ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHÈLE VERGNE

Polynômes de Joseph et représentation de Springer

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, no 4 (1990), p. 543-562

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_4_543_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 23, 1990, p. 543 à 562.

POLYNÔMES DE JOSEPH ET REPRÉSENTATION DE SPRINGER

PAR MICHÈLE VERGNE

1. Introduction

Le but de cet article est de comparer les polynômes de Springer et les polynômes de Joseph associés à une classe de conjugaison d'un élément nilpotent d'une algèbre de Lie semi-simple.

Soit M une variété munie d'une action d'un groupe de Lie compact connexe K d'algèbre de Lie $\mathbf{k}$. Une forme différentielle équivariante est une application polynômiale $X \to \alpha(X)$ de $\mathbf{k}$ dans l'algèbre $\mathscr{A}(M)$ des formes différentielles sur M et telle que $\alpha(kX) = k.\alpha(X)$. L'opérateur

$$(d_{\mathbf{k}}\alpha)(X) = (d - \iota(X_M))\alpha(X)$$

(où $\iota(X_M)$ est l'opérateur de contraction associé au champ de vecteurs X_M produit par l'action infinitésimale de $X \in \mathbf{k}$) est une différentielle sur l'espace des formes différentielles équivariantes. L'espace de cohomologie associée est l'espace $H^*_{\mathbf{k}}(M)$ de cohomologie K-équivariante de M. L'espace $H^*_{\mathbf{k}}(M)$ est un module sur l'algèbre $S(\mathbf{k}^*)^K$ des polynômes K-invariants sur $\mathbf{k}$. Si M est une variété compacte orientée, l'intégration $\alpha \to \int_M \alpha(X)$ sur M est un homomorphisme noté $\int_M$ du $S(\mathbf{k}^*)^K$-module $H^*_{\mathbf{k}}(M)$ dans $S(\mathbf{k}^*)^K$. On définit similairement les groupes de cohomologie équivariante $H^*_{c,\mathbf{k}}(M)$ à support compact. Soit K un groupe compact connexe opérant sur un espace vectoriel V. Alors la cohomologie équivariante à support compact $H^*_{c,\mathbf{k}}(V)$ de V est un module libre sur $S(\mathbf{k}^*)^K$ engendré par la forme de Thom équivariante u_V. Cette forme est construite par Mathai-Quillen [15]. J'en donne ici une expression qui rend évidente l'analogie de la forme de Thom et du caractère de Chern du fibré des spineurs. En particulier la supertrace pour le module des spineurs est remplacée ici par l'intégration bérésinienne.

Supposons V muni d'une structure complexe et soit C un cône algébrique dans V stable sous l'action de K. L'application $\int_C$ définit une application de $H^*_{c,\mathbf{k}}(V)$ dans $S(\mathbf{k}^*)^K$

dont l'image est l'idéal de $S(\mathbf{k}^*)^K$ engendré par $\int_C u_V$. Il est donc clair que le polynôme $\int_C u_V(X)$ est un invariant important. En fait, W. Rossmann [17] et A. Joseph [13] montrent qu'avec une normalisation convenable, le polynôme $\int_C u_V(X)$ n'est autre que le polynôme de multiplicité équivariante $J_C(X)$ défini par A. Joseph dans [12]. Le polynôme de Joseph $J_C(X)$ est un analogue anisotrope pour l'anneau des fonctions régulières sur C de la notion de multiplicité d'un anneau noetherien gradué et la formule intégrale $J_C(X) = \textit{constante} \int_C u_V(X)$ pour la multiplicité équivariante $J_C(X)$ est un analogue de la formule intégrale de Lelong pour la multiplicité d'un point d'une variété algébrique sur son cône tangent.

Je montre que la formule intégrale pour la multiplicité équivariante permet de comparer directement les polynômes de Springer et les polynômes de Joseph associés à un élément nilpotent d'une algèbre de Lie semi-simple, en particulier de montrer que les polynômes de Joseph sont des polynômes harmoniques. Rappelons brièvement les définitions de ces polynômes. Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe connexe d'algèbre de Lie $\mathbf{g}$. Soit $\mathbf{b} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{n}$ une sous algèbre de Borel de $\mathbf{g}$ et soit W le groupe de Weyl. La variété des drapeaux D est l'ensemble des sous-algèbres de Borel de $\mathbf{g}$. Soit $u \in \mathbf{n}$ un élément nilpotent de $\mathbf{g}$ et soit D_u la variété des sous algèbres de Borel contenant u. Les composantes irréductibles de la variété D_u définissent des cycles de D. Comme la cohomologie de D (ou son homologie par dualité) est isomorphe à l'espace des polynômes harmoniques sur $\mathbf{h}$, on obtient ainsi un ensemble de polynômes harmoniques S_i^u associés à u. Il est tout à fait remarquable que l'espace engendré par les polynômes S_i^u est stable par l'action de W sur $H_*(D)$. La représentation de W dans cet espace est une représentation de Springer [20]. Soit O_u l'orbite de u par le groupe adjoint. En analogie avec les résultats de Springer [19] sur les corps finis, V. Ginsburg [7] et R. Hotta-M. Kashiwara [11] montrent que les polynômes de Springer interviennent aussi dans le calcul de la transformée de Fourier de l'orbite O_u. La formule de Ginsburg-Hotta-Kashiwara pour la transformée de Fourier de O_u est redémontrée de manière plus élémentaire dans le bel article de W. Rossmann [16].

D'autre part, A. Joseph associe aussi à une orbite nilpotente une représentation de W. Rappelons sa construction [12]. Soit C une composante irréductible de $O_u \cap \mathbf{n}$. L'adhérence $\bar{C}$ de C est un cône algébrique complexe T-invariant dans $\mathbf{n}$. Un tel cône sera appelé un cône orbital. A. Joseph montre que les polynômes de multiplicité équivariante $J_{\bar{C}}$ pour C parcourant l'ensemble des composantes irréductibles de $O_u \cap \mathbf{n}$ forment une base d'une représentation de W. Différents auteurs ont démontré que les polynômes de Springer et de Joseph coincident à un facteur près. Citons en particulier R. Hotta [9], V. Ginsburg [8], Borho-Brylinski-MacPherson [4] et A. Joseph [13]. Je donne ici une autre démonstration de ce résultat. Cette démonstration est une variante de la méthode de [13] et reprend de même l'idée essentielle de double intégration de W. Rossmann [16]. Elle me semble cependant plus simple et plus naturelle. Mon résultat est aussi plus précis car je calcule le coefficient de proportionalité des polynômes de Springer et de Joseph. Comme dans [13], j'utilise la formule intégrale $J_{\bar{C}}(X) = constante \int_C u_V(X)$ pour le polynôme $J_{\bar{C}}$. L'expression donnée dans la section 3 de cet article pour la forme de Thom équivariante u_V en fonction de l'intégration béresinienne fait donc apparaître une double intégration dans la formule pour $J_{\bar{C}}$. On voit ainsi que le polynôme de Joseph $J_{\bar{C}}(X)$ s'exprime naturellement comme une intégrale sur le sous fibré $\mathscr{C}$ de l'espace cotangent à D de fibre type C. La variété $\mathscr{C}$ est le fibré en cônes introduit par Borho-Brylinski-Mc-Pherson dans [4]. La variété $\mathscr{C}$ est remarquable par ses deux fibrations naturelles. Par définition elle est fibrée sur D avec fibre type C. D'autre part, par l'application moment, la variété $\mathscr{C}$ est un fibré sur O_u et la fibre type de l'application moment est une union de composantes irréductibles de la variété de Springer D_u. La formule intégrale pour $J_{\bar{C}}(X)$ comme une intégrale sur $\mathscr{C}$ est le point crucial de l'article. En effet, en appliquant la formule de Fubini pour la fibration de $\mathscr{C}$ sur l'orbite O_u donnée par l'application moment, je montre que le polynôme de Joseph est proportionnel à un des polynômes de Springer.

2. Notations

Soit M une variété C^∞ munie d'une action d'un groupe de Lie G. Soit $\mathbf{g}$ l'algèbre de Lie de G. Pour $X \in \mathbf{g}$, on note X_M le champ de vecteurs sur M donné par

$$(X_M \cdot \varphi)(x) = \frac{d}{d\varepsilon} \varphi((\exp - \varepsilon X) x)\big|_{\varepsilon=0}.$$

Si G agit à droite, on pose $(X_M \cdot \varphi)(x) = \dfrac{d}{d\varepsilon} \varphi(x(\exp \varepsilon X))\big|_{\varepsilon=0}$.

