ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CARLOS A. BERENSTEIN
A. YGER

Une formule de Jacobi et ses conséquences

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 24, nº 3 (1991), p. 363-377
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_3_363_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 24, 1991, p. 363 à 377.

UNE FORMULE DE JACOBI ET SES CONSÉQUENCES

PAR CARLOS A. BERENSTEIN ET A. YGER

1. Introduction

Rappelons un résultat classique dû à Jacobi; on considère n polynômes de n variables $P_1, \ldots, P_n$ dont les homogénéisés ${}^hP_1, \ldots, {}^hP_n$ définissent un sous-ensemble discret de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ entièrement inclus dans $\mathbb{C}^n$; on suppose de plus que le jacobien J de $P_1, \ldots, P_n$ ne s'annule en aucun zéro commun de $P_1, \ldots, P_n$; alors, pour tout élément Q de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ de degré au plus égal à $\sum \deg(P_j) - n - 1$ on a la relation :

$$\sum_{\alpha \in \{\xi \in \mathbb{C}^n,\, P_1(\xi) = \ldots = P_n(\xi) = 0\}} \frac{Q(\alpha)}{J(\alpha)} = 0. \tag{1}$$

Cette identité s'obtient aisément en appliquant, dans la variété compacte $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, le théorème des résidus global à la n-forme méromorphe

$$\omega = \frac{Q(Z)}{P_1(Z) \ldots P_n(Z)} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

de lieu polaire le diviseur $D = D_1 + \ldots + D_n$, où D_j désigne le diviseur associé au polynôme P_j. Le fait que ω, exprimée en coordonnées homogènes, n'ait pas l'hyperplan à l'infini comme composante de son diviseur polaire résulte précisément de la condition sur le degré de Q.

L'hypothèse concernant la simplicité des zéros communs de $P_1, \ldots, P_n$ peut être levée si l'on introduit le résidu de Grothendieck global lié au système de polynômes $P_1, \ldots, P_n$; lorsque n éléments $P_1, \ldots, P_n$ de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ définissent dans $\mathbb{C}^n$ une variété algébrique de dimension 0 (par conséquent finie et incluse dans $\|Z\| \leq R$), l'action du courant résidu (dénoté usuellement $\bar{\partial}(1/P_1) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}(1/P_n)$) sur une $(n, 0)$ forme $f\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, avec f holomorphe au voisinage de $\{\zeta \in \mathbb{C}^n,\, P_1(\zeta) = \ldots = P_n(\zeta) = 0\}$, est définie par

$$(2)\quad \langle \bar\partial(1/P_1)\wedge\ldots\wedge\bar\partial(1/P_n), f(\zeta)\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n\rangle = (1/2i\pi)^n \lim_{\bar\varepsilon\to\bar 0}\int_{\substack{|P_1(\zeta)|=\varepsilon_1\\ |P_n(\zeta)|=\varepsilon_n\\ \|\zeta\|\leqq R}} \frac{f(\zeta)}{P_1(\zeta)\ldots P_n(\zeta)}\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$$

où le cycle $\{\zeta, |P_1(\zeta)|=\varepsilon_1,\ldots,|P_n(\zeta)|=\varepsilon_n\}$ est orienté de manière à ce que

$$d(\arg P_1)\wedge\ldots\wedge d(\arg P_n)\geqq 0.$$

Sous les hypothèses concernant $P_1,\ldots,P_n$ déjà mentionnées (exception faite de l'hypothèse de simplicité des zéros communs de ces n polynômes), l'identité de Jacobi, encore valide pour tout polynôme Q de degré au plus $\sum\deg(P_j)-n-1$, s'écrit :

$$(3)\qquad \langle \bar\partial(1/P_1)\wedge\ldots\wedge\bar\partial(1/P_n), Q(\zeta)\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n\rangle=0.$$

L'objet de cet article est de mettre en lumière que de telles identités subsistent lorsqu'au lieu de supposer que ${}^hP_1,\ldots,{}^hP_n$ n'ont aucun zéro commun dans l'hyperplan $X_0=0$, on fait l'hypothèse qu'il existe trois constantes K, κ, d strictement positives telles que :

$$(4)\qquad (|P_1(\zeta)|^2+\ldots+|P_n(\zeta)|^2)^{1/2}\geqq\kappa\|\zeta\|^d,\qquad \zeta\in\mathbb{C}^n,\quad \|\zeta\|\geqq K$$

Les formules de Bochner-Martinelli nous permettent en effet d'exprimer la somme totale des résidus d'un polynôme Q sous la forme de l'intégrale de Q contre un certain noyau sur la frontière de la sphère de rayon R. Nous montrerons, étant donnés n polynômes $P_1,\ldots,P_n$ satisfaisant (4) et Q dans $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, que pour tout multi-indice $(k_1,\ldots,k_n)$ dans $\mathbb{N}^n$ de longueur suffisamment grande, on a :

$$(5)\qquad \langle \bar\partial(1/P_1^{k_1+1})\wedge\ldots\wedge\bar\partial(1/P_n^{k_n+1}), Q(\zeta)\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n\rangle=0$$

Ce qui nous différencie ici du cadre de la formule de Jacobi est que les polynômes ${}^hP_1,\ldots,{}^hP_n$ ne définissent plus une variété de dimension pure dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$; la condition (4) n'est pas une condition sur la variété à l'infini de l'ensemble des zéros communs des polynômes P_j. Mieux, dès que $P_1,\ldots,P_n$, pris dans n'importe quel ordre, définissent une suite régulière dans $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, il est possible de construire n formes linéaires $L_1,\ldots,L_n$, telles que pour tout entier N dans $\mathbb{N}^*$, il existe une constante strictement positive κ_N avec :

$$(6)\qquad (|L_1^{3ND^n}P_1(z)|^2+\ldots+|L_n^{3ND^n}P_n(z)|)^{1/2}\geqq\kappa_N(1+\|z\|)^{3(N-1)D^n}$$

hors d'un compact de $\mathbb{C}^n$, où $D=\mathrm{Max}(3, \deg(P_1),\ldots,\deg(P_n))$.

L'existence de ces formes linéaires résulte [5] des travaux de D. Brownawell [6], puis de J. Kollar [9], B. Shiffman et S. Ji [13] concernant l'effectivité des inégalités du type Lojasiewicz. Ce sont précisément de telles inégalités qui permettent d'éluder la difficulté que crée la variété à l'infini (et en particulier ses composantes immergées) dans la résolution en temps polynômial de l'identité de Bezout ou du Nullstellensatz.

