FRANÇOIS LOESER

Arrangements d'hyperplans et sommes de Gauss

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 24, nº 4 (1991), p. 379-400
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_4_379_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 24, 1991, p. 379 à 400.

ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS ET SOMMES DE GAUSS

PAR FRANÇOIS LOESER

Introduction

Soient p un nombre premier, $q=p^e$, $k=\mathbf{F}_q$ un corps fini. Soient ψ un caractère additif non trivial de k, χ_1, χ_2 des caractères multiplicatifs non triviaux, tels que $\chi_1 \chi_2$ soit non trivial. On a l'égalité classique entre sommes de Gauss et sommes de Jacobi

$$(*) \qquad \mathrm{J}(\chi_1, \chi_2) = -\frac{g(\chi_1, \psi)\, g(\chi_2, \psi)}{g(\chi_1 \chi_2, \psi)}$$

avec $\mathrm{J}(\chi_1, \chi_2) := \sum_{x \in k \setminus \{0, 1\}} \chi_1(x) \chi_2(1-x)$ et $g(\chi, \psi) := -\sum_{x \in k^*} \chi(x) \psi(x)$ pour χ un caractère multiplicatif.

Dans cet article nous généralisons la formule $(*)$ aux arrangements d'hyperplans dans l'espace affine. La somme de Jacobi $\mathrm{J}(\chi_1, \chi_2)$ possède une interprétation cohomologique comme trace du Frobenius sur la cohomologie à support propre d'un certain $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse de rang 1, $\mathscr{L}_{(\chi_1, \chi_2)}$, sur $k \setminus \{0, 1\}$. Comme $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{A}_k^1, \mathscr{L}_{(\chi_1, \chi_2)})$ est nul si $i \neq 1$, de rang 1 si $i=1$, cette trace est aussi un déterminant. En général si $\mathrm{A} = (l_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille d'applications affines non constantes $l_i \colon \mathbf{A}_k^n \to \mathbf{A}_k^1$, à chaque famille $(\chi_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de caractères multiplicatifs $\chi_i \colon k^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ est associé un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse de rang 1, $\mathscr{L}_{\underline{\chi}}$, sur $\mathbf{A}_k^n \setminus \bigcup_{i \in \mathrm{I}} l_i^{-1}(0)$. Le résultat principal de cet article est l'égalité (2.2.1) qui exprime le déterminant du Frobenius agissant sur la cohomologie à support propre de $\mathscr{L}_{\underline{\chi}}$ comme produit de valeurs des caractères χ_i et de sommes de Gauss. Ce résultat nous a été inspiré par un travail récent de Varchenko [V], qui généralise la relation classique entre fonction bêta et fonction gamma à des arrangements d'hyperplans réels ou complexes.

Le plan de l'article est le suivant. Après les préliminaires (§ 0-1) et l'énoncé du résultat principal (§ 2) nous rappelons des résultats sur la monodromie locale (§ 3). Au paragraphe 5 nous établissons le résultat important (5.5) sur le comportement du déterminant par torsion. Pour cela nous utilisons les transformations de Fourier locales de G. Laumon [L], dont les propriétés sont rappelées au paragraphe 4, et sa formule de localisation [L]. La section suivante (§ 6) est de nature combinatoire. On y montre par un argument de type « deletion-restriction » que l'égalité (2.2.1) est conséquence de la proposition (6.4), qui sera démontré au § 8, en utilisant (5.5) et l'étude géométrique d'une résolution associée à l'arrangement A effectuée au § 7. L'appendice rassemble des résultats sur les arrangements d'hyperplans définis sur $\mathbf{F}_q$ que nous n'avons pas trouvés dans la littérature.

Je tiens à remercier A. Varchenko qui m'a communiqué le texte (en russe) de [V] avant sa parution, J.-M. Kantor dont l'aide m'a permis de lire ce texte, et G. Laumon pour d'utiles conversations.

0. Notations et conventions

(0.1) On fixe un nombre premier p. Dans tout cet article k est un corps fini $k=\mathbf{F}_q$, avec q une puissance de p. On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Si $N \geqq 1$ on note $\mu_N(k)$ [resp. $\mu_N(\bar{k})$] le sous-groupe des racines n-ièmes de l'unité du groupe multiplicatif k^* (resp. $\bar{k}^*$).

On choisit un nombre premier l distinct de p et une clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}_l$ de $\mathbf{Q}_l$.

(0.2) On note $\mathbf{G}^n_{m,k}$ le tore $\operatorname{Spec} k[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$, $\mathbf{A}^n_k$ l'espace affine $\operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$ et $\mathbf{P}^n_k$ l'espace projectif de dimension n sur k muni de coordonnées homogènes $[x_0, \ldots, x_n]$. On a des inclusions naturelles $\gamma : \mathbf{G}^n_{m,k} \to \mathbf{A}^n_k$, $\alpha : \mathbf{A}^n_k \to \mathbf{P}^n_k$, $(x_1, \ldots, x_n) \to [x_1, \ldots, x_n, 1]$, et $\beta := \alpha \circ \gamma : \mathbf{G}^n_{m,k} \to \mathbf{P}^n_k$.

(0.3) Si V est un schéma sur $k' \subset \bar{k}$ on note $V_{\bar{k}}$ le schéma obtenu par extension des scalaires $V_{\bar{k}} := V \underset{\operatorname{Spec} k'}{\otimes} \operatorname{Spec} \bar{k}$. Si s est un point de V, on note $\bar{s}$ un point géométrique localisé en s et $V_{(s)}$ le hensélisé de V en s. Si V est un schéma défini sur $\bar{k}$ on note $\chi(V, \mathbf{Q}_l)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de V en cohomologie étale l-adique. On convient que $\chi(\varnothing, \mathbf{Q}_l)=0$.

(0.4) Si V est un espace vectoriel de dimension finie d on note $\Lambda^{\max} V := \Lambda^d V$, et $(\Lambda^{\max} V)^{-1}$ le dual de $\Lambda^{\max} V$. Si $K^\bullet$ est un complexe borné d'espaces vectoriels de dimension finie on note $\det K^\bullet = \underset{i \in \mathbf{Z}}{\otimes} (\Lambda^{\max} H^i K)^{(-1)^i}$. Si F est un endomorphisme de $K^\bullet$, F induit un endomorphisme de $\det K^\bullet$ qui est la multiplication par un scalaire que l'on note $\det(F, K^\bullet)$.

(0.5) On note Frob_q le Frobenius géométrique de k.

(0.6) Si $\psi : k \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ est un caractère additif non trivial, on note $\mathscr{L}_\psi$ le faisceau d'Artin-Schreier associé à ψ. C'est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}^1_k$. Si $\chi : k^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ est un caractère multiplicatif on note $\mathscr{L}_\chi$ le faisceau de Kummer associé à χ. C'est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbf{G}^1_{m,k}$. Si ψ (resp. χ) est un caractère additif non-trivial (resp. un caractère multiplicatif) on note $g(\chi, \psi)$ la somme de Gauss

$$g(\chi, \psi) : - \sum_{x \in k^*} \chi(x) \psi(x).$$

Avec nos conventions, la formule des traces de Grothendieck donne

$$g(\chi, \psi) = \operatorname{tr}(\operatorname{Frob}_q, H^1_c(\mathbf{G}^1_{m,\bar{k}}, \mathscr{L}_\chi \otimes \gamma^* \mathscr{L}_\psi)) = \det(\operatorname{Frob}_q, R\Gamma_c(\mathbf{G}^1_{m,\bar{k}}, \mathscr{L}_\chi \otimes \gamma^* \mathscr{L}_\psi))^{-1}.$$

Si $\pi : V \to \mathbf{A}_k^1$ est un morphisme on note $\mathscr{L}_\psi(\pi) := \pi^* \mathscr{L}_\psi$.

(0.7) On s'autorisera parfois à noter de la même façon un morphisme et sa restriction.

1. Arrangements d'hyperplans

(1.1) Soit $k = \mathbf{F}_q$ un corps fini. On note $\mathbf{A}_k^n$ l'espace affine de dimension n sur k. On note $\alpha : \mathbf{A}_k^n \to \mathbf{P}_k^n$ l'inclusion naturelle (0.2) dans l'espace projectif et H_∞ l'hyperplan projectif $\mathbf{P}_k^n \setminus \mathbf{A}_k^n$.

Un arrangement d'hyperplans affines (défini sur k) est une famille finie $\mathrm{A} = (l_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'applications (linéaires) affines définies sur k, $l_i : \mathbf{A}_k^n \to \mathbf{A}_k^1$, non constantes. On note A_i l'hyperplan affine d'équation $l_i = 0$.

Un arrangement d'hyperplans projectifs (défini sur k) est une famille finie d'hyperplans projectifs de $\mathbf{P}_k^n$.

A un arrangement affine $\mathrm{A} = (l_i)_{i \in \mathrm{I}}$ on associe l'arrangement projectif $\bar{\mathrm{A}} := (\mathrm{H}_i)_{i \in \bar{\mathrm{I}}}$, en notant H_i l'adhérence de A_i dans $\mathbf{P}_k^n$ pour $i \in \mathrm{I}$ et $\bar{\mathrm{I}} := \mathrm{I} \amalg \{\infty\}$.

(1.2) Soit $\tilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{H}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un arrangement projectif. On appelle strate de l'arrangement $\tilde{\mathrm{A}}$ toute partie non vide de la forme $\mathrm{S}_\mathrm{J} = \bigcap_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{H}_i \setminus (\bigcup_{j \notin \mathrm{J}} \mathrm{H}_j)$ avec $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ non vide. Si S est une strate de $\tilde{\mathrm{A}}$ on note $\mathrm{I}(\mathrm{S}) := \{ i \in \mathrm{I} ; \mathrm{S} \subset \mathrm{H}_i \}$. On note $\mathscr{S}(\tilde{\mathrm{A}})$ l'ensemble des strates de $\tilde{\mathrm{A}}$. Si $\tilde{\mathrm{A}} = \bar{\mathrm{A}}$, avec A un arrangement affine, on a une partition $\mathscr{S}(\bar{\mathrm{A}}) = \mathscr{S}_f(\mathrm{A}) \cup \mathscr{S}_\infty(\mathrm{A})$, avec $\mathscr{S}_f(\mathrm{A})$ [resp. $\mathscr{S}_\infty(\mathrm{A})$] l'ensemble des strates de $\bar{\mathrm{A}}$ non contenues (resp. contenues) dans H_∞.

(1.3) Soient $\tilde{\mathrm{A}}$ un arrangement projectif, S une strate de $\tilde{\mathrm{A}}$, et $\mathbf{P}^\mathrm{S} := \bigcap_{i \in \mathrm{I}(\mathrm{S})} \mathrm{H}_i$. Les hyperplans $\mathrm{H}_i \cap \mathbf{P}^\mathrm{S}$, $i \notin \mathrm{I}(\mathrm{S})$, définissent un arrangement d'hyperplans projectifs dans $\mathbf{P}^\mathrm{S}$ que l'on note $\tilde{\mathrm{A}}^\mathrm{S}$.