Soit $\mathscr{A}(M)$ l'algèbre des formes différentielles sur M. On note $d: \mathscr{A}^*(M) \to \mathscr{A}^{*+1}(M)$ la différentielle extérieure. Si ξ est un champ de vecteurs sur M, on note $\iota(\xi): \mathscr{A}^*(M) \to \mathscr{A}^{*-1}(M)$ la contraction par le champ de vecteurs ξ. Pour $\alpha \in \mathscr{A}(M)$ on note $\alpha = \sum_i \alpha_{[i]}$ sa décomposition en une somme d'éléments homogènes $\alpha_{[i]} \in \mathscr{A}^i(M)$. Si M est une variété orientée et α une forme différentielle à support compact (ou intégrable) on note $\int_M \alpha = \int_M \alpha_{[\dim M]}$ l'intégrale de son terme de degré maximal. Si $\alpha = d\beta$ et si β est à support compact, on a $\int_M \alpha = 0$. On note $\mathscr{A}_c(M)$ l'algèbre des formes différentielles à support compact. Soit $\pi: M \to B$ une fibration de variétés dont la fibre typique est orientée et de dimension n. On note

$$\int_{M/B} : \mathscr{A}_c^*(M) \to \mathscr{A}_c^{*-n}(B)$$

l'intégration sur la fibre. Par définition, si $\alpha \in \mathscr{A}_c^k(\mathrm{M})$ est une forme différentielle sur M à support compact, son intégrale sur la fibre est la forme différentielle $\int_{\mathrm{M/B}} \alpha \in \mathscr{A}_c^{k-n}(\mathrm{B})$ vérifiant

$$\int_{\mathrm{B}} \left(\beta \wedge \int_{\mathrm{M/B}} \alpha\right) = \int_{\mathrm{M}} \pi^* \beta \wedge \alpha,$$

pour toute forme différentielle β sur la base B. En particulier on a la formule de Fubini

$$(1) \qquad \int_{\mathrm{M}} \alpha = \int_{\mathrm{B}} \left(\int_{\mathrm{M/B}} \alpha\right).$$

L'application $\int_{\mathrm{M/B}}$ commute à la différentielle extérieure. En particulier, si α est une forme fermée de degré n et si la base est connexe, $\int_{\mathrm{M/B}} \alpha$ est une fonction constante sur la base. Sa valeur est l'intégrale de α sur la sous variété $\pi^{-1}(x)$ de M pour un x arbitraire dans la base.

Rappelons le calcul de l'intégration sur la fibre pour un espace associé à un espace fibré principal.

Soit H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathbf{h}$ agissant librement à droite sur une variété P. Soit P/H le quotient de P par l'action de H. Le fibré $\mathrm{P} \to \mathrm{P/H}$ est dit principal de groupe H. Par image réciproque, l'espace des formes différentielles $\mathscr{A}(\mathrm{P/H})$ sur l'espace P/H s'identifie à un sous espace $\mathscr{A}_{bas\,\mathrm{H}}(\mathrm{P})$ de $\mathscr{A}(\mathrm{P})$. L'espace $\mathscr{A}_{bas\,\mathrm{H}}(\mathrm{P})$ des formes basiques est l'espace

$$\mathscr{A}_{bas\,\mathrm{H}} = \{\alpha \in \mathscr{A}(\mathrm{P})^{\mathrm{H}};\ \iota(\mathrm{X_P})\alpha = 0, \text{ pour tout } \mathrm{X} \in \mathbf{h}\}.$$

Supposons de plus que H opère sur une variété M, alors H agit librement sur $\mathrm{P} \times \mathrm{M}$ par l'action à droite $h.(p, v) = (ph, h^{-1} v)$. On note $\mathrm{P} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{M}$ l'espace quotient de $\mathrm{P} \times \mathrm{M}$ par cette action. Cet espace est dit espace associé au fibré principal P. On note $[p, v]$ l'image de l'élément (p, v) de $\mathrm{P} \times \mathrm{M}$ dans $\mathrm{P} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{M}$. On identifie donc $\mathscr{A}(\mathrm{P} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{M})$ au sous espace

$$\mathscr{A}_{bas\,\mathrm{H}}(\mathrm{P} \times \mathrm{M}) = \{\alpha \in \mathscr{A}(\mathrm{P} \times \mathrm{M})^{\mathrm{H}};\ \iota(\mathrm{X_{P \times M}})\alpha = 0, \text{ pour tout } \mathrm{X} \in \mathbf{h}\}.$$

Soit $\pi : \mathrm{P} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{M} \to \mathrm{P/H}$ la fibration de fibre type M et de groupe H. Considérons l'intégration partielle

$$\mathrm{I} \otimes \int_{\mathrm{M}} : \mathscr{A}(\mathrm{P}) \otimes \mathscr{A}(\mathrm{M}) \to \mathscr{A}(\mathrm{P}),$$

c'est à dire $\left(\mathrm{I} \otimes \int_{\mathrm{M}}\right)(\alpha \times \beta) = \alpha\left(\int_{\mathrm{M}} \beta\right)$, si $\alpha \in \mathscr{A}(\mathrm{P})$ et $\beta \in \mathscr{A}(\mathrm{M})$. On voit facilement que l'intégration partielle $\mathrm{I} \otimes \int_{\mathrm{M}}$ se prolonge en une application de $\mathscr{A}(\mathrm{P} \times \mathrm{M})$ dans $\mathscr{A}(\mathrm{P})$

qui envoie $\mathscr{A}_{bas\,\mathrm{H}}(\mathrm{P}\times\mathrm{M})$ dans $\mathscr{A}_{bas\,\mathrm{H}}(\mathrm{P})$. L'intégration sur la fibre

$$\pi_*:\mathscr{A}(\mathrm{P}\times_{\mathrm{H}}\mathrm{M})\to\mathscr{A}(\mathrm{P}/\mathrm{H})$$

se lit dans les isomorphismes

$$\mathscr{A}(\mathrm{P}\times_{\mathrm{H}}\mathrm{M})\sim\mathscr{A}_{bas\,\mathrm{H}}(\mathrm{P}\times\mathrm{M})$$
$$\mathscr{A}(\mathrm{P}/\mathrm{H})\sim\mathscr{A}_{bas\,\mathrm{H}}(\mathrm{P}),$$

comme l'intégration partielle $\mathrm{I}\otimes\int_{\mathrm{M}}$.

3. Cohomologie équivariante et multiplicités

Soit M une variété C^∞ de dimension n munie d'une action d'un groupe de Lie G. Soit $\mathbf{g}$ l'algèbre de Lie de G. Notons $\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)$ l'algèbre des fonctions polynômiales sur $\mathbf{g}$. On considère le produit tensoriel $\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)\otimes\mathscr{A}(\mathrm{M})$ comme l'algèbre des fonctions polynômiales sur $\mathbf{g}$ à valeurs dans $\mathscr{A}(\mathrm{M})$. Le groupe G agit sur $\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)\otimes\mathscr{A}(\mathrm{M})$ par

$$(g.\alpha)(\mathrm{X})=g.(\alpha(g^{-1}.\mathrm{X}))\text{ pour }g\in\mathrm{G},\ \alpha\in\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)\otimes\mathscr{A}(\mathrm{M}),\ \mathrm{X}\in\mathbf{g}.$$

Soit $\mathscr{A}_{\mathbf{g}}(\mathrm{M})=(\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)\otimes\mathscr{A}(\mathrm{M}))^{\mathrm{G}}$ la sous-algèbre des éléments G-invariants. Les éléments de $\mathscr{A}_{\mathbf{g}}(\mathrm{M})$ seront appelés formes différentielles G-équivariantes sur M puisque $\alpha\in\mathscr{A}_{\mathbf{g}}(\mathrm{M})$ satisfait la relation $\alpha(g.\mathrm{X})=g.\alpha(\mathrm{X})$.

