(\lambda+u) \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b + \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{a-1} \wedge \bar{w}_b - (j+1) \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b \right] \end{aligned}$$

sauf pour $a = k_0 + 1$ où le second terme du crochet disparaît, on obtient pour $a \in [1, k_0]$

$$\begin{aligned} d' \mathcal{F}_j^{a,i} = & \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{a+b} P_{b+i+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b \wedge \square \right) \\ & + \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{a+b} P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{a-1} \wedge \bar{w}_b \wedge \square \right) \\ & - (j+1) \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{a+b} P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b \wedge \square \right). \end{aligned}$$

Les deux premières sommes donnent respectivement

$$df \wedge \mathcal{F}_{j+1}^{a,i+1} \quad \text{et} \quad -df \wedge \mathcal{F}_{j+1}^{a-1,i+1}$$

le dernier terme vaut

$$-(j+1) df \wedge \mathcal{F}_{j+1}^{a,i}$$

ce qui donne (7').

$$d''(|f|^{2\lambda} f^{-j-1} \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b) = |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \left[(\lambda + u) \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b + \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_{b-1} \right]$$

sauf pour $b = k_0 + 1$ donnera

$$\begin{aligned} d'' \mathcal{F}_j^{a,i} = & \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{a+b} P_{b+i+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b \wedge \square \right) \\ & + \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{a+b} P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_{b-1} \wedge \square \right) \\ & + (-1)^{a+k_0} P_{k_0+1+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \frac{\bar{d}f}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_{k_0} \wedge \square \right). \end{aligned}$$

Les deux premières sommes se détruisent et le dernier terme est nul pour $i \geq 0$ car le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda} \square$ n'a pas de pôle d'ordre $\geq k_0 + 1$ congru à $-u$ modulo \mathbb{Z} sur X^* (c'est-à-dire en dehors de 0).

On obtient donc (7''). Les formules (7') et (7'') sont analogues. Venons-en aux formules (6') et (6''). On ne peut remplacer \tilde{w} par w comme dans le calcul précédent car on ne sait pas encore que $d'T$ et $d''T$ sont de type pur. On doit donc calculer dT en utilisant la formule

$$d(|f|^{2\lambda} \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b) = |f|^{2\lambda} \left[(\lambda + u) \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b + \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{a-1} \wedge \bar{w} \right]$$

$$+ |f|^{2\lambda} \left[(\lambda + u) \frac{\overline{df}}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_b + \frac{\overline{df}}{f} \wedge \tilde{\alpha}_a \wedge \bar{w}_{b-1} \right]$$

pour a et $b \neq k_0 + 1$, qui vient des relations

$$\delta \tilde{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \delta \bar{w} = 0$$

[rappelons que pour les formes semi-méromorphes à pôles dans $\{f=0\}$ on a posé

$$\delta = \delta'_u + d''$$

avec

$$d'' \left(\frac{\varphi}{f^N} \right) = \frac{d'' \varphi}{f^N}.$$

Cela donne

$$d\Gamma = \sum_a \sum_b (-1)^{a+b} P_{a+b+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{k_0+a} \wedge \bar{w}_{b+1} \wedge \square \right) \quad 1$$

$$+ \sum_a \sum_b (-1)^{a+b} P_{a+b} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{k_0+a-1} \wedge \bar{w}_{b+1} \wedge \square \right) \quad 2$$

$$+ \sum_b (-1)^{b+1} P_{b+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{k_0} \wedge \bar{w}_{b+1} \wedge \square \right) \quad 3$$

$$+ \sum_a \sum_b (-1)^{a+b} P_{a+b+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\overline{df}}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{k_0+a} \wedge \bar{w}_{b+1} \wedge \square \right) \quad 4$$

$$+ \sum_a \sum_b (-1)^{a+b} P_{a+b} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\overline{df}}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{k_0+a} \wedge \bar{w}_b \wedge \square \right) \quad 5$$

$$+ \sum_a (-1)^{k_0+a} P_{k_0+a} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\overline{df}}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{k_0+a} \wedge \bar{w}_{k_0} \wedge \square \right). \quad 6$$

Les sommes 1, 2 et 4, 5 se détruisent et il reste seulement

$$d\Gamma = \sum_b (-1)^{b+1} P_{b+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{df}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{k_0} \wedge \bar{w}_{b+1} \wedge \square \right) \\ + \sum_a (-1)^{k_0+a} P_{k_0+a} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \frac{\overline{df}}{f} \wedge \tilde{\alpha}_{k_0+a} \wedge \bar{w}_{k_0} \wedge \square \right).$$

Donc on obtient

$$d\Gamma = (-1)^{k_0+1} df \wedge \mathcal{F}^{k_0,0} + (-1)^{k_0+1} \overline{df} \wedge \tilde{\mathcal{F}}^{0,k_0}.$$

Ceci achève la preuve de (6') et (6'') compte tenu de ce que l'on a dit sur les types.

Maintenant sur un voisinage ouvert \mathcal{V} de $\partial X' \cap Y$ privé de $\mathcal{V} \cap f^{-1}(0)$ le courant T coïncide avec la forme C^∞ (relativement fermée pour f)

$$(8) \quad t = |f|^{-2u} \sum_{a+b \leq 0} (-1)^{a+b} \frac{(\text{Log} |f|^2)^{|a+b|}}{(|a+b|)!} \tilde{\alpha}_{k_0+a} \wedge \bar{w}_{b+1}.$$

En effet on a $P_{a+b} \left(\lambda = -u, \int_X \dots \right) = 0$ sur $X - f^{-1}(0)$ pour $a+b > 0$ et pour $m \geq 0$ et F méromorphe on a l'identité

$$P_{-m}(\lambda = -u, F(\lambda)) = \frac{1}{m!} P_0 \left(\lambda = -u, \frac{d^m}{d\lambda^m} F(\lambda) \right).$$

Comme

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\int |f|^{2\lambda} \square \right) = \int_X |f|^{2\lambda} \text{Log} |f|^2 \square$$

la formule de définition de T donne

$$(9) \quad T|_{\mathcal{V} - \mathcal{V} \cap f^{-1}(0)} = t.$$

Mais pour $a+b < 0$ on a $k_0 + a + b + 1 \leq k_0$ et donc l'intégrale de $\tilde{\alpha}_{k_0+a} \wedge \bar{w}_{b+1}$ sur $\partial X' \cap F(0)$ sera nulle d'après ce que l'on a vu plus haut. On aura donc, puisque

$$(10) \quad \int_{F(0) \cap X'} \tilde{\alpha}_i \wedge \bar{w}_j = C_{k_0-1} |s_0|^{2u} \neq 0$$

pour $i+j = k_0 + 1$, en intégrant (8) sur $F(0) \cap \partial X'$

$$(11) \quad \int_{F(0) \cap \partial X'} t = k_0 C_{k_0-1} \neq 0.$$

Considérons maintenant $g \in C_c^\infty(D)$ ayant un support concentré au voisinage de s_0 [rappelons que $s_0 \in \mathbb{R}^{+*} \cap D$ est notre point base et que $F(0) = f^{-1}(s_0)$] et vérifiant

$$\int_D g(s) ds \wedge d\bar{s} = 1.$$

Alors la 3-forme C^∞ à support compact [voisin de $F(0) \cap \partial X'$]

$$\psi = \gamma \wedge f^*(g(s) ds \wedge d\bar{s})$$

où γ est la 1-forme introduite plus haut, vérifie :

1° $d\psi = 0$ (car $d\gamma = 0$), $\psi \wedge df = 0$, $\psi \wedge d\bar{f} = 0$.

