

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

YVES BENOIST

**Modules simples sur une algèbre de Lie nilpotente contenant un vecteur propre pour une sous-algèbre**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 23, n° 3 (1990), p. 495-517

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1990\\_4\\_23\\_3\\_495\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_3_495_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MODULES SIMPLES SUR UNE ALGÈBRE DE LIE NILPOTENTE CONTENANT UN VECTEUR PROPRE POUR UNE SOUS-ALGÈBRE

PAR YVES BENOIST

---

## Plan

0. Introduction.
1.  $\mathcal{D}$ -modules avec action d'un groupe algébrique.
  - 1.1. F. o. d. t. avec action de  $H$ .
  - 1.2.  $\mathcal{D}$ -modules avec action de  $H$ .
  - 1.3. Foncteurs pour les  $\mathcal{D}$ -modules avec action de  $H$ .
2.  $\mathcal{D}$ -modules  $(H, \mu)$ -équivariants.
3. Foncteurs d'entrelacement.
  - 3.1. Localisation.
  - 3.2. Foncteurs d'entrelacement.
4. Géométrie des orbites.
  - 4.1. Lemmes.
  - 4.2. Exemples.
5. Modules simples associés à une composante lagrangienne.
  - 5.1. Construction du module simple  $M_{\omega}$ .
  - 5.2. Polarisation adjacentes.
  - 5.3. Indépendance de la polarisation.
  - 5.4. Construction par récurrence de  $M_{\omega}$ .
6.  $U/(I+U\mathfrak{f}^f)$ .
  - 6.1.  $U/(I+U\mathfrak{f}^f)$ .
  - 6.2. Exemple de multiplicité.
  - 6.3. Questions.

Références.

### Introduction

0.1 NOTATIONS. — Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente sur un corps  $F$  algébriquement clos de caractéristique 0,  $U = U(\mathfrak{g})$  son algèbre enveloppante,  $I$  un idéal primitif de  $U$  et  $\Omega$  l'orbite dans  $\mathfrak{g}^*$  correspondante; c'est une variété symplectique.

Soient  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{f}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  telle que  $f([\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]) = 0$  et  $\mathfrak{f}^f := \{ T - f(T) \mid T \in \mathfrak{f} \} \subset U$ . On note par une lettre latine  $G, K, \dots$  les groupes unipotents correspondants. Pour tout  $\mathfrak{g}$ -module  $N$  on note  $N^{\mathfrak{f}, f} := \{ n \in N \mid \mathfrak{f}^f \cdot n = 0 \}$ .

0.2. RÉSULTATS. — Pour chaque composante irréductible lagrangienne  $\Lambda$  de la variété coïso trope  $Z := \Omega \cap (f + \mathfrak{f}^\perp)$ , on construit un  $\mathfrak{g}$ -module simple  $M_\Lambda$  d'annulateur  $I$  tel que  $m_\Lambda := \dim M_\Lambda^{\mathfrak{f}, f} \neq 0$  (5).

On montre que le  $\mathfrak{g}$ -module  $M := U/(I + U\mathfrak{f}^f)$  est de longueur finie si et seulement si  $Z$  est lagrangienne. Et dans ce cas :

(i)  $M$  est isomorphe à  $\bigoplus_{\Lambda \text{ comp. irr. de } Z} (M_\Lambda)^{m_\Lambda}$ .

(ii) Tout  $\mathfrak{g}$ -module simple  $N$  annulé par  $I$  tel que  $N^{\mathfrak{f}, f} \neq 0$  est isomorphe à  $M_\Lambda$  pour une unique composante  $\Lambda$  (6).

En particulier :

$$M = 0 \Leftrightarrow Z = \emptyset.$$

Les multiplicités  $m_\Lambda$  ne sont pas toujours égales à 1 (6), même lorsque  $Z$  est une  $K$ -orbite, contrairement au cas des modules sphériques [Be].

0.3. MÉTHODES. — Donnons quelques détails de la méthode suivie : Soit  $\Lambda$  une composante irréductible de  $Z$ . Supposons que  $f \in \Lambda$ . Soient  $\mathfrak{b}$  une polarisation en  $f$  et  $p: G.f \rightarrow G/B$  la projection :  $U/I$  s'identifie à un anneau d'opérateurs différentiels tordus  $D_{f, X}$  sur  $G/B$ . On montre que  $\Lambda$  est lagrangienne si et seulement si  $p(\Lambda)$  est une  $K$ -orbite (4) et que, dans ce cas, le  $D_{f, X}$ -module  $M_\Lambda$  : « image directe des fonctions sur  $p(\Lambda)$  » ne dépend pas du choix de  $\mathfrak{b}$  (5). La démonstration utilise les « foncteurs d'entrelacements » étudiés en (3). Les  $D_{f, X}$ -modules  $M_\Lambda$  et  $M$  sont  $(K, f)$ -équivalents (*c.f.* ci-dessous) et leur étude peut être menée dans un cadre plus général.

Soit  $X$  une variété algébrique lisse sur  $F$  sur laquelle un groupe algébrique  $H$  agit et  $\mathcal{D}$  un faisceau d'opérateurs différentiels tordus avec action de  $H$  ([Ka], [BB1]). Soit  $\mu \in (\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$ . Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $\mathcal{D}$ -modules cohérents  $(H, \mu)$ -équivalents (*i. e.* des  $\mathcal{D}$ -modules avec action de  $H$  tels que la différence de l'action de  $\mathfrak{h}$  à travers  $\mathcal{D}$  et de la différentielle de l'action de  $H$  est égale à  $\mu$ ). On définit un ensemble  $A$  d'orbites admissibles (2) et on montre que  $A$  est fini si et seulement si l'ensemble des objets simples de  $\mathcal{C}$  l'est. Dans ce cas ces deux ensembles sont naturellement reliés. Si en outre les orbites admissibles sont fermées alors  $\mathcal{C}$  est une catégorie semi-simple (*i. e.* sans extension) (2).