L'algèbre $\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)\otimes\mathscr{A}(\mathrm{M})$ est $\mathbf{Z}$-graduée par

$$\deg(\mathrm{P}\otimes\alpha)=2\deg\mathrm{P}+\deg\alpha$$

pour $\mathrm{P}\in\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)$ et $\alpha\in\mathscr{A}(\mathrm{M})$. On définit l'opérateur $d_{\mathbf{g}}$ sur $\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)\otimes\mathscr{A}(\mathrm{M})$ par

$$(d_{\mathbf{g}}\alpha)(\mathrm{X})=d(\alpha(\mathrm{X}))-\iota(\mathrm{X}_{\mathrm{M}})(\alpha(\mathrm{X})).$$

Si E^i est une base de $\mathbf{g}$ et f_i la base des fonctions linéaires duales, on voit que $\iota(\mathrm{X}_{\mathrm{M}})\alpha(\mathrm{X})=\sum_i f_i(\mathrm{X})(\iota(\mathrm{E}^i_{\mathrm{M}})\alpha(\mathrm{X}))$, donc l'opérateur $d_{\mathbf{g}}$ augmente de 1 le degré total sur $\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)\otimes\mathscr{A}(\mathrm{M})$. L'opérateur $d_{\mathbf{g}}$ préserve $\mathscr{A}_{\mathbf{g}}(\mathrm{M})$. Notons $\mathscr{L}(\mathrm{X})$ l'action infinitésimale de $\mathbf{g}$ dans $\mathscr{A}(\mathrm{M})$. La relation de Cartan

$$\mathscr{L}(\mathrm{X})=d\iota(\mathrm{X}_{\mathrm{M}})+\iota(\mathrm{X}_{\mathrm{M}})d$$

implique $(d_{\mathbf{g}}^2\alpha)(\mathrm{X})=-\mathscr{L}(\mathrm{X}).\alpha(\mathrm{X})$, pour tout $\alpha\in\mathrm{S}(\mathbf{g}^*)\otimes\mathscr{A}(\mathrm{M})$, donc $(\mathscr{A}_{\mathbf{g}}(\mathrm{M}),d_{\mathbf{g}})$ est un complexe.

DÉFINITION 2. — *On appelle groupes de cohomologie équivariante* $\mathrm{H}^*_{\mathbf{g}}(\mathrm{M})$ *les groupes de cohomologie du complexe* $(\mathscr{A}_{\mathbf{g}}(\mathrm{M}),d_{\mathbf{g}})$.

La définition précédente de la cohomologie équivariante est due à H. Cartan [5] qui montre que lorsque G est compact et connexe, ces groupes sont isomorphes aux groupes $H^*(M_G, \mathbf{R})$ de cohomologie du quotient universel M_G de M.

Les formes équivariantes telles que $d_{\mathbf{g}}\alpha = \mathbf{0}$ sont appelées formes fermées (équivariantes). Celles de la forme $d_{\mathbf{g}}\beta$ sont appelées exactes.

Si M est un point $\bullet$, alors $H^*_{\mathbf{g}}(\bullet) = S(\mathbf{g}^*)^G$ est l'algèbre des polynômes G-invariants sur $\mathbf{g}$. En général $H^*_{\mathbf{g}}(M)$ est un module sur $S(\mathbf{g}^*)^G$. Si M est une variété compacte orientée, l'intégration $\alpha \to \int_M \alpha(X)$ sur M est une application $\int_M$ de $\mathscr{A}_{\mathbf{g}}(M)$ dans $S(\mathbf{g}^*)^G$ et définit un homomorphisme du $S(\mathbf{g}^*)^G$-module $H^*_{\mathbf{g}}(M)$ dans $S(\mathbf{g}^*)^G$.

Nous notons $\mathscr{A}_{c,\mathbf{g}}(M)$ le sous-complexe $(S(\mathbf{g}^*) \otimes \mathscr{A}_c(M))^G$ des formes équivariantes à support compact et $H^*_{c,\mathbf{g}}(M)$ les groupes de cohomologie équivariante à support compact. Soit K un groupe compact opérant sur un espace vectoriel V. Alors la cohomologie équivariante à support compact de V est un module libre sur $S(\mathbf{k}^*)^K$ engendré par la forme de Thom équivariante u_V (voir [6]).

Je donne ici une construction explicite de u_V dans le style de Mathai-Quillen [15], voir aussi [2].

Soit V un espace vectoriel Euclidien orienté de dimension n muni de l'action naturelle de $G = SO(V)$. Soit $\mathbf{g} = \mathbf{so}(V)$ l'algèbre de Lie de G. Soit e_i une base orthonormale orientée de V, e^i la base duale de V^*. Soit ΛV l'algèbre extérieure de V. Si $I = \{j_1, j_2, \ldots, j_i \mid j_1 < j_2 < \ldots < j_i\}$ est un sous ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$, nous écrivons $e_I = e_{j_1} \Lambda \ldots \Lambda e_{j_i}$. Les éléments e_I forment une base orthonormée de ΛV. On note I′ l'ensemble complémentaire de I dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note $T : \Lambda V \to \mathbf{R}$ la composante de plus haut degré d'un élément de ΛV, c'est-à-dire

$$T\left(\sum_I a_I e_I\right) = a_{\{1 2 \ldots n\}}.$$

La forme T est appelée intégrale de Berezin. Si $e \in V$, on note $\iota_\Lambda(e) : \Lambda V \to \Lambda V$ la contraction par e. C'est une dérivation de l'algèbre ΛV et T vérifie

$$T(\iota_\Lambda(e)\xi) = 0$$

pour tout $e \in V$ et $\xi \in \Lambda V$.

Si $A \in \Lambda^2 V$, on note $\exp_\Lambda A$ l'exponentielle de A dans l'algèbre ΛV.

Si $X \in \mathbf{so}(V)$, on définit $\tau(X) \in \Lambda^2 V$ par

$$\tau(X) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i<j} (X e_i, e_j) e_i \wedge e_j\right).$$

DÉFINITION 3. — *Le pfaffien de* $X \in \mathbf{so}(V)$ *est défini par*

$$Pf(X) = T\left(\exp_\Lambda\left(\sum_{i<j} (X e_i, e_j) e_i \wedge e_j\right)\right).$$

Si V est de dimension impaire, le polynôme $X \to Pf(X)$ est identiquement nul. Si V est de dimension paire n alors $Pf(X)$ est un polynôme homogène non nul de degré $n/2$ sur $\mathbf{g}$. On a $Pf(X)^2 = \det(X)$. Le polynôme $Pf(X)$ est donc une racine du déterminant. Cette racine carrée dépend du choix de l'orientation de V. Si V est un espace vectoriel complexe de base $e_1, e_2, \ldots, e_l$, l'orientation canonique de V sera donnée par la base orientée $e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_l, ie_l$ de V comme espace vectoriel réel.

Soit $\mathscr{A}(V) = C^\infty(V) \otimes \Lambda V^*$ l'algèbre des formes différentielles sur V. Écrivons un élément x de V comme $x = \sum_i x_i e_i$. Nous notons e_i par ∂_i lorsque nous identifions e_i à la dérivation dans la direction du vecteur e_i et e^i par dx_i lorsque nous identifions e^i à l'élément dx_i de ΛV^*.

Considérons l'algèbre $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V = C^\infty(V) \otimes \Lambda V^* \otimes \Lambda V$ des formes différentielles sur V à valeurs dans ΛV (Les algèbres $\mathscr{A}(V)$ et ΛV sont naturellement graduées sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et le produit tensoriel est le produit tensoriel gradué − respectant la règle des signes.) Un élément de $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$ s'écrit en coordonnées sous la forme $\sum_{IJ} f_{IJ}(x)\, dx_J\, e_I$. La fonction identique $x \to x$ est une fonction sur V à valeurs dans V. C'est donc un élément canonique $\varepsilon(x)$ de $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$. Il s'écrit

$$\varepsilon(x) = \sum_i x_i e_i$$

La forme dx est une forme différentielle sur V à valeurs dans V. On la note $\varepsilon(dx)$. Elle s'écrit

$$\varepsilon(dx) = \sum_i dx_i e_i$$

Pour $X \in \mathbf{so}(V)$, définissons l'élément $f_V(X)$ de $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$ par

$$f_V(X) = -\|x\|^2 + \varepsilon(dx) + \tau(X), \tag{4}$$

En coordonnées

$$f_V(X) = -\sum_i x_i^2 + \sum_i dx_i e_i + \frac{1}{2} \sum_{i<j} (X e_i, e_j)\, e_i \wedge e_j.$$

Si ξ est un champ de vecteurs sur V on note encore $\iota(\xi)$ l'opérateur $\iota(\xi) \otimes I$ sur $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$. C'est une dérivation de $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$. Si $e \in V$, on note $\iota_\Lambda(e)$ la dérivation de $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$ définie par $\iota_\Lambda(e)(\alpha \otimes \xi) = (-1)^k \alpha \otimes \iota_\Lambda(e)\xi$ si $\alpha \in \mathscr{A}^k(V)$ et $\xi \in \Lambda V$.