2° Elle représente le $(2n-1)$ cycle $F(0) \cap \partial X'$ dans $H_c^3(W, \mathbb{C})$ où W est un voisinage ouvert de $F(0) \cap \partial X'$ dans X contenant $\text{supp } \psi$ [par exemple $W = \mathcal{V} - \mathcal{V} \cap f^{-1}(0)$ si le

support de g est assez petit]. On aura pour toute forme $C^\infty \chi$ fermée de degré $2n-1$ sur W

$$\int_W \chi \wedge \psi = \int_{F(0) \cap \partial X'} \chi.$$

Calculons $\int_W t \wedge \psi$; le théorème de Fubini [car on peut supposer que f est de rang maximal sur W , c'est-à-dire que $W \cap f^{-1}(0) = \emptyset$] donne

$$\begin{aligned} \int_W t \wedge \psi &= \int_D g(s) \left(\int_{W \cap f^{-1}(s)} -\gamma \wedge t \right) ds \wedge d\bar{s} \\ &= \int_D g(s) \left(- \sum_{a+b \leq 0} |s|^{-2a} F_{k_0+a, b+1}(s) \right) ds \wedge d\bar{s} = -k_0 C_{k_0-1} \neq 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\langle T, \psi \rangle \neq 0$.

Nous allons maintenant obtenir une contradiction en montrant (sous notre hypothèse « absurde » que les fonctionnelles analytiques de l'énoncé sont nulles) que l'on a $\langle T, \psi \rangle = 0$.

LA STRATÉGIE DU CUP-PRODUIT (voir [B.2]). — Notons par \mathcal{T}_j et $\check{\mathcal{T}}_j$ les courants à valeurs dans $\mathbb{C}^{k_0} \otimes \mathbb{C}^{k_0}$ définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_j &= \sum_{a,i} \mathcal{T}_j^{a,i} e_a \otimes \varepsilon_i \\ \check{\mathcal{T}}_j &= \sum_{i,b} \check{\mathcal{T}}_j^{i,b} \varepsilon_i \otimes e_b \end{aligned}$$

où $e_1 \dots e_{k_0}$ et $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{k_0-1}$ sont des bases de \mathbb{C}^{k_0} ; notons par

$$v: \mathbb{C}^{k_0} \otimes \mathbb{C}^{k_0} \rightarrow \mathbb{C}^{k_0} \otimes \mathbb{C}^{k_0}$$

l'endomorphisme nilpotent défini par

$$v(e_a \otimes \varepsilon_i) = -e_{a+1} \otimes \varepsilon_i + e_a \otimes \varepsilon_{i-1}$$

avec les conventions $\varepsilon_{-1} = 0$ et $e_{k_0+1} = 0$.

Alors les relations (7) donnent

$$(12) \quad \begin{cases} d\mathcal{T}_j + df \wedge ((j+1) \cdot \text{Id} - v) \mathcal{T}_{j+1} = 0 \\ d\check{\mathcal{T}}_j + \overline{df} \wedge ((j+1) \cdot \text{Id} - v) \check{\mathcal{T}}_{j+1} = 0 \end{cases}$$

qui sont vérifiées sur \hat{X}^* .

La variété \hat{X}^* vérifie

$$(13) \quad H^q(\hat{X}^*, \Omega^r) = 0, \quad \forall q \in [1, n-1], \quad \forall r.$$

Nous voulons maintenant appliquer la variante vectorielle du lemme C'_1 de [B.2] aux courants \mathcal{F}_j et aux courants $\bar{\mathcal{F}}_j$ (conjugués des \mathcal{F}_j).

On remarquera que les relations

$$\bar{f}\bar{\mathcal{F}}_{j+1} = \bar{\mathcal{F}}_j \quad \text{et} \quad f\mathcal{F}_{j+1} = \mathcal{F}_j$$

étant évidentes pour tout j , on pourra même utiliser le lemme C'_2 .

Pour les courants $\bar{\mathcal{F}}_j$ qui sont de type $(n-1, n)$ ceci ne pose pas de problème car les conditions d'annulation (13) sont suffisantes.

Par contre pour \mathcal{F}_j qui est de type $(n, n-1)$ il manque l'annulation en degré n .

Ceci peut être contourné en utilisant l'hypothèse supplémentaire suivante, dont nous montrerons plus loin qu'elle est conséquence de l'hypothèse du théorème 13.

L'HYPOTHÈSE \mathcal{H} :

Supposons que $\forall j \leq n+1$ la classe de cohomologie (vectorielle) définie par $\bar{\mathcal{F}}_j$ dans

$$H^n(\hat{X}^*, \Omega^{n-1}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}^{k_0} \otimes \mathbb{C}^{k_0})$$

soit nulle.

Alors on obtient l'existence (grâce aux lemmes C'_1 et C'_2 de [B.2] variantes vectorielles) de formes holomorphes à valeurs dans

$$\mathbb{C}^{k_0} \otimes \mathbb{C}^{k_0}, \quad (\Omega_j)_{j \leq 1} \quad \text{et} \quad (\bar{\Omega}_j)_{j \leq 1}$$

de degré $2n-1$ (donc nulles pour $n \geq 3$) et de courants vectoriels $(U_j)_{j \leq 1}$ et $(V_j)_{j \leq 1}$ de degré $2n-1$ sur \hat{X}^* vérifiant :

$$(14) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_j = \Omega_j + dU_j + df \wedge ((j+1) \cdot \text{Id} - \nu) U_{j+1} \\ \bar{\mathcal{F}}_j = \bar{\Omega}_j + dV_j + \bar{df} \wedge ((j+1) \cdot \text{Id} - \nu) V_{j+1} \end{cases}$$

pour $j \leq 0$, avec aussi

$$(15 \text{ et } \bar{15}) \quad f\Omega_1 = \Omega_0 \quad \text{et} \quad f\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_0$$

$$(16) \quad d\Omega_0 + df \wedge (\text{Id} - \nu) \Omega_1 = 0$$

$$\bar{16}) \quad d\bar{\Omega}_0 + \bar{df} \wedge (\text{Id} - \nu) \bar{\Omega}_1 = 0.$$

Cela donnera en particulier sur \hat{X}^*

$$\mathcal{F}_0^{k_0, 0} = \Omega_0^{k_0, 0} + dU_0^{k_0, 0} + df \wedge (U_1^{k_0, 1} - U_1^{k_0, -1, 0})$$

$$\bar{\mathcal{F}}_0^{0, k_0} = \bar{\Omega}_0^{0, k_0} + dV_0^{0, k_0} + \bar{df} \wedge (V_1^{1, k_0} - V_0^{0, k_0, -1}).$$

Ce qui donne

$$df \wedge \mathcal{F}_0^{k_0, 0} = df \wedge \Omega_0^{k_0, 0} + d(df \wedge U)$$

et

$$\overline{df} \wedge \check{\mathcal{F}}_0^{0, k_0} = \overline{df} \wedge \check{\Omega}_0^{0, k_0} + d(\overline{df} \wedge V).$$

Remarquons déjà que pour $2n \geq n+2$ c'est-à-dire pour $n \neq 1$ les formes holomorphes

$$df \wedge \Omega_0^{k_0, 0} \quad \text{et} \quad df \wedge \check{\Omega}_0^{0, k_0}$$

sont nulles (car de degré $2n \geq n+2$ dans \mathbb{C}^{n+1}) et ne nous gêneront donc pas.