On appliquera ceci à  $H=K$  et  $X=G/B: p(Z)$  est alors la réunion des orbites admissibles (4).

0.4. MOTIVATIONS. — Supposons un instant que  $F = \mathbb{C}$ , que  $\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{k}$ ) est la complexifiée d'une algèbre de Lie réelle  $\mathfrak{g}_0$  (resp.  $\mathfrak{k}_0$ ), que  $f \in i\mathfrak{g}_0^*$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) et que  $\Omega = G \cdot \Omega_0$  où  $\Omega_0$  est une  $G_0$ -orbite dans  $i\mathfrak{g}_0^*$ . Soient  $\pi_0$  la représentation unitaire irréductible associée à  $\Omega_0$  [Ki 1] et  $\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty}$  le  $\mathfrak{g}$ -module des vecteurs distributions de cette représentation. L'espace  $M_0 := (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{t,f}$  (au moins sa valeur pour « presque tout  $\pi_0$  ») joue, via la dualité de Frobenius, un rôle dans la désintégration de la représentation  $\text{Ind}_{K_0}^{G_0}(\chi_f)$  induite à partir du caractère  $\chi_f$  de  $K_0$  dont la différentielle est  $f|_{\mathfrak{k}_0}$  [Pe].

Une de mes motivations est l'étude de cet espace « pour tout  $\pi_0$  » et du lien entre celui-ci et  $Z_0 := \Omega_0 \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$ . Malheureusement, ce lien n'est pas aussi précis que celui entre  $M$  et  $Z$  : j'ai construit un exemple où  $Z_0$  est lagrangienne mais où  $\dim M_0 = \infty$  (non publié).

Une approche pour ce problème est de remarquer que, pour tout  $a$  dans  $M_0$ , le  $\mathfrak{g}$ -module engendré par  $a$  est un quotient de  $M$ . Ainsi ces résultats permettent facilement de montrer les implications :

$$Z = \emptyset \Rightarrow M_0 = 0 \Rightarrow Z_0 = \emptyset$$

et

$$Z \text{ est lagrangienne} \Rightarrow \dim M_0 < \infty \Rightarrow Z_0 \text{ est lagrangienne.}$$

Je remercie M. Duflo qui est à l'origine de ce travail.

### 1. $\mathcal{D}$ -modules avec action d'un groupe algébrique.

Les idées de cette partie viennent de [B-B] et [Ka].

1.1. F. o. d. t. AVEC ACTION DE  $H$ . — Soient  $X$  une variété algébrique lisse sur un corps  $F$  algébriquement clos de caractéristique 0 et  $i_X : \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{D}_X$  l'injection du faisceau structural dans celui des opérateurs différentiels.

DÉFINITION. — Un faisceau  $\mathcal{D}$  d'algèbres sur  $\mathcal{O}_X$  est un f. o. d. t. (faisceau d'opérateurs différentiels tordus) si localement (en topologie de Zariski) le morphisme  $i : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{D}$  est isomorphe à  $i_X$ .

Soient  $H$  un groupe algébrique qui agit sur  $X$  et  $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ .

DÉFINITION. — Un « f. o. d. t. avec action de  $H$  » est la donnée d'un f. o. d. t.  $\mathcal{D}$  qui est un  $\mathcal{O}_X$ -module équivariant et d'un morphisme de  $H$ -modules  $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{D})$  tels que :

- (i) l'injection  $i : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{D}$  est équivariante ;
- (ii) la multiplication dans  $\mathcal{D}$  est équivariante ;
- (iii) la différentielle de l'action de  $H$  sur  $\Gamma(X, \mathcal{D})$  est donnée par

$$\mathfrak{h} \ni \xi \mapsto (D \mapsto [\alpha(\xi), D]).$$

Si  $X$  est un espace homogène, *i. e.*  $X = H/I$  où  $I$  est un sous groupe algébrique de  $H$ , on dit que  $\mathcal{D}$  est un f. h. o. d. t. Rappelons la construction des f. h. o. d. t. : Soit  $\mathfrak{i} = \text{Lie}(I)$ ,  $\mathfrak{i}^*$  le dual de  $\mathfrak{i}$  et  $(\mathfrak{i}^*)^I$  l'ensemble des formes linéaires sur  $\mathfrak{i}$  invariantes par  $I$ . Soit  $\lambda \in (\mathfrak{i}^*)^I$ .

Le faisceau  $\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h})$  a une structure d'algèbre donnée par la relation de commutation :

$$[1 \otimes X, \varphi \otimes 1] = L_X \varphi \otimes 1, \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \quad \varphi \in \mathcal{O}_X(V)$$

où  $(L_X \varphi)(x) = d/dt \varphi(\exp(-tX)x)|_{t=0}$ . Soient  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h}$  le faisceau d'isotropie :

$$\mathcal{I} := \left\{ \sum \varphi_i \otimes X_i \in \mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h} \mid \forall h \in H (\text{Adh}^{-1}) \left( \sum \varphi_i(hI) X_i \right) \in \mathfrak{i} \right\},$$

$l: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_X$  le morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules donné par

$$(l(\sum \varphi_i \otimes X_i))(hI) = \lambda((\text{Adh}^{-1}) \left( \sum \varphi_i(hI) X_i \right))$$

et

$$\mathcal{I}^l := \{ \xi - l(\xi) \mid \xi \in \mathcal{I} \}$$

le faisceau d'isotropie tordu  $(\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h})) \mathcal{I}^l$  est un faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h})$ . On pose

$$\mathcal{D}_{\lambda, X} = (\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h})) / (\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h})) \mathcal{I}^l$$

[noté  $\mathcal{A}_X(\lambda)$  dans [Ka]].