On note $\mathscr{R} = \sum_i x_i \partial_i$ le champ d'Euler. On note $\iota_\Lambda(\mathscr{R})$ l'opérateur sur $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$ défini par

$$\iota_\Lambda(\mathscr{R}) = \sum_i x_i \iota_\Lambda(e_i).$$

Si $X \in \mathbf{g}$, le champ de vecteurs X_V correspondant à l'action infinitésimale de $\mathbf{g}$ sur V est $X_V = -\sum_{i<j} (X e_i, e_j)(x_i \partial_j - x_j \partial_i)$. On vérifie que pour tout $X \in \mathbf{g}$ on a:

$$(d - \iota(X_V) - 2\iota_\Lambda(\mathscr{R})) . f_V(X) = 0$$

Soit $\exp(f_V(X))$ l'exponentielle de l'élément $f_V(X)$ dans l'algèbre $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$. Comme les opérateurs d, $\iota(X_V)$, $\iota_\Lambda(\mathscr{R})$ sont des dérivations de $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$, on voit que

$$(d - \iota(X_V) - 2\iota_\Lambda(\mathscr{R})) . \exp(f_V(X)) = 0. \tag{5}$$

On étend l'intégrale de Berezin en une application de $\mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V \to \mathscr{A}(V)$ par linéarité sur $\mathscr{A}(V)$, *i.e.* $T(\alpha \otimes \xi) = \alpha T(\xi)$.

Définition 6. — *Soit* $G = \mathbf{SO}(V)$ *agissant sur l'espace vectoriel Euclidien orienté* V. *La forme équivariante* u_V *sur* V *définie par*

$$u_V(X) = (-\pi)^{-(n/2)} T(\exp(f_V(X)))$$

est appelée la forme de Thom équivariante de V.

On voit que

$$T(\exp(f_V(X)) = e^{-\|x\|^2} T(\exp(\sum_i dx_i e_i + \frac{1}{4}\sum_{ij}(X e_i, e_j) e_i \wedge e_j))$$

peut s'expliciter sous la forme

$$T(\exp(f_V(X)) = e^{-\|x\|^2} (\sum_I P_{I'}(X/2)\, dx_I), \tag{7}$$

où $P_{I'}(X)$ est un polynôme homogène sur $\mathbf{g}$ de degré $(n - |I|)/2$, qui coïncide au signe près avec le Pfaffien de la sous-matrice $X_{I'} = \{(X e_i, e_j)_{ij \in I'}\}$. En particulier la composante de degré n de $u_V(X)$ est $\pi^{-(n/2)} e^{-\|x\|^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ tandis que sa composante de degré 0 est égale à $(-2\pi)^{-(n/2)} e^{-\|x\|^2} Pf(X)$.

Notons $i : 0 \to V$ l'injection de l'origine dans V

Proposition 8. — *La forme de Thom* u_V *est une forme fermée équivariante sur* V *de degré total* n. *Elle satisfait*

1. $\int_V u_V(X) = 1$, *pour tout* $X \in \mathbf{g}$.
2. $i^*(u_V(X)) = (-2\pi)^{-(n/2)} Pf(X)$.

Démonstration. — Il est clair que $T(\iota_\Lambda(\mathscr{R})\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathscr{A}(V) \otimes \Lambda V$. En appliquant l'intégrale de Berezin à $\exp(f_V(X))$, la relation (5) entraîne que

$$(d - \iota(X_V)) . T(\exp(f_V(X))) = 0$$

et donc u_V est une forme $d_{\mathbf{g}}$-fermée. Les autres propriétés résultent de la discussion précédente.

Si T est un tore agissant sur un espace vectoriel complexe V on peut donner une expression plus «concrète» de la forme $u_V(X)$ en diagonalisant l'action de X. Soit $\mathbf{t}$ l'algèbre de Lie de T. Nous supposerons que les poids de l'action de T dans V sont tous non nuls. On peut toujours se ramener à ce cas quitte à remplacer T par $T \times S^1$ où $S^1 = \{ e^{i\theta} \}$ agit par homothéties sur l'espace complexe V. On choisit une forme hermitienne T-invariante et une base orthonormée e_k de V formée de vecteurs propres pour T. On a donc $X . e_k = \alpha_k(X) e_k$. Écrivons un élément $x \in V$ comme $x = \sum_k z_k e_k$ avec $z_k \in \mathbf{C}$. Soit

$$\omega(X) = \sum_k \frac{dz_k \, d\bar{z}_k}{\alpha_k(X)}. \tag{9}$$

Il est facile de montrer que

$$T(\exp f_V(X)) = e^{-\|x\|^2} P f(X/2) \exp \omega(X)$$

car il suffit de le vérifier pour un espace vectoriel complexe de dimension 1. Remarquons aussi que $P f(X/2) \exp \omega(X)$ est polynômiale en X. En effet dans les notations de (7), on a

$$P f(X/2) \exp \omega(X) = \sum_I P_{I'}(X/2) \, dx_I.$$

Soit V un espace vectoriel orienté et soit K un groupe compact d'algèbre de Lie $\mathbf{k}$ opérant dans V. On peut alors munir V d'une structure Euclidienne invariante par K et donc construire une forme de Thom K-équivariante u_V associée à ce choix de structure Euclidienne. La classe de cohomologie de u_V est indépendante de la structure Euclidienne choisie. En effet on a (voir [6]) le

LEMME 10. — *Soit* α *une forme équivariante fermée sur* V *à décroissance rapide sur* V *et telle que* $\int_V \alpha(X) = 0$, *pour tout* $X \in \mathbf{k}$. *Alors* $\alpha = d_{\mathbf{k}} \beta$ *pour* β *une forme équivariante à décroissance rapide sur* V.

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension complexe l. Un cône (algébrique) dans V est une sous variété algébrique fermée de V stable par l'action de $\mathbf{C}^*$ sur V. Soit C′ la partie lisse de C. Si α est une forme différentielle sur V à décroissance rapide, alors $\int_{C'} \alpha$ converge et est notée $\int_C \alpha$. Si $\alpha = d\beta$ où β est à décroissance rapide alors $\int_C d\beta = 0$.

Soit K un groupe compact connexe d'algèbre de Lie $\mathbf{k}$ opérant sur V et laissant stable C. L'application $\int_C$ définit une application de $H^*_{c,\mathbf{k}}(V)$ dans $S(\mathbf{k}^*)^K$ dont l'image est l'idéal de $S(\mathbf{k}^*)^K$ engendré par $\int_C u_V$. Le polynôme $\int_C u_V(X)$ peut aussi se calculer comme une intégrale sur l'intersection de C avec une boule centrée en zéro. En effet, avec les notations de (7), on a

LEMME 11. — *Soit* $B=\{x\in V;\ \|x\|\leqq 1\}$. *Alors*

$$\int_C T(\exp(f_V(X)))=(d!)\int_{B\cap C}(\sum_{I,\,|I|=2d} P_{I'}(X/2)\,dx_I)$$

où d est la dimension complexe de C.

Démonstration. — Ce lemme est un cas particulier de la formule générale de Rossmann [17]. Nous en donnons une démonstration dans ce cas important.

Soit d la dimension de C. Par changement de variables $x\to t^{1/2}x$, pour tout $t>0$, on a

$$m(X)=\int_C T(\exp(f_V(X))=t^d\int_C e^{-t\|x\|^2}(\sum_{I,\,|I|=2d} P_{I'}(X/2)\,dx_I)$$

ou encore

$$\int_C e^{-t\|x\|^2}(\sum_{I,\,|I|=2d} P_{I'}(X/2)\,dx_I)=t^{-d}m(X).$$

Pour toute fonction $\varphi(u)$ combinaison linéaire finie de fonctions $u\to e^{-tu}$ on a donc

$$\int_C \varphi(\|x\|^2)(\sum_{I,\,|I|=2d} P_{I'}(X/2)\,dx_I)=((d-1)!)^{-1}\left(\int_{\mathbf{R}^+}\varphi(u)\,u^{d-1}\,du\right)m(X).$$

Il est clair qu'on peut approximer uniformément sur $\mathbf{R}^+$ la fonction caractéristique de l'intervalle [0, 1] par de telles fonctions φ et on obtient la formule

$$\int_{C\cap B}(\sum_{I,\,|I|=2d} P_{I'}(X/2)\,dx_I)=((d-1)!)^{-1}\left(\int_0^1 u^{d-1}\,du\right)m(X),$$

c'est-à-dire la formule du lemme.