Pour $n=1$ ce sera différent.

Dans ce cas commençons par remarquer que les relations (15) et (16) [resp. (I5) et (I6)] et le théorème de positivité de Malgrange montrent que $\Omega_0^{k_0, 0}$ (resp. $\check{\Omega}_0^{0, k_0}$) induit la section nulle sur D^* du fibré de Gauss-Manin $s \rightarrow H^1(f^{-1}(s), \mathbb{C})$ (on utilise ici Hartogs pour voir que ces formes holomorphes sur \check{X}^* se prolongent holomorphiquement à \check{X}).

Comme $df \wedge \Omega_0^{k_0, 0}$ est holomorphe de degré 2 sur la boule \check{X} de \mathbb{C}^2 , on peut trouver A une 1-forme holomorphe sur \check{X} vérifiant $dA = df \wedge \Omega_0^{k_0, 0}$ (resp. \check{A} vérifiant $d\check{A} = df \wedge \check{\Omega}_0^{0, k_0}$).

On aura alors, au voisinage de $\partial X' \cap Y$

$$(17) \quad (-1)^{k_0+1} dT = d(A + df \wedge U + \check{A} + \overline{df} \wedge V).$$

En fait le courant T est identiquement nul près de $\partial X'$ dès que l'on s'éloigne de $S \cap \partial X'$ et il en est de même des \mathcal{F}_j et $\check{\mathcal{F}}_j$ qui sont à support dans S^* . Donc l'égalité (17) sera valable au voisinage de la sphère $\partial B(0, \varepsilon')$ de \check{X}^* toute entière [on utilise ici la nullité de \tilde{w} au voisinage du compact L ; voir la condition (ii) de la construction de \tilde{w} au n° 1].

Comme on a $H^{2n-1}(S^{2n+1}, \mathbb{C}) = 0$ on peut trouver un courant Ξ de degré $2n-2$ au voisinage de $\partial B(0, \varepsilon')$ vérifiant

$$(18) \quad d\Xi = (-1)^{k_0+1} T - A - \check{A} - df \wedge U - \overline{df} \wedge V$$

au voisinage de $\partial B(0, \varepsilon')$.

En évaluant ceci sur la forme ψ construite plus haut [qui est de degré 3 et à support voisin de $F(0) \cap \partial X' \subset \partial B(0, \varepsilon')$] on obtient

$$(-1)^{k_0+1} \langle T, \psi \rangle = \langle d\Xi, \psi \rangle + \langle df \wedge U, \psi \rangle + \langle \overline{df} \wedge V, \psi \rangle + \langle A, \psi \rangle + \langle \check{A}, \psi \rangle.$$

Comme on a $d\psi = 0$, $df \wedge \psi = 0$ et $\overline{df} \wedge \psi = 0$, il reste seulement les intégrales

$$\int_w A \wedge \psi \quad \text{et} \quad \int_w \check{A} \wedge \psi.$$

Considérons la fonction ($n=1$ maintenant sinon $A = \check{A} = 0$)

$$F(s) = \int_{f=s} A \wedge \psi.$$

Comme la forme d -fermée à support f -propre γ définit une famille horizontale de 1-cycles du fibré de Gauss-Manin $s \rightarrow H_1(f^{-1}(s), \mathbb{C})$ (via la dualité de Poincaré) et comme la relation $dA = df \wedge \Omega_0^{k_0, 0}$ donne

$$\frac{dF}{ds}(s) = \int \Omega_0^{k_0, 0} \wedge \gamma \equiv 0$$

puisque l'on a vu que $\Omega_0^{k_0, 0}$ induisait 0 dans le fibré de Gauss-Manin $s \rightarrow H^1(f^{-1}(s), \mathbb{C})$, on aura

$$F(s) = \text{Cte.}$$

D'après Malgrange on a encore (voir [M. 1] et [B. 2])

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} F(s) = 0$$

ce qui donne la nullité de la constante et donc de F .

Comme on a par Fubini (banal)

$$\int_{\mathbf{w}} A \wedge \psi = \int_{\mathbf{D}} g(s) [F(s)] ds \wedge d\bar{s}$$

on trouve $\int_{\mathbf{w}} A \wedge \psi = 0$ (resp. $\int_{\mathbf{w}} \bar{A} \wedge \psi = 0$) et donc la contradiction cherchée $\langle T, \psi \rangle = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Il nous reste à montrer que l'hypothèse du théorème 15 implique bien l'hypothèse \mathcal{H} que nous avons utilisée.

Considérons les courants sur X

$$T_j^i = \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^b P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} w_b \wedge \square \right)$$

pour $j \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{N}$. Ils sont de type $(n, 0)$ sur X et à support dans S (on somme en fait sur $b \in [1, k_0]$ et $i \geq 0$).

On a

$$\begin{aligned} d' T_j^i &= \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^b P_{b+i+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge w_b \wedge \square \right) \\ &+ \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^b P_{b+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge w_{b-1} \wedge \square \right) \\ &+ (-1)^{k_0} P_{k_0+1+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge w_{k_0} \wedge \square \right). \end{aligned}$$

Les deux premières sommes s'annulent et il reste

$$d' T_j^i = (-1)^{k_0} P_{k_0+1+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge w_{k_0} \wedge \square \right).$$

Donc $d' T_j^i$ coïncide avec la fonctionnelle analytique (conjuguée) dont l'hypothèse du théorème 15 implique la nullité grâce au théorème 13.

Il existe donc un courant t_j^i de type $(n, 0)$ à support l'origine dans X et vérifiant

$$d' (T_j^i - t_j^i) = 0 \quad \text{sur } X.$$

Alors $\overline{T_j^i - t_j^i}$ définit sur X une classe dans $H_{[S]}^n(X, \mathcal{O}_X)$ puisque l'on a $\text{supp}(T_j^i - t_j^i) \subset S$. Comme X est de Stein et S est de codimension pure n dans X on a

$$H_{[S]}^n(X, \mathcal{O}_X) = H^0(S, \underline{H}_{[S]}^n(\mathcal{O}_X)).$$

De plus le faisceau $\underline{H}_{[S]}^n(\mathcal{O}_X)$ n'a pas de section non nulle supportée par l'origine.