PROPOSITION 1.1 ([B-B]). — Soit  $X = H/I$ . L'application  $\lambda \rightarrow \mathcal{D}_{\lambda, X}$  est une bijection de  $(\mathfrak{i}^*)^I$  sur l'ensemble des f. h. o. d. t.,

#### 1.2. $\mathcal{D}$ -MODULES AVEC ACTION DE $H$ .

DÉFINITION. — Soit  $\mathcal{D}$  un f. o. d. t. avec action de  $H$ , on dit que  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}$ -module avec action de  $H$  si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}$ -module (quasi-cohérent et à gauche) et un  $\mathcal{O}_X$ -module  $H$ -équivalent tel que l'action de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{M}$  est  $H$ -équivalente.

$\mathcal{M}$  a alors deux structures de  $\mathfrak{h}$ -modules. La première via  $\mathfrak{h} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{D})$ , est notée  $\alpha$ , la deuxième, différentielle de l'action de  $H$ , est notée  $\beta$ . La différence  $\gamma = \beta - \alpha$  est une action de  $\mathfrak{h}$  qui est  $\mathcal{O}_X$  linéaire.

DÉFINITION. — Un  $(\mathfrak{h}, I)$ -module  $\lambda$ -tordu  $M$  est la donnée de structures de  $\mathfrak{h}$ -module  $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \text{End}(M)$  et de  $I$ -module  $\pi: I \rightarrow \text{GL}(M)$  (on suppose que  $M$  est réunion de sous- $I$ -modules algébriques de dimension finie) telle que  $\rho$  est  $I$ -équivalente et,  $\forall T \in \mathfrak{i}$ ,  $d\pi(T) = \rho(T) + \lambda(T) \text{Id}$ .

PROPOSITION 1.2. — Soit  $X = H/I$ . La catégorie des  $\mathcal{D}_{\lambda, X}$ -modules avec action de  $H$  est équivalente à la catégorie des  $(\mathfrak{h}, I)$ -modules  $\lambda$ -tordus. L'équivalence est donnée par la fibre géométrique  $\mathcal{M} \rightarrow i^*(\mathcal{M})$  où  $i: \{I\} \rightarrow X$  est l'injection du point de base.

Démonstration cf. [Ka], th. 4.10.2. — La structure de  $I$ -module sur  $i^*(\mathcal{M})$  est claire. Celle de  $\mathfrak{h}$ -module est donnée par  $\gamma$ .

DÉFINITION. — Soient  $\mu$  un caractère de  $\mathfrak{h}$  (i. e.  $\mu \in (\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$ ) et  $\mathcal{D}$  un f. o. d. t. avec action de  $H$ . Un  $\mathcal{D}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant est un  $\mathcal{D}$ -module avec action  $H$  tel que  $\gamma = -\mu \text{Id}$ .

Lorsque  $H$  est connexe, la catégorie des  $\mathcal{D}$ -modules  $(H, \mu)$ -équivariants est une sous-catégorie pleine de la catégorie des  $\mathcal{D}$ -modules.

Exemple. — Soient  $F_\mu$  le  $\mathfrak{h}$ -module de dimension 1 donné par  $\mu$  et  $V$  un  $H$ -module, alors

$$\mathcal{M}^\mu := \mathcal{D} \otimes_{U(\mathfrak{h})} (F_\mu \otimes V)$$

est un  $\mathcal{D}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant [l'action de  $\mathcal{D}$  est donnée par  $d' \cdot (d \otimes 1 \otimes v) = d' d \otimes 1 \otimes v$  et celle de  $H$  par  $h(d \otimes 1 \otimes v) = (h \cdot d) \otimes 1 \otimes (h \cdot v)$ ].

COROLLAIRE. — Soit  $X = H/I$ . La catégorie des  $\mathcal{D}_{\lambda, X}$ -modules  $(H, \mu)$ -équivariants est équivalente à la catégorie des  $I$ -modules  $(M, \pi)$  tels que  $\forall X \in \mathfrak{i}, d\pi(X) = (\lambda(X) - \mu(X)) \text{Id}$ . L'équivalence est donnée par  $\mathcal{M} \rightarrow i^*(M)$ .

En particulier cette catégorie est semi-simple et n'a qu'un nombre fini d'objets simples (cf. [Ki 2], 14. 2).

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}$ -module cohérent, on note  $\text{Supp}(\mathcal{M}) \subset X$  son support et  $\text{Ch}(\mathcal{M}) \subset T^*X$  sa variété caractéristique.  $\mathcal{M}$  est dit holonome si  $\dim \text{Ch}(\mathcal{M}) = \dim X$ .

1. 3. FONCTEURS POUR LES  $\mathcal{D}$ -MODULES AVEC ACTION DE  $H$ . — Soit  $\mathcal{D}$  un f. o. d. t. avec action de  $H$  sur  $X$ .

Soit  $\mathcal{L}$  un fibré inversible  $H$ -équivariant alors  $\mathcal{D}^\mathcal{L} := \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes -1}$  est naturellement un f. o. d. t. avec action de  $H$  ([Ka], 2. 6. 5). En outre le foncteur  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$  est une équivalence de la catégorie des  $\mathcal{D}$ -modules avec action de  $H$  [resp.  $(H, \mu)$ -équivariants] dans celle des  $\mathcal{D}^\mathcal{L}$ -modules avec action de  $H$  [resp.  $(H, \mu)$ -équivariants].

Soit  $\nu$  un caractère de  $H$  : c'est une représentation de  $H$  dans un espace vectoriel de dimension 1 :  $F_\nu$ . Le foncteur  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_\nu := \mathcal{M} \otimes_F F_\nu$  est une équivalence de catégorie entre  $\mathcal{D}$ -modules  $(H, \mu)$ -équivariants et  $\mathcal{D}$ -modules  $(H, \mu - d\nu)$ -équivariants (l'action de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{M}_\nu$  se fait sur  $\mathcal{M}$ , celle de  $H$  se fait sur les deux facteurs  $\mathcal{M}$  et  $F_\nu$ ).

Le faisceau d'anneaux opposés  $\mathcal{D}^{\text{opp}}$  est aussi un f. o. d. t. avec action de  $H$  (par exemple  $(\mathcal{D}_X)^{\text{opp}} = (\mathcal{D}_X)^{\Omega_X^{\text{max}}}$  où  $\Omega_X^{\text{max}}$  est le faisceau des formes différentielles de degré maximal). Un  $\mathcal{D}$ -module à droite avec action de  $H$  est (par définition) un  $\mathcal{D}^{\text{opp}}$ -module avec action de  $H$ .