Rappelons que si F_k est un sous-espace projectif de dimension m dans $\mathbf{P}_k^n$ on a une projection $\pi_{\mathrm{F}_k} : \mathbf{P}_k^n \setminus \mathrm{F}_k \to \mathrm{G}_k$ avec G_k un espace projectif sur k de dimension $n - m - 1$ (G_k est l'espace projectif des $m+1$-plans de $\mathbf{P}_k^n$ qui contiennent F_k) : si F_k est défini dans des coordonnées homogènes $[x_0, \ldots, x_n]$ par $x_0 = \ldots = x_{n-m-1} = 0$, on a $\pi_{\mathrm{F}_k}([x_0, \ldots, x_n]) = [x_0, \ldots, x_{n-m-1}]$. On a donc une projection $\pi(\mathrm{S}) : \mathbf{P}_k^n \setminus \mathbf{P}^\mathrm{S} \to \mathbf{P}_\mathrm{S}$, avec $\mathbf{P}_\mathrm{S}$ un espace projectif de dimension $n - \dim \mathbf{P}^\mathrm{S} - 1$. Les hyperplans $\pi(\mathrm{S})(\mathrm{H}_i \setminus \mathbf{P}^\mathrm{S})$, $i \in \mathrm{I}(\mathrm{S})$, définissent un arrangement projectif d'hyperplans $\tilde{\mathrm{A}}_\mathrm{S}$ dans $\mathbf{P}_\mathrm{S}$.

(1.4) Si $\tilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{H}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est un arrangement projectif défini sur k, on pose $\mathrm{Y} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{H}_i$, $\mathrm{V} = \mathbf{P}_k^n \setminus \mathrm{Y}$ et $j : \mathrm{V} \to \mathbf{P}_k^n$ l'inclusion naturelle. On note $\lambda(\tilde{\mathrm{A}})$ la caractéristique d'Euler-Poincaré l-adique de $\mathrm{V}_{\bar{k}}$: $\lambda(\tilde{\mathrm{A}}) = \chi(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$; l'entier $\lambda(\tilde{\mathrm{A}})$ ne dépend que de la combinatoire de l'arrangement $\tilde{\mathrm{A}}$ (*cf.* Appendice).

Si S est une strate de $\tilde{\mathrm{A}}$ on pose $\mu(\mathrm{S}, \tilde{\mathrm{A}}) = \lambda(\tilde{\mathrm{A}}^\mathrm{S}) \lambda(\tilde{\mathrm{A}}_\mathrm{S})$.

(1.5) Soit $\mathrm{A} = (l_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un arrangement affine. On supposera désormais que A vérifie la condition

$$(1.5.1) \qquad \bigcap_{i \in \bar{\mathrm{I}}} \mathrm{H}_i = \varnothing.$$

Remarquons que cette condition impose que $|\mathrm{I}| \geqq n$.

Soit $\chi = (\chi_i)_{i \in \bar{\mathrm{I}}}$ une famille de caractères multiplicatifs $\chi_i : k^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ vérifiant $\prod_{i \in \bar{\mathrm{I}}} \chi_i = 1$. On supposera désormais que χ vérifie la condition

(1.5.2) pour toute partie J de $\bar{\mathrm{I}}$ non vide et distincte de $\bar{\mathrm{I}}$ on a $\prod_{i \in \mathrm{J}} \chi_i \neq 1$.

Si $\mathrm{S} \in \mathscr{S}(\bar{\mathrm{A}})$ on pose $\chi_{\mathrm{S}} := \prod_{i \in \mathrm{I}(\mathrm{S})} \chi_i$. Les conditions (1.5.1) et (1.5.2) assurent que $\chi_{\mathrm{S}} \neq 1$.

(1.5.3) Soient $\mathrm{A} = (l_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un arrangement d'hyperplans affines et $\chi = (\chi_i)_{i \in \bar{\mathrm{I}}}$ une famille de caractères multiplicatifs vérifiant $\prod_{i \in \bar{\mathrm{I}}} \chi_i = 1$. On associe à A et à χ le produit de sommes de Gauss

$$g(\mathrm{A}, \chi, \psi) := \prod_{\mathrm{S} \in \mathscr{S}_f(\mathrm{A})} g(\chi_{\mathrm{S}}, \psi)^{\mu(\mathrm{S}, \bar{\mathrm{A}})} \prod_{\mathrm{S} \in \mathscr{S}_\infty(\mathrm{A})} g(\chi_{\mathrm{S}}^{-1}, \psi)^{-\mu(\mathrm{S}, \bar{\mathrm{A}})}.$$

(1.5.4) Si t est un point fermé de $\mathbf{A}_k^1$ on note $\lambda_i(t) := \chi(\mathrm{V}_{\bar{k}} \cap l_i^{-1}(t)_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$. Soit $\mathrm{S}_i = \{ t \in k (= \mathbf{A}_k^1(k)) ; \exists \mathrm{S} \subset \mathscr{S}_f(\mathrm{A}), \mathrm{S} \subset l_i^{-1}(t) \}$. On voit facilement (*cf.* Appendice) que sur l'ouvert $\mathrm{U}_i := \mathbf{A}_k^1 \setminus \mathrm{S}_i$ la fonction $\lambda_i(t)$ est constante; on note $\lambda_{i,g}$ sa valeur. On pose $\delta_i(t) := \lambda_{i,g} - \lambda_i(t)$, et on note $\mathrm{S}_i^* := \mathrm{S}_i \setminus \{0\}$.

(1.5.5) En conservant les notations précédentes, on pose

$$\mathrm{C}_i(\mathrm{A}, \chi_i) := \prod_{t \in \mathrm{S}_i^*} (\chi_i(t))^{\delta_i(t)}$$

et

$$\mathrm{C}(\mathrm{A}, \chi) := \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{C}_i(\mathrm{A}, \chi_i).$$

2. Énoncé du résultat. Exemples

(2.1) Soient $\mathrm{A} = (l_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un arrangement d'hyperplans affines défini sur k et $\chi = (\chi_i)_{i \in \bar{\mathrm{I}}}$ une famille de caractère multiplicatifs $\chi_i : k^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ vérifiant $\prod_{i \in \bar{\mathrm{I}}} \chi_i = 1$. Sur $\mathrm{V} = \mathbf{A}_k^n \setminus \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ on a un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse de rang 1 associé à χ, $\mathscr{L}_\chi := \bigotimes_{i \in \mathrm{I}} l_{i \mid \mathrm{V}}^*(\mathscr{L}_{\chi_i})$.

(2.2) Théorème. — *Soient* $\mathrm{A} = (l_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *un arrangement d'hyperplans affines défini sur* k *vérifiant* (1.5.1) *et* $\chi = (\chi_i)_{i \in \bar{\mathrm{I}}}$ *une famille de caractères multiplicatifs* $\chi_i : k^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ *vérifiant* $\prod_{i \in \bar{\mathrm{I}}} \chi_i = 1$ *et* (1.5.2). *On a l'égalité*

(2.2.1) $$\det(\mathrm{Frob}_q, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathscr{L}_\chi))^{-1} = \mathrm{C}(\mathrm{A}, \chi)\, g(\mathrm{A}, \chi, \psi).$$

Le théorème sera démontré en (6.5).

(2.3) *Exemples.*

(2.3.1) Dans $\mathbf{A}_k^n$, $\mathrm{A} = (l_1, \ldots, l_{n+1})$ avec $l_i = x_i$, $1 \leqq i \leqq n$, $l_{n+1} = 1 - x_1 - \ldots - x_n$.

Dans ce cas la cohomologie de $\mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}})$ est concentrée en degré n et de rang 1. Le déterminant est donc une trace et on retrouve la formule classique

$$\mathrm{J}(\chi_1, \ldots, \chi_{n+1}) = (-1)^n \frac{\prod_{1 \leqq i \leqq n+1} g(\chi_i, \psi)}{g(\prod_{1 \leqq i \leqq n+1} \chi_i, \psi)}$$

avec

$$\mathrm{J}(\chi_1, \ldots, \chi_{n+1}) := \sum_{x \in \mathrm{V}(k)} \prod_{1 \leqq i \leqq n+1} \chi_i(l_i(x)).$$

(2.3.2) Dans $\mathbf{A}_k^2$, $\mathrm{A} = (l_1, \ldots, l_5)$ avec

$$l_1 = x_1, \qquad l_2 = x_2, \qquad l_3 = 1 - x_1, \qquad l_4 = 1 - x_2, \qquad l_5 = x_1 - x_2.$$

On a

$$g(\mathrm{A}, \underline{\chi}, \psi) = \left(\frac{(\prod_{1 \leqq i \leqq 5} g(\chi_i, \psi)) g(\chi_1 \chi_2 \chi_5, \psi) g(\chi_3 \chi_4 \chi_5, \psi)}{g(\prod_{1 \leqq i \leqq 5} \chi_i, \psi) g(\chi_1 \chi_3 \chi_5, \psi) g(\chi_2 \chi_4 \chi_5, \psi)} \right)^{-1}$$

$$\mathrm{C}(\mathrm{A}, \underline{\chi}) = \chi_5(-1).$$

(2.3.3) Dans $\mathbf{A}_k^2$, $\mathrm{A} = (l_1, \ldots, l_6)$ avec

$$l_1 = x_1, \qquad l_2 = x_2, \qquad l_3 = 1 - x_1, \qquad l_4 = 1 - x_2, \qquad l_5 = x_1 - x_2, \qquad l_6 = x_1 + x_2 - 1.$$

Si $p \neq 2$, on a

$$g(\mathrm{A}, \underline{\chi}, \psi) = \left(\frac{(\prod_{1 \leqq i \leqq 4} g(\chi_i, \psi)) g(\chi_5, \psi)^2 g(\chi_6, \psi)^2}{g(\prod_{1 \leqq i \leqq 6} \chi_i, \psi)^2 g(\chi_2 \chi_4 \chi_5 \chi_6, \psi)} \cdot \frac{g(\chi_1 \chi_2 \chi_5, \psi) g(\chi_3 \chi_4 \chi_5, \psi) g(\chi_2 \chi_3 \chi_6, \psi) g(\chi_1 \chi_4 \chi_6, \psi)}{g(\chi_1 \chi_3 \chi_5 \chi_6, \psi)} \right)^{-1}$$

et $\mathrm{C}(\mathrm{A}, \underline{\chi}) = \prod_{1 \leqq i \leqq 4} \chi_i(2)$.

Si $p = 2$, on a

$$g(\mathrm{A}, \underline{\chi}, \psi) = \left(\frac{(\prod_{1 \leqq i \leqq 6} g(\chi_i, \psi)) g(\chi_1 \chi_2 \chi_5, \psi) g(\chi_3 \chi_4 \chi_5, \psi) g(\chi_2 \chi_3 \chi_6, \psi) g(\chi_1 \chi_4 \chi_6, \psi)}{g(\prod_{1 \leqq i \leqq 6} \chi_i, \psi) g(\chi_2 \chi_4 \chi_5 \chi_6, \psi) g(\chi_1 \chi_3 \chi_5 \chi_6, \psi) g(\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4, \psi)} \right)^{-1}$$

et $\mathrm{C}(\mathrm{A}, \underline{\chi}) = 1$.

3. Monodromie locale

(3.1) Soit $T=\operatorname{Spec} R$ un trait hensélien d'égale caractéristique p, de corps résiduel k. On note t, η, $\bar{t}$, $\bar{\eta}$ les points ordinaires et les points géométriques de T : $\bar{t}$ est le composé de $\operatorname{Spec}\bar{k} \to \operatorname{Spec} k$ et de t et $\bar{\eta}$ se factorise par le point générique $\eta_{\bar{t}}$ du trait strictement hensélien $T_{\bar{t}}=\operatorname{Spec}\bar{k} \underset{k}{\otimes} R$. On pose $G=\pi_1(\eta, \bar{\eta})$, $I=\pi_1(\eta_{\bar{t}}, \bar{\eta})$. On a une suite exacte canonique

$$1 \to I \to G \to \operatorname{Gal}(\bar{k}/k) \to 1.$$

L'action de I sur les racines d'ordre premier à p d'une uniformisante π dans $k(\bar{\eta})$ se factorise par un quotient canonique

$$I \xrightarrow{t} \hat{\mathbf{Z}}(1)(\bar{k}),$$

où

$$\hat{\mathbf{Z}}(1)(\bar{k}) := \varprojlim_{\substack{N \geqq 1 \\ (N, p)=1}} \mu_N(\bar{k})$$

et où $\mu_N(\bar{k})$ agit de la manière usuelle sur les $\pi^{1/N}$. On note P le noyau de t; c'est la partie sauvage de I.

