Z. MEBKHOUT
L. NARVÁEZ-MACARRO

La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 24, nº 2 (1991), p. 227-256
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_2_227_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 24, 1991, p. 227 à 256.

LA THÉORIE DU POLYNÔME DE BERNSTEIN-SATO POUR LES ALGÈBRES DE TATE ET DE DWORK-MONSKY-WASHNITZER (*)

PAR Z. MEBKHOUT ET L. NARVÁEZ-MACARRO

SOMMAIRE

0. Introduction

Soit k un corps et $A:=k[x_1, \ldots, x_n]$ la k-algèbre des polynômes à n variables à coefficients dans k. Notons $D_{A/k}:=A[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ l'algèbre de Weyl des opérateurs différentiels k-linéaires à coefficients dans A. Si $f \in A$ est un polynôme non nul, Bernstein [B] a démontré, si k est de caractéristique nulle, l'existence d'un polynôme non nul à une variable $b(s)$ et d'un opérateur $P(s)$ de $D_{A/k}[s]:=D_{A/k} \otimes_k k[s]$ tels que l'on ait l'équation fonctionnelle:

$$b(s)f^s = P(s)f^{s+1}.$$

Dans [Bj 2] Björk a annoncé que la méthode de Bernstein peut s'étendre au cas où f est une fonction analytique réelle sur une variété analytique compacte réelle. L'équation fonctionnelle a été établie pour une série convergente à coefficients complexes dans [K 1] puis pour une section locale d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome dans [K 2] par Kashiwara. Les méthodes de Kashiwara sont *transcendantes* et utilisent le théorème de constructibilité. Björk étend la méthode de Kashiwara au cas d'une série formelle à coefficients dans un corps de caractéristique nulle dans [Bj 3].

(*) Recherche entreprise dans le cadre d'une Action intégrée franco-espagnole.

L'équation fonctionnelle est un ingrédient essentiel de la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules aussi bien dans le cas algébrique de caractéristique nulle que dans le cas analytique complexe. Elle est à la base de la stabilité des catégories de $\mathscr{D}_X$-modules holonomes par les opérations cohomologiques. En particulier elle fournit la démonstration la plus simple du théorème de finitude de la cohomologie de De Rham d'une variété algébrique non singulière sur un corps de caractéristique nulle (*cf.* [Bj 3]). Elle est aussi à la base de la théorie des cycles évanescents modérés pour les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes ([M 2], [K 3], [S]).

Dans ce travail on se propose de démontrer l'équation fonctionnelle pour une algèbre de Tate [T] et pour une algèbre de Dwork-Monsky-Washnitzer [M-W] où l'on ne dispose pas d'un analogue des faisceaux constructibles complexes. On obtient alors un ingrédient essentiel pour une théorie de $\mathscr{D}_X$-modules dans le contexte p-adique. Une question importante qui est la motivation de ce travail est le théorème de finitude de la cohomologie de Dwork-Monsky-Washnitzer d'une variété affine non singulière sur un corps fini et plus généralement le théorème de finitude de la cohomologie rigide de Berthelot [Be 1]. Le localisé le long d'une hypersurface d'une algèbre faiblement complète n'étant plus faiblement complet, l'équation fonctionnelle est insuffisante pour démontrer le théorème de finitude dans le cas p-adique sur le modèle de la caractéristique nulle. Cependant le cas complexe ([Me 1], [Me 2], [Me 3]) suggère que le complété faible d'une telle algèbre, qui est un module sur l'analogue p-adique de l'anneau des opérateurs différentiels d'ordre *infini* dans le cas complexe (*cf.* exemple 4.4.5), doit avoir de bonnes propriétés de finitude une fois tensorisé par $\mathbf{Q}$. Mais nous n'aborderons pas dans cet article cette question (*cf.* [Me-N]).

L'idée principale de Bernstein [B] dans le cas polynômial est de faire le changement de base $k \to k(s)$ où $k(s)$ est le corps de fonctions rationnelles à une variable sur k et de considérer le symbole f^s. Dans ce cas, l'algèbre A étant de *type fini sur* k, la formation du faisceau des opérateurs différentiels commute au changement de base. La théorie locale des $\mathscr{D}_X$-modules de dimension minimale persiste après ce changement de base ce qui permet d'en déduire l'équation fonctionnelle.

L'idée naturelle pour généraliser l'équation fonctionnelle est de faire le même changement de base que Bernstein mais en partant d'un schéma $X = \operatorname{Spec}(A)$ sur k noethérien régulier ayant toutes les propriétés locales raisonnables du point de vue différentiel mais *sans être de type fini*, par exemple le schéma local associé à un anneau de séries convergentes. Mais dans ce cas la formation du faisceau des opérateurs différentiels ne commute pas au changement de base [EGA IV], § 16. De plus les corps résiduels des idéaux maximaux de $A(s) := A \otimes_k k(s)$ ne sont pas en général algébriques sur le corps de base $k(s)$ et peuvent avoir des $k(s)$-dérivations non triviales. Ceci empêche d'avoir une théorie *locale* des $\mathscr{D}_X$-modules de dimension minimale sur le modèle du cas de type fini. Il nous faut procéder autrement.

Afin de ne pas avoir à localiser après le changement de base $k \to k(s)$ nous utilisons la méthode globale des anneaux filtrés, (*cf.* § 1). C'est alors une question purement algébrique. Notre résultat principal (*cf.* § 2) est que si A est une algèbre sur un corps k de caractéristique nulle *non nécessairement de type fini*, noethérienne régulière équicodimensionnelle de dimension n dont les corps résiduels des idéaux maximaux sont k-algébriques et telle qu'il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n$ de A et des k-dérivations $\partial_1, \ldots, \partial_n$

de A avec $\partial_i(x_j)=\delta_{ij}$, alors l'anneau $D_{A/k}(s):=k(s)\otimes_k D_{A/k}$ est un anneau filtré du type Diff (*cf.* § 1) dont la dimension homologique est égale à celle de $D_{A/k}$. Il y a alors une théorie *globale* des $D_{A/k}(s)$-modules de dimension minimale qui sont artiniens. Ceci permet de déduire l'équation fonctionnelle pour un élément de A et un élément d'un $D_{A/k}$-module de dimension minimale (*cf.* § 3). On peut alors traiter sur le même pied le cas algébrique de type fini sur un corps de caractéristique nulle, le cas analytique complexe (*cf.* 4.1), le cas formel (*cf.* 4.2), le cas analytique rigide (*cf.* 4.3), le cas de Monsky-Washnitzer (*cf.* 4.4) et bien d'autres cas.

Voici le contenu de ce travail. Dans le paragraphe 1 nous rappelons la théorie des anneaux filtrés du type Diff. Dans le paragraphe 2, qui est le cœur de ce travail, nous montrons, si A est comme ci-dessus, que la $k(s)$-algèbre $A(s)$ est équicodimensionnelle de dimension dim (A) et que la dimension homologique de $D_{A/k}(s)$ coïncide avec celle de $D_{A/k}$. Dans le paragraphe 3 nous montrons l'équation fonctionnelle dans cette situation générale. Dans le paragraphe 4 nous appliquons ceci aux différentes situations évoquées.

Nous appellerons module de dimension minimale ce qu'on appelle d'habitude module holonome parce que les résultats de ce travail ne dépendent que de l'inégalité portant sur la dimension de la variété caractéristique d'un module de type fini et non sur le théorème de l'involutivité des caractéristiques.

1. Rappels des anneaux filtrés

1.1. ANNEAUX FILTRÉS DU TYPE Diff. — Dans ce paragraphe $R=\bigcup_{k\geqq 0} R_k$ désignera un anneau filtré, *i.e.* les R_k, $k\geqq 0$ forment une suite croissante de sous-groupes additifs de R tels que $R_k R_l \subseteqq R_{k+l}$, $k, l\geqq 0$ et $1\in R_0$. Le gradué de R, noté gr (R), est par définition l'anneau $\oplus_{i\geqq 0}\mathrm{gr}^i(R)$ avec $\mathrm{gr}^i(R)=R_i/R_{i-1}$, $i\geqq 0$, où on a posé $R_{-1}=\{0\}$.

DÉFINITION 1.1.1. — *On dit que* R *est un anneau du type* Diff *si le gradué associé est un anneau commutatif noethérien régulier dont les idéaux maximaux gradués ont même hauteur.*

Si R est un anneau du type Diff alors R est noethérien à droite et à gauche, sa dimension homologique est inférieure ou égale à dh (gr (R)) = dim (gr (R)) (*cf.* [Bj 3], [M 1]) et R_0 est un anneau commutatif noethérien. Si M est un R-module à gauche (ou à droite), une bonne filtration de M est une filtration croissante $(M_r)_{r\in\mathbf{Z}}$ par des R_0-modules de type fini telle que $M_r=0$, $r\ll 0$ et $\mathrm{gr}(M)=\oplus_{r\in\mathbf{Z}} M_{r+1}/M_r$ est un gr (R)-module de type fini. Un R-module M possède des bonnes filtrations si et seulement si M est de type fini. Si gr (M) est associé à une bonne filtration, les nombres $\dim_{\mathfrak{p}}(\mathrm{gr}(M))$ et $\dim_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M))$, pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de gr (R), ne dépendent pas de la bonne filtration choisie. On les note $\dim_{\mathfrak{p}}(M)$ et $\dim_R(M)$ respectivement. Par le lemme d'Artin-Rees une bonne filtration d'un R-module induit une bonne filtration sur tout sous-module. De plus, dans une suite exacte à trois termes de R-modules de type fini, la dimension du terme du milieu est égale au sup des dimensions des termes extrêmes (*cf.* [Bj 3], [M 1]).

Si m est un idéal maximal de R_0, on note m^+ l'idéal gradué de $\mathrm{gr}(R)$ engendré par m et $\oplus_{i>0} \mathrm{gr}^i(R)$. Tout idéal maximal gradué de $\mathrm{gr}(R)$ est de la forme m^+ pour un idéal maximal m de R_0.

1.1.2. Soit A une algèbre commutative noethérienne régulière sur un corps k de caractéristique nulle ayant les propriétés:

(i) C'est une algèbre équicodimensionnelle de dimension n.

(ii) Les corps résiduels des idéaux maximaux sont k-algébriques.

(iii) Il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ et $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathrm{Der}_k(A)$ tels que $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est l'indice de Kronecker.

Il résulte de [Ma 1], th. 99, que sous les conditions (i), (ii) et (iii), le A-module des k-dérivations $\mathrm{Der}_k(A)$ de A est libre de rang n et $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ est une base.

1.1.3. Rappelons que pour toute k-algèbre commutative A on définit $D^i_{A/k} \subset \mathrm{End}_k(A)$, $i \geqq 0$ [EGA IV], § 16, par récurrence sur i en posant $D^0_{A/k} := A$ et

$$D^{i+1}_{A/k} = \{ P \in \mathrm{End}_k(A) \mid [P, a] = Pa - aP \in D^i_{A/k}, \forall a \in A \}.$$

On obtient une filtration croissante par des (A, A)-bimodules de $\mathrm{End}_k(A)$ ayant les propriétés suivantes:

$$D^1_{A/k} = A \oplus \mathrm{Der}_k(A)$$

$$D^i_{A/k} D^j_{A/k} \subseteqq D^{i+j}_{A/k}$$

Si $P \in D^i_{A/k}$ et $Q \in D^j_{A/k}$, $[P, Q] \in D^{i+j-1}_{A/k}$.

L'anneau des k-opérateurs différentiels de A est $D_{A/k} := \bigcup_{i \geqq 0} D^i_{A/k}$. C'est un anneau filtré dont le gradué est commutatif, d'où un morphisme:

$$(*) \qquad \mathrm{Sym}_A(\mathrm{Der}_k(A)) \to \mathrm{gr}(D_{A/k}).$$

Si A est une algèbre noethérienne régulière sur un corps k de caractéristique nulle ayant les propriétés (i), (ii), (iii), le A-module à gauche (resp. à droite) $D^i_{A/k}$ est libre et les $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqq l$ en forment une base. Ceci se voit par récurrence sur i. On en déduit que le morphisme (*) est un isomorphisme et donc $D_{A/k}$ est le sous-anneau de $\mathrm{End}_k(A)$ engendré par A et $\mathrm{Der}_k(A)$, *i.e.* $D_{A/k} = A[\partial_1, \ldots, \partial_n]$. Comme $\mathrm{Sym}_A(\mathrm{Der}_k(A))$ est une algèbre de polynômes sur A, l'anneau filtré $D_{A/k}$ est du type Diff. On déduit que $\mathrm{dh}(D_{A/k}) \leqq \mathrm{dh}(\mathrm{Sym}_A(\mathrm{Der}_k(A)) = 2n$. En fait, on a le résultat suivant [Bj 1].

THÉORÈME 1.1.4. — *Si* A *est une algèbre noethérienne régulière équicodimensionnelle sur un corps k de caractéristique nulle ayant les propriétés* (i), (ii), (iii), *la dimension homologique* $\mathrm{dh}(D_{A/k})$ *est égale à* $\dim(A)$.

La preuve de J. E. Björk [Bj 1] consiste, à l'aide de la condition (ii), à se réduire au cas des anneaux de séries et puis à utiliser le résultat analogue pour $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ dû à J. E. Roos [Ro].

1.2. MODULES DE DIMENSION MINIMALE. — Soit R un anneau filtré du type Diff.

DÉFINITION 1.2.1. — *Pour un* R-*module à gauche* (*ou à droite*) *non nul* M *de type fini on pose*

$$\mathrm{grade}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M}):=\inf\{i\geqq 0 \mid \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\mathrm{R})\neq 0\}.$$

Si M est un R-module à gauche (resp. à droite) de type fini, les $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\mathrm{R})$ sont des R-modules à droite (resp. à gauche) de type fini.

THÉORÈME 1.2.2. — *Si* M *est un* R-*module à gauche* (*ou à droite*) *non nul de type fini, on a*

$$\mathrm{codim}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})=\mathrm{grade}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})$$

$$\mathrm{codim}_{\mathrm{R}}(\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\mathrm{R}))\geqq i,\qquad \forall\, i\geqq 0 \quad \textit{pourvu que}\quad \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\mathrm{R})\neq 0.$$

Preuve. — *Cf.* [Bj 2], [Bj 3], [M 1]. □

COROLLAIRE 1.2.3. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a*:

$$\dim_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})\geqq \dim(\mathrm{gr}(\mathrm{R}))-\mathrm{dh}(\mathrm{R}).$$

DÉFINITION 1.2.4. — *On dit qu'un* R-*module à gauche* (*ou à droite*) *de type fini* M *est de dimension minimale s'il est ou bien nul ou bien* $\mathrm{codim}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M})=\mathrm{dh}(\mathrm{R})$.

Il résulte du théorème 1.2.2 que dans une suite exacte courte de R-modules de type fini, le terme du milieu est de dimension minimale si et seulement si les termes extrêmes sont de dimension minimale. De plus si M est de dimension minimale, $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\mathrm{R})=0$ si $i\neq \mathrm{dh}(\mathrm{R})$. Il résulte de la formule de bidualité $\mathrm{M}\simeq \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\mathrm{R}),\mathrm{R})$ pour les R-modules de type fini, que le foncteur de dualité:

$$\mathrm{M}\mapsto \mathrm{M}^*:=\mathrm{Ext}^{\mathrm{dh}(\mathrm{R})}_{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\mathrm{R})$$

est une anti-équivalence involutive de catégories entre la catégorie de R-modules à gauche (resp. à droite) de dimension minimale et la catégorie de R-modules à droite (resp. à gauche) de dimension minimale.