Il est par conséquent naturel d'utiliser de telles identités de Jacobi pour donner une solution effective au problème du Nullstellensatz : étant donnés $m+1$ éléments de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, $P_1, \ldots, P_m$, Q, tels que Q s'annule sur l'ensemble des zéros communs de $P_1, \ldots, P_m$, écrire explicitement une puissance de Q dans l'idéal engendré par $P_1, \ldots, P_m$. Une solution à ce problème a déjà été donnée dans [5]; nous en donnerons dans ce papier une approche plus directe : la solution du problème de Bezout (construire, étant donnés m polynômes $P_1, \ldots, P_m$ sans zéros communs dans $\mathbb{C}^n$, m polynômes $Q_1, \ldots, Q_m$ tels que $1 = P_1 Q_1 + \ldots + P_m Q_m$) sera une conséquence de la formule de Cauchy-Weil et des identités de Jacobi généralisées. Il apparaît important de comprendre cette preuve du point de vue algébrique, et en particulier d'interpréter géométriquement la condition (4); en effet, les formules que nous obtenons fournissent une solution au problème dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ lorsque les données sont à coefficients rationnels; de plus ces formules sont « économiques » du point de vue de l'estimation des hauteurs, comme nous l'avons démontré dans [5]. La nouvelle preuve que nous présentons ici devrait permettre plus aisément une telle interprétation.

2. Identités de Jacobi généralisées Formules de Bochner-Martinelli

Nous allons tout d'abord démontrer dans cette section le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient* $P_1, \ldots, P_n$ *n polynômes de n variables, de degrés au plus* D, *tels qu'il existe des constantes strictement positives* K, κ, *d avec*

$$\|P(\zeta)\| = (|P_1(\zeta)|^2 + \ldots + |P_n(\zeta)|^2)^{1/2} \geqq \kappa \|\zeta\|^d, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad \|\zeta\| \geqq K \tag{7}$$

Soit Q *un élément de* $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$; *alors, pour tout multi-indice* $k = (k_1, \ldots, k_n)$ *de* $\mathbb{N}^n$ *tel que* $(k_1 + \ldots + k_n + n)\, d > \deg(Q) + (n-1)(D-d) + n$, *on a*

$$\langle \bar\partial(1/P_1^{k_1+1}) \wedge \ldots \wedge \bar\partial(1/P_n^{k_n+1}), Q(\zeta)\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n \rangle = 0. \tag{8}$$

Remarque. — Notons que lorsque ${}^hP_1, \ldots, {}^hP_n$ sont de même degré et sans zéro commun dans $X_0 = 0$, on a $d = D$ et (8) est alors valide pour $k = (0, \ldots, 0)$ dès que $nd > \deg(Q) + n$, c'est-à-dire $\deg(Q) \leqq \deg(P_1) + \ldots + \deg(P_n) - n - 1$; nous retrouvons par conséquent ici dans un cas particulier la relation classique de Jacobi.

Preuve. — Soient $g_1, \ldots, g_n$ n fonctions entières définissant une variété discrète dans $\mathbb{C}^n$ et φ un élément de $\mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$; on suppose que φ est holomorphe au voisinage des zéros communs de $g_1, \ldots, g_n$; comme conséquence du théorème de Stokes, la fonction θ_g définie presque partout sur $(\mathbb{R}^{+*})^n$ par

$$\theta_g(s_1, \ldots, s_n) = (-1)^{n(n-1)/2} \int_{\Gamma_g(s)} \frac{\varphi}{g_1 \ldots g_n}\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$$

où $\Gamma_g(s)$ désigne le cycle $\{|g_1(\zeta)|^2=s_1, \ldots, |g_n(\zeta)|^2=s_n\}$ convenablement orienté, est presque partout égale à une constante pour $\|s\|$ suffisamment petite; cette constante vaut d'ailleurs $(2i\pi)^n(-1)^{n(n-1)/2}\langle \bar\partial(1/g_1) \wedge \ldots \wedge \bar\partial(1/g_n), \varphi\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n\rangle$.

Considérons maintenant $P_1, \ldots, P_n$ et un multi-indice $k \in \mathbb{N}^n$; la fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$, $J_P^k(., \varphi)$ définie par

$$J_P^k(\lambda; \varphi)=\lambda \int |P_1 \ldots P_n|^{2\lambda} \frac{\bar P_1^{k_1} \ldots \bar P_n^{k_n}}{(|P_1|^2+\ldots+|P_n|^2)^{n+k_1+\ldots+k_n}} \bar\partial P_1 \wedge \ldots \wedge \bar\partial P_n \wedge \varphi\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$$

est holomorphe dans un demi plan $\operatorname{Re}(\lambda)>C(P, \varphi, k)$. Grâce au théorème de Fubini, on peut exprimer $J_P^k(\lambda; \varphi)$ pour $\operatorname{Re}(\lambda)$ assez grand sous la forme

$$J_P^k(\lambda; \varphi)=\frac{\lambda}{(k_1+1) \ldots (k_n+1)} \times \int_{([0, \infty[)^n} s_1^{\lambda/(k_1+1)} \ldots s_n^{\lambda/(k_n+1)} \frac{\theta_{P^{k+1}}(s)}{(s_1^{1/(k_1+1)}+\ldots+s_n^{1/(k_n+1)})^{k_1+\ldots+k_n+n}} ds$$

où

$$P^{k+1}=(P_1^{k_1+1}, \ldots, P_n^{k_n+1}).$$

En utilisant la formule 2, p. 622 [8], on a, pour $\operatorname{Re}(\lambda)>C(P, \varphi, k)$ et η assez petit

$$J_P^k(\lambda; \varphi)=\theta_{P^{k+1}}(0)\, \eta^{\lambda(\sum_{j=1}^{j=n} 1/(k_j+1))} \frac{\Gamma(\lambda+k_1+1) \ldots \Gamma(\lambda+k_n+1)}{n\,\Gamma(n\lambda+k_1+\ldots+k_n+n)}$$
$$+\frac{\lambda}{(k_1+1) \ldots (k_n+1)} \int_{\sum_{j=1}^{j=n} s_j^{1/(k_j+1)}>\eta} s_1^{\lambda/(k_1+1)} \ldots s_n^{\lambda/(k_n+1)} \frac{\theta_{P^{k+1}}(s)}{(s_1^{1/(k_1+1)}+\ldots+s_n^{1/(k_n+1)})^{k_1+\ldots+k_n+n}} ds$$

holomorphe dans un demi plan $\operatorname{Re}(\lambda)>-\gamma(f, \varphi, k)$, $\gamma(f, \varphi, k)>0$ dont la valeur en 0 est

$$J_P^k(0; \varphi)=\theta_{P^{k+1}}(0) \frac{k_1! \ldots k_n!}{n(n-1+k_1+\ldots+k_n)!}.$$

ou encore

$$(2i\pi)^n(-1)^{n(n-1)/2} \frac{k_1! \ldots k_n!}{n(n-1+k_1+\ldots+k_n)!} \langle \bar\partial(1/P_1^{k_1+1}) \wedge \ldots \wedge \bar\partial(1/P_n^{k_n+1}), \varphi\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n\rangle$$

D'autre part, Q désignant un élément de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, on a, pour $\mathrm{Re}(\lambda)$ suffisamment grand

$$\bar\partial\left(|P_1 \ldots P_n|^{2\lambda}\bar P_1^{k_1}\ldots \bar P_n^{k_n}\frac{\sum_{l=1}^{l=n}(-1)^{l-1}\bar P_l\, d\bar P_{[l]}\wedge Q\, d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(|P_1|^2+\ldots+|P_n|^2)^{k_1+\ldots+k_n+n}}\right)$$

$$=n\lambda|P_1\ldots P_n|^{2\lambda}\bar P_1^{k_1}\ldots\bar P_n^{k_n}\frac{\bar\partial\bar P_1\wedge\ldots\wedge\bar\partial\bar P_n\wedge Q\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(|P_1|^2+\ldots|P_n|^2)^{k_1+\ldots+k_n+n}}.$$

avec les notations habituelles

$$d\bar P_{[l]}=d\bar P_1\wedge\ldots\wedge d\bar P_{l-1}\wedge d\bar P_{l+1}\wedge\ldots\wedge d\bar P_n$$