Montrons que $\overline{T_j^i - t_j^i}$ induit la section nulle sur S^* du faisceau $\underline{H}_{[S]}^n(\mathcal{O}_X)$. Mais on a choisi w de sorte que l'on ait près de chaque $\sigma \in S^*$

$$w = \delta \beta^\sigma \quad \text{sur } X_\sigma$$

où $\beta^\sigma \in H^0(X_\sigma, \Omega^{n-1}(k_0))$, X_σ désignant une boule de Milnor pour f en σ . Posons alors sur X_σ

$$\Xi_j^i = \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^b P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \beta_b^\sigma \wedge \square \right).$$

On a

$$\begin{aligned} d' \Xi_j^i &= \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^b P_{b+i+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge \beta_b^\sigma \wedge \square \right) \\ &+ \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^b P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge \beta_{b-1}^\sigma \wedge \square \right) \\ &+ (-1)^{k_0} P_{k_0+i+1} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} \frac{df}{f} \wedge \beta_{k_0}^\sigma \wedge \square \right) \\ &+ \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^b P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} \bar{f}^{-j-1} (\delta \beta^\sigma)_b \wedge \square \right). \end{aligned}$$

Les deux premières sommes s'annulent et pour $i \geq 0$ le troisième terme est nul car on n'a pas de pôle d'ordre $\geq k_0 + 1$ ($i \geq 0$) en $-u$ modulo \mathbb{Z} sur X_σ ($\subset X^*$).

Il reste donc :

$$d' \Xi_j^i = T_j^i \quad \text{sur } X_\sigma.$$

Comme $\text{supp } \Xi_j^i \subset X_\sigma \cap S$ (pour $i \geq 0$) ceci montre bien que $\overline{T_j^i - t_j^i}$ induit la section nulle sur S^* du faisceau $H_{[S]}^n(\mathcal{O}_X)$ (rappelons que $\text{supp } t_j^i \subset \{0\}$).

On en conclut que pour chaque $i \geq 0$ et $j \in \mathbb{Z}$, $\overline{T_j^i - t_j^i}$ induit 0 dans $H_{[S]}^n(X_\sigma, \mathcal{O}_X)$, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{\Xi}_j^i$ courant de type $(n-1, 0)$ sur X à support dans S et vérifiant

$$(19) \quad d' \Xi_j^i = T_j^i - t_j^i \quad \text{sur } X.$$

Prouvons maintenant l'hypothèse \mathcal{H} .

Soit $v \in \Omega_{X,0}^2$ et soit $\rho \in C_c^\infty(X)$ valant identiquement 1 près de 0 telle que ρv soit dans $C_c^\infty(X)$. Par définition de la dualité entre $H^n(\tilde{X}^*, \Omega_{\tilde{X}^*}^{n-1})$ et $\Omega_{X,0}^2$ on a

$$\langle \mathcal{F}_j^{a,i}, v \rangle = \langle \mathcal{F}_j^{a,i}, d'' \rho \wedge v \rangle$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_j^{a,i}, v \rangle &= \sum_{b \in \mathbb{Z}} (-1)^{a+b} P_{b+i} \left(\lambda = -u, \int_X |f|^{2\lambda} f^{-j-1} \tilde{\alpha}_a \wedge \tilde{w}_b \wedge d'' \rho \wedge v \right) \\ &= (-1)^a \langle \overline{T}_j^i, \tilde{\alpha}_a \wedge d'' \rho \wedge v \rangle \end{aligned}$$

abusivement car $\tilde{\alpha}_a$ a encore des dénominateurs, mais il existe N tel que $f^N \tilde{\alpha}_a$ soit holomorphe au voisinage de $S \cap \text{supp } d'' \rho$ (compact de S^*) et on aura bien

$$\langle \mathcal{F}_j^{a,i}, v \rangle = (-1)^a \langle \overline{T}_{j+N}^i, f^N \tilde{\alpha}_a \wedge d'' \rho \wedge v \rangle.$$

On remarquera que comme i est positif ou nul et $b \in [1, k_0]$ la substitution de w_b à \tilde{w}_b ne change rien.

Comme $d'' \rho \equiv 0$ près de 0 on peut remplacer \overline{T}_{j+N}^i par $\overline{T}_{j+N}^i - \overline{t}_{j+N}^i$ sans changer le résultat, puis utiliser (19) conjuguée, ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_j^{a,i}, v \rangle &= (-1)^a \langle d'' \tilde{\Xi}_j^i, f^N \tilde{\alpha}_a \wedge d'' \rho \wedge v \rangle \\ &= \pm \langle \tilde{\Xi}_j^i, d'' (f^N \tilde{\alpha}_a \wedge d'' \rho \wedge v) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car on a $d'' (f^N \tilde{\alpha}_a) = 0$ près de $(\text{supp } d'' \rho) \cap S$ et $\text{supp } \tilde{\Xi}_j^i \subset S$ ainsi que $d'' (d'' \rho \wedge v) = 0$ sur X puisque $v \in \Omega_{X,0}^2$. Ceci achève la preuve de l'hypothèse \mathcal{H} et donc celle du théorème 15.

N° 6.

Preuve du corollaire 16. — Nous supposons donc $k_0 = 1$ et que l'application $\tilde{\text{ob}}_1 : \text{Ker } \mathcal{N} \rightarrow H_{\{0\}}^1(S, H^{n-1}(u))$ est identiquement nulle. Nous voulons montrer qu'alors l'emmèlement ne se produit pas, c'est-à-dire que l'application $\text{can} : H_c^n(u) \rightarrow H^n(u)$ est un isomorphisme. Il suffit pour cela de montrer que can est surjective puisqu'elle est auto-duale (pour la dualité de Poincaré).

Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ que pour $e \in H^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}^k e = 0$ on a $e \in \text{Im can}$.

Pour $k=1$ cela résulte du théorème 15 puisque l'on a supposé $\tilde{ob}_1 \equiv 0$: en effet $\tilde{ob}_1(e)=0$ implique $e \in \text{Im can}$ d'après la proposition 7. Supposons le résultat démontré pour $k-1 \geq 1$ et considérons $e \in H^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}^k e=0$. On a $\mathcal{N}^{k-1} e \in \text{Ker } \mathcal{N}$ et donc d'après le cas $k=1$ on en déduit que $\mathcal{N}^{k-1} e \in \text{Im can}$. On a même, d'après la proposition 7, l'existence de $\varepsilon \in H_c^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}_c^k \varepsilon=0$ et $\text{can } \varepsilon = \mathcal{N}^{k-1} e$. Montrons que $\varepsilon \in \text{Im } \mathcal{N}_c^{k-1}$: pour cela il suffit de prouver que $\forall \alpha \in H^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}^{k-1} \alpha=0$ on a $\langle \varepsilon, \alpha \rangle = 0$. Mais d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\alpha \in \text{Im can}$ et de plus, $\tilde{ob}_{k-1}(\alpha) = \tilde{ob}_1(\mathcal{N}^{k-2} \alpha)$ d'après le lemme 1 du paragraphe *b*, n° 3 et la formule $\tilde{ob}_{k+k'} = \mathcal{N}^{k'} \circ \tilde{ob}_k = \tilde{ob}_k \circ \mathcal{N}^{k'}$ (voir § *b*, n° 3 également). On en déduit que $\tilde{ob}_{k-1}(\alpha) = 0$ et $\tilde{ob}_{k-1}(\alpha) = 0$ [$\tilde{ob}_{k-1}(\alpha) = 0$ car $\alpha \in \text{Im can}$, $\tilde{ob}_{k-1}(\alpha) = 0$ car $\tilde{ob}_1 \equiv 0$].