PROPOSITION 1.2.5. — *Tout* R-*module de dimension minimale est de longueur finie.*

Preuve. — Ceci résulte du fait que R est noethérien et le foncteur de dualité est une anti-équivalence de catégories. □

Soit R un anneau filtré du type Diff et S un sous-ensemble de R_0 multiplicativement fermé. Comme gr(R) est commutatif, l'anneau de fractions $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}$ existe et a les propriétés analogues du cas commutatif (*cf.* [D], [Ga], [St]). Rappelons que $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}$ est plat à gauche et à droite sur R, $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}\simeq \mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}$, si M est un R-module à gauche (ou à droite) de type fini on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M},\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R})\simeq \mathrm{S}^{-1}\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{R}}(\mathrm{M},\mathrm{R})$ pour tout $i\geqq 0$ et $\mathrm{dh}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R})\leqq \mathrm{dh}(\mathrm{R})$. Si f est un élément de R_0, on note R_f l'anneau de fractions $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}$ pour $\mathrm{S}=\{1,f,f^2,\ldots\}$.

LEMME 1.2.6. — *Si* M *est un* R_f-*module à gauche* (*ou à droite*) *de type fini, il existe un sous*-R-*module de type fini* M′ *de* M *tel que* $\mathrm{M}=\mathrm{M}'_f$.

Preuve. — Si $m_1, \ldots, m_p$ est un système de générateurs du R_f-module M, il suffit de prendre pour M′ le sous-R-module engendré par les m_i. □

PROPOSITION 1.2.7. — *Soit* R *un anneau filtré du type* Diff *et f un élément de* R_0. *Soit* M *un* R_f*-module de type fini tel que* $\operatorname{Ext}^i_{R_f}(M, R_f) = 0$ *si* $i \neq \operatorname{dh}(R)$. *Alors il existe un sous-*R*-module* M′ *de* M *de dimension minimale tel que* $M = M'_f$ [1].

Preuve. — En vertu du lemme 1.2.6 il existe un R-sous-module M″ de M de type fini tel que $M = M''_f$. D'autre part le morphisme canonique :

$$M''_f \to \mathbf{R}\operatorname{Hom}_{R_f}(\mathbf{R}\operatorname{Hom}_{R_f}(M''_f, R_f), R_f) \simeq \mathbf{R}\operatorname{Hom}_{R_f}(\operatorname{Ext}^{\operatorname{dh}(R)}_{R_f}(M''_f, R_f)[-\operatorname{dh}(R)], R_f)$$

est un isomorphisme parce que M est un R_f-module de type fini et $\operatorname{dh}(R_f) \leqq \operatorname{dh}(R) < \infty$. Posons $M' = \operatorname{Ext}^{\operatorname{dh}(R)}_{R}(M'', R)^*$, c'est un R-module de dimension minimale en vertu du théorème 1.2.2. On a $M = M''_f \simeq M'_f$. □

2. Le changement de base $k \to k(s)$

Afin de démontrer l'équation fonctionnelle on a besoin de savoir que si on part d'une algèbre A noethérienne régulière sur un corps k de caractéristique nulle ayant les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2, l'anneau filtré $D_{A/k}(s) := k(s) \otimes_k D_{A/k}$ est un anneau du type Diff et que $\operatorname{dh}(D_{A/k}(s)) = \operatorname{dh}(D_{A/k})$.

2.1. COMPORTEMENT DE L'ÉQUICODIMENSIONNALITÉ. — Soit k un corps de caractéristique quelconque et $k(s)$ le corps de fonctions rationnelles à une variable sur k. Si A est une k-algèbre notons $A(s) := k(s) \otimes_k A$. Remarquons que $A(s) = S^{-1} A[s]$ où S est le système multiplicatif des polynômes non nuls d'une variable à coefficients dans k.

THÉORÈME 2.1.1. — *Si* A *est une k-algèbre noethérienne régulière équicodimensionnelle de dimension n dont les corps résiduels aux idéaux maximaux sont k algébriques, alors* $A(s)$ *est une* $k(s)$*-algèbre noethérienne régulière équicodimensionnelle de dimension* dim (A).

Preuve. — (*a*) La $k(s)$-algèbre $A(s)$ est noethérienne et régulière en tant que localisée d'un anneau noethérien et régulier, à savoir $A[s]$. La seule chose à montrer est l'équicodimensionnalité de $A(s)$. Montrons d'abord que $\dim(A(s)) = \dim(A) = n$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, $\mathfrak{p}[s] \cap S = \varnothing$ et $\operatorname{ht}(S^{-1}\mathfrak{p}[s]) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}[s]) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ d'où $\dim A(s) \geqq \dim(A)$. Si $M \subset A(s)$ est un idéal maximal, posons $P = M \cap A[s]$ et $\mathfrak{p} = P \cap A$. Si $\mathfrak{p}[s] = P$ alors $\operatorname{ht}(M) = \operatorname{ht}(P) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leqq \dim(A)$. Si $\mathfrak{p}[s] \subset P$, $\operatorname{ht}(P) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + 1$ et $A[s]/P$ est algébrique sur $A/\mathfrak{p}$ (*cf.* [EGA IV], prop. (5.5.3) et (5.5.6)). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & k[s] \arrow[dr, "P \cap S = \varnothing"] & \\ k \arrow[ur, "\text{trans.}"] \arrow[dr] & & A[s]/P \\ & A/\mathfrak{p} \arrow[ur, "\text{alg.}"'] & \end{tikzcd}$$

[1] Remarquons que l'anneau filtré R_f n'est pas forcément du type Diff.

Le quotient $A/\mathfrak{p}$ ne peut pas être algébrique sur k et donc l'idéal $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal en vertu de la condition (ii). Donc $\mathrm{ht}(M)=\mathrm{ht}(P)=\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+1 \leqq n-1+1=n$. D'où $\dim(A(s)) \leqq \dim(A)=n$.

(*b*) Voyons maintenant que si M est un idéal maximal de $A(s)$, $\mathrm{ht}(M) \geqq \dim(A)$. Posons encore $P=M \cap A[s]$ et $\mathfrak{p}=P \cap A$. Si $P=\mathfrak{p}[s]$, $\mathfrak{p}$ est maximal puisque M l'est. Donc $\mathrm{ht}(M)=\mathrm{ht}(P)=\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=\dim(A)$ (*cf. loc. cit.*). Supposons que $\mathfrak{p}[s] \subset P$. Voyons d'abord que $\mathrm{cht}(P):=\dim(A[s]/P) \leqq 1$. En effet si $\mathrm{cht}(P) \geqq 2$, il existerait deux idéaux premiers de $A[s]$, P', P'' tels que $P \subset P' \subset P''$. Mais M est maximal et

$$0=P \cap k[s] \subset P' \cap k[s] \subseteq P'' \cap k[s]$$

et comme $\dim(k[s])=1$ on a $P' \cap k[s]=P'' \cap k[s]$. Si on fait varier P' de façon que $P \subset P' \subset P''$ on a (*cf.* [Bou], chap. VIII, § 3, n° 3, prop. 5)

$$0=P \cap k[s]=(\cap P') \cap k[s]=\cap (P' \cap k[s])=\cap (P'' \cap k[s])=P'' \cap k[s] \neq 0$$

ce qui est absurde. Donc $\mathrm{cht}(P) \leqq 1$.

(*c*) Supposons que $\mathrm{cht}(P)=1$. Soit P' un idéal maximal de $A[s]$ tel que $P \subset P'$ et posons $\mathfrak{p}'=P' \cap A$. Comme P' est maximal, $\mathfrak{p}'[s] \subset P'$ et $\mathrm{ht}(P')=\mathrm{ht}(\mathfrak{p}')+1$ (*cf.* [EGA IV], prop. 5.5.3 et 5.5.6). Considérons la chaîne saturée $\mathfrak{p}[s] \subset P \subset P'$. La chaîne $\mathfrak{p}[s] \subset \mathfrak{p}'[s] \subset P'$ est aussi saturée, car $A[s]$ est caténaire. Donc la chaîne $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ est aussi saturée et $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}')=\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+1$ (A est biéquidimensionnelle). Voyons alors que $\mathfrak{p}'$ est maximal. Comme l'idéal M de $A(s)=S^{-1}A[s]$ est maximal et $P \subset P'$, alors $P' \cap k[s] \neq (0)$. Soit $f(s) \in k[s]$ un polynôme irréductible tel que $P' \cap k[s]=(f(s))$. Considérons l'extension finie $\tilde{k}$ de k engendrée par les racines de $f(s)$ et posons $\tilde{A}:=\tilde{k} \otimes_k A$. L'algèbre $\tilde{A}$ (resp. $\tilde{A}[s]$) est un A-module (resp. $A[s]$-module) libre de type fini. Il existe deux idéaux premiers $\tilde{P}$, $\tilde{P}' \subset A[s]$ tels que $\tilde{P} \subset \tilde{P}'$ et $\tilde{P} \cap A[s]=P$, $\tilde{P}' \cap A[s]=P'$. Posons $\tilde{\mathfrak{p}}=\tilde{P} \cap \tilde{A}$, $\tilde{\mathfrak{p}}'=\tilde{P}' \cap \tilde{A}$. On a $\mathrm{ht}(\tilde{P})=\mathrm{ht}(P)$, $\mathrm{ht}(\tilde{P}')=\mathrm{ht}(P')$, $\mathrm{ht}(\tilde{\mathfrak{p}})=\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, $\mathrm{ht}(\tilde{\mathfrak{p}}')=\mathrm{ht}(\mathfrak{p}')$ (*cf.* [Ma 1], th. 20). Mais $\tilde{k}$ contient toutes les racines de $f(s)$ d'où il existe $c \in \tilde{k}$ tel que $\tilde{P}' \cap \tilde{k}[s]=(s-c)$. L'idéal $\mathfrak{p}'[s]+(f(s))$ n'est pas en général premier alors que l'idéal $\tilde{\mathfrak{p}}'[s]+(s-c)$ est premier. C'est pour cela qu'on a fait l'extension de scalaires $k \to \tilde{k}$. La chaîne $\tilde{\mathfrak{p}}'[s] \subset \tilde{P}'$ est saturée. Donc $\tilde{\mathfrak{p}}'[s]+(s-c)=\tilde{P}'$. Si m est un idéal maximal de $\tilde{A}$ contenant $\tilde{\mathfrak{p}}'$ alors $\tilde{P}'=m[s]+(s-c)$ car $\tilde{P}'$ est maximal puisque P' l'est. Donc $m \subseteq \tilde{P}' \cap \tilde{A}=\tilde{\mathfrak{p}}'$, et les idéaux $\tilde{\mathfrak{p}}'$ et $\mathfrak{p}'$ sont maximaux. On a $\mathrm{ht}(M)=\mathrm{ht}(P)=\mathrm{ht}(\mathfrak{p}')=n$.

(*d*) Supposons que $\mathrm{cht}(P)=0$. Dans ce cas P est maximal, $\mathrm{ht}(P)=\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+1$ et $\mathrm{cht}(\mathfrak{p}) \leqq 1$ (*cf.* [EGA IV], prop. 10.4.4 et 10.5.1), d'où $\mathrm{ht}(M)=\mathrm{ht}(P) \geqq (n-1)+1=n$ puisque A est biéquidimensionnelle. D'où le théorème 2.1.1. □

REMARQUE 2.1.2. — *L'algèbre* $A[s]$ *n'est pas en général équicodimensionnelle. Par exemple si* $A=k[[X]]$, $A[s]$ *est de dimension deux et l'idéal engendré par* $Xs-1$ *est maximal de hauteur* 1(cf. [EGA IV], $O_{(10.7.3)}$).

REMARQUE 2.1.3. — *Les corps résiduels de* $A(s)$ *aux idéaux maximaux ne sont pas en général* $k(s)$*-algébriques. Par exemple le corps résiduel de l'idéal engendré par* $Xs-1$ *dans* $k[[X]](s)$ *est égal au corps de fractions* $k((X))$ *qui est de degré de transcendance infini sur* $k(s)=k(X^{-1})=k(X)$.

Soit A une k-algèbre noethérienne régulière ayant les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2. Soit r un entier naturel $\leqq n = \dim(\mathrm{A})$. Posons $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r} := \mathrm{A}[\partial_1, \ldots, \partial_r] \subseteqq \mathrm{End}_k(\mathrm{A})$. Donc $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,n} = \mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}$. L'anneau $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}$ est un anneau filtré du type Diff car le gradué associé est isomorphe à un anneau de polynômes $\mathrm{A}[\xi_1, \ldots, \xi_r]$. Posons $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}(s) := k(s) \otimes_k \mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}$. C'est encore un anneau filtré dont le gradué est égal à $\mathrm{gr}(\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}(s)) = k(s) \otimes_k \mathrm{gr}(\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r})$. Comme corollaire du théorème 2.1.1 on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.1.4. — *Sous les conditions précédentes, l'algèbre* $\mathrm{gr}(\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}(s))$ *est noethérienne régulière dont tous les idéaux maximaux gradués sont de hauteur égale à* $n+r$. *En particulier l'anneau filtré* $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}(s)$ *est du type* Diff.

2.2. Comportement de la dimension homologique. — Soit k un corps de caractéristique nulle et A une k-algèbre noethérienne régulière ayant les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2. Nous allons calculer la dimension homologique de l'anneau filtré, du type Diff, $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}(s)$ pour $r \leqq n$. Soit M un $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}(s)$-module de type fini. C'est donc la fibre générique par le morphisme $k[s] \to \mathrm{A}[s]$ d'un $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}[s]$-module de type fini N. Notons $\mathrm{N}_l := \mathrm{N}/(s-l)\mathrm{N}$ le $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}$-module de type fini obtenu par restriction à la fibre au-dessus de $l \in k$.