Si K est un tore, le polynôme $\int_C u_V(X)$ est proportionnel au polynôme de Joseph. Rappelons la définition du polynôme de Joseph associé à un cône algébrique équivariant sous l'action d'un tore T. Soit $\mathbf{t}$ l'algèbre de Lie de T. Nous supposerons que les poids de l'action de T dans V sont contenus dans un demi-espace. Comme précédemment on peut toujours se ramener à ce cas. On note $\Delta^+\subset i\mathbf{t}^*$ l'ensemble des poids de T dans V comptés avec leur multiplicité. Considérons la représentation de T dans l'espace R (C) des fonctions régulières sur C. Le caractère de cette représentation est la série formelle de caractères de T définie par $\mathrm{Tr}_{R(C)}=\sum_\lambda(\dim R(C))_\lambda e^\lambda$ (la condition de convexité précédente implique que pour tout caractère e^λ de T la dimension de l'espace $(R(C))_\lambda$ de type

λ est finie). Elle s'écrit sous la forme:

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}(\mathrm{C})} = \frac{\sum_i c_i e^{\mu_i}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1-e^{-\alpha})}$$

où les μ_i sont des poids de T en nombre fini et $(1-e^{-\alpha})^{-1}$ désigne la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$. La fonction $\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1-e^{-\alpha}) \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}(\mathrm{C})}$ est donc une fonction analytique sur $\mathbf{t}$. Considérons son développement de Taylor.

$$\sum_{i,n} c_i \frac{\mu_i^n}{n!}$$

à l'origine. Le terme non nul de plus bas degré de ce développement est un polynôme homogène r_{C} de degré $(l-\dim \mathrm{C})$ sur $\mathbf{t}$. Définissons le polynôme J_{C} associé à C par $\mathrm{J}_{\mathrm{C}}(\mathrm{X}) = r_{\mathrm{C}}(i\mathrm{X})$ (cette convention diffère de celle de Joseph et de Rossmann qui choisissent $\mathrm{J}_{\mathrm{C}} = r_{\mathrm{C}}$, mais je préfère que J_{C} prenne des valeurs réelles sur $\mathbf{t}$ et rationnelles sur les éléments de $\mathbf{t}$ tels que $\exp 2\pi \mathrm{X} = 1$). Ce polynôme est étroitement relié au comportement de $\dim (\mathrm{R}(\mathrm{C}))_\lambda$ lorsque λ tend vers l'infini [12]. En effet si $\mathrm{X} \in \mathbf{t}_{\mathbf{C}}$ est tel que $(\alpha, \mathrm{X}) > 0$ pour tout poids α de T dans V, la série

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}(\mathrm{C})}(e^{t\mathrm{X}}) = \sum_\lambda (\dim \mathrm{R}(\mathrm{C}))_\lambda e^{t(\lambda, \mathrm{X})}$$

est convergente pour tout $t > 0$ (car $(\lambda, \mathrm{X}) < 0$)). Lorsque $t \to 0$, on voit que

$$\lim_{t \to 0} t^{\dim \mathrm{C}} \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}(\mathrm{C})} e^{t\mathrm{X}} = \frac{r_{\mathrm{C}}(\mathrm{X})}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha, \mathrm{X})}.$$

Il est facile d'établir un rapport entre le développement asymptotique pour t petit de la fonction

$$\sum_\lambda (\dim \mathrm{R}(\mathrm{C}))_\lambda e^{t(\lambda, \mathrm{X})}$$

et de la fonction

$$n(\mathrm{T}, \mathrm{X}) = \sum_{\lambda;\, \lambda(\mathrm{X}) < \mathrm{T}} (\dim \mathrm{R}(\mathrm{C}))_\lambda$$

lorsque $\mathrm{T} \to \infty$. On a [12]

$$n(\mathrm{T}, \mathrm{X}) = \frac{r_{\mathrm{C}}(\mathrm{X})}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha, \mathrm{X})} \frac{\mathrm{T}^d}{d!} + \mathrm{O}(\mathrm{T}^{d-1})$$

lorsque $\mathrm{T} \to \infty$. Le polynôme de Joseph est donc un analogue anisotrope de la notion de multiplicité d'un anneau noetherien gradué. En effet si $\mathrm{T} = \mathrm{S}^1$ agit par homothéties, et si X_0 est le générateur de S^1 tel que $\exp 2\pi X_0=1$ la valeur $J_C(X_0)$ du polynôme de Joseph en X_0 est la multiplicité géométrique m_0 du point 0 sur C. La formule de Lelong pour la multiplicité du point 0 s'écrit

$$m_0=(-2i\pi)^{-(\dim C)}\int_{C\cap B}(\sum_k dz_k\,d\bar{z}_k)^d.$$

W. Rossmann [17] et A. Joseph [13] prouvent une formule analogue à la formule de Lelong pour le polynôme $J_C(X)$ de multiplicité équivariante :

THÉORÈME 12. — *Soit* V *un espace vectoriel complexe de dimension l. Soit* C *un cône algébrique dans* V *de dimension d stable sous l'action d'un tore* T. *Soit* $u_V(X)$ *la classe de Thom de* V. *Pour* $X\in\mathbf{t}$, *la multiplicité équivariante du cône* C *est donnée par la formule*

$$J_C(X)=(-1)^d(2\pi)^{l-d}\int_C u_V(X)=(-2\pi)^{-d}\,\mathrm{P}f(X)\int_{C\cap B}\left(\sum_k\frac{dz_k\,d\bar{z}_k}{\alpha_k(X)}\right)^d.$$

En particulier si $C=V$, on a $J_C(X)=1$ et si $C=0$, $J_C(X)=\mathrm{P}f(-X)$.

4. Représentation de Springer

Soit $\mathbf{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et soit G le groupe adjoint. On choisit une forme réelle compacte $\mathbf{k}$ de $\mathbf{g}$. Soit K le sous-groupe compact connexe de G d'algèbre de Lie $\mathbf{k}$. Soit $\mathbf{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{k}$ et soit T le tore compact maximal de K d'algèbre de Lie $\mathbf{t}$. Soit $\mathbf{h}=\mathbf{t}_C$. C'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{g}$. Soit $W=W(\mathbf{g},\mathbf{h})$ le groupe de Weyl. Il laisse stable la forme réelle $\mathbf{t}$ de $\mathbf{h}$. Soit $\mathscr{H}$ l'espace des polynômes harmoniques sur $\mathbf{t}^*$. Par définition un polynôme P est harmonique s'il est annulé par tous les opérateurs différentiels à coefficients constants W-invariants sur $\mathbf{t}^*$ sans terme constant. On identifiera $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t}^*$ par la forme de Killing.

Nous choisissons sur $\mathbf{g}$ le produit scalaire K-invariant Q défini par $Q(x,x)=-B(x,\bar{x})$ où $\bar{x}$ est le conjugué de x par rapport à la forme réelle $\mathbf{k}$ de $\mathbf{g}$ et B la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ (considérée comme algèbre de Lie réelle). On note $\|y\|=Q(y,y)^{1/2}$ la norme K-invariante sur $\mathbf{g}$ associée.

Soit Δ le système de racines de $\mathbf{h}$ dans $\mathbf{g}$. Soit Δ^+ un ordre sur Δ, $n=|\Delta^+|$, $\mathbf{n}=\sum_{\alpha\in\Delta^+}\mathbf{g}_\alpha$, $x_0=\mathbf{h}\oplus\mathbf{n}$ et $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$. L'algèbre x_0 est une sous-algèbre de Borel de $\mathbf{g}$. Soit B le sous-groupe de G d'algèbre de Lie x_0.

Soit $u\in\mathbf{n}$ et soit O_u l'orbite de u dans $\mathbf{g}$ sous l'action du groupe adjoint. Soit $2d_u$ la dimension (paire) de la variété algébrique complexe O_u. Soit C une composante irréductible de $O_u\cap\mathbf{n}$. La variété C est stable par B. En particulier C est invariant sous l'action du groupe compact T. L'adhérence $\bar{C}$ de C est un cône algébrique T-invariant dans $\mathbf{n}$. Un tel cône est appelé cône orbital. Le polynôme de multiplicité équivariante $J_{\bar{C}}$ est un polynôme sur $\mathbf{t}$ donné par la formule

$$J_{\bar{C}}(X) = (\pi)^{-\dim C} \int_C T(\exp f_V(-2X))$$

Si $u=0$, alors $C=0$ et $J_{\bar{C}}(X) = \prod_{\alpha>0} (\alpha, iX)$. Si u est un élément nilpotent régulier, alors $\bar{C} = \mathbf{n}$ et $J_{\bar{C}}(X) = 1$.

Considérons la variété des drapeaux D de $\mathbf{g}$. Un élément x de D est une sous-algèbre de Borel de $\mathbf{g}$ et il existe $g \in G$ tel que $x = g.x_0$. La variété D s'identifie à G/B. Cette identification munit D d'une structure complexe et donc d'une orientation. La variété D est de dimension complexe n. On note

$$D_u = \{ x \in D,\ u \in x \}$$

la variété de Springer associée à u. On a donc

$$D_u = \{ x = g.x_0;\ g^{-1} u \in \mathbf{n} \cap O_u \}.$$

Soit C une composante irréductible de $\mathbf{n} \cap O_u$ et soit

$$D(C) = \{ x = g.x_0;\ g^{-1} u \in C \}.$$

Soit G_u le stabilisateur de u dans G et $A_u = G_u/G_u^0$ le groupe (fini) des composantes connexes de G_u. Le groupe G_u opère sur D_u et laisse stable D(C). La proposition suivante se déduit de R. Steinberg [21] et A. Spaltenstein [18].