(3.2) Un G-module (resp. I-module) est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie V, muni d'une action de G (resp. I) qui est définie sur une extension finie de $\mathbf{Q}_l$ contenue dans $\bar{\mathbf{Q}}_l$ et qui est continue pour la topologie l-adique. Le rang d'un G-module (ou I-module) V est sa dimension comme $\bar{\mathbf{Q}}_l$-espace vectoriel que l'on note $r(V)$. Si V est un G-module, on note $V^{\vee}=\operatorname{Hom}(V, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ le G-module dual. On note $\mathscr{G}'$ la catégorie des G-modules.

Un G-module (ou I-module) V est dit modéré si P agit trivialement sur V. Un G-module V est dit non ramifié si I agit trivialement sur V.

Soit $\pi: \eta \to \mathbf{G}_{m, k}=\operatorname{Spec} k[u, u^{-1}]$ le morphisme qui envoie u sur π. On note V_χ le G-module $\pi^*(\mathscr{L}_\chi)$, pour un caractère $\chi: k^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$.

Comme $\hat{\mathbf{Z}}(1)(\bar{k})$ est un groupe profini abélien, tout I-module modéré simple est de rang 1 et sa classe d'isomorphie est donnée par un caractère $\chi: \hat{\mathbf{Z}}(1)(\bar{k}) \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$. Soit V un G-module modéré semi-simple. On dit que V est à monodromie géométrique définie sur k s'il admet une décomposition

$$V = \oplus (V_\chi \underset{\bar{\mathbf{Q}}_l}{\otimes} E(V)_\chi)$$

χ décrivant l'ensemble des caractères de k^* à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$, et $E(V)_\chi$ étant le G-module non ramifié $E(V)_\chi=\operatorname{Hom}_I(V_\chi, V)$. En général si V est un G-module modéré, on note V_{ss} son semi-simplifié, on dit que V est à monodromie géométrique définie sur k si V_{ss} l'est, et on note $E(V)_\chi := E(V_{ss})_\chi$.

(3.3) Soient X un schéma lisse et irréductible défini sur k, et $D \subset X$ un diviseur (globalement) à croisements normaux. On note D_i, $i \in K$, les composantes irréductibles de D, x_i le point générique de D_i, $X_{(x_i)}$ le hensélisé de X au point x_i. On note G_i le groupe de Galois de $X_{(x_i)}$, I_i le groupe de décomposition et $h_i : X_{(x_i)} \to X$ l'inclusion canonique.

Soit $\mathscr{L}$ un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau sur X (ou sur $X \setminus D$). On dit que $\mathscr{L}$ est modérément ramifié le long de D si pour tout $i \in K$, $h_i^*(\mathscr{L})$ est un I_i-module modéré. Si $\mathscr{L}$ est modérément ramifié le long de D et de rang 1 au point générique de X, on dit que $\mathscr{L}$ est de monodromie géométrique χ_i le long de D_i, si le I_i-module $h_i^*(\mathscr{L})$ est donné par le caractère $\chi_i : k^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$.

(3.4) Nous aurons besoin du lemme suivant pour calculer des cycles évanescents.

LEMME. — *Soit* $\mathbf{A}^n_{k\,(0)}$ *le hensélisé à l'origine de l'espace affine* $\mathbf{A}^n_k = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$. *Fixons des entiers* $1 \leqq k \leqq m \leqq n$. *Soient* $D \subset \mathbf{A}^n_{k\,(0)}$ *le diviseur d'équation* $\prod_{1 \leqq i \leqq m} x_i = 0$, D_i *le diviseur d'équation* $x_i = 0$, $1 \leqq i \leqq m$, $D_i^0 := D_i \setminus \bigcup_{j \neq i} D_j$. *Soit* $f : \mathbf{A}^n_{k\,(0)} \to \mathbf{A}^1_k$ *un morphisme* $f : (x_i)_{1 \leqq i \leqq n} \to u \prod_{1 \leqq i \leqq k} x_i$, *avec u inversible sur* $\mathbf{A}^n_{k\,(0)}$. *Soit* $\mathscr{L}$ *un* $\bar{\mathbf{Q}}_l$*-faisceau lisse de rang* 1 *sur* $\mathbf{A}^n_{k\,(0)} \setminus D$, *modérément ramifié le long de* D *et de monodromie géométrique* χ_i *le long de* D_i. *On note* $R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L})$ *les faisceaux de cycles proches de* $\mathscr{L}$ *relativement à f. On a*

(i) *Les faisceaux* $R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L})$ *sont des faisceaux de* G*-modules modérés.*

(ii) *Si pour tous les* (i, j) *avec* $1 \leqq i \leqq k$, $1 \leqq j \leqq k$ *et* $i \neq j$ *on a* $\chi_i \neq \chi_j$ *et si quand* $k < i \leqq m$ *on a* $\chi_i \neq 1$, *alors* $R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L})_{(\bar{x})} = 0$ *pour tout* $p \geqq 0$ *et pour tout point x de* $\bigcup_{1 \leqq i \leqq k} D_i \setminus \bigcup_{1 \leqq i \leqq k} D_i^0$.

(iii) *Si x est un point de* D_i^0, *avec* $1 \leqq i \leqq k$, $R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L})_{(\bar{x})} = 0$ *pour* $p > 0$, *et le* G*-module* $R^0 \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L})_{(\bar{x})}$ *est de rang* 1, *l'action de* I *étant donnée par* χ_i.

(iv) *La restriction de* $R^0 \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L})$ *à* D_i^0, *pour* $1 \leqq i \leqq k$, *est un* $\bar{\mathbf{Q}}_l$*-faisceau lisse de rang* 1 *modérément ramifié le long de* $D_i \setminus D_i^0$, *de monodromie géométrique* $\chi_i^{-1} \chi_j$ *(resp.* χ_j*) le long de* $D_i \cap D_j$ *si* $i \neq j$ *et si* $j \leqq k$ *(resp.* $k < j$*).*

Démonstration. — Soit N un multiple commun non nul de l'ordre des caractères χ_i. Soit $\lambda : \mathbf{A}^n_{k\,(0)} \to \mathbf{A}^n_{k\,(0)}$, $(x_i)_{1 \leqq i \leqq n} \to (x_i^N)_{1 \leqq i \leqq n}$. L'image inverse de $\mathscr{L}$ par λ se prolonge en un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse de rang 1, $\tilde{\mathscr{L}}$, sur $\mathbf{A}^n_{k\,(0)}$. Soit $g := f \circ \lambda : \mathbf{A}^n_{k\,(0)} \to \mathbf{A}^1_k$. On note $R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathscr{L}})$ les faisceaux de cycles proches de $\tilde{\mathscr{L}}$ relativement à g. L'entier N étant premier à p, les $R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathscr{L}})$ sont modérés d'après [R-Z], Satz 2.23, et sont calculés dans (SGA 7 I 3.3). Comme $R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L})$ est un facteur direct de $\lambda_* R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathscr{L}})$ on obtient (i). Le groupe du revêtement λ agit sur $\lambda_* R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathscr{L}})$. En décomposant $\lambda_* R^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathscr{L}})$ en composants isotypiques et en utilisant l'énoncé et la preuve de (SGA 7 I 3.3) on obtient (ii), (iii) et (iv).

4. Transformation de Fourier locale

(4.1) Soient T et T' deux traits henséliens d'égale caractéristique p, de corps résiduel k, munis d'uniformisantes π et π' respectivement. On note pr et pr' les projections canoniques de $T \times_k T'$ sur T et T' respectivement. On a les $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceaux $\mathscr{L}_\psi(\pi/\pi')$ et $\mathscr{L}_\psi(\pi'/\pi)$ sur $T \times_k \eta'$ et $\eta \times_k T'$ respectivement, où η et η' sont les points génériques de T et T' respectivement; on note $\bar{\mathscr{L}}_\psi(\pi/\pi')$ et $\bar{\mathscr{L}}_\psi(\pi'/\pi)$ les prolongements par zéro de ces faisceaux à $T \times_k T'$. On reprend les notations de la section précédente, en les affectant d'un exposant ' quand elles sont relatives à T'. Enfin si V est un G-module, on l'identifie à un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau sur η, et on note $V_!$ son prolongement par zéro à T.

(4.2) DÉFINITION (LAUMON). — *On appelle transformation de Fourier locale chacun des foncteurs* $\mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}$ *et* $\mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}: \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ *définis par*

$$\mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}(V) = R^1 \Phi_{\bar{\eta}'}(\mathrm{pr}^*(V_!) \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(\pi/\pi'))_{(\bar{t}, \bar{t}')}$$

$$\mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}(V) = R^1 \Phi_{\bar{\eta}'}(\mathrm{pr}^*(V_!) \otimes \bar{\mathscr{L}}_\psi(\pi'/\pi))_{(\bar{t}, \bar{t}')}$$

les cycles évanescents étant relatifs à la projection $\mathrm{pr}' : T \times_k T' \to T'$.

D'après [L], (2.4.3), $\mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}$ et $\mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}$ sont des foncteurs exacts. De plus si V est modéré $\mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}(V)$ et $\mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}(V)$ sont modérés.

On a le formulaire suivant.

(4.3) PROPOSITION :

(i)
$$\begin{cases} \mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}(\bar{\mathbf{Q}}_l) = \bar{\mathbf{Q}}_l \\ \mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}(\bar{\mathbf{Q}}_l) = \bar{\mathbf{Q}}_l(-1). \end{cases}$$

(ii) *Pour tout caractère non trivial* $\chi : k^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ *on a*

$$\mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}(V_\chi) = V'_\chi \otimes G(\chi, \psi)$$

$$\mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}(V_\chi) = V'_\chi \otimes G(\chi^{-1}, \psi)$$

où $G(\chi, \psi) = H_c^1(\mathbf{G}_{m, \bar{k}}, \mathscr{L}_\chi \otimes \gamma^* \mathscr{L}_\psi)$ *est vu comme un* G'*-module non ramifié.*

(iii) *Si* E *est un* G*-module non ramifié*

$$\mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}(V \otimes E) = \mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}(V) \otimes E'$$

$$\mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}(V \otimes E) = \mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}(V) \otimes E'$$

où E' *est égal à* E *vu comme* G'*-module non ramifié.*

Démonstration. — (i) et (ii) sont dus à Laumon ([L] (2.5.3.1)), et (iii) est évident.