Théorème 2.2.1. — *Avec les notations précédentes, on a l'inégalité pour presque tout* $l \in k$

$$\dim_{\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}(s)}(\mathrm{M}) \geqq \dim_{\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}}(\mathrm{N}_l).$$

Preuve. — Posons pour simplifier $\mathrm{D} = \mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\,r}$. Prenons une bonne filtration N_k de N et posons $\mathrm{M}_k := \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}_k$. C'est une bonne filtration de M et $\mathrm{gr}(\mathrm{M}) = \mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{gr}(\mathrm{N}) = k(s) \otimes_{k[s]} \mathrm{gr}(\mathrm{N})$. Pour tout $l \in k$ notons Φ_l les morphismes de spécialisation

$$\mathrm{D}[s] \to \mathrm{D}, \qquad \mathrm{gr}(\mathrm{D}[s]) \to \mathrm{gr}(\mathrm{D}).$$

Posons $\mathscr{Y} := \mathrm{ann}_{\mathrm{grD}(s)}(\mathrm{gr}(\mathrm{M}))$, $\mathscr{I} := \mathrm{ann}_{\mathrm{grD}[s]}(\mathrm{gr}(\mathrm{N}))$ et $\mathscr{I}' := \mathscr{Y} \cap \mathrm{gr}(\mathrm{D}[s])$. On a $\mathscr{I} \subseteqq \mathscr{I}'$ et $\mathscr{I}\,.\,\mathrm{gr}(\mathrm{D}(s)) = \mathscr{I}'\,.\,\mathrm{gr}(\mathrm{D}(s)) = \mathscr{Y}$. Il existe donc un polynôme non nul $h(s) \in k[s]$ tel que les localisés $\mathscr{I}_h$ et $\mathscr{I}'_h$ coïncident. Par conséquent si $l \in k$ est tel que $h(l) \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}(\mathrm{D})/\Phi_l(\mathscr{I}) &\simeq (\mathrm{gr}(\mathrm{D}[s])/\mathscr{I})_h \otimes_{k[s]} (k[s]/(s-l)) \\ &\simeq (\mathrm{gr}(\mathrm{D}[s])/\mathscr{I}')_h \otimes_{k[s]} (k[s]/(s-l)) \simeq \mathrm{gr}(\mathrm{D})/\Phi_l(\mathscr{I}').\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\mathrm{gr}(\mathrm{D}(s))/\mathscr{Y} = \mathrm{gr}(\mathrm{D}(s))/\mathscr{I}'\,.\,\mathrm{gr}(\mathrm{D}(s)) = (\mathrm{gr}(\mathrm{D}[s])/\mathscr{I}') \otimes_{k[s]} k(s)$$

et

$$\Phi_l(\mathscr{I}) \subseteqq \mathrm{ann}_{\mathrm{gr}(\mathrm{D})}(\mathrm{gr}(\mathrm{N}) \otimes_{k[s]} (k[s]/s-l))) \subseteqq \mathrm{ann}_{\mathrm{gr}(\mathrm{D})}(\mathrm{gr}(\mathrm{N}) \otimes_{k[s]} (k[s]/(s-l))),$$

d'où si $h(l) \neq 0$

$$\begin{aligned}&\dim(\mathrm{gr}((\mathrm{D}[s])/\mathscr{I}') \otimes (k[s]/(s-l))) = \ldots \\ &\qquad = \dim(\mathrm{gr}(\mathrm{D})/\Phi_l(\mathscr{I})) \geqq \dim_{\mathrm{D}}(\mathrm{N} \otimes (k[s]/(s-l))) = \dim_{\mathrm{D}}(\mathrm{N}_l).\end{aligned}$$

Mais $\operatorname{gr}(\mathrm{D}[s])/\mathscr{I}'$ est plat sur $k[s]$ puisqu'il n'a pas de torsion et comme $\operatorname{gr}(\mathrm{D}(s))/\mathscr{Y}$ est la fibre générique du morphisme $k[s] \to \operatorname{gr}(\mathrm{D}[s])/\mathscr{I}'$, on conclut par la semi-continuité de la dimension des fibres (*cf.* [Ma 2], th. 15.3). □

REMARQUE 2.2.2. — *La preuve du théorème* 2.2.1 *admet l'interprétation géométrique suivante : on a réalisé* M *comme la fibre générique d'un* D$[s]$*-module de type fini* N. *Puis on a démontré que la variété caractéristique de la fibre de* N *au-dessus d'un* $l \in k$, $\mathrm{Ch}(\mathrm{N}_l)$, *coïncide avec la fibre de la variété caractéristique de* N *au-dessus de* l, $\mathrm{Ch}(\mathrm{N})_l$, *pour presque tout* $l \in k$. *Finalement, par platitude, la dimension de la fibre générique de la variété caractéristique de* N, *c'est-à-dire, la variété caractéristique de* M, *est supérieure ou égale à la dimension de* $\mathrm{Ch}(\mathrm{N})_l$ *pour presque tout* $l \in k$, *d'où le résultat.*

THÉORÈME 2.2.3. — *Sous les conditions précédentes on a l'égalité*

$$\operatorname{dh}(\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\, r}(s)) = \operatorname{dh}(\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\, r}).$$

Preuve. — Posons encore $\mathrm{D} = \mathbb{D}_{\mathrm{A}/k,\, r}$. L'extension $\mathrm{D} \to \mathrm{D}(s)$ est fidèlement plate à gauche et à droite, et $\mathrm{D}(s) = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{D}[s]$; on a les inégalités (*cf.* [Rot], th. 9.34, 9.39).

$$\operatorname{dh}(\mathrm{D}) \leqq \operatorname{dh}(\mathrm{D}(s)) \leqq \operatorname{dh}(\mathrm{D}[s]) = \operatorname{dh}(\mathrm{D}) + 1.$$

Si $\operatorname{dh}(\mathrm{D}(s)) = \operatorname{dh}(\mathrm{D}) + 1$ il existerait un $\mathrm{D}(s)$-module de type fini M tel que $\operatorname{Ext}_{\mathrm{D}(s)}^{\operatorname{dh}(\mathrm{D})+1}(\mathrm{M}, \mathrm{D}(s)) \neq 0$. Soit N un $\mathrm{D}[s]$-module de type fini tel que $\mathrm{M} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N} = k(s) \otimes_{k[s]} \mathrm{N}$. L'anneau $\mathrm{D}(s)$ est du type Diff et en vertu du théorème 1.2.2

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{D}(s)}(\operatorname{Ext}_{\mathrm{D}(s)}^{\operatorname{dh}(\mathrm{D})+1}(\mathrm{M}, \mathrm{D}(s))) \geqq \operatorname{dh}(\mathrm{D}) + 1$$

et

$$\dim_{\mathrm{D}(s)}(\operatorname{Ext}_{\mathrm{D}(s)}^{\operatorname{dh}(\mathrm{D})+1}(\mathrm{M}, \mathrm{D}(s))) \leqq \dim(\operatorname{gr}(\mathrm{D}(s))) - \operatorname{dh}(\mathrm{D}) - 1 = \dim(\operatorname{gr}(\mathrm{D})) - \operatorname{dh}(\mathrm{D}) - 1.$$

Ceci contredit le théorème 2.2.1 et le corollaire 1.2.3 puisque

$$\dim_{\mathrm{D}(s)}(\operatorname{Ext}_{\mathrm{D}(s)}^{\operatorname{dh}(\mathrm{D})+1}(\mathrm{M}, \mathrm{D}(s))) \geqq \dim_{\mathrm{D}}((\operatorname{Ext}_{\mathrm{D}[s]}^{\operatorname{dh}(\mathrm{D})+1}(\mathrm{N}, \mathrm{D}[s]))_l) \geqq \dim(\operatorname{gr}(\mathrm{D})) - \operatorname{dh}(\mathrm{D})$$

pour $l \in k$ générique. Donc $\operatorname{dh}(\mathrm{D}(s)) = \operatorname{dh}(\mathrm{D})$. □

REMARQUE 2.2.4. — *Le théorème* 2.2.3 *n'est pas une conséquence du théorème de Björk* 1.1.4 *parce que les corps résiduels aux idéaux maximaux de* $\mathrm{A}(s)$ *ne sont pas en général* $k(s)$*-algébriques* (voir *cependant* [N]). *Remarquons aussi que le théorème d'involutivité de Gabber* [Ga] *s'applique à* $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k,\, r}(s)$ *mais on ne peut pas déduire l'inégalité portant sur la dimension de la variété caractéristique sur le modèle des variétés algébriques ou analytiques complexes par la même raison.*

REMARQUE 2.2.5. — *Notons que si* A *est une* k*-algèbre noethérienne régulière ayant les propriétés* (i), (ii), (iii) *de* 1.1.2 *et* $m \subset \mathrm{A}$ *un idéal maximal, alors la* k*-algèbre noethérienne régulière* A_m *satisfait aussi les mêmes propriétés. De plus, on a un isomorphisme canonique d'anneaux* $(\mathrm{A} \setminus m)^{-1}\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{A}_m/k}$. *Si* M *est un* $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}$*-module de type fini, alors pour chaque idéal maximal* $m \subset \mathrm{A}$ *le* $\mathrm{D}_{\mathrm{A}_m/k}$*-module* $\mathrm{M}_m = (\mathrm{A} \setminus m)^{-1}\mathrm{M}$ *est aussi de type fini. En fait il y* *a équivalence entre*:

– M *est de dimension minimale.*

– M_m est de dimension minimale pour tout *idéal maximal* $m \subset A$.

Supposons maintenant que A *est une k-algèbre noethérienne locale régulière ayant les propriétés* (i), (ii), (iii) *de* 1.1.2 *et soit* $\hat{A}$ *son complété. La k-algèbre* $\hat{A}$ *est aussi noethérienne locale régulière et vérifie les propriétés* (i), (ii), (iii) *de* 1.1.2. *De plus on a un isomorphisme canonique de* $\hat{A}$*-modules à gauche* (*resp. à droite*) $\hat{A} \otimes_A D_{A/k} \simeq D_{\hat{A}/k}$ (*resp.* $D_{A/k} \otimes_A \hat{A} \simeq D_{\hat{A}/k}$). *Si* M *est un* $D_{A/k}$*-module de type fini, il y a équivalence entre*:

– M *est un* $D_{A/k}$*-module de dimension minimale.*

– $D_{\hat{A}/k} \otimes_{D_{A/k}} M$ *est un* $D_{\hat{A}/k}$*-module de dimension minimale.*

3. L'équation fonctionnelle

3.1. Théorie générale. — A partir des résultats du paragraphe 2 nous allons déduire l'équation fonctionnelle par la méthode de Bernstein [B].

Soit k un corps de caractéristique nulle et A une k-algèbre noethérienne régulière ayant les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2. Soit r un entier naturel $\leqq n = \dim(A)$. Posons $D := D_{A/k, r} = A[\partial_1, \ldots, \partial_r]$. L'anneau D est du type Diff. Soit f un élément de A. Notons $\mathbf{F}[s]$ le $A_f[s]$-module libre engendré par le symbole $\mathbf{f}^s$ et posons $\mathbf{F}(s) := S^{-1}\mathbf{F}[s]$. On munit $\mathbf{F}[s]$ [resp. $\mathbf{F}(s)$] de la structure de $D_f[s]$-module [resp. $D_f(s)$-module] à gauche prolongeant celle de $A_f[s]$-module [resp. $A_f(s)$-module] en posant

$$\partial g\, \mathbf{f}^s := (\partial g + s g f^{-1})\, \mathbf{f}^s$$

pour toute dérivation $\partial \in A.(\partial_1, \ldots, \partial_r) \subset \mathrm{Der}_k(A)$ et tout $g \in A_f[s]$ [resp. $g \in A_f(s)$].

Si M est un D-module à gauche on pose:

$$M_f[s]\,\mathbf{f}^s := M_f[s] \otimes_{A_f[s]} \mathbf{F}[s] = M \otimes_A \mathbf{F}[s]$$

$$[\text{resp. } M_f(s)\,\mathbf{f}^s := M_f(s) \otimes_{A_f(s)} \mathbf{F}(s) = M \otimes_A \mathbf{F}(s)].$$

C'est un $D_f[s]$-module [resp. $D_f(s)$-module] de façon évidente, engendré par $u_1 \otimes \mathbf{f}^s, \ldots, u_p \otimes \mathbf{f}^s$ si $u_1, \ldots. u_r$ engendrent M.

Étant donné un entier $l \in \mathbf{Z}$ on dispose du morphisme de spécialisation

$$\Phi_l:\quad M_f[s]\,\mathbf{f}^s \to M_f, \qquad \Phi_l(us^i \otimes \mathbf{f}^s) = l^i f^l u$$

tel que $\Phi_l(P(s)v) = P(l)\Phi_l(v)$.

Théorème 3.1.1. — *Sous les conditions précédentes, si u est un élément d'un* D*-module à gauche* (*ou à droite*) *de dimension minimale, il existe un polynôme* $b(s) \in k[s]$ *non nul et* *un opérateur* $P(s) \in D[s]$ *tels que l'on a l'équation fonctionnelle*

$$b(s)(u \otimes \mathbf{f}^s) = P(s) f(u \otimes \mathbf{f}^s)$$

égalité ayant lieu dans $M_f[s]\mathbf{f}^s$.

Preuve. — Voyons que $\operatorname{Ext}^i_{D_f(s)}(M_f(s)\mathbf{f}^s, D_f(s)) = 0$ si $i \neq \operatorname{dh}(D(s))$. On a les isomorphismes

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^i_{D_f(s)}(M_f(s) \otimes_{A_f(s)} F(s), D_f(s)) &\simeq \operatorname{Ext}^i_{D_f(s)}(M_f(s), \operatorname{Hom}_{A_f(s)}(F(s), D_f(s)))\\ &\simeq \operatorname{Ext}^i_{D_f(s)}(M_f(s), D_f(s)) \otimes_{D_f(s)} \operatorname{Hom}_{A_f(s)}(F(s), D_f(s))\\ &\simeq \operatorname{Ext}^i_{D_f}(M_f, D_f) \otimes_{D_f} \operatorname{Hom}_{A_f(s)}(F(s), D_f(s)).\end{aligned}$$

Mais $\operatorname{Ext}^i_{D_f}(M_f, D_f) \simeq \operatorname{Ext}^i_D(M, D) \otimes_A A_f = 0$ si $i \neq \operatorname{dh}(D)$. En vertu de la proposition 1.2.7 et des théorèmes 2.1.4 et 2.2.3, il existe un sous-$D(s)$-module de dimension minimale N de $M_f(s)\,\mathbf{f}^s$ tel que $M_f(s)\mathbf{f}^s = N_f$.

Pour chaque $u \in M$ il existe un entier $l \geqq 0$ tel que $f^l(u \otimes \mathbf{f}^s) \in N$. Mais en vertu de la proposition 1.2.5 N, est de longueur finie et la suite

$$D(s) f^l(u \otimes \mathbf{f}^s) \supseteqq D(s) f^{l+1}(u \otimes \mathbf{f}^s) \supseteqq D(s) f^{l+2}(u \otimes \mathbf{f}^s) \supseteqq \ldots$$

est stationnaire. Il existe donc un entier $k \geqq 0$ tel que

$$f^{l+k}(u \otimes \mathbf{f}^s) \in D(s) f^{l+k+1}(u \otimes \mathbf{f}^s).$$

Il existe donc un polynôme $b'(s) \in k[s]$ non nul et un opérateur $Q(s) \in D[s]$ tels que

$$b'(s) f^{l+k}(u \otimes \mathbf{f}^s) = Q(s) f^{l+k+1}(u \otimes \mathbf{f}^s)$$

l'égalité ayant lieu dans $M_f[s]\,\mathbf{f}^s$. Remarquons que le morphisme A_f-linéaire

$$t\colon\quad M_f[s]\mathbf{f}^s \to M_f[s]\mathbf{f}^s$$

qui envoie $s^i v \otimes \mathbf{f}^s$ sur $(s+1)^i f v \otimes \mathbf{f}^s$ est un automorphisme D-linéaire. En posant $b(s) = b'(s-l-k)$, $P(s) = Q(s-l-k)$ et en appliquant t^{-l-k} on trouve l'équation fonctionnelle du théorème 3.1.1.

$$b(s)(u \otimes \mathbf{f}^s) = P(s) f(u \otimes \mathbf{f}^s). \quad \square$$

En appliquant les morphismes de spécialisation Φ_l à l'équation fonctionnelle on trouve l'égalité dans M_f

$$b(l) f^l u = P(l) f^{l+1} u, \qquad \forall l \in \mathbf{Z}.$$

Ceci démontre le résultat suivant

COROLLAIRE 3.1.2. — *Si* M *est un* D-*module de dimension minimale, le* D-*module* M_f *est de type fini.*

DÉFINITION 3.1.3. — *On appelle polynôme de Bernstein-Sato d'un élément* $u \in \mathrm{M}$ *relativement à* $f \in \mathrm{A}$ *le polynôme minimal de l'action de s dans le* D*-module*

$$\frac{\mathrm{D}[s](u \otimes \mathbf{f}^s)}{\mathrm{D}[s]f(u \otimes \mathbf{f}^s)}.$$

REMARQUE 3.1.4. — *F. Geandier* [G] *a utilisé l'équation fonctionnelle dans cette situation générale pour définir le polynôme de Bernstein-Sato générique d'une famille à un paramètre d'hypersurfaces complexes. Elle en déduit à partir de* [K 1] *que ce polynôme* a priori *à coefficients dans le corps des fonctions de l'espace de paramètres est en fait à racines rationnelles. On peut conjecturer plus généralement que le polynôme de Bernstein-Sato de tout élément d'une algèbre de dimension minimale de la classe considérée dans cet article a ses racines rationnelles. Remarquons qu'une telle algèbre est excellente* [EGA IV] *et l'on dispose donc du théorème de résolution des singularités de Hironaka* [H].