Soient  $\varphi : Y \rightarrow X$  un morphisme de  $H$ -variétés lisses,  $\varphi^*$  et  $\varphi_*$  les images inverse et directe en théorie des faisceaux,  $\mathcal{D}_\rightarrow = \varphi^*(\mathcal{D}) := \mathcal{O}_Y \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{O}_X)} \varphi^*(\mathcal{D})$  et  $\mathcal{D}^\varphi$  le f. o. d. t. avec action de  $H$  sur  $Y$ , image inverse de  $\mathcal{D}$  ([B-B 2]) :  $\mathcal{D}^\varphi$  est le faisceau des endomorphismes différentiels du  $\mathcal{O}_Y$ -module  $\varphi^*(\mathcal{D})$  qui commutent à l'action à droite de  $\varphi^*(\mathcal{D})$ . Par construction,  $\mathcal{D}_\rightarrow$  est un  $\mathcal{D}^\varphi$ -module avec action de  $H$  et un  $\varphi^*(\mathcal{D})$ -module à droite. Exemple :  $\mathcal{D}_\rightarrow^\varphi = \mathcal{D}_Y$ . Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}$ -module avec action de  $H$  [resp.  $(H, \mu)$ -équivariant]. On note  $\varphi^*(\mathcal{M}) := \mathcal{D}_\rightarrow \otimes_{\varphi^{-1}(\mathcal{D})} \varphi^*(\mathcal{M})$  le  $\mathcal{D}^\varphi$ -module avec action de  $H$  [resp.  $(H, \mu)$ -équivariant] image inverse de  $\mathcal{M}$ .

On a l'égalité de f. o. d. t. avec action de  $H : (\mathcal{D}^{\text{opp}})^{\text{op}} = ((\mathcal{D}^{\text{op}})^{\Omega^{\text{op}} \uparrow X})^{\text{opp}}$  où  $\Omega_{Y|X}^{\text{max}} = \Omega_Y^{\text{max}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \varphi^*(\Omega_X^{\text{max}})^{\otimes -1}$  ([Ka], 2.11). Soit  $\mathcal{D}_{\leftarrow} := \Omega_{Y|X}^{\text{max}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \varphi^*(\mathcal{D}^{\text{opp}})$ , c'est un  $(\varphi^*(\mathcal{D}), \mathcal{D}^{\text{op}})$ -bimodule. Donc si  $\mathcal{M}'$  est un  $\mathcal{D}$ -module à droite avec action de  $H$ ,  $\varphi^*(\mathcal{M}') \otimes_{\varphi^*(\mathcal{D})} \mathcal{D}_{\leftarrow} = \Omega_{Y|X}^{\text{max}} \otimes_{\varphi^*(\mathcal{O}_X)} \varphi^*(\mathcal{M}')$  est un  $\mathcal{D}^{\text{op}}$ -module à droite avec action de  $H$ . D'autre part, on note  $\varphi^+(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\varphi^*(\mathcal{D})}(\mathcal{D}_{\leftarrow}, \varphi^*(\mathcal{M}))$  : c'est un  $\mathcal{D}^{\text{op}}$ -module avec action de  $H$ .

Soit  $\mathcal{N}'$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) un  $\mathcal{D}^{\text{op}}$ -module à droite (resp. à gauche) avec action de  $H$ , on note :  $\varphi_+(\mathcal{N}') := \varphi_*(\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{D}^{\text{op}}} \mathcal{D}_{\leftarrow})$  [resp.  $\varphi_+(\mathcal{N}) := \varphi_*(\mathcal{D}_{\leftarrow} \otimes_{\mathcal{D}^{\text{op}}} \mathcal{N})$ ] le  $\mathcal{D}$ -module à droite (resp. à gauche) avec action de  $H$  image directe de  $\mathcal{N}'$  (resp.  $\mathcal{N}$ ).

PROPOSITION 1.3 (Kashiwara). — Soit  $Y \xrightarrow{i} X$  une sous variété fermée, lisse et stable par  $H$ , alors les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^i\text{-modules cohérents} & & \mathcal{D}\text{-modules cohérents avec action} \\ \text{avec action de } H & \longleftrightarrow & \text{de } H \text{ [resp. } (H, \mu)\text{-équivariants]} \\ \text{[resp. } (H, \mu)\text{-équivariants]} & & \text{dont le support est inclus dans } Y \\ \mathcal{N} & \longrightarrow & i_+(\mathcal{N}) \\ i^+(\mathcal{M}) & \longleftarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

sont des équivalences de catégories inverses.

Prenons les notations de 1.1 : soit  $\psi: K \rightarrow H$  un morphisme de groupes,  $J$  un sous groupe de  $K$  tel que  $\psi(J) \subset I$  et  $\varphi: Y = K/J \rightarrow X = H/I$  le morphisme de variétés que l'on déduit de  $\psi$ , alors  $\forall \lambda \in (i^*)^!$ , on a l'égalité de f. o. d. t. avec action de  $K$  sur  $Y: (\mathcal{D}_{\lambda, X})^{\text{op}} = \mathcal{D}_{\lambda \circ \psi, Y}$  ([Ka], 4.14). Dans cette situation, on note  $\mathcal{D}_{\lambda, Y \rightarrow X} := \mathcal{D}_{\leftarrow}$  et  $\mathcal{D}_{\lambda, X \leftarrow Y} := \mathcal{D}_{\leftarrow}$ .

On a  $(\mathcal{D}_{\lambda, X})^{\text{opp}} = \mathcal{D}_{-\lambda + 2\rho, X}$  où  $\rho(\cdot) = 1/2 \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\text{ad} \cdot)$  ([Ka]).