(4.4) DÉFINITION. — *Si* χ_1 *et* χ_2 *sont deux caractères de* k^* *à valeurs dans* $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$ *on pose*

$$\Phi_0(\chi_1, \chi_2) = \mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}(V_{\chi_1 \chi_2^{-1}})^\vee \otimes \mathscr{F}_\psi^{(0, \infty')}(V_{\chi_1})$$

$$\Phi_\infty(\chi_1, \chi_2) = \mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}(V_{\chi_1 \chi_2^{-1}})^\vee \otimes \mathscr{F}_\psi^{(\infty, 0')}(V_{\chi_1}).$$

(4.5) PROPOSITION. — *Pour tout G-module* V, *modéré et à monodromie définie sur* k, *pour tout caractère non trivial* $\chi_0 : k^* \to \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ *on a*

$$\det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\mathrm{V})) = \det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\mathrm{V}\otimes\mathrm{V}_{\chi_0^{-1}}))\otimes\bigotimes_\chi(\Phi_0(\chi,\chi_0))^{\otimes r(\mathrm{E}(\mathrm{V})_\chi)}$$

$$\det(\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(\mathrm{V})) = \det(\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(\mathrm{V}\otimes\mathrm{V}_{\chi_0^{-1}}))\otimes\bigotimes_\chi(\Phi_\infty(\chi,\chi_0))^{\otimes r(\mathrm{E}(\mathrm{V})_\chi)}.$$

Démonstration. — Comme $\det(\mathscr{F}_\psi^{(.,.)}(\mathrm{V})) = \det(\mathscr{F}_\psi^{(.,.)}(\mathrm{V}_{ss}))$ on peut supposer que $\mathrm{V}=\mathrm{V}_\chi\otimes\mathrm{E}_\chi$ avec E_χ non ramifié. L'énoncé est alors une conséquence de (4.3) (iii) et de ce que $\mathrm{V}_{\chi_1\chi_2}\cong\mathrm{V}_{\chi_1}\otimes\mathrm{V}_{\chi_2}$.

5. Déterminant et torsion

(5.1) LOCALISATION DU DÉTERMINANT.

(5.1.1) Soient $\alpha : \mathbf{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[x] \to \mathbf{P}_k^1$ l'inclusion naturelle (0.2), ∞ le point à l'infini. On note $\mathbf{A}_k^{1\prime}$, $\mathbf{P}_k^{1\prime}$ les droites duales.

Si V est un G-module, $\det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\mathrm{V}))$ est un G'-module modéré qui admet un unique prolongement en un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}_k^{1\prime}\setminus\{0'\}$ modérément ramifié en 0′ et ∞' ([L], (2.2.2.1) (3.4.1.2)). On note $\det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\mathrm{V}))_{\pi'}$ le $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ module de rang 1 fibre de ce prolongement au point géométrique $\bar{1}'$ de $\mathbf{A}_k^{1\prime}$. Si V est modéré, $\det(\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(\mathrm{V}))$ est un G'-module modéré et on peut définir de même $\det(\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(\mathrm{V}))_{\pi'}$.

(5.1.2) Soient $\mathrm{S}\subset\mathbf{A}_k^1$ un ensemble fini de points fermés rationnels sur k et $j : \mathrm{U}\to\mathbf{A}_k^1$ l'ouvert complémentaire. Soient $k\{\pi\}$ le hensélisé en (π) de l'anneau $k[\pi]$ et $\mathrm{T}=\operatorname{Spec} k\{\pi\}$ le trait hensélien correspondant. Notons $\pi_s = x-s$ l'isomorphisme $\pi_s : \mathbf{A}_{k\,(s)}^1 \to \mathrm{T}$, pour $s\in\mathrm{S}$, et

$$\pi_\infty : \begin{cases} \mathbf{P}_{k\,(\infty)}^1 \to \mathrm{T} \\ 1/x \to x. \end{cases}$$

(5.1.3) Soit $\mathscr{H}$ un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau sur $\mathbf{A}_k^1$. On suppose que $\mathscr{H}$ est lisse sur U et modérément ramifié en tout point de S et au point à l'infini. Pour $s\in\mathrm{S}\cup\{\infty\}$ on note $\Phi_s\mathscr{H}$ le G-module des cycles évanescents de $\alpha_!(\mathscr{H})$ (pour π_s) et $a_s(\mathscr{H})$ la chute du rang de $\alpha_!(\mathscr{H})$ (la différence entre le rang générique et le rang en s). Si la fibre en s de $\mathscr{H}$ est égale à zéro on a $\Phi_s\mathscr{H} = \pi_{s*}(\mathscr{H}_{\mid\eta_s})$.

(5.1.4) THÉORÈME. — *Si* $\mathscr{H}$ *est lisse sur* U *et modérément ramifié en tout point de* S *et au point à l'infini, on a un isomorphisme de* $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$*-modules de rang* 1

(5.1.4.1)

$$\det(\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{A}_{\bar{k}}^1,\mathscr{H})[1]) \cong (\bigotimes_{s\in\mathrm{S}}\det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\Phi_s\mathscr{H}))_{\pi'})\otimes(\det(\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(\pi_{\infty*}(\mathscr{H}_{\mid\eta_\infty})))_{\pi'})^\vee.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de [L], (3.2.1.1) et (3.5.1.1). Voici une démonstration directe tout à fait similaire à celle de [L], (3.4.2).

Supposons tout d'abord que $\mathscr{H}$ est de la forme $\mathscr{H}=j_!(\mathrm{F})$, avec F un faisceau lisse de rang r sur U modérément ramifié en les points de $\mathrm{S}\cup\{\infty\}$. Soit $\delta=\sum_{s\in \mathrm{S}} rs\in k$. On a des isomorphismes de G'-modules

$$\det(\mathrm{F}')_{\bar\eta_{0'}}\cong\det(\mathrm{R}\,\Gamma_c(\mathbf{A}^1_{\bar k},\mathscr{H})[1])\otimes\det(\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(\pi_{\infty *}(\mathrm{F}_{\mid\eta_\infty}))) \tag{5.1.4.2}$$

$$\det(\mathrm{F}')_{\bar\eta_{\infty'}}\cong\mathscr{L}_\psi(\delta x')_{\bar\eta_{\infty'}}\otimes\bigotimes_{s\in \mathrm{S}}\det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\Phi_s\mathscr{H})) \tag{5.1.4.3}$$

pour F' le $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse sur $\mathbf{A}^{1'}_k\setminus\{0'\}$ vérifiant $\mathrm{K}'_{\mid\mathbf{A}^{1'}_k\setminus\{0'\}}=\mathrm{F}'[1]$ avec K' le transformé de Fourier global de $\mathscr{H}$ [1] (*cf.* [L], (1.3.2.3) et (2.3.1.3) (i)).

Compte tenu de l'hypothèse faite sur $\mathscr{H}$, le faisceau $\mathscr{K}:=\mathscr{L}_\psi(-\delta x')\otimes\det\mathrm{F}'$ est lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}^{1'}_k\setminus\{0\}$, et est modérément ramifié en zéro et à l'infini. Comme

$$\mathscr{K}_{\bar\eta_{0'}}\cong\det(\mathrm{R}\,\Gamma_c(\mathbf{A}^1_{\bar k},\mathscr{H})[1])\otimes\det(\mathscr{F}_\psi^{(\infty,0')}(\pi_{\infty *}(\mathrm{F}_{\mid\eta_\infty}))) \tag{5.1.4.4}$$

$$\mathscr{K}_{\bar\eta_{\infty'}}\cong\bigotimes_{s\in \mathrm{S}}\det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\Phi_s\mathscr{H})) \tag{5.1.4.5}$$

on obtient l'énoncé dans ce cas, car les deux termes de l'égalité recherchée sont isomorphes au $\mathrm{Gal}(\bar k/k)$-modules $\mathscr{K}_{\bar 1'}$ [on utilise ici que si $\mathscr{L}$ est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse sur $\mathbf{G}^1_{m,k}$, modérément ramifié en 0 et à l'infini, les fibres en $\bar 1$ du prolongement canonique ([L], (2.2.2.1)) de $\mathscr{L}_{\mid\eta_0}$ et de celui de $\pi_{\infty *}(\mathscr{L}_{\mid\eta_\infty})$ sont égales à la fibre de $\mathscr{L}$ en $\bar 1$, car la fonction $1/x$ évaluée en $x=1$ vaut 1 !].

Le cas général s'en déduit car on a des isomorphismes de $\mathrm{Gal}(\bar k/k)$-modules

$$\det(\mathrm{R}\,\Gamma_c(\mathbf{A}^1_{\bar k},\mathscr{H}))\cong\det(\mathrm{R}\,\Gamma_c(\mathbf{A}^1_{\bar k},j_!j^*\mathscr{H})\otimes\bigotimes_{s\in \mathrm{S}}\det(\mathscr{H}_{\bar s}) \tag{5.1.4.6}$$

$$\det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\pi_{s*}(\mathscr{H}_{\mid\eta_s})))_{\pi'}\simeq\det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(\Phi_s\mathscr{H}))_{\pi'}\otimes\det(\mathscr{H}_{\bar s}). \tag{5.1.4.7}$$

L'isomorphisme (5.1.4.6) provient de la suite exacte de faisceaux

$$0\to j_!j^*\mathscr{H}\to\mathscr{H}\to i_*i^*\mathscr{H}\to 0$$

($i:s\to\mathbf{A}^1_k$ étant l'inclusion naturelle) et de ce que le foncteur $\det(\mathrm{R}\,\Gamma_c(\mathbf{A}^1_{\bar k},.))$ est multiplicatif sur les suites exactes.

L'isomorphisme (5.1.4.7) provient de la suite exacte de G-modules

$$0\to\mathscr{H}_{\bar s}\to\pi_{s*}(\mathscr{H}_{\mid\eta_s})\to\Phi_s\mathscr{H}\to 0$$

et de ce que le foncteur $\det(\mathscr{F}_\psi^{(0,\infty')}(.))$ est multiplicatif sur les suites exactes.

(5.2) On suppose désormais que U est contenu dans $\mathbf{G}^1_{m,k}=\mathbf{A}^1_k\setminus\{0\}$. On déduit de (4.5) et de (5.1.4) le résultat suivant.

THÉORÈME. — *Soit* $\mathscr{H}$ *un* $\bar{\mathbf{Q}}_l$-*faisceau sur* $\mathbf{G}^1_{m,k}$, *lisse sur* U *et modérément ramifié en tout point de* $\mathbf{P}^1_k\setminus\mathrm{U}$. *On suppose que les* G-*modules* $\mathscr{H}_{\mid\eta_0}$ *et* $\pi_{\infty *}(\mathscr{H}_{\mid\eta_\infty})$ *sont à monodromie géométrique définie sur* k. *Soit* $\chi_0:k^*\to\bar{\mathbf{Q}}_l^*$ *un caractère non trivial. On a un* *isomorphisme de* Gal$(\bar{k}/k)$*-modules*

$$(5.2.1)\quad \det(\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{G}^1_{m,\bar{k}}, \mathscr{H}[1])) \cong \det(\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{G}^1_{m,\bar{k}}, (\mathscr{H}\otimes\mathscr{L}_{\chi_0^{-1}})[1]) \otimes \bigotimes_{s\in S\setminus\{0\}} (\mathrm{V}_{\chi_0})_s^{\otimes a_s(\mathscr{H})} \otimes \bigotimes_{\chi} \Phi_0(\chi, \chi_0)_{\pi'}^{\otimes r(\mathrm{E}(\mathscr{H}|\eta_0)_\chi)} \otimes \bigotimes_{\chi} \Phi_\infty(\chi, \chi_0^{-1})_{\pi'}^{\otimes -r(\mathrm{E}(\pi_{\infty *}(\mathscr{H}|\eta_\infty))_\chi)}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de (4.3) (iii), (4.5) et (5.1.4) [remarquer que $\mathscr{L}_{\chi_0|\eta_0} = \mathrm{V}_{\chi_0}$ et $\pi_{\infty *}(\mathscr{L}_{\chi|\eta_\infty}) = \mathrm{V}_{\chi_0^{-1}}$].