3.2. DIMENSION MINIMALE ET LOCALISATION. — Une fois acquis le fait que M_f est un D-module de type fini nous allons montrer qu'il est en fait de dimension minimale.

THÉORÈME 3.2.1. — *Si* M *est un* D*-module de dimension minimale,* M_f *est aussi un* D*-module de dimension minimale pour tout* $f \in \mathrm{A}$.

Preuve. — Conservons les notations précédentes et soit N′ un D[s]-module de type fini tel que $\mathrm{N} = \mathrm{D}(s) \otimes_{\mathrm{D}[s]} \mathrm{N}'$. En vertu du théorème 2.2.1

$$\dim_{\mathrm{D}(s)}(\mathrm{N}) \geqq \dim_{\mathrm{D}}(\mathrm{N}' \otimes_{k[s]} (k[s]/(s-l)))$$

pour l général. Mais $\mathrm{dh}(\mathrm{D}(s)) = \mathrm{dh}(\mathrm{D})$ (th. 2.2.3), $\dim(\mathrm{gr}(\mathrm{D}(s))) = \dim(\mathrm{gr}(\mathrm{D}))$ et d'après le corollaire 1.2.3, le D-module $\mathrm{N}' \otimes_{k[s]} (k[s]/(s-l))$ est de dimension minimale pour l général. Soit u un élément de M_f. Il existe un élément $v \in \mathrm{N}$ et un entier $r \leqq 0$ tels que $u \otimes \mathbf{f}^s = f^r v$. Soit v' un élément de N′ et $\beta(s) \in k[s] - \{0\}$ tels que $v = \beta(s)^{-1} v'$. Choisissons $l \in \mathbf{Z} \subset k$ tel que $l \leqq r$, $\beta(l) \neq 0$. On a

$$\Phi_l(\beta(l)^{-1} f^{r-1} v') = u$$

et donc le morphisme

$$\Phi_l: \quad \mathrm{N}' \to \mathrm{M}_f$$

est surjectif. Donc M_f est un quotient de $\mathrm{N}' \otimes_{k[s]} (k[s]/(s-l))$ pour $l \in \mathbf{Z}$, $l \ll 0$ et M_f est de dimension minimale. □

4. Applications à la théorie des $\mathscr{D}_{\mathrm{X}}$-modules sur une variété non singulière

Dans ce paragraphe nous allons déduire de façon uniforme les propriétés de finitude de la théorie des $\mathscr{D}_{\mathrm{X}}$-modules qui étaient traitées cas par cas ([B], [K 1], [K 2], [Bj 3]). Dans le cas analytique complexe ces propriétés étaient déduites du théorème de constructibilité des solutions holomorphes d'un système holonome ([K 1], [K 2]). Dans le cas p-adique c'est justement ce théorème qui pose problème ([R 1], [R 2]). C'est précisément cela qui nous a obligé à développer les méthodes purement algébriques du paragraphe 2. Aussi nous commençons par le cas complexe qui se traite de manière *algébrique* à partir du théorème de Frisch [Fri].

4.1. CAS DES $\mathscr{D}_X$-MODULES SUR UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE SUR UN CORPS DE CARACTÉRISTIQUE NULLE OU ANALYTIQUE COMPLEXE. — 4.1.1. Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ une variété algébrique non singulière sur un corps k de caractéristique nulle ou une variété analytique complexe ($k = \mathbf{C}$). On note $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels k-linéaires d'ordre fini à coefficients dans $\mathscr{O}_X$ [EGA IV], § 16. Rappelons que $\mathscr{D}_X = \bigcup_{r \geqq 0} \mathscr{D}_X^r$ où les $\mathscr{D}_X^r$ sont définis par récurrence comme dans le paragraphe 1.1.3. Ce faisceau est un faisceau d'anneaux cohérent filtré. Ceci résulte de la cohérence de $\mathscr{O}_X$ (*cf.* [M 1]). Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent, sa variété caractéristique $\mathrm{Ch}(\mathscr{M})$ est définie à l'aide des bonnes filtrations locales. Il s'agit d'une sous-variété homogène du fibré cotangent $T^* X$. De plus si $\mathscr{M} \neq 0$ on a l'inégalité de Bernstein $\dim(\mathrm{Ch}(\mathscr{M})) \geqq \dim(X)$ (*cf.* [M 1]; comparer avec le corollaire 1.2.3). On en déduit à l'aide de la théorie des anneaux filtrés (*cf.* 1) que pour toute carte affine K (resp. polycylindre complexe), $\mathrm{dh}(\Gamma(K; \mathscr{D}_X)) = \dim(X)$ et sans faire appel au théorème 1.1.4. Notons que $D_{\mathscr{O}_X(K)/k} = \Gamma(K; \mathscr{D}_X)$ et rappelons qu'un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ est cohérent si et seulement si pour tout K assez petit on a :

$$\mathscr{M}(K) \quad \text{est un } \mathscr{D}_X(K)\text{-module de type fini}$$

$$\mathscr{D}_{X,x} \otimes_{\mathscr{D}_X(K)} \mathscr{M}(K) \simeq \mathscr{M}_x, \qquad \forall x \in \mathring{K} \quad (\text{resp.} \in \mathring{K}).$$

(*cf.* [M 1]). On appelle $\mathscr{D}_X$-module de dimension minimale un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ tel que $\dim(\mathrm{Ch}(\mathscr{M})) = \dim(X)$. Soit Y une hypersurface de X (définie localement par une équation) d'idéal $\mathscr{Y}_Y$. Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module (à gauche) posons :

$$\mathscr{M}(*Y) := \varinjlim_k \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{Y}_Y^k, \mathscr{M}).$$

C'est un $\mathscr{D}_X$-module (à gauche).

THÉORÈME 4.1.2. — *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module de dimension minimale,* $\mathscr{M}(*Y)$ *est encore un $\mathscr{D}_X$-module de dimension minimale.*

Preuve. — Si K est une carte affine (resp. un polycylindre complexe) au-dessus de laquelle Y est définie par une équation $f = 0$, on a en vertu de la cohérence de $\mathscr{M}$

$$\mathscr{D}_{X,x} \otimes_{\mathscr{D}_X(K)} \mathscr{M}(*Y)(K) \simeq \mathscr{M}(*Y)_x, \qquad \forall x \in K \quad (\text{resp.} \in \mathring{K}).$$

Il suffit de montrer donc que le $\mathscr{D}_X(K)$-module $\mathscr{M}(*Y)(K)$ est de dimension minimale pour tout K assez petit. Posons $A := \mathscr{O}_X(K)$, qui est une k-algèbre noethérienne (c'est le théorème de Frisch [Fri] dans le cas analytique complexe) ayant les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2. Si $f = 0$ est une équation de Y au voisinage de K on peut appliquer la théorie du paragraphe 3 à A, $\mathscr{M}(K)$, f et trouver que $\mathscr{M}(*Y)(K) = \mathscr{M}(K)_f$ est un $\mathscr{D}_X(K)$-module de dimension minimale. □

A partir du théorème 4.1.2 on en déduit par les méthodes standard que la catégorie des complexes bornés à cohomologie de dimension minimale est stable par cohomologie locale algébrique, par image inverse et par produit tensoriel interne.

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent et $Y \subset X$ une hypersurface de X. Si on se donne une structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche sur $\mathscr{F}(*Y) = \mathscr{O}_X(*Y) \otimes \mathscr{F}$, la restriction de $\mathscr{F}(*Y)$ à $U := X \setminus Y$ est un $\mathscr{D}_U$-module lisse (*i.e.* fibré vectoriel à connexion intégrable). En particulier $\mathscr{F}(*Y)|_U$ est de dimension minimale. On a le théorème suivant qui étant annoncé dans l'introduction de [K 2] ne nous semble pas démontré

THÉORÈME 4.1.3. — *Le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{F}(*Y)$ est de dimension minimale.*

Preuve. — En utilisant le critère précédent on voit que la seule chose à montrer est que $\mathscr{F}(*Y)(K)$ est un $\mathscr{D}_X(K)$-module de dimension minimale pour K carte affine (resp. polyc. complexe) assez petite. Posons $A := \mathscr{O}_X(K)$, $D := \mathscr{D}_X(K) = D_{A/k}$, $F := \mathscr{F}(K)$, $M := F_f = \mathscr{F}(*Y)(K)$ où $f = 0$ est une équation de Y au voisinage de K.

Voyons que $\mathrm{Ext}^i_{D_f}(M, D_f) = 0$ si $i \neq \dim(X)$. Si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier tel que $f \notin \mathfrak{p}$, alors $M_\mathfrak{p}$ est un $D_\mathfrak{p}$-module ([2]) qui est un $A_\mathfrak{p}$-module de type fini. Mais la filtration constante $(M_\mathfrak{p})_r = M_\mathfrak{p}$ est une bonne filtration pour laquelle $\mathrm{gr}(M_\mathfrak{p}) = M_\mathfrak{p}$ et la structure de $\mathrm{gr}(D_\mathfrak{p})$-module provient de l'augmentation $\mathrm{gr}(D_\mathfrak{p}) \to A_\mathfrak{p}$. Donc l'idéal $\mathrm{ann}_{\mathrm{gr}(D_\mathfrak{p})}(M_\mathfrak{p})$ contient l'idéal $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ où χ_i est la classe dans $\mathrm{gr}(D_\mathfrak{p})$ de ∂_i, $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ étant une base de $\mathrm{Der}_k(A)$. Donc

$$\mathrm{codim}_{D_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geqq n = \dim(X) = \mathrm{dh}(D_\mathfrak{p}).$$

On trouve donc que $\mathrm{Ext}^i_{D_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, D_\mathfrak{p}) = 0$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $f \notin \mathfrak{p}$ si $i \neq \dim(X)$. Comme $\mathrm{Ext}^i_{D_f}(M, D_f)$ est un A_f-module on en déduit que

$$\mathrm{Ext}^i_{D_f}(M, D_f) = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq \dim(X).$$

Une fois ce fait acquis on peut répéter les arguments du paragraphe 3 pour trouver que $F_f = \mathscr{F}(*Y)(K)$ est un $\mathscr{D}_X(K)$-module de dimension minimale. $\square$

PROPOSITION 4.1.4. — *Soit $Y \subset X$ une hypersurface et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent dont la restriction à $U := X \setminus Y$ est de dimension minimale. Alors $\mathscr{M}(*Y)$ est un $\mathscr{D}_X$-module de dimension minimale.*

Preuve (voir [K 2]). — Il s'agit de l'analogue faisceautique de la proposition 1.2.7. Le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{E}xt^n_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{E}xt^n_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X), \mathscr{D}_X)$ est de dimension minimale et prolonge la restriction de $\mathscr{M}$ à U. On a

$$\mathscr{E}xt^n_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{E}xt^n_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X), \mathscr{D}_X)(*Y) \simeq \mathscr{M}(*Y)$$

et la proposition 4.1.4 est une conséquence du théorème 4.1.2. $\square$

([2]) Remarquons que l'anneau $D_\mathfrak{p}$ est du type Diff.

4.2. Cas formel. — Soit A une k-algèbre noethérienne, régulière ayant les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2. Il résulte du théorème 1.1.4 de Björk que si k est de caractéristique nulle, $\mathrm{dh}(\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}) = \dim(\mathrm{A})$. Donc le $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}$-module à gauche A est de dimension minimale puisque $\mathrm{codim}_{\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}}(\mathrm{A}) = \mathrm{codim}_{\mathrm{gr}\,(\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k})}(\mathrm{A}) = \dim(\mathrm{A})$. Appliquons les résultats de la section du paragraphe 3 à l'algèbre A. On trouve que pour tout élément u d'un $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}$-module de dimension minimale, l'action de s dans le $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}$-module

$$\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}[s](u \otimes \mathbf{f}')}{\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}[s]f(u \otimes \mathbf{f}')}$$

admet un polynôme minimal. En particulier si $\mathrm{A} = k[[x_1, \ldots, x_n]]$ on a l'équation fonctionnelle

$$b(s)\,\mathbf{f}' = \mathrm{P}(s) f \mathbf{f}'$$

pour toute série formelle f [Bj 3].

Considérons maintenant une extension fidèlement plate $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ de k-algèbres noethériennes régulières de dimension n ayant les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2, telles qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{A}$ et $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathrm{Der}_k(\mathrm{B})$ avec $\partial_i(\mathrm{A}) \subseteqq \mathrm{A}$, $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\forall\, i, j = 1, \ldots, n$. On a donc des isomorphismes filtrés

$$\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{D}_{\mathrm{A}/k} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{B}/k}$$

$$\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{B}/k}$$

et l'extension $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k} \to \mathrm{D}_{\mathrm{B}/k}$ est fidèlement plate à gauche et à droite. Si M est un $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}$-module de type fini (resp. de dimension minimale), $\mathrm{M}' := \mathrm{D}_{\mathrm{B}/k} \otimes_{\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}} \mathrm{M}$ est un $\mathrm{D}_{\mathrm{B}/k}$-module de type fini (resp. de dimension minimale). On en déduit que si u est un élément d'un $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}$-module M de dimension minimale et $u' := 1 \otimes u \in \mathrm{M}'$, le polynôme minimal de l'action de s dans le $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}$-module

$$\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}[s](u \otimes \mathbf{f}^s)}{\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}[s]f(u \otimes \mathbf{f}^s)}$$

est égal au polynôme minimal de l'action de s dans

$$\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{B}/k}[s](u' \otimes \mathbf{f}^s)}{\mathrm{D}_{\mathrm{B}/k}[s]f(u' \otimes \mathbf{f}^s)}$$

pour tout élément $f \in \mathrm{A}$. En particulier si $\mathrm{A} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathrm{B} = \mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$, le polynôme de Bernstein-Sato d'une série convergente $f \in \mathrm{A}$ est égal au polynôme de Bernstein-Sato de la série formelle f.