PROPOSITION 13. — 1. *Chaque composante irréductible de* $O_u \cap \mathbf{n}$ *est une variété algébrique complexe de dimension* d_u.

2. *Chaque composante irréductible de* D_u *est une variété algébrique complexe de dimension* $n - d_u$.

3. *La variété* D(C) *est l'orbite d'une composante irréductible de* D_u *par le groupe* A_u.

L'application $k \to k.x_0$ définit un isomorphisme entre K/T et la variété D. Rappelons la description de la courbure de l'espace fibré principal $K \to K/T$. Si $X \in \mathbf{k}$, on note $r(X_K)$ le champ sur K défini par l'action à droite :

$$(r(X_K)\varphi)(g) = \frac{d}{d\varepsilon} \varphi(g \exp(\varepsilon X))\big|_{\varepsilon=0}.$$

On associe à un élément de $f \in \mathbf{k}^*$ la 1-forme θ invariante à gauche sur K telle que $(\theta, r(X_K)) = (f, X)$. Si E_a est une base de $\mathbf{k}$ de base duale f^a, on note θ^a les 1-formes sur K associées à f^a. On a

$$d\theta^a = -\sum_{b<c} (f^a, [E_b, E_c])\, \theta^b \wedge \theta^c.$$

Soit $\mathbf{r} = [\mathbf{t}, \mathbf{k}]$. On écrit $\mathbf{k} = \mathbf{t} \oplus \mathbf{r}$. Par la décomposition $\mathbf{k}^* = \mathbf{t}^* \oplus \mathbf{r}^*$, l'espace $\mathbf{t}^*$ est identifié à un sous-espace de $\mathbf{k}^*$. La décomposition $\mathbf{k} = \mathbf{t} \oplus \mathbf{r}$ détermine une forme de connexion θ

et une forme de courbure Ω que nous explicitons. Dans la suite les indices a, b, c indexeront des bases de $\mathbf{k}$ ou $\mathbf{k}^*$, les indices α, β, ... des bases de $\mathbf{t}$ ou $\mathbf{t}^*$ et les indices i, j, ... des bases de $\mathbf{r}$ ou $\mathbf{r}^*$. Si H_α est une base de $\mathbf{t}$ de base duale $f^\alpha \in \mathbf{t}^*$, et si on choisit une base complémentaire E_i de $\mathbf{r}$ de base duale f^i on a

$$\theta = \sum_\alpha \theta^\alpha \otimes H_\alpha,$$

$$\Omega = d\theta = -\sum_{\alpha,\, i<j} (f^\alpha, [E_i, E_j])\, \theta^i \wedge \theta^j \otimes H_\alpha.$$

La forme θ est une 1-forme sur K à valeurs dans $\mathbf{t}$ tandis que la forme Ω passe au quotient en une 2-forme sur K/T. On considèrera Ω comme un élément de $\mathscr{A}^2(D) \otimes \mathbf{t}$. C'est une forme fermée. Si P est un polynôme sur $\mathbf{t}$, on étend P en un polynôme sur $\mathscr{A}(D) \otimes \mathbf{t}$ à valeurs dans $\mathscr{A}(D)$. On peut donc calculer $P(\Omega) \in \mathscr{A}(D)$. Comme Ω est fermée, la forme $P(\Omega)$ est fermée. Il est facile de voir [3] que si P est un polynôme W-invariant sur $\mathbf{t}$ sans terme constant, alors $P(\Omega)$ est exacte

Soit $\lambda \in \mathbf{t}^*$ et soit (Ω, λ) la 2-forme sur D obtenue par contraction de Ω avec λ. On a

$$(\Omega, \lambda) = -\sum_{i<j} (\lambda, [E_i, E_j])\, \theta^i \wedge \theta^j.$$

C'est une 2-forme fermée sur D. Soit

$$e^{(\Omega, \lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (\Omega, \lambda)^k$$

DÉFINITION 14. — *Soit* Z *un cycle orienté de* D *de dimension réelle* $2l$. *Le polynôme* S_Z *sur* $\mathbf{t}^*$ *associé à* Z *est le polynôme*

$$S_Z(\lambda) = (2\pi)^{-l} \int_Z e^{(\Omega, \lambda)}$$

Comme $(Q(\partial_\lambda) S_Z)(\lambda) = (2\pi)^{-l} \int_Z Q(\Omega)\, e^{(\Omega, \lambda)}$, et que $Q(\Omega)$ est exacte si Q est W-invariant, on voit que $S_Z(\lambda)$ est un polynôme harmonique sur $\mathbf{t}^*$.

Une sous variété algébrique complexe (éventuellement singulière) Z de la variété des drapeaux définit un cycle orienté de D et par conséquent un polynôme harmonique sur $\mathbf{t}^*$. Si l est la dimension complexe de Z on a $S_Z(\lambda) = (2\pi)^{-l} \frac{1}{l!} \int_Z (\Omega, \lambda)^l$. Les polynômes de Springer associés à u sont les polynômes $S_{D(C)}$. Ils sont de degré $n - d_u$. Lorsque Z est un point, $S_Z(\lambda) = 1$. Si $Z = D$, on a

$$S_D(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha>0} (\alpha, i\lambda)}{\prod_{\alpha>0} (\alpha, \rho)}$$

Rappelons qu'une orbite M de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie réel est munie d'une forme symplectique canonique σ_M. Si la dimension (réelle) de M est $2l$, la forme $\beta_M = (2\pi)^{-l}(\sigma_M)^l/(l!)$ est une forme sur M de degré maximal partout non nulle. Elle définit donc une orientation canonique et une densité canonique notée $d\beta_M$ sur M. Si G est un groupe de Lie semi-simple, il est connu que la mesure $d\beta_M$ définit une mesure tempérée sur $\mathbf{g}^*$, c'est-à-dire il existe un entier N tel que

$$\int_M (1+\|f\|^2)^{-N}\, d\beta_M < \infty$$

pour toute norme Euclidienne $\|f\|$ sur $\mathbf{g}^*$. Identifions $\mathbf{g}$ et $\mathbf{g}^*$ par la forme de Killing B et explicitons la forme symplectique σ_M d'une orbite de la représentation adjointe. Pour $X \in \mathbf{g}$, soit $a_M(X)$ la restriction à M de la fonction coordonnée $y \to B(X, y)$. La forme σ_M est uniquement caractérisée par la propriété

$$\iota(X_M)\,\sigma_M = d(a_M(X)) \tag{15}$$

pour tout $X \in \mathbf{g}$.

Soit $u \in \mathbf{n}$. On note σ_u la forme symplectique de O_u. D'après les remarques précédentes, $\int_{O_u} e^{-\|y\|^2/4}\, d\beta_u$ est une intégrale convergente. (Nous le démontrerons en fait dans la suite).

DÉFINITION 16. — *On note* $m(u) = \int_{O_u} e^{-\|y\|^2/4}\, d\beta_u$.

THÉORÈME 17. — *Soit* $u \in \mathbf{n}$ *et soit* O_u *l'orbite de u dans* $\mathbf{g}$ *sous l'action du groupe adjoint. Soit* C *une composante irréductible de la variété* $O_u \cap \mathbf{n}$. *Soit* D *la variété des drapeaux et soit* $D(C) = \{x \in D,\ x = gx_0;\ g^{-1}u \in C\}$. *Identifions* $\mathbf{t}$ *et* $\mathbf{t}^*$ *grâce à la forme de Killing. Soit* $X \in \mathbf{t}$. *On a l'égalité* :

$$\Big(\prod_{\alpha>0} (\alpha, \rho)\Big)^{-1} J_{\bar{C}}(X) = m(u)\, S_{D(C)}(X)$$

Démonstration. — Soit T^*D l'espace cotangent à D et soit $\pi : T^*D \to D$ la projection. Comme $D = K/T$ et $\mathbf{k} = \mathbf{t} \oplus \mathbf{r}$, on identifie $\mathbf{r}$ à l'espace tangent en x_0 à D et $\mathbf{r}^*$ à l'espace cotangent en x_0. On a donc $T^*D = K \times_T \mathbf{r}^*$. Soit σ la forme symplectique canonique de T^*D. On munit T^*D d'une structure de fibré Euclidien en posant $\|[k, f]\|^2 = \|f\|^2$ pour $k \in K$, $f \in \mathbf{r}^*$.