## 2. $\mathcal{D}$ -modules $(H, \mu)$ -équivariants.

Dans cette partie, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un  $\mathcal{D}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant soit holonome. Sous ces conditions, on peut décrire ceux qui sont simples.

Soient  $H$  un groupe algébrique,  $\mu \in (\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$ ,  $X$  une  $H$ -variété lisse et  $\mathcal{D}$  un f. o. d. t. avec action de  $H$ .

Soient  $x \in X$ ,  $\omega = H \cdot x$  l'orbite contenant  $x$ ,  $i_{\omega}: \omega \hookrightarrow X$  l'injection,  $I_x := \{h \in H \mid h \cdot x = x\}$  le groupe d'isotropie en  $x$  et  $\mathfrak{i}_x$  son algèbre de Lie. Le f. h. o. d. t.  $\mathcal{D}^{i_{\omega}}$  correspond, d'après 1.1, à un élément  $\lambda_{\omega} \in (i_x^*)^!$ . On pose  $\hat{\omega} = \{\pi, \text{représentation (algébrique de dimension finie) irréductible de } I_x \text{ telle que } d\pi = (\lambda_{\omega} - \mu|_{\mathfrak{i}_x}) \text{Id}\}$ . C'est un ensemble fini; pour  $\pi$  dans  $\hat{\omega}$ , on note  $\mathcal{O}_{\pi}$  le  $\mathcal{D}^{i_{\omega}}$ -module simple correspondant (1.2).

DÉFINITION. — Une orbite est dite admissible si  $\hat{\omega} \neq \emptyset$ . On note  $A$  l'ensemble des orbites admissibles et  $\hat{A} = \{(\omega, \pi) \mid \omega \in A \text{ et } \pi \in \hat{\omega}\}$ .

PROPOSITION 2. 1. — Avec ces notations, soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}$ -module cohérent  $(H, \mu)$ -équivariant.

- (a) Si  $A = \emptyset$  alors  $\mathcal{M} = 0$ .
- (b) Si  $A$  est fini alors  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}$ -module holonome.
- (c) Dans ce cas, on a une bijection naturelle

$$\hat{A} \xrightarrow{\sim} \{ \mathcal{D}\text{-modules } (H, \mu)\text{-équivariants simples} \}$$

donnée par  $(\omega, \pi) \rightarrow$  l'unique sous module  $(H, \mu)$ -équivariant simple de  $i_{\omega+}(\mathcal{O}_\pi)$ .

(d) Si, en outre, toutes les orbites admissibles sont fermées alors la catégorie des  $\mathcal{D}$ -modules cohérents  $(H, \mu)$ -équivariants est une catégorie semi-simple (i. e. tout objet est somme directe finie d'objets simples).

Cette proposition généralise la description des  $\mathcal{D}_X$ -modules  $H$ -équivariants pour une variété avec un nombre fini d'orbites ([Bo], VII, th. 12.11). Elle en diffère de deux façons :

(1)  $\mathcal{M}$  n'est pas en général un  $\mathcal{D}$ -module holonome régulier (cf. [Bo], VII, 11 ou [Ka], 3.5).

Exemple. —  $H = F =$  le sous groupe unipotent de  $SL(2, F)$  qui agit sur  $X = P_1 F = F \cup \{\infty\}$  par  $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . z = z + h, \forall h \in F, \forall z \in X$  ( $X$  a deux orbites),  $\mathfrak{h} = FE =$  son algèbre de Lie  $\left( E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \mu \in \mathfrak{h}^*$  l'élément donné par  $\mu(E) = 1$  et  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X$  le faisceau des opérateurs différentiels. Le  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathfrak{h}} F_\mu = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X(E - 1)$  est  $(H, \mu)$ -équivariant mais il n'est pas holonome régulier ; en effet, au voisinage de l'infini on a  $E - 1 = y^2 \partial_y - 1$ .

(2) Le support de  $\mathcal{M}$  peut contenir une infinité d'orbites.

Exemple. —  $H = \{(a, b) \in F^* \times F\} =$  le groupe affine de la droite,  $\mathfrak{h} = FA \oplus FB$  son algèbre de Lie avec  $[A, B] = B, X = \mathfrak{h}^* = \{(x, y) = xA^* + yB^*\}$  l'espace de la représentation coadjointe [l'action est donnée par :  $(a, b)^{-1} . (x, y) = (x - by, ay), \forall (a, b) \in H, (x, y) \in X$ ],  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X$  et  $\mu$  tel que  $\mu(A) = \gamma \in F \setminus \mathbb{Z}$  et  $\mu(B) = 0$ . Il y a une seule orbite admissible l'orbite ouverte  $\Omega$  (car  $\mu$  ne s'intègre pas en un caractère de  $H$ ). Le  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathfrak{h}} F_\mu = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X(y \partial_y - \gamma, y \partial_x)$  est  $(H, \mu)$ -équivariant. On vérifie que  $\mathcal{M}$  est holonome (car  $\gamma \neq -1$ ) et pourtant  $\text{Supp}(\mathcal{M}) = X$  contient une infinité d'orbites.

Démonstration. — Pour toute partie  $P$  de  $X$  on note  $i_P : P \hookrightarrow X$  l'injection naturelle.

(a) Notons  $A_{\mathcal{M}} = \{\omega \in A \mid \omega \subset \text{Supp}(\mathcal{M})\}$  et montrons que

$$\text{Supp}(\mathcal{M}) = \overline{\bigcup_{\omega \in A_{\mathcal{M}}} \omega}$$

[Si  $A = \emptyset$ , on aura alors  $\mathcal{M} = 0$ ]. Quitte à ôter à  $X$  la partie singulière de  $\text{Supp}(\mathcal{M})$ , on peut supposer que  $S = \text{Supp}(\mathcal{M})$  est une variété lisse. On peut alors écrire, grâce à 1.3,



$\mathcal{M} = i_{S^+}(\mathcal{N})$  où  $\mathcal{N}$  est un  $\mathcal{D}^{\text{is}}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant. On se ramène ainsi au cas où  $\text{Supp}(\mathcal{M}) = X$ .