Dans le même ordre d'idées on a la proposition suivante

Proposition 4.2.1. — *Soit* M *un* $\mathrm{D}_{\mathrm{A}/k}$*-module de dimension minimale,* $u \in \mathrm{M}$ *et* $f \in \mathrm{A}$. *Notons* $b(s)$ *le polynôme de Bernstein-Sato de* $u \in \mathrm{M}$ *relativement à* $f \in \mathrm{A}$ *et* $b_m(s)$ *le polynôme de Bernstein-Sato de* $u \otimes 1 \in \mathrm{M}_m$ *relativement a* $f \otimes 1 \in \mathrm{A}_m$, *pour* $m \in \mathrm{Specmax}(\mathrm{A})$. *Alors on a* :

$$b(s) = \text{p. p. c. m.}\,\{\, b_m(s) \mid m \in \mathrm{Specmax}(\mathrm{A}), f \notin m \,\}.$$

Preuve. — Comme les extensions $A \to A_m$ et $D_{A/k} \to D_{A_m/k}$ sont plates, on a des isomorphismes :

$$A_m \otimes \left(\frac{D_{A/k}[s](u \otimes \mathbf{f}^s)}{D_{A/k}[s] f (u \otimes \mathbf{f}^s)} \right) \simeq \frac{D_{A_m/k}[s](u \otimes \mathbf{f}^s)}{D_{A_m/k}[s] f (u \otimes \mathbf{f}^s)}, \qquad m \in \operatorname{Specmax}(A)$$

et le polynôme minimal d'un endomorphisme d'un A-module est le p. p. c. m. des polynômes minimaux des endomorphismes induits sur les localisés aux idéaux maximaux. □

En particulier, le polynôme de Bernstein-Sato d'un polynôme $f \in \mathbf{C}[\underline{X}]$ est le p. p. c. m. des polynômes de Bernstein-Sato des germes analytiques de f aux points de l'hypersurface $f=0$. Ce résultat était connu de Briançon-Maisonobe.

4.3. Cas des algèbres de Tate. — Soit K un corps de caractéristique nulle muni d'une valeur absolue $|\,.\,|$ ultramétrique complet. Rappelons que l'algèbre des séries restreintes $\mathbf{T}_n := K\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ est la sous-algèbre de $K[[x_1, \ldots, x_n]]$ des séries formelles $\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ telles que $|a_\alpha| \to 0$ quand $|\alpha| \to \infty$. Remarquons que la K-algèbre $\mathbf{T}_n$ est noethérienne régulière et vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2 (*cf.* [B-G-R], [F-vdP]). Par la théorie générale on sait que $\operatorname{dh}(D_{\mathbf{T}_n/K}) = \dim(\mathbf{T}_n) = n$ (th. 1.1.4) et le $D_{\mathbf{T}_n/K}$-module $\mathbf{T}_n$ est de dimension minimale. Si $f \in \mathbf{T}_n$ est une série restreinte non nulle, en vertu des résultats du paragraphe 3 il existe un polynôme non nul $b_f(s) \in K[s]$ et un opérateur $P(s) \in D_{\mathbf{T}_n/K}[s]$ tels que l'on ait l'équation fonctionnelle

$$b_f(s)\,\mathbf{f}^s = P(s) f \mathbf{f}^s.$$

De façon générale on appelle algèbre de Tate une K-algèbre $A \simeq \mathbf{T}_n/I$ quotient d'une K-algèbre $\mathbf{T}_n[T]$. Soit A une K-algèbre de Tate. Rappelons que l'on dispose du A-module des différentielles de type fini universel $\Omega^f_{A/K}$ muni d'une dérivation

$$d: \quad A \to \Omega^f_{A/K}$$

(*cf.* [F-vdP]). Si A est régulière de dimension n, $\Omega^f_{A/K}$ est un A-module projectif de rang n. Considérons la condition suivante :

(iii) T Il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ ($n = \dim(A)$) tels que $dx_1, \ldots, dx_n$ est une A-base de $\Omega^f_{A/K}$.

Remarquons que la condition (iii) T entraîne la condition (iii) de 1.1.2. Donc si A est une K-algèbre de Tate régulière ayant les propriétés (i), (ii) de 1.1.2 et la propriété (iii)T, on peut lui appliquer la théorie du paragraphe 3. On a en particulier $\operatorname{dh}(D_{A/K}) = \dim(A)$ et la notion de $D_{A/K}$-module de dimension minimale.

4.3.1. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ est une K-variété analytique rigide non singulière purement de dimension n (*cf.* [T], [B-G-R], [F-vdP]). Nous appellerons « carte affinoïde » de X un ouvert affinoïde $U \subseteq X$ muni des sections $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{O}_X(U)$ telles que $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ forment une $\mathcal{O}_X(U)$-base de $\Omega^f_{\mathcal{O}_X(U)/K}$.

On dispose du faisceau des 1-différentielles sur X, Ω_X (*cf.* [F-vdP]) qui est $\mathcal{O}_X$-localement libre de rang n. En fait, si $(U; x_i)$ est une carte affinoïde de X, $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ est une

$\mathcal{O}_U$-base de Ω_U, et $\mathcal{O}_X(U)$ est une K-algèbre de Tate régulière ayant les propriétés (i), (ii) de 1.1.2 et (iii)T. De plus, il existe des recouvrements admissibles de X par des cartes affinoïdes.

On définit le faisceau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels K-linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}_X$ comme dans 1.1.3. C'est un faisceau d'anneaux non commutatifs filtré par les $\mathcal{D}_X^r = \{\text{opérateurs d'ordre } \leqq r\}$, $r \geqq 0$. Pour chaque carte affinoïde $(U; x_i)$ de X, notons $\partial_i : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ la dérivation par rapport à x_i, $i=1, \ldots, n$. La famille $\{\partial^\alpha\}_{|\alpha| \leqq r}$ est une $\mathcal{O}_U$-base à droite et à gauche du faisceau $\mathcal{D}_X^r|_U$. On a donc, $\mathcal{D}_X(U) = D_{\mathcal{O}_X(U)/K}$. Remarquons que si $(U; x_i)$ est une carte affinoïde de X et $V \subseteq U$ est un sous-domaine affinoïde (*cf.* [B-G-R]), alors $(V; x_i|_V)$ est aussi une carte affinoïde et

$$\mathcal{D}_X(V) = \mathcal{O}_X(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{D}_X(U) = \mathcal{D}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V).$$

De plus si $x \in X$, la fibre de $\mathcal{O}_X$ en x, $\mathcal{O}_{X, x}$ est une K-algèbre noethérienne régulière ayant les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2 (*cf.* [B-G-R]) et on a $\mathcal{D}_{X, x} = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X, x}/K}$.

Un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est par définition cohérent s'il existe un recouvrement admissible $\mathcal{U}$ de X par des cartes affinoïdes tel que pour chaque $U \in \mathcal{U}$, il existe une présentation finie

$$\mathcal{D}_U^r \to \mathcal{D}_U^s \to \mathcal{M}|_U \to 0.$$

On a la notion de bonne filtration pour des tels $\mathcal{D}_X$-modules, par exemple comme dans [M 1].

A l'aide du théorème d'acyclicité de Tate ([T]; *cf.* aussi [B-G-R], [F-vdP]), de l'égalité entre les premiers groupes de cohomologie de Čech et ordinaire et la commutation de ce dernier avec les limites inductives (*cf.* [A]) on démontre que $\mathbf{H}^1(U; \mathcal{M}) = 0$ pour tout $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ et toute carte affinoïde U de X sur laquelle $\mathcal{M}$ admet une présentation finie. Ainsi, on peut recopier les résultats de [M 1] pour trouver l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(*a*) $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent.

(*b*) Il existe un recouvrement admissible $\mathcal{U}$ de X par des cartes affinoïdes tel que pour chaque $U \in \mathcal{U}$ on a

(*b*-1) $\mathcal{M}(U)$ est un $\mathcal{D}_X(U)$-module de type fini.

(*b*-2) Pour tout sous-domaine affinoïde $V \subseteqq U$,

$$\mathcal{M}(V) = \mathcal{D}_X(V) \otimes_{\mathcal{D}_X(U)} \mathcal{M}(U)\, (= \mathcal{O}_X(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}(U)).$$

(*c*) Il existe un recouvrement admissible $\mathcal{U}$ de X par des cartes affinoïdes tel que pour chaque $U \in \mathcal{U}$ on a

(*c*-1) $\mathcal{M}(U)$ est un $\mathcal{D}_X(U)$-module de type fini.

(*c*-2) Pour chaque $x \in U$, $\mathcal{M}_x \simeq \mathcal{D}_{X, x} \otimes \mathcal{M}(U)\, (= \mathcal{O}_{X, x} \otimes \mathcal{M}(U))$.

Dans une suite exacte à trois termes de $\mathcal{D}_X$-modules, si deux d'entre eux sont cohérents, le troisième l'est aussi.

Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module, on dira qu'il est de dimension minimale s'il existe un recouvrement admissible $\mathscr{U}$ de X par des cartes affinoïdes tel que pour chaque $U \in \mathscr{U}$ on a

(d-1) $\mathscr{M}(U)$ est un $\mathscr{D}_X(U)$-module de type fini et de dimension minimale.

(d-2) Pour tout sous-domaine affinoïde $V \subseteqq U$,

$$\mathscr{M}(V) = \mathscr{D}_X(V) \otimes_{\mathscr{D}_X(U)} \mathscr{M}(U) \,(= \mathscr{O}_X(V) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{M}(U)).$$

Tout $\mathscr{D}_X$-module de dimension minimale est cohérent. Le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ est un $\mathscr{D}_X$-module de dimension minimale.

Si U est une carte affinoïde de X, $x \in U$ et m_x est l'idéal maximal de $\mathscr{O}_X(U)$ associé à x, le morphisme $\mathscr{O}_X(U)_{m_z} \to \mathscr{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme sur les complétés associés (*cf.* [B-G-R]), et donc il est fidèlement plat. D'après la remarque 2.2.5, si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent, il y a équivalence entre les propriétés suivantes.

(e) $\mathscr{M}$ est de dimension minimale.

(f) $\mathscr{M}_x$ est un $\mathscr{D}_{X,x} = D_{\mathscr{O}_{X,x}/K}$-module de dimension minimale, pour tout $x \in X$.

Dans une suite exacte à trois termes de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents, le terme au milieu est de dimension minimale si et seulement si les termes aux extrêmes sont de dimension minimale.

Si $Y \subset X$ est une hypersurface d'idéal $\mathscr{Y}_Y$ et $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module, on définit comme dans le cas classique

$$\mathscr{M}(*Y) := \mathbf{R} \varinjlim_k \mathit{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{Y}_Y^k, \mathscr{M}) = \mathscr{O}_X(*Y) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$$

$$\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Y(\mathscr{M}) := \mathbf{R} \varinjlim_k \mathit{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{Y}_Y^k, \mathscr{M}).$$

On a un triangle distingué

$$\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Y(\mathscr{M}) \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}(*Y) \overset{+1}{\to}.$$

THÉORÈME 4.3.3. — *Si* $\mathscr{M}$ *est un* $\mathscr{D}_X$*-module de dimension minimale et* Y *est une hypersurface de* X, *alors* $\mathscr{M}(*Y)$ *est aussi un* $\mathscr{D}_X$*-module de dimension minimale.*

Preuve. — Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement admissible de X par des cartes affinoïdes tel que pour tout $U \in \mathscr{U}$ l'hypersurface Y est définie par une équation $f=0$ et $\mathscr{M}|_U$ admet une présentation finie. Si $U \in \mathscr{U}$ et $Y \cap U = \{f=0\}$, alors

$$\mathscr{M}(*Y)(U) \simeq \mathscr{M}(U)_f$$

et

$$\mathscr{M}(*Y)_x \simeq (\mathscr{M}_x)_f \simeq \mathscr{D}_{X,x} \otimes_{\mathscr{D}_X(U)} \mathscr{M}(*Y)(U)$$

pour tout $x \in U$. D'après le théorème 3.2.1, $\mathscr{M}(*Y)(U)$ est un $\mathscr{D}_X(U)$-module de dimension minimale. Par conséquent $\mathscr{M}(*Y)$ est un $\mathscr{D}_X$-module de dimension minimale. □

COROLLAIRE 4.3.4. — *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module de dimension minimale et* Y *est une hypersurface de* X, *alors le complexe* $\mathbf{R}\,\mathrm{alg}\,\Gamma_Y(\mathscr{M})$ *est à cohomologie de dimension minimale.*

4.4. CAS DES ALGÈBRES DE DWORK-MONSKY-WASHNITZER. — Soit $(W, m=(\pi))$ un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k de caractéristique $p \geqq 0$ et de corps de fractions K de caractéristique 0. Le corps K est un corps valué complet ultramétrique. Considérons le complété m-adique $W[\hat{\underline{X}}]$ de l'anneau de polynômes $W[X_1, \ldots, X_n]$. Ses éléments sont les séries formelles $\sum_\alpha a_\alpha \underline{X}^\alpha$ telles que

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} v_m(a_\alpha) = +\infty.$$

On a un isomorphisme canonique $W[\underline{X}] \otimes_W K \simeq \mathbf{T}_n$.

On définit la W-algèbre de Dwork-Monsky-Washnitzer $W[\underline{X}]^\dagger$ (DMW pour simplifier) comme la sous-algèbre de $W[\hat{\underline{X}}]$ des séries $\sum_\alpha a_\alpha \underline{X}^\alpha$ telles qu'il existe une constante C strictement positive avec

$$v_m(a_\alpha) \geqq C\,|\alpha| \qquad \text{pour} \quad |\alpha| \gg 0$$

(*cf.* [M-W], [vdP]).

De même on définit la K-algèbre $K[\underline{X}]^\dagger$ de DMW par

$$K[\underline{X}]^\dagger := K \otimes_W W[\underline{X}]^\dagger \subset \mathbf{T}_n.$$

Voici quelques propriétés algébriques de $W[\underline{X}]^\dagger$ et $K[\underline{X}]^\dagger$:

– $W[\underline{X}]^\dagger$ et $K[\underline{X}]^\dagger$ sont des anneaux noethériens (*cf.* [Fu]).

– L'idéal $m\,W[\underline{X}]^\dagger$ est contenu dans le radical de Jacobson (*cf.* [M-W]) et donc les extensions $W[\underline{X}]^\dagger \to W[\underline{X}]$ et $K[\underline{X}]^\dagger \to \mathbf{T}_n$ sont fidèlement plates.

– $W[\underline{X}]^\dagger$ est un anneau régulier (*cf.* [M-W]) dont tous les idéaux maximaux sont de hauteur $n+1$. Donc, $K[\underline{X}]^\dagger = W[\underline{X}]^\dagger_\pi$ est un anneau régulier équicodimensionnel de dimension n.

– L'anneau $K[\underline{X}]^\dagger$ satisfait un théorème de préparation et division de Weierstrass (*cf.* [vdP]), ce qui entraîne en particulier un lemme de normalisation, que tout idéal maximal de $K[\underline{X}]^\dagger$ est engendré par des polynômes de $K[\underline{X}]$ et que les corps résiduels dans les idéaux maximaux sont des extensions finies de K.

D'après les propriétés précédentes, on conclut que la K-algèbre noethérienne régulière $K[\underline{X}]^\dagger$ vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2. Par la théorie générale on sait que $\mathrm{dh}(D_{K[\underline{X}]^\dagger/K}) = \dim(K[\underline{X}]^\dagger) = n$ et que le $D_{K[\underline{X}]^\dagger/K}$-module $K[\underline{X}]^\dagger$ est de dimension minimale. Si $f \in K[\underline{X}]^\dagger$ est un élément non nul, en vertu des résultats du paragraphe 3 il existe un polynôme non nul $b_f(s) \in K[s]$ et un opérateur $P(s) \in D_{K[\underline{X}]^\dagger/K}[s]$ tels que l'on ait l'équation fonctionnelle

$$b_f(s)\,\mathbf{f}^s = P(s)\,f\,\mathbf{f}^s.$$

Remarquons qu'on peut aussi appliquer les résultats de 4.2 à l'extension $K[\underline{X}]^\dagger \to \mathbf{T}_n$.