Soit $\lambda \in \mathbf{t}^*$. On note encore (Ω, λ) la forme sur T^*D obtenue par image réciproque de la forme (Ω, λ) sur D. On définit la forme $F(\lambda)$ sur T^*D par

$$F(\lambda) = -\|\xi\|^2 + \sigma + (\Omega, \lambda),$$

où $\|\xi\|$ est la fonction norme d'un vecteur cotangent.

L'application $g \to g.x_0$ fournit d'autre part un isomorphisme de D avec G/B. Nous identifions aussi $T^* D$ à $G \times_B \mathbf{n}$. Si $X \in \mathbf{g/b}$ est identifié à un vecteur tangent en x_0, $y \in \mathbf{n}$ est identifié au vecteur cotangent $X \to B(X, y)$. Si donc on identifie $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}^*$ par B, l'identification de $T^*_{x_0} D$ soit à $\mathbf{r}^*$ soit à $\mathbf{n}$ fournit un isomorphisme de $\mathbf{n}$ et de $\mathbf{r}^*$ qui est donné par la projection $y \in \mathbf{n} \to (1/2)(y+\bar{y}) \in \mathbf{r}$. Cette application commute à l'action de T.

Soit $\mu : T^* D \to \mathbf{g}$ l'application définie par $\mu[g, v] = g.v$ pour $g \in G$, $v \in \mathbf{n}$ et $[g, v] \in G \times_B \mathbf{n}$. L'application μ est l'application moment.

Considérons le sous-fibré $\mathscr{C} = G \times_B C$ de $T^* D$ de fibre type C. C'est une sous variété algébrique complexe de $T^* D$. La forme

$$e^{F(\lambda)} = e^{-\|\xi\|^2 + \sigma + (\Omega, \lambda)}$$

est à décroissance rapide sur les fibres du fibré vectoriel $T^* D$. L'intégrale

$$I(\lambda) = \int_{\mathscr{C}} e^{F(\lambda)}$$

est donc convergente. Elle définit un polynôme en λ. L'égalité du théorème se déduira de la formule de Fubini (1) appliquée aux deux fibrations π et μ.

Nous calculons $I(\lambda)$ en utilisant d'abord la fibration μ. L'image de $\mathscr{C}$ par μ est l'orbite O_u. La fonction $\|\xi\|^2$ sur $T^* D$ est l'image réciproque par μ de la fonction $\|y\|^2/2$ sur $\mathbf{g}$.

LEMME 18. — *La restriction de la forme symplectique σ à la variété $\mathscr{C}$ coïncide avec l'image réciproque par l'application μ de la forme symplectique σ_u de l'orbite O_u.*
(Ceci démontrera en particulier que O_u est tempérée.)

Démonstration. — Les formes σ et σ_u étant G-invariantes, il suffit de démontrer l'égalité de $\sigma | \mathscr{C}$ et de $\mu^* \sigma_u$ en un point $p = [e, x]$ où x est un point lisse de C. Il est connu ([8], [14]) que l'espace tangent $T_x C$ à C en x est un sous-espace coisotrope de $T_x O_u$ pour la forme symplectique σ_u. D'après la proposition (13), la variété C est une variété de dimension d_u, donc est lagrangienne. Les formes σ et σ_u coïncident donc sur $\Lambda^2 T_x C$.

Considérons l'action à gauche de G sur G/B. Soit $a(X)$ le symbole du champ de vecteurs X_D. C'est la fonction sur $T^* D$ définie par $a(X)(\xi) = \xi(X_M)$. On a donc

$$a(X)[g, v] = B(g^{-1} X, v) = B(X, gv) = B(X, \mu([g, v])).$$

Par définition de σ, $\iota(X_{T^* D})\sigma = da(X)$. La propriété caractéristique (15) de σ_u entraîne donc que $\iota(X)(\sigma | \mathscr{C}) = \iota(X)\mu^* \sigma_u$, pour tout X dans $\mathbf{g}$. Comme l'espace tangent à $\mathscr{C}$ au point p est engendré par $T_x C$ et les champs engendrés par l'action infinitésimale de G sur $T^* D$, on obtient le lemme.

Nous obtenons ainsi

$$I(\lambda) = \int_{O_u} \left(e^{-(\|y\|^2)/2} e^{\sigma_u} \int_{\mathscr{C}/O_u} e^{(\Omega, \lambda)} \right).$$

Considérons $\mu : \mathscr{C} \to O_u$. La fibre au dessus de u est identifiée à la variété $D(C)$ par l'application $gx_0 \to [g, g^{-1} u]$. On a donc un isomorphisme de $\mathscr{C}$ avec $G \times_{G_u} D(C)$. Comme les fibres sont de dimension complexe $n - d_u$ et que (Ω, λ) est une forme fermée, on voit que $\int_{\mathscr{C}/O_u} e^{(\Omega, \lambda)}$ est une forme fermée sur O_u qui dépend polynômialement de λ et dont le degré par rapport à λ est supérieur ou égal à $n - d_u$. Le terme homogène de degré $n - d_u$ est une fonction constante sur la base O_u. En considérant le point u, on voit qu'il est égal à $(2\pi)^{(n-d_u)} S_{D(C)}(\lambda)$. Nous obtenons donc que $I(\lambda)$ est un polynôme en λ de degré supérieur ou égal à $n - d_u$ et que son terme de degré $(n - d_u)$ est égal à

$$(2\pi)^{(n-d_u)} S_{D(C)}(\lambda) \left(\int_{O_u} e^{-\| y \|^2/2} e^{\sigma_u} \right).$$

Remarquons que l'orbite O_u est stable par la dilatation $y \to ty$ pour $t \in R^+$ et que la forme σ_u est homogène de degré -1. On a donc

$$\int_{O_u} e^{-\| y \|^2/2} e^{\sigma_u} = 2^{-d_u} \int_{O_u} e^{-\| y \|^2/4} e^{\sigma_u} = 2^{-d_u} (2\pi)^{2 d_u} m(u).$$

Nous calculons maintenant $I(\lambda)$ en utilisant la fibration $\pi : \mathscr{C} \to D$. Nous avons

$$I(\lambda) = \int_D \alpha(\lambda)$$

où

$$\alpha(\lambda) = \int_{\mathscr{C}/D} e^{F(\lambda)} \in \mathscr{A}(D)$$

désigne l'intégrale sur la fibre de π de $e^{F(\lambda)}$. Comme $F(\lambda)$ est une forme K-invariante, la forme $\alpha(\lambda)$ est K-invariante. De plus pour calculer $\int_D \alpha(\lambda)$, il suffit de connaître le terme de degré maximum $(\alpha(\lambda))_{[2n]}$ de $\alpha(\lambda)$. Soit dx la forme volume de K/T (définie par Q). On a donc $(\alpha(\lambda))_{[2n]} = \gamma(\lambda) dx$. Pour calculer la constante $\gamma(\lambda)$ il suffit de calculer $(\alpha(\lambda))_{x_0} \in \Lambda \mathbf{r}^*$. Explicitons l'image réciproque de la forme $F(\lambda) \in \mathscr{A}(K \times_T \mathbf{r}^*)$ sur $K \times \mathbf{r}^*$. On note encore σ la forme sur $K \times \mathbf{r}^*$ obrenue par image réciproque de σ. Écrivons $x \in \mathbf{r}^*$ comme $x = \sum x_i f^i$. Soit α la 1-forme sur $K \times \mathbf{r}^*$ définie par

$$\alpha = \sum_i x_i \theta^i,$$

Alors

$$\sigma = d\alpha = \sum_i dx_i \theta^i - \sum_{a<b} (x, [E_a, E_b]) \theta^a \wedge \theta^b,$$

et donc

$$F(\lambda) = -\sum_i x_i^2 + \sum_i dx_i \theta^i - \sum_{i<j} (\lambda, [E_i, E_j]) \theta^i \wedge \theta^j - \sum_{a<b} (x, [E_a, E_b]) \theta^a \wedge \theta^b.$$

Nous considérons $F(\lambda)_{(e,x)} \in \Lambda \mathbf{k}^* \otimes \Lambda \mathbf{r}$, comme une forme différentielle $F_r(\lambda)$ sur $\mathbf{r}^*$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\Lambda \mathbf{k}^*$. Soit f^a la base de $\mathbf{k}^*$. On a donc

$$F_r(\lambda) = -\sum_i x_i^2 + \sum_i dx_i f^i - \sum_{i<j} (\lambda, [E_i, E_j]) f^i \wedge f^j - \sum_{a<b} (x, [E_a, E_b]) f^a \wedge f^b$$

Le calcul de l'intégrale sur la fibre pour un espace associé à un fibré principal nous donne la formule

$$(\alpha(\lambda))_{x_0} = \int_C e^{F_r(\lambda)} \in \Lambda \mathbf{k}^*.$$

On sait que $(\alpha(\lambda))_{x_0}$ appartient en fait au sous espace $\Lambda \mathbf{r}^*$. Soit $T_\mathbf{r}(\xi)$ la projection d'un élément ξ de $\Lambda \mathbf{k}^*$ sur le sous espace $\Lambda^{2n} \mathbf{r}^*$ qu'on identifie à $\mathbf{R}$ grâce à son élément de base canonique défini par Q et l'orientation de D. Prolongeons $T_\mathbf{r}$ en une application de $\mathscr{A}(\mathbf{r}^*) \otimes \Lambda \mathbf{k}^*$ dans $\mathscr{A}(\mathbf{r}^*)$.