Ainsi, si R est choisi suffisamment grand de manière à ce que la boule de rayon R contienne tous les zéros communs de $(P_1, \ldots, P_n)$, nous avons, en appliquant ce qui précède à une suite d'éléments $\varphi_l\in\mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ approchant la fonction caractéristique de cette boule

$$\text{(9)}\quad \langle\bar\partial(1/P_1^{k_1+1})\wedge\ldots\wedge\bar\partial(1/P_n^{k_n+1}),\ Q\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n\rangle=\lim_{l\to\infty}(n\,C(n,k)\,J_P^k(0;\,Q\varphi_l))$$

$$=C(n,k)\int_{\|\zeta\|=R}\frac{\bar P_1^{k_1}\ldots\bar P_{k_n}\sum_{l=1}^{l=n}(-1)^{l-1}\bar P_l\,d\bar P_{[l]}\wedge Q\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(|P_1|^2+\ldots+|P_n|^2)^{k_1+\ldots+k_n+n}}$$

avec

$$C(n,k)=\frac{(-1)^{n(n-1)/2}(n-1+k_1+\ldots+k_n)!}{(2i\pi)^n k_1!\ldots k_n!}.$$

La preuve du théorème s'obtient en faisant tendre R vers l'infini dans (9) et en utilisant l'hypothèse faite sur le comportement asymptotique de $\|P(\zeta)\|$. □

Les formules de Bochner-Martinelli que nous avons utilisées dans la preuve ci-dessus s'étendent en fait au cadre $\mathscr{C}^\infty$ si l'on fait intervenir le courant résidu

$$\bar\partial(1/f_1)\wedge\ldots\wedge\bar\partial(1/f_p)$$

attaché à un p-uplet de fonctions holomorphes définissant une intersection complète dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ (*voir* [7], [10], [4]); nous pouvons ainsi énoncer le

THÉORÈME 2. — *Soient $f_1, \ldots, f_p$, $(p\leq n)$, p fonctions holomorphes définissant une intersection complète dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$; soit $k\in\mathbb{N}^p$ et φ une $(n, n\text{-}p)$ forme à coefficients dans $\mathscr{D}(\Omega)$; la fonction $J_f^k(.;\varphi)$ des n paramètres complexes λ définie pour λ tel que* $\mathrm{Re}(\lambda_j)$ *soit suffisamment grand* $(j=1, \ldots, p)$ *par*

$$J_f^k(\lambda;\varphi)=\left(\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_p}{p}\right)\int|f_1|^{2\lambda_1}\ldots|f_p|^{2\lambda_p}\frac{\bar f_1^{k_1}\ldots\bar f_p^{k_p}\bar\partial\bar f_1\wedge\ldots\wedge\bar\partial\bar f_p\wedge\varphi}{(|f_1|^2+\ldots+|f_p|^2)^{k_1+\ldots+k_p+p}}$$

se prolonge en une application méromorphe dans $\mathbb{C}^p$, *holomorphe dans un produit de demi plans* $\operatorname{Re}(\lambda_j) > -\gamma(f, \varphi, k)$, $\gamma(f, \varphi, k) > 0$, $j = 1, \ldots, p$ *et de valeur en* 0

$$(2 i \pi)^p (-1)^{p(p-1)/2} \frac{k_1 ! \ldots k_p !}{p(p-1+k_1+\ldots+k_p)!} \langle \bar{\partial}(1/f_1^{k_1+1}) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}(1/f_p^{k_p+1}), \varphi \rangle$$

Preuve. — Dans [4], le théorème est démontré dans le cas $p=1$; aussi supposerons-nous dans ce qui suit $p \geqq 2$.

On remarque dans un premier temps que, lorsque $\operatorname{Re}(\lambda_1), \ldots, \operatorname{Re}(\lambda_p)$ sont suffisamment grands, on a

$$\bar{\partial}\left(|f_1|^{2\lambda_1} \ldots |f_p|^{2\lambda_p} \bar{f}_1^{k_1} \ldots \bar{f}_p^{k_p} \frac{\sum_{l=1}^{l=p} (-1)^{l-1} \bar{f}_l \overline{\partial f}_{[l]}}{(|f_1|^2+\ldots+|f_p|^2)^{p+k_1+\ldots+k_p}} \right)$$

$$= (\lambda_1+\ldots+\lambda_p) |f_1|^{2\lambda_1} \ldots |f_p|^{2\lambda_p} \bar{f}_1^{k_1} \ldots \bar{f}_p^{k_p} \frac{\overline{\partial f_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\partial f_p}}{(|f_1|^2+\ldots+|f_p|^2)^{p+k_1+\ldots+k_p}}$$

ce qui permet d'écrire, pour $\operatorname{Re}(\lambda_j)$ assez grands

$$\mathrm{J}_f^k(\lambda; \varphi) = \frac{(-1)^p}{p} \int |f_1|^{2\lambda_1} \ldots |f_p|^{2\lambda_p} \bar{f}_1^{k_1} \ldots \bar{f}_p^{k_p} \frac{\sum_{l=1}^{l=p} (-1)^{l-1} \bar{f}_l \overline{\partial f}_{[l]}}{(|f_1|^2+\ldots+|f_p|^2)^{p+k_1+\ldots+k_p}} \wedge \partial \varphi .$$

A ce stade, on étudie le problème lorsque φ est à support dans un voisinage d'un zéro commun de $f_1, \ldots, f_p$ que par commodité on supposera être l'origine; on introduit une variété analytique complexe **X** et la projection propre correspondante π de manière à résoudre les singularités de $f_1 \ldots f_p$; ainsi, comme dans [4], $\mathrm{J}_f^k(\lambda; \varphi)$ se présente comme une somme de termes de la forme

$$\int |g_1|^{2\lambda_1} \ldots |g_p|^{2\lambda_p} \bar{g}_1^{k_1} \ldots \bar{g}_p^{k_p} \frac{\sum_{l=1}^{l=p} (-1)^{l-1} \bar{g}_l \bar{\partial} g_{[l]}}{(|g_1|^2+\ldots+|g_p|^2)^{p+k_1+\ldots+k_p}} \wedge \theta(\omega) \pi^*(\partial \varphi)(\omega)$$

où θ est un élément de $\mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$, et $g_1, \ldots, g_p$ des fonctions de la forme $u_i . m_i$, les m_i désignant des monômes et les u_i des fonctions holomorphes sans zéro sur le support de θ; les difficultés surgissent dès qu'aucun des monômes m_i n'est le monôme **1**. Lorsque l'on a affaire à un tel terme, on utilise, comme dans [4], une variété toroïdale $\mathbf{Y}_g$ construite à partir du diagramme de Newton du polynôme $m_1+\ldots+m_p$ et la projection propre correspondante π_g (*voir* [1] par exemple pour cette construction); nous nous trouvons alors ramenés au cas où les p monômes peuvent être supposés multiples de l'un d'entre eux, ce qui nous amène à étudier des expressions de la forme