D'après la proposition 7, il existe $\beta \in H_c^n(u)$ tel que $\alpha = \text{can } \beta$ avec $\mathcal{N}_c^{k-1} \beta = 0$. On aura donc

$$\langle \varepsilon, \alpha \rangle = \langle \text{can } \varepsilon, \beta \rangle = \langle \mathcal{N}^{k-1} e, \beta \rangle = \langle \mathcal{N}_c^{k-1} \beta, e \rangle = 0$$

et donc $\forall \alpha \in H^n(u)$ vérifiant $\mathcal{N}^{k-1} \alpha = 0$ on aura $\langle \varepsilon, \alpha \rangle = 0$. Donc $\varepsilon \in \text{Im } \mathcal{N}_c^{k-1}$.

Si $\eta \in H_c^n(u)$ vérifie $\varepsilon = \mathcal{N}_c^{k-1} \eta$ on aura donc $\mathcal{N}^{k-1}(e - \text{can } \eta) = 0$ et donc, d'après l'hypothèse de récurrence $e - \text{can } \eta \in \text{Im can}$. On a donc $e \in \text{Im can}$. Ceci achève la preuve de la première partie du corollaire 16.

Pour prouver la seconde partie, il suffit de constater que pour $k_0 = k_1 = 1$ le théorème 14 donne que l'existence d'un pôle double implique l'emmêlement et que réciproquement l'emmêlement implique $\tilde{ob}_1 \neq 0$ (corollaire 16) et que $\tilde{ob}_1 \neq 0$ donne l'existence d'un pôle double d'après le théorème 13. Ceci achève la preuve du corollaire 16. ■

h.

Nous nous proposons ici de détailler un exemple simple mettant en évidence par un calcul direct les pôles doubles créés par l'interaction de deux strates consécutives.

N° 1. Considérons dans \mathbb{C}^3 le polynôme quasi-homogène

$$P(X, Y, Z) = X^3(X^3 + Y^3) + Z^2.$$

L'idéal jacobien de P est engendré par

$$6X^5 + 3X^2Y^3, \quad 3X^3Y^2 \quad \text{et} \quad 2Z.$$

Les points critiques de P sont donc les points de la droite $S = \{X=Z=0\}$.

Soit $(0, Y_0, 0) \in S^* = S - \{0\}$. Près de ce point on peut définir les coordonnées locales suivantes :

$$\begin{aligned} U &= X(Y^3 + X^3)^{1/3}, & |X| &\ll |Y_0| \\ (*) \quad V &= iZ \\ W &= Y^3 + X^3. \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que

$$dU \wedge dV \wedge dW = -i(Y^3 + X^3)^{1/3} 3Y^2 dX \wedge dY \wedge dZ$$

et

$$(Y^3 + X^3)^{1/3} Y^2 \neq 0 \quad \text{près de } (0, Y_0, 0), \quad Y_0 \neq 0.$$

On constate alors que dans ces nouvelles coordonnées on a

$$P(X, Y, Z) = U^3 - V^2$$

c'est-à-dire que la singularité est produit (holomorphiquement) du cusp par un disque. La fibre de Milnor de P en un tel point est donc équivalente homotopiquement à celle du cusp, auquel on sera donc ramené pour étudier l'action de la monodromie sur la cohomologie de la fibre de Milnor.

Comme P est quasi homogène, la fibre de Milnor de P est homotopiquement équivalente à la surface $\{P=1\}$ de \mathbb{C}^3 et l'action de la monodromie est induite par l'automorphisme

$$\mathcal{M}: (X, Y, Z) \rightarrow (X e^{i\pi/3}, Y e^{i\pi/3}, -Z)$$

de cette variété ($P(X e^{i\theta}, Y e^{i\theta}, Z e^{3i\theta}) = e^{6i\theta} P(X, Y, Z)$).

Comme il vérifie $\mathcal{M}^6 = \text{Id}$, la monodromie agissant sur la cohomologie de la fibre de Milnor en 0 est certainement semi-simple.

Montrons que l'on a $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) = 0$ où $\mathcal{X} = \{P=1\}$.

Pour cela considérons X comme revêtement ramifié de \mathbb{C}^2 via la projection

$$\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \pi(X, Y, Z) = (X, Y).$$

Comme $\mathcal{X} = \{Z^2 = 1 - X^3(X^3 + Y^3)\}$ ce revêtement ramifié est de degré 2 et la ramification est la courbe

$$C = \{X^3(X^3 + Y^3) = 1\} \quad \text{de } \mathbb{C}^2$$

que l'on identifiera à la sous-variété $\{Z=0\}$ de \mathcal{X} (comme $dZ \wedge dP$ ne s'annule que sur $\{X=0\}$ et que $\{x=0\} \cap \{Z=0\} \cap \mathcal{X} = \emptyset$, $Z=0$ est une équation réduite de C dans \mathcal{X}).

La courbe C est connexe: plutôt que de vérifier l'irréductibilité du polynôme $X^3(X^3 + Y^3) - 1$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$ (ce qui est pénible si on le fait vraiment) raisonnons comme suit: C est image réciproque de la courbe $u(u+v)=1$ (qui est connexe car isomorphe à \mathbb{C}^*) via l'application

$$X \rightarrow X^3 = u$$

$$Y \rightarrow Y^3 = v$$

de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C}^2 . C'est un morphisme fini de degré 9 ramifié sur $uv=0$. Donc C est un revêtement ramifié de degré 9 de $u(u+v)=1$ et les points de ramifications sont donnés par

$$u^2 = 1, \quad v = 0 \quad \text{soit } X^6 = 1, \quad Y = 0.$$

Montrons que ces 6 points ⁽²³⁾ sont dans la même composante connexe de C : si $\zeta^6 = 1$ pour $0 \leq \theta \leq \pi$ posons

$$X(\theta) = \zeta \cdot e^{i\theta/3}, \quad Y(\theta) = -\zeta (2 \sin \theta)^{1/3} e^{i\pi/6};$$

on a alors $X(0) = \zeta$, $X(\pi) = e^{i\pi/3} \zeta$ et $Y(0) = Y(\pi) = 0$. De plus

$$X(\theta)^3 (X(\theta)^3 + Y(\theta)^3) = e^{i\theta} (e^{i\theta} - 2i \sin \theta) \equiv 1$$

d'où notre assertion.