(5.3) Définition. — *Soient χ_1 et χ_2 deux caractères de k^* à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$. On suppose que χ_2 n'est pas trivial.*

Si $\chi_1 \neq 1$, $\chi_1\chi_2^{-1} \neq 1$, on pose

$$\varphi_0(\chi_1, \chi_2) = \frac{g(\chi_1, \psi)}{g(\chi_1\chi_2^{-1}, \psi)}$$

$$\varphi_\infty(\chi_1, \chi_2) = \frac{g(\chi_1^{-1}, \psi)}{g(\chi_1^{-1}\chi_2, \psi)}.$$

Si $\chi_1 = 1$, on pose

$$\varphi_0(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{g(\chi_2^{-1}, \psi)}$$

$$\varphi_\infty(\chi_1, \chi_2) = \frac{q}{g(\chi_2, \psi)}.$$

Si $\chi_1\chi_2^{-1} = 1$, on pose

$$\varphi_0(\chi_1, \chi_2) = g(\chi_1, \psi)$$

$$\varphi_\infty(\chi_1, \chi_2) = \frac{g(\chi_1^{-1}, \psi)}{q}.$$

L'énoncé suivant est immédiat.

(5.4) Lemme. — *Soient χ_1 et χ_2 deux caractères de k^* à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$. On suppose que χ_2 n'est pas trivial. On a*

$$\det(\mathrm{Frob}_q, \Phi_0(\chi_1, \chi_2)_{\pi'}) = \varphi_0(\chi_1, \chi_2)$$

$$\det(\mathrm{Frob}_q, \Phi_\infty(\chi_1, \chi_2)_{\pi'}) = \varphi_\infty(\chi_1, \chi_2).$$

Le théorème (5.2) admet donc le corollaire suivant.

(5.5) Corollaire. — *Sous les hypothèses du théorème* (5.2) *on a*

$$(5.5.1)\quad \det(\mathrm{Frob}_q, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{G}^1_{m,\bar{k}}, \mathscr{H}))^{-1} = \det(\mathrm{Frob}_q, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{G}^1_{m,\bar{k}}, \mathscr{H}\otimes\mathscr{L}_{\chi_0^{-1}}))^{-1} \times \prod_{s\in S\setminus\{0\}} \chi_0(s)^{a_s(\mathscr{H})} \prod_{\chi} \varphi_0(\chi, \chi_0)^{r(\mathrm{E}(\mathscr{H}|\eta_0)_\chi)} \prod_{\chi} \varphi_\infty(\chi, \chi_0^{-1})^{-r(\mathrm{E}(\pi_{\infty *}(\mathscr{H}|\eta_\infty))_\chi)}.$$

6. Réduction combinatoire

Dans cette section, de nature combinatoire, on ramène la preuve du théorème (2.2) à celle de la proposition clé (6.4).

(6.1) Soient $A=(l_i)_{i\in I}$ un arrangement d'hyperplans affines et $\underline{\chi}=(\chi_i)_{i\in \bar{I}}$ une famille de caractères multiplicatifs vérifiant $\prod_{i\in\bar{I}}\chi_i=1$. On choisit $i_0\in I$, et on pose $I' := I\setminus\{i_0\}$. On note A′ l'arrangement $A' := (l_i)_{i\in I'}$ et $\underline{\chi}' := (\chi'_i)_{i\in\bar{I'}}$ avec $\chi'_i=\chi_i$ si $i\in I'$, $\chi'_\infty=\chi_\infty\chi_{i_0}$.

(6.2) Deux cas sont possibles : soit pour tout $i\in I'$, $A_i\neq A_{i_0}$ (cas *a*); soit il existe $i\in I'$ tel que $A_i=A_{i_0}$ (cas *b*).

Dans le cas *a*, on pose $I'' := \{i\in I';\ l_{i\,|\,A_{i_0}}$ n'est pas constant$\}$. On note A″ l'arrangement d'hyperplans de A_{i_0}, $A'' := (l_{i\,|\,A_{i_0}})_{i\in I''}$, et $\underline{\chi}'' := (\chi''_i)_{i\in\bar{I''}}$ avec $\chi''_i=\chi_i$ si $i\in I''$, $\chi''_\infty=\chi_\infty\prod_{i\in I\setminus I''}\chi_i$; enfin on note s_i la valeur de l_i sur A_{i_0}, pour $i\in I'\setminus I''$.

On pose

$$\begin{aligned} J(i_0, S, \underline{\chi}) &:= \left(\frac{g(\chi_S, \psi)}{g(\chi_S\chi_{i_0}^{-1}, \psi)}\right)^{\mu(S,\bar{A})} && \text{si} \quad S\in\mathscr{S}_f(A)\\ &:= \left(\frac{g(\chi_S^{-1}, \psi)}{g(\chi_S^{-1}\chi_{i_0}^{-1}, \psi)}\right)^{-\mu(S,\bar{A})} && \text{si} \quad S\in\mathscr{S}_\infty(A)\end{aligned}$$

et

$$J(i_0, \underline{\chi}) = \prod_{\substack{S\in\mathscr{S}_f(A)\\ S\subset H_{i_0}}} J(i_0, S, \underline{\chi}) \prod_{\substack{S\in\mathscr{S}_\infty(A)\\ S\subset H_{i_0}}} J(i_0, S, \underline{\chi}).$$

(6.3) PROPOSITION. — *Dans le cas a on a*

(6.3.1) $$g(A, \underline{\chi}, \psi) = g(A', \underline{\chi}', \psi)\, g(A'', \underline{\chi}'', \psi)^{-1} J(i_0, \underline{\chi})$$

(6.3.2) $$C(A, \underline{\chi}) = C(A', \underline{\chi}')\, C(A'', \underline{\chi}'')^{-1} C_{i_0}(A, \chi_{i_0}) \prod_{i\in I'\setminus I''}\chi_i(s_i)^{\lambda(\overline{A''})}.$$

Dans le cas b on a

(6.3.3) $$g(A, \underline{\chi}, \psi) = g(A', \underline{\chi}', \psi)\, J(i_0, \underline{\chi})$$

(6.3.4) $$C(A, \underline{\chi}) = C(A', \underline{\chi}')\, C_{i_0}(A, \chi_{i_0}).$$

Démonstration. — Les égalités (6.3.2), (6.3.3) et (6.3.4) sont faciles à vérifier. Supposons donc qu'on est dans le cas *a* et démontrons (6.3.1). Pour cela on a besoin du lemme suivant.

(6.3.5) LEMME. — *Soit* S *une strate de* $\bar{A}$.

(i) *Si appartient à* $\mathscr{S}(\overline{A''})$ *et à* $\mathscr{S}(\overline{A'})$, *alors*

$$\mu(S, \overline{A'}) = \mu(S, \overline{A''}) + \mu(S, \bar{A})$$

(ii) *Si* S *appartient à* $\mathscr{S}(\overline{A''})$ *et n'appartient pas à* $\mathscr{S}(\overline{A'})$, *alors* $\mu(S, \bar{A})=0$, *et si* T *est la plus petite strate de* $\overline{A'}$ *contenant* S, $T\setminus S$ *est une strate de* $\bar{A}$ *et on a* $\mu(T, \overline{A'})=\mu(T\setminus S, \bar{A})+\mu(S, \overline{A''})$.

Démonstration. — (i) est clair car dans ce cas $\lambda(\overline{A'}_S)=\lambda(\bar{A}_S)+\lambda(\overline{A''}_S)$.

Pour (ii) on remarque que si $S\in\mathscr{S}(\overline{A''})$ et $S\notin\mathscr{S}(\overline{A'})$, $\bigcap_{i\in I(S)\setminus\{i_0\}} H_i$ contient strictement $\mathbf{P}^S$, et donc $\bigcap_{i\in I(S)\setminus\{i_0\}}(\pi(S)(H_i\setminus\mathbf{P}^S))$ n'est pas vide. D'après (A.2) (iv) on a donc $\lambda(\bar{A}_S)=0$ [choisir $\pi(S)(H_{i_0}\setminus\mathbf{P}^S)$ comme hyperplan à l'infini dans $\mathbf{P}_S$], d'où $\mu(S, \bar{A})=0$.

L'égalité $\mu(T, \overline{A'})=\mu(T\setminus S, \bar{A})+\mu(S, \overline{A''})$ est conséquence des égalités

$$\lambda(\overline{A'^T})=\lambda(\overline{A^{T\setminus S}})+\lambda(\overline{A''^S}) \quad \text{et} \quad \lambda(\overline{A'}_T)=\lambda(\bar{A}_{T\setminus S})=\lambda(\overline{A''}_S).$$

(6.3.6) Si S est une strate de $\bar{A}$, S vérifie une et une seule des conditions suivantes :

1°	$S\in\mathscr{S}_f(A)$,	$S\subset H_{i_0}$,	$S\in\mathscr{S}(\overline{A'})$
2°	$S\in\mathscr{S}_f(A)$,	$S\subset H_{i_0}$,	$S\notin\mathscr{S}(\overline{A'})$
3°	$S\in\mathscr{S}_f(A)$,	$S\not\subset H_{i_0}$,	$S\in\mathscr{S}(\overline{A'})$
4°	$S\in\mathscr{S}_f(A)$,	$S\not\subset H_{i_0}$,	$S\notin\mathscr{S}(\overline{A'})$
5°	$S\in\mathscr{S}_\infty(A)$,	$S\subset H_{i_0}$,	$S\in\mathscr{S}(\overline{A'})$
6°	$S\in\mathscr{S}_\infty(A)$,	$S\subset H_{i_0}$,	$S\notin\mathscr{S}(\overline{A'})$
7°	$S\in\mathscr{S}_\infty(A)$,	$S\not\subset H_{i_0}$,	$S\in\mathscr{S}(\overline{A'})$
8°	$S\in\mathscr{S}_\infty(A)$,	$S\not\subset H_{i_0}$,	$S\notin\mathscr{S}(\overline{A'})$

D'après (6.3.5) on a dans les cas 1° et 5°

$$\mu(S, \overline{A'})=\mu(S, \bar{A})+\mu(S, \overline{A''})$$

dans les cas 2° et 6°

$$\mu(S, \bar{A})=0$$

dans les cas 3° et 7°

$$\mu(S, \bar{A})=\mu(S, \overline{A'})$$

dans les cas 4° et 8°

si $\bar{S}$ est la plus petite strate de A′ contenant S, $\bar{S}\setminus S$ est une strate de $\bar{A}$ et de $\overline{A''}$ et on a $\mu(\bar{S}, \overline{A'})=\mu(S, \bar{A})+\mu(\bar{S}\setminus S, \overline{A''})$; de plus si $S\in\mathscr{S}_f(A)$ [resp. $\mathscr{S}_\infty(A)$], $\bar{S}\in\mathscr{S}_f(A')$ [resp. $\mathscr{S}_\infty(A')$].