$$\int |t_1|^{2\mathrm{L}_1(\lambda)} \ldots |t_n|^{2\mathrm{L}_n(\lambda)} \frac{(\theta_1+\theta_2 \wedge (d\bar{m}/\bar{m}))}{m^{p+k_1+\ldots+k_p}} |v_1|^{2\lambda_1} \ldots |v_p|^{2\lambda_p} \wedge (\pi_g^*(\pi^*(\partial \varphi)))(t)$$

où θ_1 (resp. θ_2) est une $(0, p-1)$ (resp. $(0, p-2)$) forme à coefficients dans $\mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$, $v_1, \ldots, v_p$ des fonctions holomorphes des variables t sans zéros sur l'union des supports de θ_1 et θ_2, m un monôme en $(t_1, \ldots, t_n)$ divisant tous les $(\pi_g^*(\pi^*(f_j))$, $j=1, \ldots, p$ et $L_1, \ldots, L_n$ des formes linéaires (avec L_j non identiquement nulle dès que t_j figure dans l'écriture de m).

Une expression du type ci-dessus se présente comme une combinaison linéaire de deux sortes de termes : les uns sont de la forme

$$\int |t_1|^{2L_1(\lambda)} \ldots |t_n|^{2L_n(\lambda)} \frac{|v_1|^{2\lambda_1} \ldots |v_p|^{2\lambda_p}}{m^{p+k_1+\ldots+k_p}} \theta_1 \wedge (\pi_g^*(\pi^*(\bar{\partial}\varphi)))(t) \tag{10}$$

et se prolongent (on le voit aisément en itérant des intégrations par parties) en des fonctions de λ méromorphes dans $\mathbb{C}^p$; les prolongements obtenus sont holomorphes dans un produit de demi-espaces du type $\operatorname{Re}(\lambda_j) > -\gamma$, avec $\gamma > 0$, du fait de l'absence de $\bar{t}_i$ au dénominateur de l'intégrant figurant dans (10). Les autres sont de la forme

$$\int |t_1|^{2L_1(\lambda)} \ldots |t_n|^{2L_n(\lambda)} \frac{|v_1|^{2\lambda_1} \ldots |v_p|^{2\lambda_p}}{m^{p+k_1+\ldots+k_p}} \frac{d\bar{t}_j}{\bar{t}_j} \wedge \theta_2 \wedge (\pi_g^*(\pi^*(\bar{\partial}\varphi)))(t)). \tag{11}$$

La forme $\bar{\partial}\varphi$ s'écrit $\sum \xi_\beta \wedge \bar{\psi}_\beta$ où les ξ_β sont des $(n, 0)$ formes et les ψ_β des $(n\text{-}p+1,0)$ formes à coefficients constants. Dans le système de coordonnées locales $(t_1, \ldots, t_n)$ utilisé pour paramétrer le voisinage du point de $\mathbf{Y}_g$ près duquel nous nous plaçons lorsqu'intervient un terme du type (11), la forme $\pi_g^*(\pi^*(\bar{\partial}\varphi))$ s'écrit

$$\pi_g^*(\pi^*(\bar{\partial}\varphi)) = \sum \pi_g^*(\pi_g^*\pi^*(\xi_\beta) \wedge (\sum_{\{A \subset [1, \ldots, p], \operatorname{card}(A)=n-p+1\}} \bar{\psi}_{\beta, A}\, d\bar{t}_A),$$

les fonctions $\psi_{\beta, A}$ étant holomorphes dans la carte locale en $(t_1, \ldots, t_n)$ et $d\bar{t}_A$ désignant le produit extérieur $d\bar{t}_{j(1)} \wedge \ldots \wedge d\bar{t}_{j(n-p+1)}$, avec $j(1) < \ldots < j(n-p+1)$ et de plus $\{j(1), \ldots, j(n-p+1)\} = A$. Lorsque la coordonnée t_j mise en évidence dans (11) (et, *a fortiori* figurant dans le monôme m intervenant dans la même expression) ne correspond pas à un indice figurant dans une famille à $n-p+1$ éléments A, on a $\psi_{\beta, A} = t_j \rho_{\beta, A}$, les $\rho_{\beta, A}$ étant holomorphes dans la carte locale; cela tient au fait que la $(n, n\text{-}p+1)$ forme $\bar{\partial}\varphi$ est nulle sur l'ensemble $n\text{-}p$ dimensionnel $\{f_1 = \ldots = f_p = 0\}$, ce qui implique, puisque tous les $\pi_g^*\pi^* f_i$, $i=1, \ldots, p$, sont multiples de m, la nullité de $\pi_g^*\pi(\psi_\beta)$ sur $\{t_j = 0\}$ et, par voie de conséquence, celle de toutes les fonctions $\psi_{\beta, A}$, pourvu que $j \notin A$, sur $\{t_j = 0\}$. Ainsi donc, toute expression de la forme (11) se présente en fait comme une combinaison de termes

$$\int |t_1|^{2L_1(\lambda)} \ldots |t_n|^{2L_n(\lambda)} \frac{|v_1|^{2\lambda_1} \ldots |v_p|^{2\lambda_p}}{m^{p+k_1+\ldots+k_p}} \theta \wedge d\bar{t}_j \wedge \pi_g^*\pi^*(\xi_\beta) \wedge \bar{\rho}_{\beta, A}\, d\bar{t}_A \tag{12}$$

avec j ne figurant pas dans le $n\text{-}p+1$ uplet A. De tels termes se traitent, pour ce qui est de leur prolongement analytique, exactement comme les fonctions de λ s'écrivant, pour $\operatorname{Re}(\lambda_j)$ grands, $j=1, \ldots, p$, sous la forme (11). Les deux premières assertions du théorème 2 se trouvent démontrées.

La troisième assertion du théorème se démontre par récurrence sur la quantité n-p; lorsque $n-p=0$, le résultat a été démontré dans [4].

Supposons que $f_1, \ldots, f_p$ définissent une intersection complète dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$; quitte à restreindre ce voisinage et à effectuer un changement linéaire de coordonnées, nous pouvons supposer que $(\zeta_1, f_1, \ldots, f_p)$ définissent une variété analytique de dimension n-$p-1$ dans le voisinage en question et que, pour les valeurs génériques de ζ_1^0,

$$\dim_{\zeta'} \{ \zeta' \in \mathbb{C}^{n-1}, f_1(\zeta_1^0, \zeta') = \ldots = f_p(\zeta_1^0, \zeta') = 0 \} \leqq n-p-1.$$

La preuve dans le cas où le multi-indice k est quelconque ne différant pas de celle dans le cas où $k=0$, nous ferons dorénavant cette hypothèse. Nous introduisons deux fonctions K_1 et K_2 des paramètres complexes λ et μ, définies et holomorphes pour $\operatorname{Re}(\lambda)$ et $\operatorname{Re}(\mu)$ assez grands par

$$K_1(\lambda, \mu) = \lambda \int |\zeta_1|^{2\mu} |f_1 \ldots f_p|^{2\lambda} \frac{\bar\partial \bar f_1 \wedge \ldots \wedge \bar\partial \bar f_p}{\| f \|^{2p}} \wedge \varphi$$

$$K_2(\lambda, \mu) = \frac{\lambda^p}{p!} \int |\zeta_1|^{2\mu} |f_1 \ldots f_p|^{2(\lambda-1)} \bar\partial \bar f_1 \wedge \ldots \wedge \bar\partial \bar f_p \wedge \varphi$$

où $\| f \|^2 = \sum |f_j|^2$. Comme fonctions de (λ, μ), K_1 et K_2 se prolongent analytiquement en des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^2$; dans les deux cas, le lieu polaire est une union d'hyperplans $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma = 0$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$.