Pour en déduire la nullité de $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} \rightarrow & H_C^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^1(\mathcal{X} - C, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_C^2(\mathcal{X}, \mathbb{C}) & \rightarrow & \dots \\ & \uparrow \pi_1^* & & \uparrow \pi_2^* & & \uparrow \pi_3^* & & \uparrow \pi_4^* & & \\ \rightarrow & H_C^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) & \rightarrow & H^1(\mathbb{C}^2 - C, \mathbb{C}) & \rightarrow & H_C^2(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

où les lignes horizontales sont respectivement les suites exactes de cohomologie à support dans C pour les inclusions $C \subset \mathcal{X}$ et $C \subset \mathbb{C}^2$ et où les flèches verticales sont induites par $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^2$.

Comme C est une hypersurface lisse et connexe aussi bien de \mathcal{X} que de \mathbb{C}^2 on a

$$\mathcal{H}_C^i(\mathcal{X}) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}_C & \text{si } i=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_C^i(\mathbb{C}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}_C & \text{si } i=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

puisque localement sur C l'inclusion de C est le produit de l'inclusion de 0 dans \mathbb{C} par un disque.

La connexité de C donne donc

$$H_C^2(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$$

$$H_C^2(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$$

et puisque $H_{\{0\}}^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est engendré par ds/s , on voit même que dQ/Q est un générateur de $H_C^2(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ si

$$Q(X, Y) = 1 - X^3 (X^3 + Y^3)$$

que, de même, dZ/Z est un générateur de $H_C^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ et que

$$\pi_4^* \left(\frac{dQ}{Q} \right) = 2 \frac{dZ}{Z}$$

⁽²³⁾ C'est la réunion de deux fibres de C sur $u(u+v)=1$, donc cela rencontre chaque composante connexe de C .

ce qui montre que π_4 est un isomorphisme.

Comme $\mathcal{X} - C \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^2 - C$ est un revêtement à deux feuillets, π_3^* est un isomorphisme. La nullité de $H_C^1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, $H_C^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ et de $H^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ donne alors que $H^1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) = 0$.

Étudions maintenant le système local des H^1 de fibres de Milnor le long de S^* .

Commençons par rappeler que pour

$$F(U, V) = U^3 - V^2 \quad \text{dans } \mathbb{C}^2$$

la fibre de Milnor est connexe et son H^1 est de dimension

$$2 = \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}[U, V]/(U^3 - V^2)).$$

Si $\omega = 2U dV - 3V dU$, on a

$$d\omega = \frac{5}{6} \frac{dF}{F} \wedge \omega$$

et

$$d(U\omega) = \frac{7}{6} \frac{dF}{F} \wedge U\omega$$

et on obtient une base horizontale (multiforme) du fibre de Gauss-Manin en prenant

$$\frac{\omega}{F^{5/6}}, \quad \frac{U\omega}{F^{7/6}}.$$

La monodromie est donc donnée par

$$T = \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{pmatrix}$$

dans la base correspondante du H^1 (i. e. $\omega|_{F=1}$, $U\omega|_{F=1}$).

De plus le système de coordonnées locales (*) introduit au n° 1 montre que le système local des H^1 sur S^* est trivial, puisque les fonctions U , V et W peuvent être définies globalement au voisinage de $\{(0, Y_0, 0) \mid |Y_0| = 1\}$. Comme le H^1 de la fibre de Milnor en 0 est nul, on voit que les sections globales (correspondant aux valeurs propres $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$ de la monodromie de f) ainsi définies sur S^* ne peuvent se prolonger en section sur S du faisceau constructible $R^1\psi$.

Ceci correspond précisément à la condition d'interaction que nous étudions plus haut. Nous nous proposons de vérifier par un calcul direct dans cet exemple que le prolongement méromorphe de

$$\int_{\mathbb{C}^2} |P|^{2\lambda} \square$$

présente des pôles doubles aux points $-(5/6)-1$ et $-(7/6)-1$.

N° 2. Soit $\mathcal{P} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{C}^3 \mid |X^3 + Y^3| \leq 2 \text{ et } |X| \leq 1\}$.

Nous allons étudier certains termes des développements asymptotiques ⁽²⁴⁾ des intégrales

$$\Phi(s) = \int_{\{P=s\} \cap \mathcal{P}} \omega \wedge \bar{\omega}$$

$$\Psi(s) = \int_{\{P=s\} \cap \mathcal{P}} |XY|^2 \omega \wedge \bar{\omega}$$

où

$$\omega = X dY \wedge dZ + Y dZ \wedge dX + 3Z dX \wedge dY.$$

On a

$$d\omega = \frac{5}{6} \frac{dP}{P} \wedge \omega$$

et donc

$$\frac{\omega}{P} = 6 \frac{dX \wedge dY \wedge dZ}{dP} \text{ mod } (dP)$$

$$= 3 \frac{dX \wedge dY}{Z} \text{ mod } (dP).$$

Donc par image directe sur \mathbb{C}^2 (degré 2)

$$\Phi(s) = 18 s \bar{s} \int_{\substack{|X^3+Y^3| \leq 2 \\ |X| \leq 1}} \frac{dX \wedge dY \wedge d\bar{X} \wedge d\bar{Y}}{|X^3(X^3+Y^3)-s|}$$

$$\Psi(s) = 18 s \bar{s} \int_{\substack{|X^3+Y^3| \leq 2 \\ |X| \leq 1}} \frac{|XY|^2 dX \wedge dY \wedge d\bar{X} \wedge d\bar{Y}}{|X^3(X^3+Y^3)-s|}.$$

Posons $U = X^3$ et $V = X^3(X^3 + Y^3)$ ⁽²⁵⁾.

Alors

$$Y^3 = \frac{V - U^2}{U}$$

⁽²⁴⁾ Nous vérifierons l'existence de ces développements au n° 3.

⁽²⁵⁾ Image directe par $(X, Y) \rightarrow (X^3, Y^3)$ puis éclatement.

et donc

$$dU \wedge dV = 9 X^5 Y^2 dX \wedge dY,$$

donc

$$\begin{aligned} dX \wedge dY \wedge d\bar{X} \wedge d\bar{Y} &= \frac{1}{81} \frac{dU \wedge d\bar{U} \wedge dV \wedge d\bar{V}}{|X|^{10} |Y|^4} \\ &= \frac{1}{81} \frac{dU \wedge d\bar{U} \wedge dV \wedge d\bar{V}}{|U|^2 |V - U^2|^{4/3}} \end{aligned}$$

et donc (degré générique 9)