D'autre part on a

dans le cas 1°

$$\chi'_S = \chi''_S = \chi_S \chi_{i_0}^{-1}$$

dans le cas 2°

$$\chi''_S = \chi_S \chi_{i_0}^{-1}$$

dans le cas 3°

$$\chi_S = \chi'_S$$

dans le cas 4°

$$\chi_S = \chi'_{\bar{S}} = \chi''_{\bar{S} \setminus S}$$

dans le cas 5°

$$\chi_S = \chi'_S = \chi''_S$$

dans le cas 6°

$$\chi_S = \chi''_S$$

dans le cas 7°

$$\chi'_S = \chi_S \chi_{i_0}$$

dans le cas 8°

$$\chi'_{\bar{S}} = \chi''_{\bar{S} \setminus S} = \chi_{i_0} \chi_S.$$

De tout cela on déduit que
dans le cas 1°

$$g(\chi_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A})} = g(\chi'_S, \psi)^{\mu(S, \overline{A'})} g(\chi''_S, \psi)^{-\mu(S, \overline{A''})} \mathrm{J}(i_0, S, \underline{\chi})$$

dans le cas 2°

$$g(\chi_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A})} = 1 \; (= \mathrm{J}(i_0, S, \underline{\chi}))$$

dans le cas 3°

$$g(\chi_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A})} = g(\chi'_S, \psi)^{\mu(\bar{S}, \overline{A'})}$$

dans le cas 4°

$$g(\chi_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A})} = g(\chi'_{\bar{S}}, \psi)^{\mu(\bar{S}, \overline{A'})} g(\chi''_{\bar{S} \setminus S}, \psi)^{-\mu(\bar{S} \setminus S, \overline{A''})}$$

dans le cas 5°

$$g(\chi_S^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A})} = g(\chi_S'^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \overline{A'})} g(\chi_S''^{-1}, \psi)^{\mu(S, \overline{A''})}$$

dans le cas 6°

$$g(\chi_S^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A})} = 1$$

dans le cas 7°

$$g(\chi_S^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A})} = g(\chi_S'^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \overline{A'})} J(i_0, S, \underline{\chi})$$

dans le cas 8°

$$g(\chi_S^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A})} = g(\chi_{\bar{S}}'^{-1}, \psi)^{-\mu(\bar{S}, \overline{A'})} g(\chi_{\bar{S} \setminus S}''^{-1}, \psi)^{\mu(\bar{S} \setminus S, \overline{A''})} J(i_0, S, \underline{\chi}).$$

On obtient l'égalité (6.3.1) en faisant le produit de ces huit égalités.

(6.4) Le résultat suivant sera démontré dans la section 8.

Proposition clé. — *Soient* $A = (l_i)_{i \in I}$ *un arrangement d'hyperplans affines vérifiant* (1.5.1) *et* $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$ *une famille de caractères multiplicatifs vérifiant* $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$ *et* (1.5.2).

(i) *Soit* $i_0 \in I$ *tel que pour tout* $i \neq i_0$, $A_i \neq A_{i_0}$. *Supposons que* A' *et* A'' (*resp.* $\underline{\chi}'$ *et* $\underline{\chi}''$) *vérifient la condition* (1.5.1) [*resp.* (1.5.2)]. *Alors on a*

$$\begin{aligned}(6.4.1) \quad \det(\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}}))^{-1} = {} & \det(\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(V'_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}'}))^{-1} \\ & \times \det(\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(V''_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}''})) C_{i_0}(A, \chi_{i_0}) \prod_{i \in I' \setminus I''} \chi_i(s_i)^{\lambda(\overline{A''})} J(i_0, \underline{\chi}).\end{aligned}$$

(ii) *Soit* $i_0 \in I$ *tel qu'il existe* $i \neq i_0$ *avec* $A_i = A_{i_0}$. *Alors on a*

$$(6.4.2) \quad \det(\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}}))^{-1} = \det(\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(V'_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}'}))^{-1} C_{i_0}(A, \chi_{i_0}) J(i_0, \underline{\chi}).$$

(6.5) *Démonstration du théorème* (2.2). — On va démontrer le théorème par récurrence sur $(n, |I|)$, $\mathbf{N}^2$ étant muni de l'ordre lexicographique. Le théorème est clair si $n=0$. D'autre part on a déjà remarqué que la condition (1.5.1) impose que $|I| \geqq n$. Si $|I| = n$, les hyperplans A_i, $i \in I$, sont nécessairement distincts et en position générale d'après la condition (1.5.1). Dans ce cas l'égalité (2.2.1) devient $1=1$. Il suffit donc de démontrer que pour tout $n_0 \geqq 1$ et $N_0 \geqq n_0 + 1$ fixés, si le théorème (2.2) est vérifié pour tous les arrangements de $\mathbf{A}_k^n$ avec $n < n_0$, et tous les arrangements de $\mathbf{A}_k^{n_0}$ avec $|I| < N_0$, il est vérifié pour tous les arrangements de $\mathbf{A}_k^{n_0}$ avec $|I| = N_0$.

Soient A un arrangement dans $\mathbf{A}_k^{n_0}$ vérifient (1.5.1) et $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$, avec $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$, vérifiant (1.5.2).

Si l est une équation affine on note $\bar{l}$ la forme linéaire associée. La condition (1.5.1) est équivalente à ce que le rang de la famille $(\bar{l}_i)_{i \in I}$ soit égal à n_0. Par conséquent il existe $J \subset I$ avec $|J| = n_0$ tel que $\bigcap_{j \in \bar{J}} H_j = \varnothing$. Choisissons $i_0 \in I \setminus J$. Si $A_i \neq A_{i_0}$ pour $i \in I'$ (cas *a*), il est alors clair que A' et A'' vérifient (1.5.1) et que $\underline{\chi}'$ et $\underline{\chi}''$ vérifient (1.5.2). Dans le cas *b* il est de toute façon automatique que A' vérifie (1.5.1) et que $\underline{\chi}'$ vérifie (1.5.2). On peut donc appliquer la proposition (6.4). En utilisant l'hypothèse de récurrence et la proposition (6.3) on obtient alors que l'égalité (2.2.1) est vérifiée par A et $\underline{\chi}$.

7. Étude d'une résolution

(7.1) Soient $\tilde{A}=(H_i)_{i\in I}$ un arrangement projectif défini sur k, $Y=\bigcup_{i\in I} H_i$, $V=\mathbf{P}_k^n\setminus Y$ et $j:V\to\mathbf{P}_k^n$ l'inclusion naturelle. On note $\mathscr{S}_i(\tilde{A})$ l'ensemble des strates de dimension i.

Soit $\pi_0:X_0\to\mathbf{P}_k^n$ l'éclatement simultané des strates de dimension 0 dans $\mathbf{P}_k^n$. On construit par récurrence $\pi_i:X_i\to X_{i-1}$, $i\geqq 1$. Soit $\mathscr{F}_S^i$, pour $S\in\mathscr{S}(\tilde{A})$ de dimension $\geqq i$, la transformée stricte par $\pi_0\circ\cdots\circ\pi_{i-1}$ de $\mathbf{P}^S$. On convient que si $S\in\mathscr{S}(\tilde{A})$, $\mathscr{F}_S^0=S$. Les $\mathscr{F}_S^i$ sont disjoints lorsque S décrit $\mathscr{S}_i(\tilde{A})$. On peut donc définir π_i comme l'éclatement simultané des $\mathscr{F}_S^i$, $S\in\mathscr{S}_i(\tilde{A})$, dans X_{i-1}. On note $X:=X_{n-2}$ et $\pi:X\to\mathbf{P}_k^n$ le morphisme $\pi:=\pi_0\circ\cdots\circ\pi_{n-2}$. Si $S\in\mathscr{S}_i(\tilde{A})$ et $i\leqq n-2$, on note $D_S:=(\pi_i\circ\cdots\circ\pi_{n-2})^{-1}(\mathscr{F}_S^i)$; c'est aussi la transformée stricte de $\pi_i^{-1}(\mathscr{F}_S^i)$ par $\pi_{i+1}\circ\cdots\circ\pi_{n-2}$. Si $S\in\mathscr{S}_{n-1}(\tilde{A})$ on note D_S la transformée stricte de $\mathbf{P}^S$ par π. Remarquons que les diviseurs D_S sont distincts et irréductibles. On note $D_S^0:=D_S\setminus\bigcup_{T\neq S} D_T$, et $Z:=\bigcup_{S\in\mathscr{S}(\tilde{A})} D_S$.

(7.2) PROPOSITION. — (i) *Le diviseur* $Z=\bigcup_{S\in\mathscr{S}(\tilde{A})} D_S$ *est un diviseur globalement à croisements normaux. Plus précisément, localement dans* X *pour la topologie de Zariski,* Z *est une réunion d'hyperplans en position générale. De plus la restriction de* π *à* $X\setminus Z$ *est un isomorphisme sur son image* V.

(ii) *Pour toute strate* S *de* $\tilde{A}$, *on a* $\mu(S,\tilde{A})=\chi((D_S^0)_{\bar{k}},\mathbf{Q}_l)$.

Démonstration. — (i) Le seul point à démontrer est que localement pour la topologie de Zariski Z est réunion d'hyperplans en position générale. Cela se démontre par récurrence sur n : les diviseurs $\pi_0^{-1}(S)$, $S\in\mathscr{S}_0(\tilde{A})$, sont disjoints et transverses à $T:=\bigcup_{\substack{S\in\mathscr{S}_i(\tilde{A})\\ 1\leqq i\leqq n-1}}\mathscr{F}_S^1$; de plus localement pour la topologie de Zariski T est le produit d'une droite affine $\mathbf{A}_k^1$ par des hyperplans dans $\mathbf{A}_k^{n-1}$; il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à ces hyperplans. Quant à (ii), c'est un exercice facile.

(7.3) Soient $A=(l_i)_{i\in I}$ un arrangement affine défini sur k, $\underline{\chi}=(\chi_i)_{i\in\bar{I}}$ une famille de caractères multiplicatifs $\chi_i:k^*\to\bar{\mathbf{Q}}_l^*$ vérifiant $\prod_{i\in\bar{I}}\chi_i=1$. Soit $\pi:X\to\mathbf{P}_k^n$ la modification associée à $\bar{A}$. On note j' l'inclusion $j':X\setminus Z\to X$ et $\mathscr{L}'_{\underline{\chi}}$ le $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau $\pi^*(j_!\mathscr{L}_{\underline{\chi}})=j'_!(\pi^*_{|X\setminus Z}\mathscr{L}_{\underline{\chi}})$.

(7.3.1) LEMME. — (i) *Le faisceau* $\mathscr{L}'_{\underline{\chi}}$ *est modérément ramifié le long de* Z *de monodromie géométrique* χ_S *le long de* D_S.

(ii) *Si les conditions* (1.5.1) *et* (1.5.2) *sont vérifiées, on a* $\chi_S\neq\chi_{S'}$ *dès que* S *et* S' *sont deux strates distinctes de* $\bar{A}$ *telles que* $D_S\cap D_{S'}\neq\varnothing$.

Démonstration. — (i) est immédiat; (ii) est conséquence du fait suivant : si S et S' sont deux strates distinctes vérifiant $D_S\cap D_{S'}\neq\varnothing$, alors l'une des deux strates est contenue dans l'adhérence de l'autre.

(7.3.2) Choisissons $i_0\in I$, et notons $f:=l_{i_0}:\mathbf{A}_k^n\to\mathbf{A}_k^1$.

LEMME. — (i) *Le morphisme* $f \circ \pi : \pi^{-1}(\mathbf{A}_k^n) \to \mathbf{A}_k^1$ *se prolonge en un morphisme* $\tilde{f} : X \to \mathbf{P}_k^1$.