La forme test φ s'écrit $\varphi = \varphi_1 + d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \varphi_2$ où $d\bar\zeta_1$ n'apparaît pas dans φ_1.

En s'inspirant des arguments développés plus haut, il est aisé de voir sur le prolongement de K_1 est holomorphe au voisinage de $(0, 0)$ et que la valeur en $(0, 0)$ est la même que celle que l'on obtiendrait en remplaçant φ par $d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \varphi_2$. Comme dans la preuve du théorème 1.3 de [4], le prolongement de K_2 près de $(0, 0)$ s'écrit

$$K_2(\lambda, \mu) = h_2(\lambda, \mu) + \sum_r \frac{\lambda^p k_r(\lambda, \mu)}{\prod_{\varkappa} (\rho_{\tau, \varkappa} \lambda + \sigma_{\tau, \varkappa} \mu)}$$

où les produits figurant au dénominateur sont des produits d'au plus p-1 facteurs $\rho_{\tau, \varkappa} \lambda + \sigma_{\tau, \varkappa} \mu$, les constantes $\rho_{\tau, k}$ et $\sigma_{\tau, k}$ désignant des éléments respectivement de $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$, et h_2, k_τ des fonctions holomorphes près de l'origine dans $\mathbb{C}^2$.

Pour prouver ce résultat, on utilise le théorème de désingularisation d'Hironaka pour construire, au-dessus d'un voisinage d'un point de $\mathbb{C}^n$ (par exemple ici l'origine) une variété analytique complexe X et une application propre π telles que, dans une carte locale (avec système de coordonnées W), la fonction $\pi^*(\zeta_1 f_1 \ldots f_p)$ s'écrive comme un inversible fois un monôme. L'étude de K_2 se fait en utilisant une partition de l'unité relative au recouvrement de X; l'étude est exactement celle qui est faite dans la preuve du théorème 1.3 de [4] une fois que l'on a remarqué que $\zeta_1, f_1, \ldots, f_p$ définissaient aussi une intersection complète au voisinage de l'origine. Elle consiste à expliciter les intégrations par parties nécessaires pour écrire le prolongement analytique au voisinage de (0, 0) d'une fonction de (λ, μ) de la forme $\int |\pi^* \zeta_1|^{2\mu} |w^\alpha|^{2\lambda} (1/w^A)\, d\bar{w}_J/\bar{w}_J \wedge \theta(\lambda, \mu, W)\, \pi^*(\varphi)$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $A_1, \ldots, A_n$ sont des entiers positifs ou nuls, $J=\{j_1, \ldots, j_p\}$ un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal p et θ une fonction à support compact en W entière comme fonction de (λ, μ); on voit clairement que les termes les plus préoccupants sont ceux pour lesquels un des w_j, $j \in J$ figure aussi dans l'expression de $\pi^* \zeta_1(W)$; parce que la forme φ est une $(n, n-p)$ forme tandis que l'ensemble des zéros communs à ζ_1 et aux f_k est de dimension $n-p-1$, le prolongement analytique de tels termes au voisinage de (0, 0) présente au dénominateur un produit d'au plus $p-1$ formes linéaires en (λ, μ); on se réfèrera à [4] pour plus de détails sur cet argument.

On peut donc étudier $K_2(0, \mu)$ pour μ voisin de 0; de plus, pour calculer $h_2(0, 0)$, on peut remplaçer φ par $d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \varphi_2$ et calculer $\lim_{\mu \to 0} K(0, \mu)$. Puisque notre objectif est de prouver $K_1(0, 0)=h_2(0, 0)$, nous remplacerons φ par $d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \varphi_2$ et nous considérerons dans un premier temps $K_1(\lambda, \mu_0)$ et $K_2(\lambda, \mu_0)$ pour $\mathrm{Re}(\mu_0)$ grand.

Le théorème de Fubini permet d'écrire, pour $\mathrm{Re}(\lambda)$ assez grand

$$K_1(\lambda, \mu_0)=(-1)^{n-1}\lambda$$

$$\int |\zeta_1|^{2\mu_0} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \left(\int_{\zeta'} |f_1 \ldots f_p(\zeta_1, \zeta')|^{2\lambda} \frac{\bar{\partial}_{\zeta'} \bar{f}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_{\zeta'} \bar{f}_p}{\| f(\zeta_1, \zeta' \|^{2p}} \wedge \varphi_2\right)$$

$$K_2(\lambda, \mu_0)=(-1)^{n-1}\frac{\lambda^p}{p!}$$

$$\int |\zeta_1|^{2\mu_0} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \left(\int_{\zeta'} |f_1 \ldots f_p(\zeta)|^{2(\lambda-1)} \bar{\partial}_{\zeta'} \bar{f}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_{\zeta'} \bar{f}_p \wedge \varphi_2\right)$$

Pour une valeur non nulle ζ_1^0, étudions le prolongement analytique de

$$\lambda \to \lambda \int_{\zeta_1=\zeta_1^0} |f_1 \ldots f_p|^{2\lambda} \frac{\bar{\partial}_{\zeta'} \bar{f}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_{\zeta'} \bar{f}_p}{\| f \|^{2p}} \wedge \varphi_2 \tag{13}$$

Ceci se fait en utilisant le téorème d'Hironaka (relatif à $\zeta_1 f_1 \ldots f_p$), la projection propre correspondante π, suivi de constructions de variétés toroïdales et de leurs applications propres associées π_g; dans une carte locale, nous avons $\pi_g^*(\pi^*(\zeta_1))(t)=v(t)\, m(t)$ avec m monôme en t et v fonction holomorphe en t ne s'annulant pas; nous supposerons ζ_1^0 assez petit de manière à n'avoir à considérer que le cas où $m \neq 1$, auquel cas nous pouvons, quitte à faire un changement de coordonnées locales supplémentaire, prendre $v=1$. L'expression (13) se présente comme une somme d'expressions du type

$$\lambda \int_{t_1^{\gamma_1} \ldots t_n^{\gamma_n}=\zeta_1^0} |u t_1^{\omega_1} \ldots t_n^{\omega_n}|^{2\lambda} \frac{\bar{m}^p \theta_1 + \bar{m}^{p-1} \theta_2\, d\bar{m}}{|m|^{2p}} \wedge \sigma \tag{14}$$