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= 2 s \bar{s} \int_{\substack{|U| \leq 1 \\ |V| \leq 2|U|}} \frac{dU \wedge d\bar{U} \wedge dV \wedge d\bar{V}}{|U|^2 |V - U^2|^{2/3} |V - s|} \\ \Psi(s) &= 2 s \bar{s} \int_{\substack{|U| \leq 1 \\ |V| \leq 2|U|}} \frac{dU \wedge d\bar{U} \wedge dV \wedge d\bar{V}}{|U|^2 |V - U^2|^{2/3} |V - s|}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} U &= a \sqrt{V} \quad (26) \\ V &= V. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= 2 s \bar{s} \int_{(1/2)|V|^{1/2} \leq |a| \leq |V|^{-1/2}} \frac{da \wedge d\bar{a} \wedge dV \wedge d\bar{V}}{|V - s| \cdot |V|^{4/3} |a|^2 |1 - a^2|^{4/3}} \\ \Psi(s) &= 2 s \bar{s} \int_{(1/2)|V|^{1/2} \leq |a| \leq |V|^{-1/2}} \frac{da \wedge d\bar{a} \wedge dV \wedge d\bar{V}}{|V - s| \cdot |V|^{2/3} |a|^2 |1 - a^2|^{2/3}}. \end{aligned}$$

Intégrons d'abord en a ; on a

$$\int_{(1/2)|V|^{1/2} \leq |a| \leq |V|^{-1/2}} \frac{da \wedge d\bar{a}}{|a|^2 |1 - a^2|^{4/3}} = 4 i \pi \operatorname{Log} |V|^{1/2} + \mathcal{O}(1)$$

et aussi

$$\int_{(1/2)|V|^{1/2} \leq |a| \leq |V|^{-1/2}} \frac{da \wedge d\bar{a}}{|a|^2 |1 - a^2|^{2/3}} = 4 i \pi \operatorname{Log} |V|^{1/2} + \theta(|V|^{2/3})$$

où θ est C^∞ (en fait θ est analytique réelle!).

On aura donc :

$$\Phi(s) = 4 i \pi s \bar{s} \int_{|V| \leq 2} \frac{dV \wedge d\bar{V}}{|V - s| \cdot |V|^{4/3}} (\operatorname{Log} |V| + \mathcal{O}(1))$$

(26) Pull back sur un revêtement ramifié de degré 2 puis éclatement.

$$\psi(s) = 4i\pi s\bar{s} \int_{|V| \leq 2} \frac{\text{Log}|V| dV \wedge d\bar{V}}{|V-s| \cdot |V|^{2/3}} + 2s\bar{s} \int_{|V| \leq 2} \frac{\theta(|V|^{2/3}) dV \wedge d\bar{V}}{|V-s| \cdot |V|^{2/3}}$$

et donc en posant $V = s\alpha$

$$\Phi(s) = 4i\pi |s|^{5/3} \int_{|\alpha| \leq 2/|s|} \frac{d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{|1-\alpha| \cdot |\alpha|^{4/3}} (\text{Log}|s| + \text{Log}|\alpha| + \mathcal{O}(1))$$

ce qui donne

$$\Phi(s) = 4i\pi |s|^{5/3} \text{Log}|s| \int_{\mathbb{C}} \frac{d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{|1-\alpha| \cdot |\alpha|^{4/3}} + \mathcal{O}(|s|^{5/3})$$

puisque

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\text{Log}|\alpha| d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{|1-\alpha| \cdot |\alpha|^{4/3}}$$

converge.

Pour $\psi(s)$, c'est un peu plus compliqué :

$$\psi(s) = 4i\pi \int_{|\alpha| \leq 2/|s|} \frac{|s|^{7/3} d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{|1-\alpha| \cdot |\alpha|^{2/3}} (\text{Log}|s| + \text{Log}|\alpha|) + 2s\bar{s} \int_{|V| \leq 2} \frac{\theta(|V|^{2/3}) dV \wedge d\bar{V}}{|V-s| \cdot |V|^{2/3}}$$

ce qui donne

$$\psi(s) = 4i\pi |s|^{7/3} \text{Log}|s| \int_{|\alpha| \leq 2/|s|} \frac{d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{|1-\alpha| \cdot |\alpha|^{2/3}} + 4i\pi |s|^{7/3} \int_{|\alpha| \leq 2/|s|} \frac{\text{Log}|\alpha| d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{|1-\alpha| \cdot |\alpha|^{2/3}} + s\bar{s} \int_{|V| \leq 2} \frac{\theta(|V|^{2/3}) dV \wedge d\bar{V}}{|V-s| \cdot |V|^{2/3}}.$$

Mais

$$\int_{|\alpha| \leq 2/|s|} \frac{d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{|1-\alpha| \cdot |\alpha|^{2/3}}$$

admet un développement asymptotique en $|s|$ de la forme $|s|^{-1/3} \sum_0^{+\infty} a_\nu |s|^{2\nu} + -2ic$ où c est donnée dans le corollaire du lemme 1 de [B. 6]

$$c = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma[(1/2) + (1/6)] \Gamma[(1/2) + (1/6) - (1/2)] \Gamma(1/2)}{\Gamma[(1/2) - (1/6)] \Gamma[1 + (1/6)] \Gamma(1/2)}$$

$$c = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \times 6 \neq 0.$$

Le développement asymptotique en $|s|$ de

$$\int_{|\alpha| \leq 2/|s|} \frac{\text{Log}|\alpha| d\alpha \wedge d\bar{\alpha}}{|1-\alpha| \cdot |\alpha|^{2/3}}$$

est de la forme

$$|s|^{-1/3} \text{Log}|s| \sum_0^{+\infty} b_\nu |s|^{2\nu} + c'$$

et il n'y aura pas d'interférence avec le terme $4i\pi |s|^{7/3} \text{Log}|s| \times (-2ic)$ qui vient de la première intégrale (27).

Pour voir que le développement asymptotique de

$$\int_{|V| \leq 2} \frac{\theta(|V|^{2/3}) dV \wedge d\bar{V}}{|V-s| \cdot |V|^{2/3}}$$

n'interfère pas non plus avec ce terme, il suffit de poser

$$Y^3 = V$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{|Y| \leq 2^{1/3}} \frac{\theta(|Y|^2) 9|Y|^4 dY \wedge d\bar{Y}}{|Y^3-s| \cdot |Y|^2} \\ = \int_{\substack{|Y|^3 \leq 2 \\ X^2-Y^3=-s}} \frac{9|Y|^2 \theta(|Y|^2) dY \wedge d\bar{Y}}{|X|^2} = \frac{1}{4} \int_{\substack{|Y|^3 \leq 2 \\ X^2-Y^3=-s}} \theta(|Y|^2) \omega \wedge \bar{\omega} \end{aligned}$$

où

$$\omega = 3X dY - 2Y dX$$

puisque

$$d(X^2 - Y^3) \wedge \omega = 6(X^2 - Y^3) dX \wedge dY$$

et donc

$$\frac{dX \wedge dY}{d(X^2 - Y^3)} = \frac{\omega}{6(X^2 - Y^3)} \pmod{d(X^2 - Y^3)}$$

et d'utiliser le résultat (classique) sur les développements asymptotiques pour le cusp.

N° 3. Ceci ne suffit encore pas pour achever la preuve que le prolongement méromorphe de $\int_{\mathbb{C}^3} |P|^{2\lambda} \square$ a des pôles doubles en $\lambda = -(5/6) - 1$ et $\lambda = -(7/6) - 1$ car il faut encore expliquer que le bord du polyèdre \mathcal{P} introduit dans notre calcul ne crée pas de terme pouvant interférer avec $|s|^{5/3} \text{Log}|s|$ et $|s|^{7/3} \text{Log}|s|$.