Nous avons

$$\gamma(\lambda) = T_\mathbf{r}(\alpha(\lambda))_{x_0} = \int_C T_\mathbf{r}(e^{F_\mathbf{r}(\lambda)}).$$

Soit $\varphi_\mathbf{r}(\lambda)$ la projection de $F_\mathbf{r}(\lambda) \in \mathscr{A}(\mathbf{r}^*) \otimes \Lambda \mathbf{k}^*$ sur $\mathscr{A}(\mathbf{r}^*) \otimes \Lambda \mathbf{r}^*$. Nous avons

$$\varphi_\mathbf{r}(\lambda) = -\sum_i x_i^2 + \sum_i dx_i f^i - \sum_{i<j} (\lambda, [E_i, E_j]) f^i \wedge f^j - \sum_{i<j} (x, [E_i, E_j]) f^i \wedge f^j.$$

Soit $A = A(x, \lambda)$ la transformation infinitésimalement orthogonale de l'espace $\mathbf{r}^*$ définie par

$$A f^i = \sum_j (\lambda + x, [E_i, E_j]) f^j.$$

Si $x=0$ c'est la matrice correspondant à l'action adjointe de $\lambda \in \mathbf{t}$ dans $\mathbf{n} \sim \mathbf{r}^*$. Identifions $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}^*$. Pour $X \in \mathbf{so}(\mathbf{r})$, rappelons que

$$f_\mathbf{r}(X) = -\sum_i x_i^2 + \sum_i dx_i f^i + \frac{1}{2} \sum_{i<j} (X f^i, f^j) f^i \wedge f^j.$$

On a donc

$$\varphi_\mathbf{r}(\lambda) = f_\mathbf{r}(-2A(x, \lambda)).$$

L'espace vectoriel $\mathbf{r}$ est de dimension $2n$ et C est de dimension réelle $2d_u$. Rappelons la formule (7)

$$T_\mathbf{r}(e^{f_\mathbf{r}(X)}) = e^{-\|x\|^2} \sum_I P_{I'}(X/2)\, dx_I$$

où $P_{I'}(X)$ est un polynôme homogène de degré $(2n - |I|)/2$ sur $\mathbf{so}(\mathbf{r})$. Nous voyons donc que

$$\gamma(\lambda) = \int_C T_\mathbf{r}(e^{\varphi_\mathbf{r}(\lambda)}) = \int_C e^{-\|x\|^2} \sum_{I, |I| = 2d_u} P_{I'}(-A(x, \lambda))\, dx_I$$

est un polynôme en λ de degré inférieur ou égal à $n-d_u$. Son terme homogène de degré $n-d_u$ est le polynôme

$$\int_{C} \mathrm{T}_{\mathbf{r}}(e^{f_{\mathbf{r}}(-2\lambda)}) = (\pi)^{d_u} \mathrm{J}_{\bar{C}}(\lambda).$$

Ainsi $\mathrm{I}(\lambda)=\mathrm{vol}(\mathrm{K}/\mathrm{T})\,\gamma(\lambda)$ est un polynôme en λ de degré inférieur ou égal à $(n-d_u)$. En comparant les deux expressions obtenues pour $\mathrm{I}(\lambda)$ nous en déduisons que $\mathrm{I}(\lambda)$ est homogène de degré $n-d_u$. On obtient donc la

PROPOSITION 19. — *Soit* $\mathrm{X}\in\mathbf{t}$. *Identifions* $\mathbf{t}$ *et* $\mathbf{t}^*$ *par la forme de Killing. On a l'égalité*:

$$\int_{C} e^{\mathrm{F}(\mathrm{X})} = (\pi)^{d_u} \mathrm{vol}(\mathrm{K}/\mathrm{T})\,\mathrm{J}_{\bar{C}}(\mathrm{X}) = (2\pi)^n \pi^{d_u} m(u)\,\mathrm{S}_{\mathrm{D}(\mathrm{C})}(\mathrm{X}).$$

Remarque. – Il est possible de prouver plus directement la première égalité de la proposition en remarquant que la forme

$$\mathrm{X} \to \mathrm{T}_{\mathbf{r}}(e^{\varphi_{\mathbf{r}}(-\mathrm{X}/2)})$$

est une forme fermée T-équivariante sur $\mathbf{r}$ qui donne aussi un représentant de la forme de Thom T-équivariante de l'espace $\mathbf{r}$.

Rappelons la formule $\mathrm{vol}(\mathrm{K}/\mathrm{T})=(2\pi)^n(\prod_{\alpha>0}(\alpha,\rho))^{-1}$. La deuxième égalité est la formule du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BERLINE et M. VERGNE, *The equivariant index and Kirillov character formula* (*Am. J. Math.*, vol. 107, 1985, p. 1159-1190).

[2] N. BERLINE, E. GETZLER et M. VERGNE, *Heat kernels and Dirac operators*, (à paraître).

[3] A. BOREL, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts* (*Ann. Math.*, vol. 57, 1953, p. 115-207).

[4] W. BORHO, J. L. BRYLINSKI and R. MACPHERSON, *Springer's Weyl group representations through characteristic classes of cone bundles*, (*Math. Ann.*, vol. 278, 1987, p. 273-289).

[5] H. CARTAN, *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal.* Dans « Colloque de Topologie » (*C.B.R.M.*, *Bruxelles*, 1950, p. 57-71).

[6] M. DUFLO et M. VERGNE, *Cohomologie équivariante et méthode des orbites* (à paraître, "The orbit Method in Representation theory" Progress in Mathematics, Birkhaüser-Boston).

[7] V. GINSBURG, *Intégrales sur les orbites nilpotentes et représentations de groupes de Weyl* (*C.R. Acad. Sci., Paris*, vol. 296, 1983, p. 249-252).

[8] V. GINSBURG, **g**-*modules, Springer's representations and bivariant Chern classes* (*Adv. Math.*, vol. 59, 1986, p. 1-48.

[9] R. HOTTA, *On Joseph's construction of Weyl group representations* (*Tohoku Math. J.*, vol. 36, 1984, p. 49-74).

[10] M. KASHIWARA et T. MONTEIRO-FERNANDES, *Involutivité des variétés microcaractéristiques* (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 114, 1986, p. 393-402).

[11] R. Hotta et M. Kashiwara, *The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra* (*Inventiones Mathematicae*, vol. 75, 1984, p. 327-358).

[12] A. Joseph, *On the variety of a highest weight module* (*J. Alg.*, vol. 88, 1984, p. 238-278).

[13] A. Joseph, *On the characteristic polynomials of orbital varieties* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* (à paraître)).

[14] M. Kashiwara et T. Monteiro-Fernandes, *Involutivité des variétés microcaractéristiques* (*Bull. Soc. Math., France*, vol. 114, 1986, p. 393-402).

[15] V. Mathai et D. Quillen, *Superconnections, Thom classes and equivariant differential forms* (*Topology*, vol. 25, 1986, p. 85-110).

[16] W. Rossmann, *Invariant eigendistributions on a complex Lie algebra and homology classes on the conormal varieties I, II* (preprint 1986), à paraître dans *J. Funct. Anal.*

[17] W. Rossmann, *Equivariant multiplicities on complex varieties.* Dans Orbites unipotentes et Représentations III. *Astérisque*, (à paraître).

[18] N. Spaltenstein, *On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups* (*Topology*, vol. 16, 1977, p. 203-204).

[19] T. A. Springer, *Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl group* (*Invent. Mathematicae*, vol. 36, 1976, p. 173-207).

[20] T. A. Springer, *A construction of representations of Weyl groups* (*Invent. Mathematicae*, vol. 44, 1978, p. 279-293).

[21] R. Steinberg, *Conjugacy classes in algebraic groups* (*Lect. Notes Math.*, vol. 366, (Springer-Verlag), 1974.

(Manuscrit reçu le 19 juin 1989,
révisé le 21 novembre 1989).

M. Vergne,
École Normale Supérieure, DMI,
45, rue d'Ulm,
75230 Paris Cedex 05, France.