m désignant un mônôme, σ une $(n-1,\, n-2)$ forme, θ_1 une (0, 1) forme à coefficients dans $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, θ_2 un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, u une fonction holomorphe sans zéro sur l'union des supports de θ_1 et θ_2, et les γ_j et les ω_j des entiers positifs. Comme dans [2], l'étude du prolongement de (14) se fait en utilisant des coordonnées polaires, ζ_1^0 jouant le rôle de paramètre; il apparaît pour $\operatorname{Re}(\lambda) > -\varepsilon\,(\varepsilon > 0$, indépendant de $\zeta_1^0)$ un nombre fini de pôles éventuels; les parties polaires en ces éventuels pôles du prolongement de (14) ont des coefficients bornés en $C/|\zeta_1^0|^M$ et l'ensemble de ces pôles est inclus dans un sous-ensemble de $\mathbb{Q}^*$ indépendant de ζ_1^0. Ceci nous autorise à appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir, pour $\operatorname{Re}(\mu_0)$ grand

$$K_1(0, \mu_0) = (-1)^{n-1} \int |\zeta_1|^{2\mu_0}\, d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1\, \Phi(\zeta_1)$$

où, pour ζ_1^0 générique, $\Phi(\zeta_1^0)$ désigne la valeur en $\lambda=0$ du prolongement méromorphe de (13).

Le même raisonnement nous donne

$$K_2(0, \mu_0) = (-1)^{n-1} \int |\zeta_1|^{2\mu_0}\, d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1\, \Psi(\zeta_1)$$

où, pour ζ_1^0 générique, $\Psi(\zeta_1^0)$ désigne la valeur en $\lambda=0$ du prolongement méromorphe de

$$\frac{\lambda^p}{p!} \int_{\zeta_1=\zeta_1^0} |f_1 \ldots f_p(\zeta_1^0, \zeta')|^{2(\lambda-1)}\, \bar{\partial}_{\zeta'} \bar{f}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_{\zeta'} \bar{f}_p \wedge \varphi(\zeta_1^0, \zeta').$$

L'hypothèse de récurrence nous permet d'identifier $K_1(0, \mu_0)$ et $K_2(0, \mu_0)$ pour $\operatorname{Re}(\mu_0)$ assez grand; en effet, pour ζ_1^0 générique, les fonctions de $n-1$ variables $\zeta' \to f_k(\zeta_1^0, \zeta')$ définissent une sous-variété de dimension $n-1-p$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$; si le nombre de fonctions est resté inchangé, le nombre de variables a diminué d'une unité et l'on a donc égalité entre $\Phi(\zeta_1^0)$ et $\Psi(\zeta_1^0)$, d'où l'identité entre les fonctions $K_1(0, \mu_0)$ et $K_2(0, \mu_0)$ pour μ_0 de partie réelle suffisamment grande; on conclut en utilisant le prolongement analytique. □

3. Application au Nullstellensatz dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$.

On considère $n+1$ polynômes $P_1, \ldots, P_{n+1}$ de n variables complexes sans zéros communs dans $\mathbb{C}^n$; on leur associe un système $g_{j,k}(.,.)$, $1 \leqq j \leqq n+1$, $1 \leqq k \leqq n$ de polynômes en $2n$ variables tels que

$$P_j(z) - P_j(\zeta) = \sum_{k=1}^{k=n} g_{j,k}(z, \zeta)(z_k - \zeta_k), \qquad j=1, \ldots, n+1$$

et l'on note $\mathbf{D}(z, \zeta)$ le polynôme en $2n$ variables défini par

$$\mathbf{D}(z,\zeta)=\begin{vmatrix} g_{1,1}(z,\zeta) & \dots & g_{n,1}(z,\zeta) & g_{n+1,1}(z,\zeta) \\ . & \dots & . & . \\ . & \dots & . & . \\ g_{1,n}(z,\zeta) & \dots & g_{n,n}(z,\zeta) & g_{n+1,n}(z,\zeta) \\ P_1(z)-P_1(\zeta) & \dots & P_n(z)-P_n(\zeta) & P_{n+1}(z) \end{vmatrix}$$

Remarquons qu'en soustrayant à la dernière ligne la combinaison linéaire $(z_1-\zeta_1)L_1+\dots+(z_n-\zeta_n)L_n$ des n premières, on obtient

$$\text{(15)} \qquad \mathbf{D}(z,\zeta)=\begin{vmatrix} g_{1,1}(z,\zeta) & \dots & g_{n,1}(z,\zeta) \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ g_{1,n}(z,\zeta) & \dots & g_{n,n}(z,\zeta) \end{vmatrix} P_{n+1}(\zeta)=\Delta(z,\zeta)P_{n+1}(\zeta)$$

Nous avons la proposition suivante, très voisine du théorème 5.1 de [5] :

PROPOSITION 3. — *Supposons que* $P_1, \dots, P_{n+1}$ *soient* $n+1$ *éléments de* $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ *comme précédemment et que, de plus, il existe trois constantes strictement positives* K, κ *de* d *telles que*

$$(|P_1(\zeta)|^2+\dots+|P_n(\zeta)|^2)^{1/2} \geqq \kappa \|\zeta\|^d \qquad \textit{pour} \quad \|\zeta\| \geqq K.$$

Alors, pour tout entier q *satisfaisant* $(q+2n-1)d>(2n-1)D$ *où* D *désigne le maximum des degrés des* P_j, $j=1, \dots, n$, *on a l'identité*

$$1=\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^n \\ k_1+\dots+k_n\leqq q}} <\bar\partial(1/P_1^{k_1+1})\wedge\dots\wedge\bar\partial(1/P_n^{k_n+1}), \frac{\mathbf{D}(z,\,.)}{P_{n+1}(.)}d\zeta_1\wedge\dots\wedge d\zeta_n> P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}(z).$$

Remarque. — les termes écrits entre crochets dans la formule ci-dessus sont des polynômes en les variables $Z=(z_1, \dots, z_n)$ de degré au plus $n(D-1)$.

Preuve. — Pour presque tous les choix de réels $R_1, \dots, R_n$ supérieurs à une certaine constante strictement positive C, l'ensemble $V(R)=\{\zeta, |P_1(\zeta)|<R_1, \dots, |P_n(\zeta)|<R_n\}$ est un polyèdre de Weil; cela résulte des hypothèses faites sur $P_1, \dots, P_n$ et du théorème de Sard. Nous pouvons donc, dans un tel domaine, représenter la fonction **1** grâce à la formule de Cauchy-Weil; ainsi

$$1=\frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\Gamma(R)}\frac{\Delta(\zeta,z)}{(P_1(\zeta)-P_1(z))\dots(P_n(\zeta)-P_n(z))}d\zeta_1\wedge\dots\wedge d\zeta_n, \qquad z\in V(R)$$

où $\Gamma(R)$ désigne la frontière de Shilov du polyèdre $V(R)$ orientée de manière à ce que $d(\arg(P_1)) \wedge \ldots \wedge d(\arg(P_n)) \geqq 0$. Ceci s'écrit aussi

$$1 = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma(R)} \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{P_1^{k_1}(z) \ldots P_n^{k_n}(z)}{P_1^{k_1+1}(\zeta) \ldots P_n^{k_n+1}(\zeta)} \Delta(\zeta, z)\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\int_{\Gamma(R)} \frac{\Delta(\zeta, z)}{P_1^{k_1+1}(\zeta) \ldots P_n^{k_n+1}(\zeta)} d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n \right) P_1^{k_1}(z) \ldots P_n^{k_n}(z).$$

On applique alors le théorème 1 avec $Q = \Delta(., z)$ et l'on obtient, si R est choisi assez grand pour que $\Delta(R)$ contienne tous les zéros communs de $P_1, \ldots, P_n$ et si $z \in \Delta(R)$

$$1 = \sum_{k,\, k_1 + \ldots + k_n \leqq (2n-1)^{(D-d)/d}} < \bar\partial(1/P_1^{k_1+1}) \wedge \ldots \wedge \bar\partial(1/P_n^{k_n+1}), \Delta(., z)\, d\zeta > P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}(z)$$

avec $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$.