Dans ce cas, il existe un ouvert dense  $U$  de  $X$  sur lequel  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre [Mi]. En particulier, si  $x \in U$ , on a  $i_x^*(\mathcal{M}) \neq 0$ . Soient  $\omega = H \cdot x$  et  $j_x: \{x\} \hookrightarrow \omega$  l'injection naturelle, on a  $i_x^*(\mathcal{M}) = j_x^*(i_\omega^*(\mathcal{M}))$ . Donc  $i_\omega^*(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{D}^{i_\omega}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant non nul. On en déduit que  $\omega$  est admissible (1.2). Donc

$$X = \overline{\bigcup_{\omega \in A} \omega}.$$

(b) Soit  $U$  le plus grand ouvert sur lequel  $\mathcal{M}$  est holonome et  $F = X \setminus U$ . On a bien sûr  $F \subset \text{Supp}(\mathcal{M})$ . On veut montrer que  $F = \emptyset$ . Quitte à ôter à  $X$  la partie singulière de  $F$ , on peut supposer que  $F$  est lisse.

On a alors une suite exacte de  $\mathcal{D}$ -modules  $(H, \mu)$ -équivariants [Bo], VI, prop. 8.2) :

$$0 \rightarrow \Gamma_F(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow i_{U^+}(\mathcal{M}|_U)$$

où  $\Gamma_F(\mathcal{M})$  est le faisceau des sections de  $\mathcal{M}$  à support dans  $F$ . Par hypothèse  $\mathcal{M}|_U$  est holonome, donc  $i_{U^+}(\mathcal{M}|_U)$  aussi ([Bo], VII, th. 10.1). Pour montrer que  $\mathcal{M}$  est holonome, il suffit de montrer que  $\Gamma_F(\mathcal{M})$  l'est. On peut écrire, grâce à 1.3,  $\mathcal{M} = i_{F^+}(\mathcal{N})$  où  $\mathcal{N}$  est un  $\mathcal{D}^{F^+}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant qui n'est holonome sur aucun ouvert de  $F$  ([Bo], VI, lemme 7.8). On se ramène ainsi au cas où  $F = X$ .

Dans ce cas,  $\text{Supp}(\mathcal{M}) = X$ . On a alors  $\bigcup_{\omega \in A} \omega = X$ , d'après (a). Comme  $A$  est fini, il existe une orbite admissible  $\omega$  ouverte dans  $X$ . La proposition 1.2 prouve alors que le  $\mathcal{D}^{i_\omega}$ -module cohérent  $(H, \mu)$ -équivariant  $\mathcal{N} = \mathcal{M}|_\omega$  est déjà cohérent comme  $\mathcal{O}_X$ -module ([Ka], th., 4.10.2). Il est holonome, ce que contredit l'égalité  $F = X$ .

(c) Soit  $(\omega, \pi) \in \hat{A}$ . Soit  $\mathcal{M}_\pi = i_{\omega^+}(\mathcal{O}_\pi)$  : c'est un  $\mathcal{D}$ -module holonome  $(H, \mu)$ -équivariant ; en particulier il est de longueur finie. Montrons que  $\mathcal{M}$  a un unique sous  $\mathcal{D}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant (on dira « sous-module » si cela ne prête pas à confusion) simple. Comme  $\omega$  est une orbite d'un groupe algébrique, elle est localement fermée : soit  $U = X \setminus (\bar{\omega} \setminus \omega)$ ,  $\omega$  est fermée dans  $U$  et  $U$  est ouvert dans  $X$ . Notons  $j: \omega \hookrightarrow U$  l'injection. Soit  $\mathcal{N} = j_+(\mathcal{O}_\pi)$  : c'est un  $\mathcal{D}^{i_\omega}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant simple (1.3). On a  $\mathcal{M}_\pi = i_{U^+}(\mathcal{N})$ , donc  $\mathcal{M}_\pi|_U = \mathcal{N}$  et  $\mathcal{M}_\pi$  a un unique sous-quotient simple  $\mathcal{M}'$  tel que  $\mathcal{M}'|_U = \mathcal{N}$ . Soient  $\mathcal{M}_k (k=1, 2)$  deux sous modules simples de  $\mathcal{M}_\pi$ . On a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_X(\mathcal{M}_k, \mathcal{M}_\pi) &= \text{Hom}_X(\mathcal{M}_k, i_{U^+}(\mathcal{N})) \\ &= \text{Hom}_X(\mathcal{M}_k|_U, \mathcal{N}) \end{aligned}$$

où  $\text{Hom}_X$  (resp.  $\text{Hom}_U$ ) désigne l'ensemble des morphismes dans la catégorie des  $\mathcal{D}$ -modules (resp.  $\mathcal{D}^U$ -modules)  $(H, \mu)$ -équivariants. On en déduit  $\mathcal{M}_k|_U \neq 0$  d'où  $\mathcal{M}_k|_U = \mathcal{N}$  puis  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq 0$  et enfin  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 (\simeq \mathcal{M}')$ . Donc  $\mathcal{M}_\pi$  a un unique sous module simple. Notons le  $\mathcal{L}(\omega, \pi)$ .

Soient  $(\omega, \pi)$  et  $(\omega', \pi') \in \hat{A}$ . Supposons que  $\mathcal{L}(\omega, \pi)$  et  $\mathcal{L}(\omega', \pi')$  sont isomorphes. Comme  $\bar{\omega} = \text{Supp}(\mathcal{L}(\omega, \pi))$ , on a  $\bar{\omega} = \bar{\omega}'$  d'où  $\omega = \omega'$ . En outre, comme  $\mathcal{O}_\pi = i_\omega^+(\mathcal{L}(\omega, \pi))$ , on a  $\pi = \pi'$ .