Plus généralement on appelle W-algèbre (resp. K-algèbre) de DMW un quotient de $W[\underline{X}]^\dagger$ (resp. de $K[\underline{X}]^\dagger$). Rappelons aussi qu'étant donné une W-algèbre A, le complété de DMW de A, noté $A^\dagger$, est défini (*cf.* [M-W]). Il s'agit d'une sous-algèbre du complété m-adique $\hat{A}$ de A. Si A est de type fini sur W, ou plus généralement, est de type fini sur une W-algèbre de DMW, alors $A^\dagger$ est aussi une W-algbère de DMW.

On a les propriétés suivantes :

– Si A est une W-algèbre de DMW et $r \geqq 1$, $A_r = A/m^r A$ est une algèbre de type fini sur $W_r = W/m^r$. Pour $r=1$ on notera $\bar{A} = A/mA$.

– Si A est une K-algèbre de DMW, tous les idéaux maximaux sont K-algébriques.

– Si A est un W-algèbre plate de DMW, alors A est biéquidimensionnelle de dimension $r+1 \Leftrightarrow \bar{A}$ est biéquidimensionnelle de dimension $r \Leftrightarrow K \otimes_W A$ est biéquidimensionnelle de dimension r.

4.4.1. Soit A une W-algèbre de DMW formellement lisse (*cf.* théorème A.15). Considérons la propriété suivante :

(iii) DMW il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $dx_1, \ldots, dx_n$ est une A-base de $\tilde{\Omega}^1_{A/W}$ cf. Appendice Déf. A.9.

Remarquons que si A est une W-algèbre de DMW formellement lisse, équicodimensionnelle de dimension $n+1$ et vérifiant (iii) DMW, alors la K-algèbre noethérienne régulière $K \otimes_W A$ (*cf.* [M-W], th. 6.3) satisfait les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2 et on peut lui appliquer la théorie du paragraphe 3. On a en particulier $\mathrm{dh}(D_{K \otimes A/K}) = \dim(K \otimes A) = n$ et la notion de $D_{K \otimes A/K}$-module de dimension minimale.

PROPOSITION 4.4.2. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW *formellement lisse vérifiant la propriété* (iii) DMW. *Alors il existe une famille* $\{\Delta^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ *d'opérateurs différentiels* W-*linéaires de* A *tels que*

$$(1) \qquad \Delta^{(\alpha)}(\underline{x}^\beta) = \binom{\beta}{\alpha} \underline{x}^{\beta-\alpha}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n.$$

De plus, la famille $\{\Delta^{(\alpha)}\}$ *est déterminée de façon unique par la condition* (1) *et vérifie aussi les relations*

$$\Delta^{(\alpha)} \circ \Delta^{(\beta)} = \Delta^{(\beta)} \circ \Delta^{(\alpha)} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha} \Delta^{(\alpha+\beta)}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n.$$

Enfin, pour tout entier $l \geqq 0$, *les* $\{\Delta^{(\alpha)}\}_{|\alpha| \leqq l}$ *forment une base du* A-*module à gauche* (*ou à droite*) $D^l_{A/W}$.

Preuve. — Il suffit d'appliquer le théorème A.16, A.14 et de recopier celle du théorème 16.11.2 de [EGA IV]. En fait on a $\alpha! \Delta^{(\alpha)} = \underline{\partial}^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$, où ∂^i est la dérivation par rapport à x_i, $i=1, \ldots, n$. □

Étant donné une W-algèbre de DMW A, on définit avec [Mer] et [L] le « schéma affine formel faible » associé à A, noté Spff(A), comme l'espace annelé dont l'espace topologique sous-jacent est $X = \mathrm{Spec}(\bar{A})$ et les sections du faisceau structural $\mathcal{O}_X$ sur un ouvert principal $X_{\bar{f}}$, avec $f \in A$, coïncident avec $(A_f)^\dagger$. Rappelons que si M est un A-module, on a un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules associé, que l'on note $\tilde{M}$ (*voir loc. cit.* pour les détails et en particulier pour les propriétés cohomologiques de ces faisceaux).

Un W-schéma formel faible est un espace annelé en W-algèbres $(X, \mathcal{O}_X)$ tel qu'il est localement isomorphe à un schéma affine formel faible. Notons que sur un W-schéma formel faible $(X, \mathcal{O}_X)$ il existe un faisceau des différentielles Ω_X et une dérivation $d: \mathcal{O}_X \to \Omega_X$, de manière que si $U \subseteq X$ est un ouvert tel que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ soit un schéma affine formel faible, alors $\Omega_X|_U$ est le faisceau associé au $\mathcal{O}_X(U)$-module $\tilde{\Omega}^1_{\mathcal{O}_X(U)/W}$ (corollaire A.12). En fait on peut aussi faisceautiser de la même façon la construction des parties principales séparées (*cf.* A.13).

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un W-schéma formel faible, alors $(X, \mathcal{O}_X/m\mathcal{O}_X)$ est un schéma k-algébrique.

Nous dirons pour simplifier qu'un W-schéma formel faible $(X, \mathcal{O}_X)$ est lisse si localement il est isomorphe à un schéma affine formel faible Spff(A) avec A W-algèbre de DMW formellement lisse (*cf.* [M-W]). Ceci est équivalent à dire que $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de W-algèbres plates et que $(X, \mathcal{O}_X/m\mathcal{O}_X)$ est un schéma algébrique lisse sur k (*cf.* théorème A.15).

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un W-schéma formel faible lisse, purement de dimension n, il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts affines tel que

(*) $(U, \mathcal{O}_U)$ est un W-schéma affine formel faible.

(**) Il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{O}_U(U)$ tels que $dx_1, \ldots, dx_n$ forment une $\mathcal{O}_U$-base de Ω_U.

Remarquons que si $U \subseteq X$ est un ouvert vérifiant les propriétés (*), (**) et $V \subseteq U$ est un ouvert principal, alors V vérifie aussi les mêmes propriétés. De plus, la W-algèbre de DMW $\mathcal{O}_X(U)$ satisfait la propriété (iii)DMW.

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un W-schéma formel faible lisse, purement de dimension n, on définit pour chaque $r \geqq 0$ le faisceau $\mathcal{D}^r_{X/W} \subset End_W(\mathcal{O}_X)$ des opérateurs différentiels W-linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}_X$ d'ordre $\leqq r$, comme dans [EGA IV], § 16. Le faisceau des opérateurs différentiels W-linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}_X$ est par définition $\mathcal{D}_{X/W} := \bigcup_{r \geqq 0} \mathcal{D}^r_{X/W} \subset End_W(\mathcal{O}_X)$. Donc, $\mathcal{D}_{X/W}$ est un faisceau d'anneaux (non commutatifs) filtré.

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement de X par des ouverts affines ayant les propriétés (*), (**) ci-dessus, alors, d'après la proposition 4.4.2, sur chaque $U \in \mathcal{U}$ il existe une famille unique $\{\Delta^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \subset \mathcal{D}_{X/W}(U)$ telle que $\Delta^{(\alpha)}(x^\beta) = \binom{\beta}{\alpha} x^{\beta-\alpha}$. De plus les $\{\Delta^{(\alpha)}\}$ forment une $\mathcal{O}_U$-base à droite et à gauche de $\mathcal{D}_{X\,|\,U}$ [EGA IV], th. 16.11.2.

Soit maintenant $\mathbf{X} = (X, \mathcal{O}_X)$ un W-schéma formel faible lisse, purement de dimension n, et considérons l'espace annelé $\mathbf{X}_K := (X, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_K} = K \otimes_W \mathcal{O}_X)$. On définit comme avant le faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathbf{X}_K/K} = \bigcup_{r \geqq 0} \mathcal{D}^r_{X/K} \subset End_K(\mathcal{O}_{\mathbf{X}_K})$. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts affines ayant les propriétés (*), (**). On a

– $\mathcal{D}_{\mathbf{X}_K/K} = K \otimes_W \mathcal{D}^r_{X/W}$ pour tout $r \geqq 0$.

– Pour chaque $U \in \mathscr{U}$ et chaque $r \geqq 0$, $\mathscr{D}_{X_K/K}|_U$ est un $\mathscr{O}_{X_K}|_U$-module libre à droite et gauche de base $\{\partial^\alpha\}_{|\alpha| \leqq r}$, où $\partial_i : \mathscr{O}_{X_K}|_U \to \mathscr{O}_{X_K}|_U$ est la dérivation par rapport à x_i, $i=1, \ldots, n$.

– Il existe un isomorphisme canonique $\mathrm{Sym}(\mathrm{Der}_K(\mathscr{O}_{X_K})) \simeq \mathrm{gr}(\mathscr{D}_{X_K/K})$.

– $\mathscr{D}_{X_K/K}$ est un faisceau d'anneaux cohérent.

– Si $U \in \mathscr{U}$, $\mathscr{O}_{X_K}(U) = K \otimes_W \mathscr{O}_X(U)$ est une K-algèbre de DMW régulière vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii) de 1.1.2 et

$$\mathscr{D}_{X_K/K}(U) = D_{\mathscr{O}_{X_K}(U)/K} = D_{K \otimes_W \mathscr{O}_X(U)/K}.$$

– Si $U \in \mathscr{U}$ et $V \subseteqq U$ est un ouvert principal, alors

$$\mathscr{D}_{X_K/K}(V) = \mathscr{O}_{X_K}(V) \otimes_{\mathscr{O}_{X_K}(U)} \mathscr{D}_{X_K/K}(U) = \mathscr{D}_{X_K/K}(U) \otimes_{\mathscr{O}_{X_K}(U)} \mathscr{O}_{X_K}(V).$$

On a la notion de bonne filtration pour les $\mathscr{D}_{X_K/K}$-modules cohérents. Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{X_K/K}$-module, on peut recopier [M 1], exp. 1, comme dans 4.3.1 pour avoir l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(*a*) $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{X_K/K}$-module cohérent.

(*b*) Il existe un recouvrement $\mathscr{U}$ de X par des ouverts affines ayant les propriétés (*), (**) tel que pour chaque $U \in \mathscr{U}$ on a

(*b*-1) $\mathscr{M}(U)$ est un $\mathscr{D}_{X_K/K}(U)$-module de type fini.

(*b*-2) Pour tout ouvert principal $V \subseteqq U$,

$$\mathscr{M}(V) = \mathscr{D}_{X_K/K}(V) \otimes_{\mathscr{D}_{X_K/K}(U)} \mathscr{M}(U) \qquad (= \mathscr{O}_{X_K}(V) \otimes_{\mathscr{O}_{X_K}(U)} \mathscr{M}(U)).$$

(*c*) Il existe un recouvrement $\mathscr{U}$ de X par des ouverts affines ayant les propriétés (*), (**) tel que pour chaque $U \in \mathscr{U}$ on a

(*c*-1) $\mathscr{M}(U)$ est un $\mathscr{D}_{X_K/K}(U)$-module de type fini.

(*c*-2) Pour chaque $x \in U$, $\mathscr{M}_x \simeq \mathscr{D}_{X_K/K,\,x} \otimes \mathscr{M}(U)\,(= \mathscr{O}_{X_K,\,x} \otimes \mathscr{M}(U))$.

Dans une suite exacte à trois termes de $\mathscr{D}_{X_K/K}$-modules, si deux d'entre eux sont cohérents, le troisième l'est aussi.

Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{X_K/K}$-module, on dira qu'il est de dimension minimale s'il existe un recouvrement $\mathscr{U}$ de X par des ouverts affines ayant les propriétés (*), (**) tel que pour chaque $U \in \mathscr{U}$ on a

(*d*-1) $\mathscr{M}(U)$ est un $\mathscr{D}_{X_K/K}(U)$-module de type fini et de dimension minimale.

(*d*-2) Pour tout $V \subseteqq U$ ouvert principal,

$$\mathscr{M}(V) = \mathscr{D}_{X_K/K}(V) \otimes_{\mathscr{D}_{X_K/K}(U)} \mathscr{M}(U) \qquad (= \mathscr{O}_{X_K}(V) \otimes_{\mathscr{O}_{X_K}(U)} \mathscr{M}(U)).$$

Tout $\mathscr{D}_{X_K/K}$-module de dimension minimale est cohérent. Le faisceau structural $\mathscr{O}_{X_K}$ est un $\mathscr{D}_{X_K/K}$-module de dimension minimale.

Dans une suite exacte à trois termes de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents, le terme au milieu est de dimension minimale si et seulement si les termes aux extrêmes sont de dimension minimale.

Soit $\mathbf{X}=(X, \mathcal{O}_X)$ un W-schéma formel faible lisse de dimension pure n et $\mathbf{Z}=(Z, \mathcal{O}_Z)$ un sous-espace fermé de $\mathbf{X}_K=(X, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_K})$. Soit $\mathscr{I}_\mathbf{Z} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{X}_K}$ l'idéal de $\mathbf{Z}$ et soit $\mathscr{Y}=\mathscr{I}_\mathbf{Z} \cap \mathcal{O}_X$. L'espace $\mathbf{Y}=(Y, \mathcal{O}_Y)$, avec $Y=\operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/\mathscr{Y})$ et $\mathcal{O}_Y=(\mathcal{O}_X/\mathscr{Y})|_Y$, est un sous-schéma W-plat de $\mathbf{X}$, et en fait $\mathbf{Z}=\mathbf{Y}_K$.

Le k-schéma associé à $\mathbf{Y}$, $\bar{\mathbf{Y}}=(Y, \mathcal{O}_Y/m\,\mathcal{O}_Y)$, est aussi une sous-variété de $\bar{\mathbf{X}}$.