La conclusion de la proposition résulte alors de l'identité (15) appliquée lorsque ζ est voisin des zéros communs de $P_1, \ldots, P_n$. □

Remarque. — Dans [5], nous démontrons un résultat un peu plus fort que la proposition 3 : en fait l'hypothèse sur q peut être remplacée par

$$(q + 2n - 1)\, d > 2(n-1)\, D$$

au prix d'une démonstration beaucoup plus compliquée se basant sur des formules du type Bochner-Martinelli pondérées suivant les idées de B. Berndtsson. De telles identités subsistent dans le cadre analytique, où l'algèbre des polynômes se trouve remplacée par celle des transformées de Fourier des distributions à support compact, et les conditions portant sur les degrés par des hypothèses de nature géométrique sur les supports [3].

Le lemme technique suivant permet de ramener dans le cas général la solution du problème de Bezout à l'application de la proposition 3 ou de son raffinement obtenu dans [5]. Afin d'être complets, nous en rappelons ici la preuve (*voir* [5], section 5).

LEMME 4. — *Soient* $p_1, \ldots p_n$ *n polynômes de* $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ *de degrés respectifs* $\delta_1, \ldots, \delta_n$ avec $\delta_j > 2$, $j = 1, \ldots, n$; *on suppose que pour toute sous famille finie* $\mathscr{I}$ *de* $\{p_1, \ldots, p_n\}$, *on a*

$$\dim \{ \zeta, \forall p \in \mathscr{I}, p(\zeta) = 0 \} \leqq n - \mathrm{card}(\mathscr{I}).$$

Il existe des formes linéaires de n variables, à coefficients rationnels, $L_1, \ldots, L_n$ *et trois constantes strictement positives* K, κ_1, κ_2 *telles que*

$$\text{(16)} \qquad \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq n} |(L_j(\zeta))^{3N\delta_1 \ldots \delta_n p_j(\zeta)}| \geqq \kappa_1 (\kappa_2)^N \| \zeta \|^{3(N-1)\delta_1 \ldots \delta_n}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ *et tout* ζ *dans* $\mathbb{C}^n$ *hors de la boule de rayon* K.

Preuve. — D'après le classique théorème de normalisation d'E. Noether (*voir* par exemple [15]), il existe une matrice inversible A à coefficients entiers, des constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que pour tout $k\in\{1, \ldots, n\}$ pour tout sous-ensemble I de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal k, on ait

$$\{w\in\mathbb{C}^n,\ \|w\|\geqq C_1 \text{ et } p_j(\mathrm{A}\,w)=0 \text{ pour } j\in \mathrm{I}\}\subset\left\{w\in\mathbb{C}^n,\ \sum_{l=1}^{l=k}|w_l|\leqq C_2(\sum_{\substack{l>k\\ 1\leqq l\leqq n}}|w_l|)\right\}$$

avec la convention qu'une somme indexée sur l'ensemble vide vaut 1.

D'autre part, les inégalités de type Lojasiewicz établies par S. Ji et B. Shiffman [13] à partir des travaux de J. Kollar [9] nous assurent que lorsque la variété des zéros des polynômes p_j, $j\in\mathrm{I}$, est de dimension n-card (I), il existe une constante strictement positive κ_I telle que

$$\text{(17)}\qquad \operatorname*{Max}_{j\in\mathrm{I}}|p_j(\zeta)|\geqq\kappa_\mathrm{I}\left(\frac{\operatorname{dist}(\zeta,\{p_j=0,\ j\in\mathrm{I}\})}{1+\|\zeta\|^3}\right)^{\prod_{j\in\mathrm{I}}\delta_j}$$

Il résulte également du travail de Kollar [9] que, dans le cas où les polynômes p_j, $j\in\mathrm{I}$ n'ont aucun zéro commun dans $\mathbb{C}^n$, on dispose d'une inégalité de la forme

$$\text{(18)}\qquad \operatorname*{Max}_{j\in\mathrm{I}}|p_j(\zeta)|\geqq\kappa_\mathrm{I}\left(\frac{1}{1+\|\zeta\|}\right)^{\prod_{j\in\mathrm{I}}\delta_j}$$

Ainsi, il existe une constante $\varepsilon>0$ telle que, pour toute sous famille $\{p_j,\ j\in\mathrm{I}\}$ de $\{p_1, \ldots, p_n\}$ de cardinal k, on ait

$$\{w,\ \|w\|\geqq C_1,\ |p_j(\mathrm{A}\,w)|\leqq\varepsilon(1+\|w\|)^{-3\prod_{j\in\mathrm{I}}\delta_j},\ j\in\mathrm{I}\}$$

$$\subset\{w,\ \sum_{1\leqq l\leqq k}|w_l|\leqq(C_2+1)\sum_{\substack{l>k\\ 1\leqq l\leqq n}}|w_l|\}.$$

Considérons une matrice (n, n) $\mathbb{B}$, à coefficients entiers, dont aucun mineur n'est nul, et notons T la maximum des modules de tous les mineurs extraits de $\mathbb{B}$; on prend un entier M strictement supérieur à $(C_2+1)\,n\,\mathrm{T}$ et l'on pose

$$\Lambda_j(w)=b_{j,1}w_1+\mathrm{M}\,b_{j,2}w_2+\ldots+\mathrm{M}^{n-1}b_{j,n}w_n,\qquad w\in\mathbb{C}^n,\quad j=1, \ldots, n$$

$$\mathrm{L}_j(\zeta)=\Lambda_j(\mathrm{A}^{-1}\zeta),\qquad \zeta\in\mathbb{C}^n,\quad j=1, \ldots, n.$$

D'après les règles de Cramer, il existe pour chaque k dans $\{0, \ldots, n-1\}$ une constante ε_k telle que

$$\{w\in\mathbb{C}^n,\ \sum_{1\leqq l\leqq k}|w_l|\leqq(C_2+1)\sum_{\substack{l>k\\ 1\leqq l\leqq n}}|w_l|\}\subset\{w\in\mathbb{C}^n,\ \operatorname*{Min}_{\substack{\mathrm{I}\subset\{1, \ldots, n\}\\ \mathrm{card}\,(\mathrm{I})=n-k}}\ \sum_{j\in\mathrm{I}}|\Lambda_j(w)|\geqq\varepsilon_k\|w\|\}.$$