(ii) *Les diviseurs* $\tilde{f}^{-1}(0)$ *et* $\tilde{f}^{-1}(\infty)$ *sont réduits et on a*

$$\tilde{f}^{-1}(0) = \bigcup_{\substack{S \in \mathscr{S}_f(A) \\ S \subset H_{i_0}}} D_S \quad et \quad \tilde{f}^{-1}(\infty) = \bigcup_{\substack{S \in \mathscr{S}_\infty(A) \\ S \subset H_{i_0}}} D_S.$$

Démonstration. — (i) Le morphisme $f : \mathbf{A}_k^n \to \mathbf{A}_k^1$ se prolonge en un morphisme $\mathbf{P}_k^n \smallsetminus H_\infty \cap H_{i_0} \to \mathbf{P}_k^1$. On obtient par récurrence sur i que $f \circ \pi_0 \circ \cdots \circ \pi_i : (\pi_0 \circ \cdots \circ \pi_i)^{-1}(\mathbf{A}_k^n) \to \mathbf{A}_k^1$ se prolonge en un morphisme $X_i \smallsetminus (H_\infty \cap H_{i_0})_i \to \mathbf{P}_k^1$ pour $i < n-2$, en notant $(\widetilde{H_\infty \cap H_{i_0}})_i$ la transformée stricte de $\widetilde{H_\infty \cap H_{i_0}}$ par $\pi_0 \circ \cdots \circ \pi_i$. Comme $\pi_{n-2} : X \to X_{n-3}$ est composé d'éclatements de centres disjoints, et que $(\widetilde{H_\infty \cap H_{i_0}})_{n-3}$ est un de ces centres on obtient l'énoncé voulu. (ii) est clair.

(7.4) Le lemme suivant est bien connu.

LEMME. — *Soient* W *un schéma lisse propre irréductible de dimension* n *sur* k *et* j : $U \to W$ *l'inclusion d'un ouvert affine non vide. On suppose que* $D := W \smallsetminus U$ *est un diviseur à croisements normaux. Soit* $\mathscr{L}$ *un* $\bar{\mathbf{Q}}_l$*-faisceau lisse de rang* 1 *sur* U, *modérément ramifié le long de* D, *tel que pour toute composante irréductible* D_i *de* D *la monodromie géométrique de* $\mathscr{L}$ *le long de* D_i *soit un caractère non trivial. Alors* $H_c^i(U, \mathscr{L}) = 0$ *pour* $i \neq n$.

Démonstration. — Comme U est affine on a $H^i(U, \mathscr{L}) = 0$ pour $i > n$ d'après le théorème de M. Artin (SGA 4 XIV 3.2) et $H_c^i(U, \mathscr{L}) = 0$ pour $i < n$ par dualité de Poincaré. Les hypothèses faites sur $\mathscr{L}$ entraînent que l'on a un quasi-isomorphisme $j_! \mathscr{L} \simeq Rj_* \mathscr{L}$, d'où le résultat.

(7.5) Soient $A = (l_i)_{i \in I}$ un arrangement affine vérifiant (1.5.1) et $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$ une famille de caractères vérifiant $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$ et (1.5.2). On a le lemme suivant.

(7.5.1) LEMME. — (i) $H_c^i(V_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}}) = 0$ *pour* $i \neq n$ *et* $H_c^n(V_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}})$ *est de dimension* $(-1)^n \chi(V_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$.

(ii) *Les faisceaux* $R^i \tilde{f}_* \mathscr{L}'_{\underline{\chi}}$ *sont nuls pour* $i \neq n-1$, *et si* t *est un point fermé de* $\mathbf{A}_k^1$, *le faisceau* $R^{n-1} \tilde{f}_* \mathscr{L}'_{\underline{\chi}}$ *est de rang* $(-1)^{n-1} \lambda_{i_0}(t)$ *en* t.

(iii) *La restriction de* $R^{n-1} \tilde{f}_* \mathscr{L}'_{\underline{\chi}}$ *à* U_{i_0} *est un* $\bar{\mathbf{Q}}_l$*-faisceau lisse.*

Démonstration. — (i) est une conséquence de (7.3.1) (i) et de (7.4), car $H_c^i(V_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}}) = H_c^i(\pi^{-1}(V)_{\bar{k}}, \pi^* \mathscr{L}_{\underline{\chi}}) = H^i(X_{\bar{k}}, \mathscr{L}'_{\underline{\chi}})$. (ii) est une conséquence de (i) appliqué à l'arrangement A_t défini de la façon suivante pour t un point fermé de $\mathbf{A}_k^1$: on note g_i la restriction de l_i à l'hyperplan $A_{i_0, t}$ d'équation $l_{i_0} - t = 0$; on note I' l'ensemble des $i \in I$ tels que g_i n'est pas constant; A_t est alors l'arrangement (défini sur une extension finie de k) $A_t := (g_i)_{i \in I'}$; il est clair que A_t vérifie (1.5.1) et que $\underline{\chi}' = (\chi'_i)_{i \in \bar{I}'}$, avec $\chi'_i = \chi_i$, $i \in I'$, et $\chi'_\infty = \prod_{i \in \bar{I} \smallsetminus I'} \chi_i$, vérifie (1.5.2). Comme $Z \cap \tilde{f}^{-1}(U_{i_0})$ est un diviseur à croisements normaux relatif au-dessus de U_{i_0}, (iii) résulte alors de ce qui précède grâce à (SGA 7 XIII 2.1.11).

(7.5.2) Dans la proposition suivante on calcule les cycles proches de $\mathscr{L}'_\chi$ relativement à $\bar{f}$.

PROPOSITION. — *Soient* $R^i\psi(\mathscr{L}'_\chi)$ *les faisceaux de cycles proches de* $\mathscr{L}'_\chi$ *relativement à* $\bar{f}$.

(i) *On a* $R^i\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi)=0$ *pour* $i>0$. *La restriction de* $R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi)$ *à* $\bar{f}^{-1}(0)\setminus \bigcup_{\substack{S\in\mathscr{S}_f(A)\\ S\subset H_{i_0}}} D_S^0$ *est nulle. Pour* $S\in\mathscr{S}_f(A)$, $S\subset H_{i_0}$, *la restriction de* $R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi)$ *à* D_S^0 *est un* $\bar{\mathbf{Q}}_l$*-faisceau lisse de rang* 1 *modérément ramifié le long de* $D_S\setminus D_S^0$.

(ii) *Si* $S\in\mathscr{S}_f(A)$ *et* $S\subset H_{i_0}$, *alors pour tout point fermé* t *de* D_S^0, *la fibre de* $R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi)$ *en* t *est un* G*-module modéré sur lequel* I *agit par le caractère* χ_S.

(i') *et* (ii') *Même énoncé que* (i) *et* (ii), *en remplaçant* $\bar{\eta}_0$ *par* $\bar{\eta}_\infty$ *et la condition* $S\in\mathscr{S}_f(A)$, $S\subset H_{i_0}$ *par* $S\in\mathscr{S}_\infty(A)$, $S\not\subset H_{i_0}$.

Démonstration. — C'est une conséquence directe de (3.4) et de (7.3.1), (7.3.2).

(7.5.3) LEMME. — (i) *Soit* $S\in\mathscr{S}_f(A)$, $S\subset H_{i_0}$. *On a* $H_c^i((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi))=0$ *si* $i\neq n-1$, *tandis que* $H_c^{n-1}((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi))$ *est un* G*-module de rang* $(-1)^{n-1}\mu(S,\bar{A})$ *de la forme* $V_{\chi_S}\otimes E$ *avec* E *un* G*-module non ramifié.*

(i') *Même énoncé que* (i), *en remplaçant* $\bar{\eta}_0$ *par* $\bar{\eta}_\infty$ *et la condition* $S\in\mathscr{S}_f(A)$, $S\subset H_{i_0}$ *par* $S\in\mathscr{S}_\infty(A)$, $S\not\subset H_{i_0}$.

Démonstration. — Démontrons (i), (i') étant similaire. Comme $\bar{f}$ est propre on a

$$H^i(\bar{f}^{-1}(0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi))=\bigoplus_{\substack{S\in\mathscr{S}_f(A)\\ S\subset H_{i_0}}} H_c^i((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi)),$$

d'après (7.3.2) (ii) et (7.5.2) (i), et de plus d'après (SGA 7 XIII 2.1.8) et (7.5.2) (i) la dimension de $H^i(\bar{f}^{-1}(0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi))$ est égale au rang de $R^i\bar{f}_*(\mathscr{L}'_\chi)_{\bar{\eta}_0}$.

On a donc $H_c^i((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi))=0$ si $i\neq n-1$ d'après (7.5.1) [on aurait aussi pu utiliser (7.4)]. Comme le faisceau $R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi)$ restreint à D_S^0 est lisse de rang 1 et modérément ramifié le long de $D_S\setminus D_S^0$ d'après (7.5.2), la dimension de $H_c^{n-1}((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi))$ est égale à $(-1)^{n-1}\chi((D_S^0)_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$ et donc à $(-1)^{n-1}\mu(S,\bar{A})$ d'après (7.2) (ii). La dernière assertion est alors conséquence de (7.5.2) (ii).

8. Preuve de la proposition clé (6.4)

(8.1) Soient A et χ vérifiant les hypothèses de (6.4). Soit $i_0\in I$. On note F le faisceau $R^{n-1}\bar{f}_*\mathscr{L}'_\chi$. Il est de la forme $F=\beta_!\mathscr{G}$ avec $\mathscr{G}$ un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau sur $\mathbf{G}^1_{m,k}$.

Comme $\bar{f}$ est propre on a, d'après (SGA 7 XIII 2.1.8) et (7.5.3) :

(8.1.1) $$\mathscr{G}_{\bar{\eta}_0}=\bigoplus_{\substack{S\in\mathscr{S}_f(A)\\ S\subset H_{i_0}}} H_c^{n-1}((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathscr{L}'_\chi))$$

(8.1.2)
$$\mathscr{G}_{\bar{\eta}_\infty} = \bigoplus_{\substack{S \in \mathscr{S}_\infty(A) \\ S \subset H_{i_0}}} H_c^{n-1}((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_\infty}(\mathscr{L}'_{\underline{\chi}})).$$

D'après (7.5.1) la restriction de $\mathscr{G}$ à U_{i_0} est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceau lisse. D'après (7.5.3), (8.1.1) et (8.1.2) les G-modules $\mathscr{G}_{|\eta_0}$ et $\pi_{\infty *}(\mathscr{G}_{|\eta_\infty})$ sont modérés et à monodromie géométrique définie sur k; $\mathscr{G}$ est aussi modérément ramifié en tout point s de $S^*_{i_0}$ (remplacer l_{i_0} par $l_{i_0}-s$). D'après (7.5.1) (ii) si $s \in S^*_{i_0}$ on a $a_s(\mathscr{G}) = (-1)^{n-1}\delta_{i_0}(s)$.