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant simple, montrons qu'il existe  $(\omega, \pi) \in \hat{A}$  tel que  $\mathcal{M} \approx \mathcal{L}(\omega, \pi)$ . Par hypothèse l'ensemble  $A_{\mathcal{M}} = \{ \omega \in A \mid \omega \subset \text{Supp}(\mathcal{M}) \}$  est fini, et le (a) prouve que

$$\text{Supp}(\mathcal{M}) = \overline{\bigcup_{\omega \in A_{\mathcal{M}}} \omega},$$

donc il existe une orbite admissible  $\omega$  qui est ouverte dans  $S = \text{Supp}(\mathcal{M})$ . Soit  $U = X \setminus (S \setminus \omega)$  :  $\omega$  est fermé dans  $U$  et  $U$  est ouvert dans  $X$ . Notons  $j : \omega \hookrightarrow U$  l'injection. Le  $\mathcal{D}^U$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant  $\mathcal{N} = \mathcal{M}|_U$  a pour support  $\omega$ , il existe donc un  $\mathcal{D}^{\omega}$ -module  $(H, \mu)$ -équivariant  $\mathcal{V}$  tel que  $\mathcal{N} = j_+(\mathcal{V})$  (1.3). Il existe  $\pi$  dans  $\hat{\omega}$  tel que  $\text{Hom}_{\omega}(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\pi}) \neq 0$  (1.2). On a alors les identifications canoniques :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_X(\mathcal{M}, \mathcal{M}_{\pi}) &= \text{Hom}_X(\mathcal{M}, i_U(j_+(\mathcal{O}_{\pi}))) \\ &= \text{Hom}_U(\mathcal{M}|_U, j_+(\mathcal{O}_{\pi})) \\ &= \text{Hom}_{\omega}(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\pi}). \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{M}$  est l'unique sous module simple  $\mathcal{L}(\omega, \pi)$  de  $\mathcal{M}_{\pi}$ .

(d) Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}$ -module cohérent  $(H, \mu)$ -équivariant, montrons que  $\mathcal{M}$  est semi-simple. Pour  $\omega \in A$ , notons  $\Gamma_{\omega}(\mathcal{M})$  le faisceau des sections de  $\mathcal{M}$  à support dans  $\omega$ . Comme les orbites admissibles sont fermées et en nombre fini, on a, d'après (a),

$$\text{Supp}(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{\omega \in A} \omega$$

puis

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{\omega \in A} \Gamma_{\omega}(\mathcal{M}).$$

On peut donc supposer que  $\text{Supp}(\mathcal{M}) = \omega$  est une orbite admissible. Dans ce cas on peut écrire  $\mathcal{M} = i_{\omega+}(\mathcal{V})$  où  $\mathcal{V}$  est un  $\mathcal{D}^{\omega}$ -module cohérent  $(H, \mu)$ -équivariant;  $\mathcal{V}$  est semi-simple (1.2) donc  $\mathcal{M}$  aussi (1.3).

### 3. Foncteurs d'entrelacement.

Le théorème de Serre permet de « localiser » les  $\mathfrak{g}$ -modules annulés par un idéal primitif. Ce procédé de « localisation » dépend du choix d'une polarisation. Nous montrons dans cette partie, que des « foncteurs d'entrelacements », analogues à ceux introduits par Beilinson et Bernstein [B-B 2] dans le cas semi-simple, relie les localisés associés à des polarisations différentes.

3.1. LOCALISATION. — Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente sur  $F$ ,  $U = U(\mathfrak{g})$ ,  $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ ,  $B_{f_0}$  la forme bilinéaire sur  $\mathfrak{g} : B_{f_0}(X, Y) = f_0([X, Y])$ ,  $\mathfrak{g}(f_0)$  le noyau de  $B_{f_0}$ ,  $\Omega := G \cdot f_0$  : c'est une variété symplectique pour la 2-forme  $G$ -invariante donnée par  $B_{f_0}$  sur  $T_{f_0}(\Omega) = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f_0)$ ,  $2d := \dim(\Omega)$ ,  $I$  l'idéal primitif de  $U$  associé à l'orbite  $\Omega$  par la

bijection de Dixmier ([Di], th. 6.2.4),  $R = U/I$ ,  $\mathfrak{b}$  une polarisation en  $f_0$  (i. e. une sous algèbre de  $\mathfrak{g}$  isotrope pour  $B_{f_0}$  telle que  $2 \dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f_0)$ ),  $X := G/B$  : c'est une variété affine isomorphe à  $F^d$ ,  $\mathcal{D}_{f_0} := \mathcal{D}_{f_0, X}$  le f. h. o. d. t. sur  $X$  de paramètre  $f_0|_{\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}^*)^{\mathfrak{b}}}$  (1.1) et  $D_{f_0} = D_{f_0, X} := \Gamma(X, \mathcal{D}_{f_0})$ .

PROPOSITION 3.1 (Kirillov). — *Le morphisme d'algèbres  $U \rightarrow D_{f_0}$  qui prolonge  $\alpha$  (cf. 1.1) induit un isomorphisme  $R \simeq D_{f_0}$ .*

*Démonstration* (cf. [Ki] ou [Be 2], appendice A). — Notons  $\Gamma_X$  le foncteur « sections globales » de la catégorie des  $\mathcal{D}_{f_0}$ -modules (quasi-cohérents) dans celle des  $R$ -modules :  $\Gamma_X(\mathcal{M}) = \Gamma(X, \mathcal{M})$  et  $\Delta_X$  le foncteur « localisation » de la catégorie des  $R$ -modules dans celle des  $\mathcal{D}_{f_0}$ -modules :  $\Delta_X(M) = \mathcal{D}_{f_0} \otimes_R M$ .