(27) Les termes en $|s|^{2k} (\text{Log}|s|)$, $k \in \mathbb{N}$ sont liés à la valeur propre 1 de la monodromie.

Pour voir cela considérons un point $(0, Y_0, 0) \in S^*$ et décrivons le bord de \mathcal{P} près de Y_0 dans les coordonnées U, V, W introduites au n° 1.

On a clairement si $\varphi \in C_c^\infty$ à support près de $(0, Y_0, 0)$

$$\int_{\{P=s\} \cap \mathcal{P}} \varphi = \int_{\{U^3 - V^2 = s\} \cap |W| \leq 2} \varphi.$$

En effectuant d'abord l'intégration en W on voit que l'on retombe sur une forme C^∞ à support compact en U, V et le module des développements asymptotiques du cusp permet à nouveau de conclure.

Pour les points de $\partial\mathcal{P}$ qui ne sont pas dans S on peut utiliser le lemme 2 de [B.6] : si

$$|X|=1 \quad \text{et} \quad Y=0$$

alors le bord est défini par $|X| \leq 1$ et

$$dX \wedge dP = 3X^3 Y^2 dX \wedge dY + 2Z dX \wedge dZ;$$

mais si

$$Y=0, \quad X^6 + Z^2 = 0 \quad \text{et} \quad |X|=1.$$

Donc $Z \neq 0$ et donc $dX \wedge dP \neq 0$.

Si $Y \neq 0$ mais que le bord est encore défini par $|X| \leq 1$, alors $X^4 Y^2 \neq 0$ et $dX \wedge dP \neq 0$.

Si

$$|X^3 Y^3| = 2 \quad \text{et} \quad |X| = 1$$

alors

$$dP \wedge dX \wedge d(X^3 + Y^3) = 2Z dZ \wedge dX \wedge 3Y^2 dY$$

et on n'a pas $Y=0$ (sinon $|X^3 + Y^3| \neq 2$) ni $Z=0$ sinon $P(X, Y, Z) = X^3(X^3 + Y^3) \neq 0$. Si on n'a pas $|X|=1$, alors le bord est défini par $|X^3 + Y^3| = 2$ et

$$dP \wedge d(X^3 + Y^3) = 3X^2(X^3 + Y^3) dX \wedge 3Y^2 dY + 2Z dZ \wedge 3Y^2 dY + 2Z dZ \wedge 3X^2 dX;$$

si $X=0$ alors $Z=0$ et on est sur S^* , si $X \neq 0$ on a $|X^3 + Y^3| = 2$ et donc aussi $Y \neq 0$ (car $|X| < 1$) et $dP \wedge d(X^3 + Y^3) \neq 0$ grâce au premier terme.

Ceci achève la preuve de la non-nullité des termes en $|s|^{5/3} \text{Log}|s|$ et $|s|^{7/3} \text{Log}|s|$ dans le module des développements asymptotiques des intégrales $\int_{P=s} \varphi$ avec $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C}^2)$.

On en déduit les pôles désirés par transformation de Mellin.

BIBLIOGRAPHIE

- [B.0] D. BARLET, *Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration dans les fibres* (Invent. Math., vol. 68, 1982, p. 129-174).

- [B.1] D. BARLET, *Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques* (*Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, vol. 17, 1984, p. 293-315).
- [B.2] D. BARLET, *Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$* [*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 34, n° 4, 1984, p. 75-107].
- [B.3] D. BARLET, *Forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée* (*Invent. Math.*, vol. 81, 1985, p. 115-153).
- [B.4] D. BARLET, *Monodromie et pôles de $\int_x |f|^{2\lambda}$* (*Bull. Soc. Math.*, vol. 114, 1986, p. 247-269).
- [B.5] D. BARLET, *Filtration asymptotique et pôles de $\int_x |f|^{2\lambda}$* *Astérisque* n° 179-180 (1989) p. 13-37.
- [B.6] D. BARLET, *Le calcul de la forme hermitienne canonique pour $X^a + Y^b + Z^c = 0$* [*Séminaire Lelong-Dolbeault-Skoda*, 1983/1984 (*Lect. Notes*, n° 1198, Springer-Verlag, p. 35-46)].
- [B.7] D. BARLET, *La forme hermitienne canonique pour une singularité presque isolée* (en préparation).
- [B.J] J. E. BJORK, *Ring of Differential Operators*, North Holland, 1979.
- [B.M] D. BARLET et H. M. MAIRE, *Asymptotic Expansion of Complex Integrals via Mellin Transform*, *Funct. Analysis* t. 83 n° 2, (1989) p. 233-257.
- [D.1] P. DELIGNE, *Équations différentielles à points singuliers réguliers* (*Lect. Notes*, n° 163, Springer-Verlag).
- [D.2] P. DELIGNE, *SGA 7 II*, exposés XIII et XIV (*Lect. Notes*, n° 340, 1970, p. 82-164).
- [G] A. GROTHENDIECK, *On the De Rham chronology of algebraic varieties* (*Publ. Math. IHES*, 29 (1966) p. 96-103).
- [Go] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*, Hermann (1958).
- [K.1] M. KASHIWARA, *On Maximally Overdetermined Systems of Linear Differential Equations I* (*Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.*, vol. 10, n° 2, 1975, p. 563-579).
- [K.2] M. KASHIWARA, *b-Function and Holonomic Systems, Rationality of Roots of b-Functions* (*Invent. Math.*, vol. 38, 1976, p. 33-53).
- [K.3] M. KASHIWARA, *The Riemann-Hilbert Problem for Holonomic Systems* (*Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.*, vol. 20, 1984, p. 319-365).
- [M.1] B. MALGRANGE, *Intégrales asymptotiques et monodromie* (*Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, vol. 7, 1974, p. 405-430).
- [M.2] B. MALGRANGE, *Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence. Analyse et topologie sur les espaces singuliers* (*Astérisque*, n° 101-102, 1983, p. 230-242).
- [M] J. MILNOR, *Singular Points of Complex Hypersurfaces* (*Ann. of Math. Studies*, n° 61, Princeton, 1968).
- [S] Y. T. SIU, *Every Stein Subvariety Admits a Stein Neighbourhood* (*Inv. Math.*, vol. 38, 1976, p. 89-100).
- [S.T.] Y. T. SIU et G. TRAUTMANN, *Gap-Sheaves and Extension of Coherent Analytic Subsheaves* (*Lect. Notes*, n° 172, 1971, Springer-Verlag).
- [V] A. N. VARCHENKO, *On the Local Residue and Intersection Form on the Vanishing Cohomology* (*Math. U.S.S.R. Izvestiya*, vol. 26, n° 1, 1986, p. 31-52).

(Manuscrit reçu le 13 juin 1989,
version modifiée reçue le 2 juillet 1990,
acceptée le 13 septembre 1990).

Daniel BARLET,
Université de Nancy-I,
Département de Mathématiques,
B. P. n° 239,
54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France
et CNRS UA 750 (Analyse globale).