Si $\mathscr{M}$ est un complexe borné de $\mathscr{D}_{\mathbf{X}_K/K}$-modules, on définit comme dans le cas classique

$$\mathbf{R}\,\mathscr{M}(*\mathbf{Z}) := \mathbf{R}\varinjlim_k \mathit{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}_K}}(\mathscr{I}_\mathbf{Z}^k, \mathscr{M})$$

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_\mathbf{Z}(\mathscr{M}) := \mathbf{R}\varinjlim_k \mathit{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}_K}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}_K}/\mathscr{I}_\mathbf{Z}^k, \mathscr{M}).$$

On a un triangle distingué de cohomologie algébrique

$$\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_\mathbf{Z}(\mathscr{M}) \to \mathscr{M} \to \mathbf{R}\,\mathscr{M}(*\mathbf{Z}) \overset{+1}{\to}.$$

THÉORÈME 4.4.3. — *Si $\mathscr{M}$ est un complexe borné de $\mathscr{D}_{\mathbf{X}_K/K}$-modules à cohomologie de dimension minimale, alors $\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_\mathbf{Z}(\mathscr{M})$ et $\mathbf{R}\,\mathscr{M}(*\mathbf{Z})$ sont aussi à cohomologie de dimension minimale.*

Preuve. — Il suffit de traiter le cas où $\mathbf{Z}$ est une hypersurface et $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_{\mathbf{X}_K/K}$-module de dimension minimale. Dans ce cas,

$$\mathbf{R}\,\mathscr{M}(*\mathbf{Z}) = \mathscr{M}(*\mathbf{Z}) = \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}_K}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_K}(*\mathbf{Z}).$$

Alors on peut raisonner comme dans le théorème 4.3.2 pour déduire que $\mathscr{M}(*\mathbf{Z})$ est un $\mathscr{D}_{\mathbf{X}_K/K}$-module de dimension minimale. D'après le triangle de cohomologie algébrique, $\mathbf{R}\operatorname{alg}\Gamma_\mathbf{Z}(\mathscr{M})$ est aussi à cohomologie de dimension minimale. □

REMARQUE 4.4.4. — *Les résultats précédents se transposent sans difficulté au cadre des* W-*schémas formels* (*topologiquement*) *de type fini et lisses.*

Si $\mathbf{X}=(X, \mathcal{O}_X)$ est un W-schéma formel faible lisse et $\mathbf{Y}=(Y, \mathcal{O}_Y) \subset \mathbf{X}$ est une hypersurface W-plate, notons $j: U = X \setminus Y \hookrightarrow X$ l'inclusion. Le faisceau $j_* j^{-1}\mathcal{O}_X$ (resp. $K \otimes_W j_* j^{-1}\mathcal{O}_X$) est analogue au faisceau des fonctions à singularités essentielles le long de Y dans le cas analytique complexe. Il a une structure naturelle de $\mathscr{D}_{X/W}$-module à gauche (resp. $\mathscr{D}_{\mathbf{X}_K/K}$-module à gauche). En fait il porte une structure plus fine, comme l'on remarque dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 4.4.5. — *Notons $\mathbf{X}_r=(X, \mathcal{O}_X/m^r\mathcal{O}_X)$ la réduction modulo m^r de $\mathbf{X}$. Il s'agit d'un W_r-schéma lisse de type fini. Soit $\mathscr{D}^\dagger{}_{X/W}$ le sous-faisceau de $End_W(\mathcal{O}_X)$ formé par les endomorphismes P tels que pour chaque $r \geqq 1$ la réduction modulo m^r de P, P_r, est un opérateur différentiel et il existe $\lambda > 0$ avec* $\operatorname{ord}(P_r) \leqq \lambda(r+1)$. *Par exemple si* $\mathbf{X}$

est l'espace affine formel faible $\mathrm{Spff}(\mathrm{W}[\underline{\mathrm{X}}]\dagger)$, *les sections globales de* $\mathscr{D}^{\dagger}{}_{\mathrm{X/W}}$ *sont les séries* $\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}\underline{\mathrm{X}}^{\alpha}\Delta^{(\beta)}$ *telles que* $\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}\underline{\mathrm{X}}^{\alpha}\underline{\mathrm{Y}}^{\beta}\in \mathrm{W}[\underline{\mathrm{X}},\underline{\mathrm{Y}}]\dagger$, *où les* $\Delta^{(\beta)}$ *sont comme dans la proposition* 4.4.2. *Si* $\mathrm{Y}\subset \mathrm{X}$ *est une hypersurface* W*-plate et* $j:\mathrm{U}\hookrightarrow \mathrm{X}$ *est l'inclusion de l'ouvert complémentaire, alors* $j_*j^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ *a une structure naturelle de* $\mathscr{D}^{\dagger}{}_{\mathrm{X/W}}$*-module à gauche. Le cas analytique complexe* ([Me 1], [Me 2], [Me 3]) *suggère que* $j_*j^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ *ait de bonnes propriétés de finitude sur* $\mathscr{D}^{\dagger}{}_{\mathrm{X/W}}$, *du moins après tensorisation par* K. *Remarquons aussi que l'extension* $\mathscr{D}_{\mathrm{X/W}}\otimes_{\mathrm{W}}\mathrm{K}\to\mathscr{D}^{\dagger}{}_{\mathrm{X/W}}\otimes_{\mathrm{W}}\mathrm{K}$ *n'est pas fidèlement plate, ce qui fait penser que le faisceau* $\mathscr{D}^{\dagger}{}_{\mathrm{X/W}}\otimes_{\mathrm{W}}\mathrm{K}$ *pourrait être l'anneau de base pour les bons coefficients p-adiques* (*cf.* [Me-N]).

REMARQUE 4.4.6. — *P. Berthelot* [Be 2] *a défini indépendamment le faisceau* $\mathscr{D}^{\dagger}{}_{\mathrm{X/W}}$ *dans le cadre des schémas formels. Il a défini une filtration de* $\mathscr{D}^{\dagger}{}_{\mathrm{X/W}}$ *par ses sous-faisceaux d'opérateurs différentiels d'échelon j qui sont des faisceaux cohérents et noethériens. Il en déduit que le faisceau* $\mathscr{D}^{\dagger}{}_{\mathrm{X/W}}\otimes_{\mathrm{W}}\mathrm{K}$ *est cohérent!*

APPENDICE A

CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LES ALGÈBRES DE DMW

Dans cet appendice nous allons transposer quelques résultats de [EGA IV] dans le contexte des W-algèbres de DMW.

A.1. Si A, B sont deux W-algèbres de DMW, l'algèbre $\mathrm{A}\overset{\dagger}{\otimes}{}_{\mathrm{W}}\mathrm{B}:=(\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{W}}\mathrm{B})\dagger$ est le coproduit de A et B dans la catégorie des W-algèbres de DMW. De plus on a des isomorphismes canoniques $(\mathrm{A}\overset{\dagger}{\otimes}{}_{\mathrm{W}}\mathrm{B})_r\simeq \mathrm{A}_r\otimes_{\mathrm{W}_r}\mathrm{B}_r$, d'après [M-W], th. 1.4.

Si A est une W-algèbre de DMW, notons $\varepsilon_0:\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{W}}\mathrm{A}\to\mathrm{A}$ l'augmentation naturelle et $\varepsilon:\mathrm{A}\overset{\dagger}{\otimes}{}_{\mathrm{W}}\mathrm{A}\to\mathrm{A}$ l'homomorphisme induit par ε_0. Notons aussi I (resp. $\mathscr{I}$) le noyau de ε_0 (resp. de ε).

LEMME A.2. — *Avec les notations précédentes, si* $x_1,\ldots,x_n$ *sont des générateurs faibles de* A (*cf.* [M-W], def. 2.1), *alors* $\mathscr{I}$ *est l'idéal engendré par* $x_i\otimes 1-1\otimes x_i, i=1,\ldots,n$. *En particulier,* $\mathscr{I}=\mathrm{I}^e$.

Preuve. — Soient $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$, $\mathrm{Y}_1,\ldots,\mathrm{Y}_n$ des indéterminées. Pour chaque $\alpha\in\mathbf{N}^n$ non nul, il existe des polynômes à coefficients entiers $\mathrm{P}_{i,\alpha}(\underline{\mathrm{X}},\underline{\mathrm{Y}})$, $1\leqq i\leqq n$ homogènes de degré $|\alpha|-1$, tels que

$$\underline{\mathrm{X}}^{\alpha}-\underline{\mathrm{Y}}^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}_{i,\alpha}(\underline{\mathrm{X}},\underline{\mathrm{Y}})(\mathrm{X}_i-\mathrm{Y}_i).$$

Soit g un élément de $\mathscr{I}$ et posons $\tilde{x}_i=x_i\otimes 1-1\otimes x_i\in\mathscr{I}$, $1\leqq i\leqq n$. Il existe une série $\mathrm{G}(\underline{\mathrm{X}},\underline{\mathrm{Y}})=\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}\underline{\mathrm{X}}^{\alpha}\underline{\mathrm{Y}}^{\beta}\in\mathrm{W}[\underline{\mathrm{X}},\underline{\mathrm{Y}}]\dagger$ telle que $g=\mathrm{G}(\underline{x}\otimes 1, 1\otimes\underline{x})$. Pour chaque $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n$

on trouve :

$$(\underline{x}^{\alpha}\otimes 1)(1\otimes x^{\beta})=\sum_{i=1}^{n}(1\otimes \underline{x}^{\beta})\,P_{i,\alpha}(\underline{x}\otimes 1, 1\otimes \underline{x})\,\tilde{x}_i+1\otimes \underline{x}^{\alpha+\beta}.$$

Or, pour chaque $i=1,\ldots,n$ la série $G_i(\underline{X},\underline{Y})=\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}\,Y^{\beta}P_{i,\alpha}(\underline{X},\underline{Y})$ appartient à $W[\underline{X},\underline{Y}]^{\dagger}$, et comme $0=\varepsilon(g)=\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}\,\underline{x}^{\alpha+\beta}$, on a

$$g=\ldots=\sum_{i=1}^{n} G_i(\underline{x}\otimes 1, 1\otimes \underline{x})\,\tilde{x}_i\in(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n). \qquad \square$$

Rappelons la définition des algèbres des parties principales [EGA IV], 16.3.7.

DÉFINITION A.3. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW. *On désigne par* $P^l_{A/W}$, *et l'on appelle algèbre des parties principales d'ordre l de la* W-*algèbre* A, *l'anneau* $(A\otimes_W A)/I^{l+1}$ *muni de l'homomorphisme* $a\in A\mapsto(a\otimes 1)+I^{l+1}\in(A\otimes_W A)/I^{l+1}$.

L'homomorphisme d'anneaux $b\in A\mapsto(1\otimes b)+I^{l+1}\in P^l_{A/W}$ se note $d^l_{A/W}$. Rappelons que pour chaque $l\geqq 0$ il existe un isomorphisme canonique de A-modules à gauche :

$$\varphi\in \mathrm{Hom}_A(P^l_{A/W},A)\mapsto\varphi\circ d^l_{A/W}\in D^l_{A/W}$$

(*cf.* 1.1.3 et [EGA IV], prop. 16.8.8).

PROPOSITION A.4. — *Le séparé associé pour la topologie m-adique de* $P^l_{A/W}$ *est canoniquement isomorphe à* $(A\overset{\dagger}{\otimes}{}_W A)/\mathscr{I}^{l+1}$.

Preuve. — Notons $\tau: P^l_{A/W}\to(A\overset{\dagger}{\otimes}{}_W A)/\mathscr{I}^{l+1}$ l'homomorphisme canonique qui fait du terme à droite le complété de DMW de celui à gauche ([M-W], th. 2.1). Pour démontrer la proposition il suffit de voir que τ est surjective. Soit $x_1,\ldots,x_n\in A$ des générateurs faibles.

Pour chaque $\beta\in\mathbf{N}^n$ il existe des polynômes à coefficients entiers $R_{\gamma,\beta}(\underline{X})$, $\gamma\in\mathbf{N}^n$, $|\gamma|\leqq l+1$, homogènes de degré $|\beta|-|\gamma|$ (ou nuls si $|\beta|-|\gamma|<0$), et $Q_{\alpha,\beta}(\underline{X},\underline{Y})$, $\sigma\in\mathbf{N}^n$, $|\sigma|=l+1$, homogènes de degré $|\beta|-l-1$ (ou nuls si $|\beta|<l+1$) tels que :

$$\underline{Y}^{\beta}=\sum_{|\gamma|\leqq l+1}R^l_{\gamma,\beta}(\underline{X})\,\underline{Y}^{\gamma}+\sum_{|\sigma|=l+1}Q^l_{\sigma,\beta}(\underline{X},\underline{Y})\prod_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^{\sigma_i}.$$

Soit $g\in A\overset{\dagger}{\otimes}{}_W A$; il existe une série $G(\underline{X},\underline{Y})=\sum_{\alpha,\beta}g_{\alpha,\beta}X^{\alpha}Y^{\beta}\in W[\underline{X},\underline{Y}]^{\dagger}$ telle que $g=G(\underline{x}\otimes 1, 1\otimes \underline{x})$. Pour chaque $\gamma\in\mathbf{N}^n$, $|\gamma|\leqq l+1$ (resp. $\sigma\in\mathbf{N}^n$, $|\sigma|=l+1$) posons :

$$R_{\gamma}(\underline{X})=\sum_{\alpha,\beta}g_{\alpha,\beta}\,\underline{X}^{\alpha}R_{\gamma,\beta}(\underline{X})\in W[[\underline{X}]]$$

$$(\text{resp. } Q_{\sigma}=\sum_{\alpha,\beta}g_{\alpha,\beta}\,\underline{X}^{\alpha}Q_{\sigma,\beta}(\underline{X},\underline{Y})\in W[[\underline{X},\underline{Y}]]).$$

Il est clair que $R_\gamma(\underline{X}) \in W[\underline{X}]^\dagger$ (resp. $Q_\sigma(\underline{X}, \underline{Y}) \in W[\underline{X}, \underline{Y}]^\dagger$) et que:

$$g = \sum_{|\gamma| \leqq l+1} R_\gamma(\underline{x})(1 \otimes \underline{x}^\gamma) + \sum_{|\sigma| = l+1} Q_\sigma(\underline{x} \otimes 1, 1 \otimes \underline{x}) \prod_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^{\sigma_i}$$

d'où:

$$g + \mathscr{I}^{l+1} = \tau\Big(\sum_{|\gamma| \leqq l+1} R_\gamma(\underline{x})(1 \otimes \underline{x}^\gamma) + I^{l+1}\Big)$$

et τ est surjective. □

Définition A.5. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW. *On désigne par* $\tilde{P}^l_{A/W}$, *et l'on appelle algèbre séparée des parties principales d'ordre* l *de la* W-*algèbre* A, *l'anneau* $(A \overset{\dagger}{\otimes}_W A)/\mathscr{I}^{l+1}$ *muni de l'homomorphisme* $\alpha \in A \mapsto (a \otimes 1) + \mathscr{I}^{l+1} \in (A \overset{\dagger}{\otimes}_W A)/\mathscr{I}^{l+1}$.

L'homomorphisme d'anneaux $b \in A \mapsto (1 \otimes b) + \mathscr{I}^{l+1} \in \tilde{P}^l_{A/W}$ se note $\tilde{d}^l_{A/W}$. Si $\tau : P^l_{A/W} \to \tilde{P}^l_{A/W}$ est l'homomorphisme canonique, on a $\tilde{d}^l_{A/W} = \tau \circ d^l_{A/W}$.

Remarque A.6. — *Au cours de la preuve de la proposition* A.4, *nous avons démontré que* $P^l_{A/W}$ *est un* A-*module de type fini, engendré par les* $1 \otimes \underline{x}^\gamma$, $|\gamma| \leqq l+1$.

Corollaire A.7. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW *et* $l \geqq 0$. *L'application*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\tilde{P}^l_{A/W}, A) \mapsto \varphi \circ \tilde{d}^l_{A/W} \in D^l_{A/W}$$

est un isomorphisme de A-*modules à gauche.*

Preuve. — Comme la topologie m-adique est séparée sur A, d'après la proposition A.4 on a un isomorphisme canonique

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\tilde{P}^l_{A/W}, A) \mapsto \varphi \circ \tau \in \mathrm{Hom}_A(P^l_{A/W}, A)$$

(A-linéaire ⇒ W-linéaire ⇒ continu pour la topologie m-adique), d'où le corollaire. □

Corollaire A.8. — *Avec les notations précédentes, le séparé associé pour la topologie* m-*adique de* $\Omega^1_{A/W} = I/I^2$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$.

Preuve. — Il suffit de remarquer que $P^1_{A/W}$ (resp. $\tilde{P}^1_{A/W}$) est la somme directe topologique de A et I/I^2 (resp. et $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$), et d'appliquer la proposition A.4 (comparer avec [M-W], th. 4.5). □

Définition A.9. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW. *On désigne par* $\tilde{\Omega}^1_{A/W}$, *et l'on appelle module séparé des différentielles de la* W-*algèbre* A, *le* A-*module* $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$. *On note* $\tilde{d} : A \to \tilde{\Omega}^1_{A/W}$ *la dérivation définie par* $\tilde{d}a = (1 \otimes a - a \otimes 1) + \mathscr{I}^2$, $\forall a \in A$.