(8.2) On déduit donc de (7.5.3) que, avec les notations de (3.2) et de (5.1),

(8.2.1)
$$r(E(\mathscr{G}_{|\eta_0})_\chi) = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{S \in \mathscr{S}_f(A) \\ S \subset H_{i_0} \\ \chi_S = \chi}} \mu(S, \bar{A})$$

(8.2.2)
$$r(E(\pi_{\infty *}(\mathscr{G}_{|\eta_\infty}))_\chi) = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{S \in \mathscr{S}_\infty(A) \\ S \subset H_{i_0} \\ \chi_S = \chi}} \mu(S, \bar{A}).$$

D'après (5.5) on a donc

(8.2.3)
$$\det(\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(\mathbf{G}^1_{m,\bar{k}}, \mathscr{G}))^{-1}$$
$$= \det(\mathrm{Frob}_q, R\Gamma_c(\mathbf{G}^1_{m,\bar{k}}, \mathscr{G} \otimes \mathscr{L}_{\chi_{i_0}^{-1}}))^{-1} J(i_0, \underline{\chi})^{(-1)^{n-1}} C_{i_0}(A, \chi_{i_0})^{(-1)^{n-1}}.$$

Dans le cas a, on note $V' = \mathbf{A}^n_k \setminus \bigcup_{i \in I'} A_i$, $V'' = A_{i_0} \setminus \bigcup_{i \in I''} A_i$. On a des inclusions $z : V \to \mathbf{A}^n_k$, $z' : V' \to \mathbf{A}^n_k$, $z'' : V'' \to A_{i_0}$ et $w : A_{i_0} \to \mathbf{A}^n_k$. On a une suite exacte de $\bar{\mathbf{Q}}_l$-faisceaux sur $\mathbf{A}^n_k$

(8.2.4)
$$0 \to (z_! \mathscr{L}_{\underline{\chi}}) \otimes f^*(\gamma_! \mathscr{L}_{\chi_{i_0}^{-1}}) \to z'_! \mathscr{L}_{\underline{\chi}'} \to w_*(z''_!(\mathscr{L}_{\underline{\chi}''}) \otimes \bigotimes_{i \in I' \setminus I''} \mathscr{L}_{\chi_i | s_i}) \to 0,$$

où les $\mathscr{L}_{\chi_i | s_i}$ sont des faisceaux géométriquement constants, et $\mathscr{L}_{\underline{\chi}'}$ (resp. $\mathscr{L}_{\underline{\chi}''}$) est le faisceau sur V' (resp. V'') associé à $\underline{\chi}'$ (resp. $\underline{\chi}''$).

On en déduit un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ modules

(8.2.5)
$$\det(R\Gamma_c(V'_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}'})) \simeq \det(R\Gamma_c(\mathbf{A}^n_{\bar{k}}, (z_! \mathscr{L}_{\underline{\chi}}) \otimes f^*(\gamma_! \mathscr{L}_{\chi_{i_0}^{-1}})))$$
$$\otimes \det(R\Gamma_c(V''_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}''}) \otimes \bigotimes_{i \in I' \setminus I''} \mathscr{L}_{\chi_i | s_i}.$$

Mais d'après la formule de projection on a un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ modules

(8.2.6)
$$\det(R\Gamma_c(\mathbf{A}^n_{\bar{k}}, (z_! \mathscr{L}_{\underline{\chi}}) \otimes f^*(\gamma_! \mathscr{L}_{\chi_{i_0}^{-1}}))) \simeq \det(R\Gamma_c(\mathbf{G}^1_{m,\bar{k}}, \mathscr{G} \otimes \mathscr{L}_{\chi_{i_0}^{-1}}))^{\otimes (-1)^{n-1}}.$$

D'autre part, comme

$$R\Gamma_c(V''_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}''}) \simeq H_c^{n-1}(V''_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}''})[-(n-1)]$$

et

$$\dim \mathrm{H}_c^{n-1}(\mathrm{V}''_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}''}) = (-1)^{n-1} \lambda(\overline{\mathrm{A}''})$$

d'après (7.5.1), on a

$$(8.2.7)\quad \det(\mathrm{Frob}_q, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{V}''_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}''}) \otimes \bigotimes_{i \in \mathrm{I}' \setminus \mathrm{I}''} \mathscr{L}_{\chi_i \mid s_i}) \\ = \det(\mathrm{Frob}_q, \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{V}''_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}''})) \prod_{i \in \mathrm{I}' \setminus \mathrm{I}''} \chi_i(s_i)^{\lambda(\overline{\mathrm{A}''})}.$$

On déduit alors l'égalité demandée (6.4.1) de (8.2.3), (8.2.5), (8.2.6) et (8.2.7), car on a un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-modules

$$\det(\mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathscr{L}_{\underline{\chi}})) \simeq \det(\mathrm{R}\Gamma_c(\mathbf{G}^1_{m, \bar{k}}, \mathscr{G}))^{\otimes (-1)^{n-1}}.$$

Dans le cas b, on a un isomorphisme $z_! \mathscr{L}_{\underline{\chi}'} \simeq z_! \mathscr{L}_{\underline{\chi}} \otimes f^*(\gamma_! \mathscr{L}_{\chi_{i_0}^{-1}})$, et on en déduit de même, grâce à (8.2.3), l'égalité (6.4.2).

Ceci termine donc la preuve de (6.4), et par conséquent du théorème (2.2).

APPENDICE

(A.1) Soit $\mathscr{A} = (\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille finie d'hyperplans affines dans $\mathbf{A}^n_k$. Soit $\mathrm{L}(\mathscr{A})$ l'ensemble des intersections non vides d'hyperplans de $\mathscr{A}$ [on convient que $\mathbf{A}^n_k \in \mathrm{L}(\mathscr{A})$]. On munit $\mathrm{L}(\mathscr{A})$ de l'ordre partiel : $\mathrm{X} \leqq \mathrm{Y}$ si et seulement si $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Si $\mathrm{X} \subset \mathrm{L}(\mathscr{A})$ on note $r(\mathrm{X})$ la codimension de X.

Soit $\mu : \mathrm{L}(\mathscr{A}) \to \mathbf{Z}$ la fonction de Möbius de l'ensemble ordonné $\mathrm{L}(\mathscr{A})$; μ est caractérisée par les relations

$$\mu(\mathbf{A}^n_k) = 1$$
$$\sum_{\mathbf{A}^n_k \leqq \mathrm{Y} \leqq \mathrm{X}} \mu(\mathrm{Y}) = 0 \qquad \text{si} \quad \mathrm{X} > \mathbf{A}^n_k.$$

Le polynôme de Poincaré de $\mathscr{A}$ est par définition le polynôme

$$\pi(\mathscr{A}, t) := \sum_{\mathrm{X} \in \mathrm{L}(\mathscr{A})} \mu(\mathrm{X})(-t)^{r(\mathrm{X})}.$$

On pose $\mathrm{V} := \mathbf{A}^n_k \setminus \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$, $h^i_c := \dim \mathrm{H}^i_c(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$ et

$$\mathrm{P}(\mathscr{A}, t) := \sum_{0 \leqq i \leqq 2n} h_c^{2n-i} t^i.$$

(A.2) L'énoncé suivant est vraisemblablement bien connu. [L'égalité (ii) est l'analogue sur les corps finis de la formule d'Orlik et Solomon [O-S].]

THÉORÈME. — *Soit* $\mathscr{A}=(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille finie d'hyperplans affines deux à deux distincts dans* $\mathbf{A}_k^n$. *On a*

(i) $\pi(\mathscr{A}, t)=\mathrm{P}(\mathscr{A}, t)$.

(ii) $|\mathrm{V}(\mathbf{F}_{q^e})|=q^{en}\pi(\mathscr{A}, -q^{-e})$.

(iii) $\chi(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)=\pi(\mathscr{A}, -1)$.

(iv) *Si* $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\neq\varnothing$, *alors* $\chi(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)=0$.

Démonstration. — Si I est non vide on fixe $i_0\in\mathrm{I}$. On pose $\mathrm{I}':=\mathrm{I}\setminus\{i_0\}$ et $\mathrm{I}'':=\{i\in\mathrm{I}';\ \mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_{i_0}\neq\varnothing\}$. Soient $\mathscr{A}'$ la famille $\mathscr{A}':=(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}'}$ et $\mathscr{A}''$ la famille d'hyperplans dans A_{i_0}, $\mathscr{A}'':=(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_{i_0})_{i\in\mathrm{I}''}$. On pose $\mathrm{V}':=\mathbf{A}_k^n\setminus\bigcup_{i\in\mathrm{I}'}\mathrm{A}_i$ et $\mathrm{V}'':=\mathrm{A}_{i_0}\setminus\bigcup_{i\in\mathrm{I}''}\mathrm{A}_i$.

On a une suite exacte longue naturelle compatible à l'action de Frob_q

(A.2.1) $$\to \mathrm{H}_c^i(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)\to \mathrm{H}_c^i(\mathrm{V}'_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)\to \mathrm{H}_c^i(\mathrm{V}''_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)\to$$

(A.2.2) LEMME:

(i) $\mathrm{H}_c^i(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)=0$ *si* $i<n$.

(ii) *Si* $i\geqq n$ *le Frobenius géométrique* Frob_q *a pour unique valeur propre* q^{i-n} *sur* $\mathrm{H}_c^i(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$.

Démonstration du lemme. — (i) provient de ce que V est affine. Montrons (ii) par récurrence sur $(n, |\mathrm{I}|)$ (pour l'ordre lexicographique). C'est clair si $n=0$ ou si $|\mathrm{I}|=0$. On peut donc supposer que $n>0$, $|\mathrm{I}|>0$ et que (ii) est vérifié pour $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$. On déduit alors de (A.2.1) que (ii) est vérifié pour $\mathscr{A}$.

(A.2.3) On déduit aussitôt de (A.2.1) et (A.2.2) que l'on a des suites exactes courtes

(A.2.3.1) $$0\to \mathrm{H}_c^{i-1}(\mathrm{V}''_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)\to \mathrm{H}_c^i(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)\to \mathrm{H}_c^i(\mathrm{V}'_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)\to 0$$

ce qui entraîne l'égalité

(A.2.3.2) $$\mathrm{P}(\mathscr{A}, t)=\mathrm{P}(\mathscr{A}', t)+t\,\mathrm{P}(\mathscr{A}'', t).$$

D'autre part il est clair que

(A.2.3.3) $$\mathrm{P}(\mathscr{A}, t)=1 \qquad \text{si} \quad |\mathrm{I}|=0.$$

Comme les égalités (A.2.3.2) et (A.2.3.3) sont également vérifiées par π ([0], 2.29) on obtient que $\pi(\mathscr{A}, t)=\mathrm{P}(\mathscr{A}, t)$. L'égalité (ii) est alors conséquence de (A.2.2) et de la formule des traces de Grothendieck. Quant à (iii), c'est une conséquence de (i) et de la dualité de Poincaré. [Remarquons qu'il est aussi possible de démontrer directement (ii) et (iii) sans utiliser (i).] Pour (iv) on remarque que si $n=1$ ou $|\mathrm{I}|=1$ c'est clair, tandis que si $|\mathrm{I}|\geqq 2$, $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ vérifient la même condition que $\mathscr{A}$. Comme $\chi(\mathrm{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)=\chi(\mathrm{V}'_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)-\chi(\mathrm{V}''_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$ on obtient le résultat par récurrence sur $(n, |\mathrm{I}|)$.

BIBLIOGRAPHIE

[L] G. LAUMON, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 65, 1987, p. 131-210).

[O] P. ORLIK, *Introduction to Arrangements* (*C.B.M.S. Regional Conference Series*, vol. 72, 1989).

[O-S] P. ORLIK et L. SOLOMON, *Combinatorics and Topology of Complements of Hyperplanes* (*Invent. Math.*, vol. 56, 1980, p. 169-189).

[R-Z] M. RAPOPORT et T. ZINK, *Über die lokale Zetafunction von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindente Zyklen in ungleicher Charakteristik* (*Invent. Math.*, vol. 68, 1982, p. 21-101).

[V] A. N. VARCHENKO, *Beta function of Euler, Vandermond determinant, Legendre equation and critical values of linear functions on configurations of hyperplanes*, (*Izvestia Akad. Nauk. SSSR* vol. 53 (1989), p. 1206-1235 et vol. 54 (1990), p. 146-158).

[SGA] *Séminaire de Géométrie Algébrique*, (4), (7), parties I et II [*Springer Lect. Notes Math.* n^os 269-270-305 (4), 288 (7), partie I, 340 (7), partie II].

(Manuscrit reçu le 10 mai 1990,
révisé le 11 septembre 1990).

François LOESER,
Unité de Recherche
associée au C.N.R.S. n° D 0169,
Centre de Mathématiques,
Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France.