Soit maintenant ζ dans $\mathbb{C}^n$, avec $\|A^{-1}\zeta\| \geqq C_1$; d'après (18), il existe un sous-ensemble $I(\zeta)$ de $\{1, \ldots, n\}$, éventuellement vide mais de cardinal au plus égal à $n-1$ tel que

$$\operatorname*{Max}_{l \in I(\zeta)} |p_l(\zeta)| < \varepsilon (1 + \|A^{-1}\zeta\|)^{-3 \prod_{j=1}^{j=n} \delta_j}$$

$$\operatorname*{Min}_{l \in \{1, \ldots, n\} \setminus I(\zeta)} |p_l(\zeta)| \geqq \varepsilon (1 + \|A^{-1}\zeta\|)^{-3 \prod_{j=1}^{j=n} \delta_j}$$

Il est alors immédiat de constater que

$$\operatorname*{Min}_{l \in \{1, \ldots, n\} \setminus I(\zeta)} |L_l^{3N\delta_1 \ldots \delta_n}(\zeta) p_l(\zeta)| \geqq \varepsilon \varepsilon_k^{3N\delta_1 \ldots \delta_n} \|A^{-1}\zeta\|^{3(N-1)\delta_1 \ldots \delta_n}$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Ce lemme, joint à la proposition 3, nous permet de démontrer le

THÉORÈME 3 [5]. — *Soient* $P_1, \ldots, P_m$, *m éléments de* $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ *sans zéros communs dans* $\mathbb{C}^n$; *on note* D *le maximum de leurs degrés et de* 3 *et h le maximum des logarithmes des modules de tous leurs coefficients non nuls; il existe un entier non nul a, des éléments* $Q_1, \ldots, Q_n$ *de* $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ *tels que*

$$a = P_1 Q_1 + \ldots + P_m Q_m$$
$$\operatorname{Max}(\deg(Q_j)) \leqq 10 n^2 D^n$$
$$\operatorname{Max}(\ln|a|, \ln|\text{coeff. des } Q_j|) \leqq \kappa(n) D^{8n+3}(h + D\ln(D))$$

où $\kappa(n)$ *ne dépend que de la dimension n et serait effectivement calculable.*

Preuve. — Nous nous contenterons de décrire le scénario ramenant la preuve du théorème 3 à celle de la proposition 3; les estimations de hauteur ont été faites dans [5]. Nous construisons dans l'idéal engendré par $P_1, \ldots, P_m$ dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ n polynômes $p_1, \ldots, p_n$ satisfaisant aux hypothèses du lemme 4; $p_1, \ldots, p_n$ sont en fait des combinaisons linéaires de $P_1, \ldots, P_m$.

On vérifie

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right) > \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{3ND^{n-1}}\right) \quad \text{pour} \quad N = 3n.$$

D'autre part, le lemme 4 est valable pour les polynômes $p_1, \ldots, p_n$ et l'on peut même se contenter de remplacer $\delta_1 \ldots \delta_n$ par D^n, D désignant un majorant supérieur ou égal à 3 des degrés des P_j, donc des p_j. Ainsi donc, nous pouvons construire des L_j et appliquer la proposition 3 avec $q=1$ et, à la place de $P_1, \ldots, P_{n+1}$, les polynômes $L_1^M p_1, \ldots, L_n^M p_n, p_{n+1}$, où $M = 9nD^n$ et où p_{n+1} est une combinaison linéaire à coefficients entiers de $P_1, \ldots, P_m$ ne s'annulant en aucun zéro commun de $L_1 p_1, \ldots, L_n p_n$.

La formule figurant dans l'énoncé de la proposition 3 est bien une identité de type $1 = \sum P_j Q_j$ du fait que le courant résidu attaché à un système de polynômes est annulé par l'idéal qu'ils engendrent dans l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de leurs zéros communs.

La formule obtenue est une identité de Bezout dans $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ et les degrés des Q_j sont majorés par $10 n^2 D^n$; quant aux estimations de hauteur, elles mettent en jeu une estimation précise de la constante C_2 intervenant dans la preuve du lemme 4 et dans le contrôle des coefficients des formes linéaires $L_1, \ldots, L_n$; nous utilisons à cette fin les résultats de P. Philippon ([11], [12]) concernant l'estimation d'un dénominateur dans la solution du problème de Bezout lorsque celui-ci est posé dans l'anneau $\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_k][X_1, \ldots, X_n]$; cette partie de la preuve a été détaillée dans [5] et notre contribution par rapport au résultat original de Philippon rappelée dans [12]. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arnold, A. Varchenko et S. Goussein-Sade, *Singularités des applications différentiables*, (Editions MIR, Moscou, 1986).

[2] D. Barlet, *Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur les fibres* (*Invent. Math.*, vol. 68, n° 1, 1982, p. 129-174).

[3] C. A. Berenstein et A. Yger, *Analytic Bezout Identities* (*Adv. in Appl. Math.*, vol. 10, n° 1, 1989, p. 51-74).

[4] C. A. Berenstein, R. Gay et A. Yger, *Analytic Continuation of Currents and Division Problems* (*Forum Math.*, vol. 1, 1989, p. 15-51.

[5] C. A. Berenstein et A. Yger, *Effective Bezout Identities in* $\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]$ (à paraître dans *Acta Math.*).

[6] D. Brownawell, *Local Diophantine Nullstellen Inequalities* (*J.A.M.S.*, vol. 1, n° 2, 1988, p. 311-322).

[7] N. Coleff et M. Herrera, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe* (*Lect Notes in Math.*, vol. 633, Springer, 1978).

[8] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* Academic Press, 1980).

[9] J. Kollar, *Sharp Effective Nullstellensatz* (*J.A.M.S.*, vol. 1, 1988, p. 963-975).

[10] M. Passare, *Residues, currents and their Relation to Ideals of Holomorphic Functions* (*Math. Scand.*, vol. 62, n° 1, 1988, p. 75-152).

[11] P. Philippon, *Dénominateurs dans le théorème des zéros de Hilbert* [Prépublications, Institut Henri-Poincaré, 1989 (à paraître dans *Acta Arith.*)].

[12] P. Philippon, *Théorème des zéros effectif et élimination* [*Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux* (2e série), 1, 1989, p. 137-156].

[13] B. Shiffman et S. Ji, *A Global Lojasiewicz Inequality for Complete Intersections in* $\mathbb{C}^n$. (Preprint J. Hopkins University, 1989).

[14] B. Teissier, *Résultats récents d'algèbre commutative effective* (*Séminaire N. Bourbaki*, 1989-1990, exposé 718).

[15] B. L. van der Waeden, *Algebra*, (Springer Verlag, New York, 1959).

(Manuscrit reçu le 13 mars 1990,
révisé le 11 septembre 1990).

C. A. Berenstein
Department of Mathematics,
University of Maryland,
College Park, MD 20742, U.S.A.

A. Yger
Unité associée au C.N.R.S. 226,
Université Bordeaux-I,
33405 Talence, France.