Remarque A.10. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW *et* $x_1, \ldots, x_n \in A$ *des générateurs faibles. D'après la remarque* A.6 *on conclut que* $\tilde{\Omega}^1_{A/W}$ *est engendré comme* A-*module par* $\tilde{d}x_1, \ldots, \tilde{d}x_n$ (*comparer avec* [M-W], th. 4.5 et [vdP], 2.3).

Corollaire A.11. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW *et* M *un* A-*module séparé pour la topologie* m-*adique* (*par exemple* M *de type fini*). *Alors l'application*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\tilde{\Omega}^1_{A/W}, M) \mapsto \varphi \circ \tilde{d} \in \mathrm{Der}_W(A, M)$$

est un isomorphisme de A-*modules.*

Preuve. — Elle est analogue à celle du corollaire A.7. □

COROLLAIRE A.12. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW *et f un élément de* A. *Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$(A_f)^\dagger \otimes_A \tilde{\Omega}^1_{A/W} \simeq \tilde{\Omega}_{(A_f)^\dagger/W}.$$

Preuve. — Posons $B=(A_f)\dagger$ pour simplifier. Soit $\varphi_0 : \tilde{\Omega}^1_{A/W} \to \tilde{\Omega}^1_{B/W}$ le seul homomorphisme A-linéaire tel que $\varphi_0 \circ \tilde{d}_{A/W} = \tilde{d}_{B/W}$, et soit $\varphi : B \otimes_A \tilde{\Omega}^1_{A/W} \to \tilde{\Omega}^1_{B/W}$ l'homomorphisme B-linéaire qui s'en déduit.

Notons $d_0 : A_f \to \Omega^1_{A_f/W} = A_f \otimes \Omega^1_{A/W}$ la différentielle et $\delta_0 : A_f \to B \otimes_A \tilde{\Omega}^1_{A/W}$ la dérivation qui s'en déduit en composant avec l'application naturelle A_f-linéaire $A_f \otimes_A \Omega^1_{A/W} \to B \otimes_A \tilde{\Omega}^1_{A/W}$:

$$\delta_0\left(\frac{a}{f^l}\right) = \left(\frac{1}{f^l}\right) \otimes (\tilde{d}_{A/W}\, a) - \left(\frac{la}{f^{l+1}}\right) \otimes (\tilde{d}_{A/W} f), \qquad \frac{a}{f^l} \in A_f.$$

Voyons que δ_0 s'étend (de façon unique) à B. L'application δ_0 est continue pour les topologies m-adiques. Soit $x_1, \ldots, x_n \in A$ des générateurs faibles et soit g un élément de B. Il existe une série $G(\underline{X}, Y) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n,\ l \geq 0} g_{\alpha, l} X^\alpha Y^l \in W[\underline{X}, Y]^\dagger$ telle que $g = G(\underline{x}, f^{-1})$:

$$\delta_0\left(\frac{\underline{x}^\alpha}{f^l}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(\partial \underline{X}^\alpha/\partial X_i)(\underline{x})}{f^l}\right] \otimes (\tilde{d}_{A/W}\, x_i) - \left(\frac{l\underline{x}^\alpha}{f^{l+1}}\right) \otimes (\tilde{d}_{A/W} f).$$

Notons $G_i(\underline{X}, Y)$ la dérivée par rapport à X_i de $G(\underline{X}, Y)$ et $\tilde{G}(\underline{X}, Y) = \sum_{\alpha, l} l g_{\alpha, l} \underline{X}^\alpha Y^{l+1}$. Il est clair que ces séries appartiennent à $W[\underline{X}, Y]^\dagger$, d'où la série $\sum_{\alpha, l} \delta_0(g_{\alpha, l}\underline{x}^\alpha f^{-l})$ converge vers l'élément de $B \otimes_A \tilde{\Omega}^1_{A/W}$ suivant :

$$\sum_{i=1}^{n} G_i(\underline{x}, f^{-1}) \otimes (\tilde{d}_{A/W}\, x_i) - \tilde{G}(\underline{x}, f^{-1}) \otimes (\tilde{d}_{A/W} f).$$

Donc δ_0 admet un prolongement (unique) en une dérivation $\delta : B \to B \otimes_A \tilde{\Omega}^1_{A/W}$. De là on déduit l'existence d'un seul homomorphisme B-linéaire $\psi : \tilde{\Omega}^1_{B/W} \to B \otimes_A \tilde{\Omega}^1_{A/W}$ tel que $\psi \circ \tilde{d}_{B/W} = \delta$. Il est facile de voir que $\psi = \varphi^{-1}$. □

REMARQUE A.13. — *On a un résultat analogue du corollaire* A.12 *pour les algèbres séparées des parties principales.*

A.14. Soit A une W-algèbre de DMW et $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $\{\tilde{d}x_1, \ldots, \tilde{d}x_n\}$ engendrent $\tilde{\Omega}^1_{A/W}$ comme A-module. Posons $\zeta_i = (1 \otimes x_i - x_i \otimes 1) + \mathscr{I}^{l+1} \in \tilde{P}^l_{A/W}$, $1 \leq i \leq n$. On peut recopier [EGA IV], 16.11.1, pour démontrer que la famille $\{\zeta^\alpha\}_{|\alpha| \leq l}$ engendre le A-module à gauche $\tilde{P}^l_{A/W}$.

Nous allons étudier maintenant le cas formellement lisse. Rappelons tout d'abord le résultat suivant ([EGA IV], $0_{(19.4.2)}$ et [M-W], def. 2.3).

THÉORÈME A.15. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(*a*) A *est une* W-*algèbre formellement lisse* (*pour les topologies m-adiques*) (*voir* [EGA IV], $0_{(19.3.1)}$).

(*b*) A_r *est une* W_r-*algèbre lisse* (*pour les topologies discrètes*) *pour tout* $r \geqq 1$.

(*c*) A *est plate sur* W *et* $\bar{A} = A/m A$ *est lisse sur* $k = W/m$.

Le théorème suivant généralise la proposition 16.10.2 de [EGA IV].

THÉORÈME A.16. — *Soit* A *une* W-*algèbre de* DMW *formellement lisse. Alors on a les propriétés suivantes*:

(i) $\tilde{\Omega}^1_{A/W}$ *est un* A-*module projectif* (*de type fini*).

(ii) *L'homomorphisme canonique*

$$\Psi: \quad \mathrm{Sym}_A(\tilde{\Omega}^1_{A/W}) \to \mathrm{gr}_{\mathscr{I}}(A \overset{\dagger}{\otimes}_W A)$$

est bijectif.

Preuve. — La partie (i) est démontrée dans [M-W], th. 4.6. Démontrons la partie (ii). L'homomorphisme Ψ est toujours surjectif. D'après le théorème A.15, A_r est une W_r-algèbre lisse pour tout $r \geqq 1$. Notons I_r le noyau de l'augmentation $A_r \otimes_{W_r} A_r \to A_r$. On peut appliquer la proposition (16.10.2) de [EGA IV] pour déduire que l'homomorphisme canonique

$$\Psi_r: \quad \mathrm{Sym}_{A_r}(\Omega^1_{A_r/W_r}) \to \mathrm{gr}_{I_r}(A_r \otimes_{W_r} A_r)$$

est bijectif, pour tout $r \geqq 1$. Or, d'après le corollaire A.8, $\Omega^1_{A_r/W_r} = W_r \otimes_W \Omega^1_{A/W}$ est canoniquement isomorphe à $W_r \otimes_W \tilde{\Omega}^1_{A/W}$, d'où un isomorphisme canonique $\varphi_r: W_r \otimes_W \mathrm{Sym}_A(\tilde{\Omega}^1_{A/W}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}_{A_r}(\Omega^1_{A_r/W_r})$. Remarquons aussi qu'on a des homomorphismes canoniques $\lambda_r: W_r \otimes_W \mathrm{gr}_{\mathscr{I}}(A \overset{\dagger}{\otimes}_W A) \to \mathrm{gr}_{I_r}(A_r \otimes_{W_r} A_r)$, vérifiant

$$\lambda_r \circ (\mathrm{Id}_{W_r} \otimes \Psi) = \Psi_r \circ \varphi_r.$$

Si $h \in \mathrm{Sym}^l_A(\tilde{\Omega}^1_{A/W})$ est annulé par Ψ alors $\Psi_r(\varphi_r(1 \otimes h)) = 0$, $\forall r \geqq 1$, d'où $\varphi_r(1 \otimes h) = 0$, $\forall r \geqq 1$, c'est-à-dire, h appartient à l'intersection des $m^r.\mathrm{Sym}^l_A(\tilde{\Omega}^1_{A/W})$, $r \geqq 1$, et comme $\mathrm{Sym}^l_A(\tilde{\Omega}^1_{A/W})$ est un A-module de type fini (*cf.* remarque A.10), il est séparé pour la topologie m-adique et $h = 0$. Ceci démontre que Ψ est injectif, et donc bijectif. □

REMARQUE A.17. — *Les propriétés* (i), (ii) *du théorème* A.16 *sont analogues aux propriétés qui apparaissent dans la définition des morphismes différentiellement lisses* ([EGA IV], *déf.* 16.10.1). *En fait elles jouent le même rôle que ces dernières si on se restreint à la catégorie des* W-*algèbres de* DMW *et aux modules de type fini, ou plus généralement, aux modules séparés pour la topologie m-adique.*

BIBLIOGRAPHIE

[A] M. ARTIN, *Grothendieck Topologies*, preprint, Harvard Univ., 1962.

[B] J. BERNSTEIN, *The Analytic Continuation of Generalized Functions with Respect to a Parameter* (*Funz. Anal. Appl.*, vol. 6, 1972, p. 26-40).

[Be 1] P. BERTHELOT, *Géométrie Rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p* (*Mémoire S.M.F.*, n° **23**, 1986, p. 7-32).

[Be 2] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules* (*Conference on p-adic analysis*, Trento, juin 1989), *Lect. Notes Math.* (à paraître).

[Bj 1] J. E. BJÖRK, *The Global Homological Dimension of Some Algebras of Differential Operators* (*Invent. Math.*, vol. **17**, 1972, p. 67-68).

[Bj 2] J. E. BJÖRK, *Dimensions over Algebras of Differential Operators*, preprint, 1974, non publié.

[Bj 3] J. E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[B-G-R] S. BOSCH, U. GÜNTZER R. REMMERT, *Non-Archimedean Analysis* (*Grund der math. Wisen.*, vol. **261**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984).

[Bou] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, chap. 8 et 9, Masson, Paris, 1983.

[D] J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[EGA IV] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie Algébrique*, IV : *Étude locale des schémas et des morphismes des schémas* (*Publ. I.H.E.S.*, vol. **20**, **24**, **28** et **32**, Presses Univ. de France, Paris, 1967).

[F-vdP] J. FRESNEL et M. VAN DER PUT, *Géométrie analytique rigide et applications*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1981.

[Fri] J. FRISCH, *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes* (*Invent. Math.*, vol. **4**, 1968, p. 118-138).

[Fu] J. FULTON, *A Note on Weakly Complete Algebras* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. **75**, 1969, p. 591-593).

[Ga] O. GABBER, *The Integrability of the Characteristic Variety* (*Amer. J. Math.*, vol. **103**, 1981, p. 445-468).

[G] F. GEANDIER, *Polynômes de Bernstein et déformations à nombre de Milnor constant* (*Thèse*, Univ. de Nice, juin 1989).

[H] H. HIRONAKA, *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero I, II* (*Ann. of Math.*, vol. **79**, 1964, p. 109-203 et 205-326).

[K 1] M. KASHIWARA, *b-Functions and Holonomic Systems* (*Invent. Math.*, vol. **38**, 1976, p. 33-53).

[K 2] M. KASHIWARA, *On the Holonomic Systems of Linear Differential Equations II* (*Invent. Math.*, vol. **49**, 1978, p. 121-135).

[K 3] M. KASHIWARA, *Vanishing Cycle Sheaves and Holonomic Systems of Differential Equations* (*Lect. Notes in Math.*, n° **1012**, 1983, p. 134-142).

[L] S. LUBKIN, *A p-adic Proof of Weil's Conjectures* (*Ann. of Math.*, vol. **87**, 1968, p. 105-194 et 195-225).

[M 1] B. MALGRANGE et coll., *Séminaire sur les opérateurs différentiels*, Grenoble, 1976.

[M 2] B. MALGRANGE, *Le polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente* (*Astérisque*, n° **101-102**, 1983, p. 233-267).

[Ma 1] H. MATSUMURA, *Commutative Algebra*, second edition, Benjamin/Cummings Publ. Co., Massachusetts, 1980.

[Ma 2] H. MATSUMURA, *Commutative Ring Theory* (*Cambridge Studies in Advan. Math.*, vol. **8**, 1986).

[Me 1] Z. MEBKHOUT, *Cohomologie locale d'une hypersurface* (*Lect. Notes in Math.*, n° **670**, 1977, p. 89-119).

[Me 2] Z. MEBKHOUT, *Local Cohomology of Analytic Spaces* (*Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.*, vol. **12**, 1977, p. 247-256).

[Me 3] Z. MEBKHOUT, *Une équivalence de catégories* (*Comp. Math.*, vol. **51**, 1984, p. 51-62).

[Me-N] Z. MEBKHOUT et L. NARVÁEZ-MACARRO, *Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck d'une variété algébrique* (*Conférence on p-adic analysis*, Trento, juin 1989), *Lect. Notes Math.* (à paraître).

[Mer] D. MEREDITH, *Weak Formal Schemes* (*Nagoya Math. J.*, vol. **45**, 1971, p. 1-38).

[M-W] P. Monsky et G. Washnitzer, *Formal Cohomology I* (*Ann. of Math.*, vol. **88**, 1968, p. 181-217).

[N] L. Narváez-Macarro, *A Note of the Behavior Under Ground Field Extension of Quasi-Coefficient Fields* [*J. London Math. Soc.* (à paraître)].

[vdP] M. van der Put, *The Cohomology of Monsky and Washnitzer* (*Bull. Soc. Math. France*, Mémoire n° **23**, 1986, p. 33-60).

[R 1] P. Robba, *Indice d'un opérateur différentiel p-adique IV* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. **35**, n° 2, 1985, p. 13-55).

[R 2] P. Robba, Livre (à paraître).

[Ro] J. E. Roos, *Détermination de la dimension homologique globale des algèbres de Weyl*, (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 274, série A, 1972, p. 1556-1558).

[Rot] J. J. Rotman, *An introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.

[S] C. Sabbah, $\mathscr{D}_X$*-modules et cycles évanescents* (Travaux en cours, n° **24**, p. 53-98, Hermann, Paris, 1987).

[Se] J. P. Serre, *Algèbre locale et multiplicités* (*Lect. Notes in Math.*, n° **11**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1965).

[St] B. Stenström, *Rings of quotients*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1975.

[T] J. Tate, *Rigid Analytic Spaces* (*Invent. Math.*, vol. **12**, 1971, p. 257-289).

(Manuscrit reçu le 13 novembre 1989,
révisé le 7 mai 1990).

Z. Mebkhout,
U.F.R. de Mathématiques,
Université de Paris-VII,
75000 Paris, France.

L. Narváez-Macarro,
Departamento de Algebra,
Universidad de Sevilla,
41012 Sevilla, Espagne.
Institut Fourier,
Université de Grenoble-I,
38000 Grenoble, France.