Le théorème de Serre donne alors :

LEMME. — *Les foncteurs  $\Gamma_X$  et  $\Delta_X$  sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.*

3.2. FONCTEURS D'ENTRELACEMENT. — Soient  $\mathfrak{b}'$  une (autre) polarisation en  $f_0$ ,  $X' = G/B'$ ,  $\mathcal{D}_{f_0, X'}$ ,  $D_{f_0, X'}$ ,  $\Gamma_{X'}$ ,  $\Delta_{X'}$  comme ci-dessus,  $Y = G/B \cap B'$ ,  $\pi : Y \rightarrow X$  et  $\pi' : Y \rightarrow X'$  les projections naturelles,  $\mathcal{D}_{f_0, Y}$ ,  $\mathcal{D}_{f_0, Y \rightarrow X}$  et  $\mathcal{D}_{f_0, X' \leftarrow Y}$  comme en 1.3. Lorsqu'un faisceau est désigné par une lettre ronde, on note par la lettre droite correspondante les sections globales de ce faisceau (ainsi  $D_{f_0, Y \rightarrow X} = \Gamma(Y, \mathcal{D}_{f_0, Y \rightarrow X})$  est un  $(D_{f_0, Y}, D_{f_0, X})$ -bimodule). Le foncteur image inverse  $\pi^*$  est un foncteur exact sur les  $\mathcal{D}_{f_0, X}$ -modules car  $\pi$  est une application lisse. Le foncteur image directe  $\pi'_+$  est un foncteur exact à droite sur les  $\mathcal{D}_{f_0, Y}$ -modules car  $\pi'$  est une application affine (de fibre  $B'/B \cap B' \simeq F^\delta$ ); on note  $L^{-k} \pi'_+$  son  $k$ -ième foncteur dérivé à gauche.

DÉFINITION. — *On appelle foncteur d'entrelacement le foncteur  $\mathcal{I}_{X', X} = \pi'_+ \circ \pi^*$  qui envoie  $\mathcal{D}_{f_0, X}$ -modules sur  $\mathcal{D}_{f_0, X'}$ -modules.*

PROPOSITION 3.2. — *Avec les notations ci-dessus :*

(a) *Les foncteurs  $\mathcal{I}_{X', X}$  et  $\Delta_{X'} \circ \Gamma_X$  sont isomorphes.*

(b)  $\forall k \geq 1$ ,  $(L^{-k} \pi'_+) \circ \pi^* = 0$ .

Le (b) n'est pas utilisé dans la suite, il signifie que « en catégorie dérivée, le foncteur d'entrelacement est concentré en degré 0 ». Cette proposition est un analogue algébrique de [Li].

COROLLAIRE 3.3. — *Avec les notations ci-dessus, soit  $\mathfrak{b}''$  une (troisième) polarisation en  $f_0$ ,  $X'' = G/B''$ , ...*

*Alors les foncteurs  $\mathcal{I}_{X'', X}$  et  $\mathcal{I}_{X'', X'} \circ \mathcal{I}_{X', X}$  sont isomorphes.*

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{X'', X'} \circ \mathcal{I}_{X', X} &= \Delta_{X''} \circ (\Gamma_{X'} \circ \Delta_{X'}) \circ \Gamma_X \\ &= \Delta_{X''} \circ \Gamma_X \\ &= \mathcal{I}_{X'', X}. \end{aligned}$$

*Démonstration de la proposition.* — On utilise les idées de la démonstration du résultat analogue pour les groupes de Lie semi-simples ([Mi], théorème 3.16). La différence

essentielle est qu'on ne peut pas se ramener au cas où  $\dim(B'/B \cap B')=1$  (cf. remarque 5.3). On utilise à la place le fait que  $(B'/B \cap B')$  est une sous variété fermée de  $X$  (cf. lemme 3.4).

(a) Soit  $I_{X', X} = \Gamma_{X'} \circ \mathcal{I}_{X', X} \circ \Delta_X$  : c'est un foncteur de la catégorie des  $R$ -modules dans elle-même. On veut construire un isomorphisme de foncteurs

$$\text{Id} \xrightarrow{\sim} I_{X', X}.$$

Soit  $M$  un  $R$ -module, on a

$$I_{X', X}(M) = D_{f_0, X' \leftarrow Y} \otimes_{D_{f_0, Y}} D_{f_0, Y \rightarrow X} \otimes_{D_{f_0, X}} M.$$

(On a utilisé l'identification  $D_{f_0, X} \simeq R \simeq D_{f_0, X'}$ .) Remarquons que

$$D_{f_0, Y \rightarrow X} = O_Y \otimes_{O_X} D_{f_0, X}$$

contient l'élément canonique  $1 \otimes 1$  et que  $D_{f_0, X' \leftarrow Y} = \Gamma(Y, \Omega_{Y|X}^{\max}) \otimes_{O_X} D_{f_0, X'}$  contient l'élément  $\omega \otimes 1$  où  $\omega$  est une section non nulle  $G$  invariante de  $\Omega_{Y|X}^{\max}$  :  $\omega$  est unique à une constante près. Notons  $F_M$  le morphisme de  $M$  dans  $I_{X', X}(M)$  donné par  $\forall m \in M$

$$F_M(m) = (\omega \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes m.$$

On vérifie que,  $\forall u \in U$ ,  $F_M(um) = u \cdot F_M(m)$  : en effet, si on regarde  $D_{f_0, X' \leftarrow Y}$  comme un  $(D_{f_0, X'}, D_{f_0, Y})$ -bimodule et donc comme un  $(U, U)$ -bimodule via les applications  $\alpha$ , on a l'égalité  $u \cdot (\omega \otimes 1) = (\omega \otimes 1) \cdot u$ ; on a une égalité analogue avec l'élément  $1 \otimes 1 \in D_{f_0, Y \rightarrow X}$ . Donc  $F_M$  est un morphisme de  $R$ -modules. Cela définit un morphisme de foncteurs  $\text{Id} \rightarrow I_{X', X}$ .

Montrons que, pour tout  $R$ -module  $M$ ,  $F_M$  est un isomorphisme. Comme les foncteurs  $\text{Id}$  et  $I_{X', X}$  sont exacts à droite et commutent à la somme directe, il suffit de le montrer pour  $M = R$ , le  $R$ -module libre de rang 1. En effet une résolution libre  $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  donnera un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \rightarrow & L_0 & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ \downarrow F_{L_1} & & \downarrow F_{L_0} & & \downarrow F_M & & \\ I_{X', X}(L_1) & \rightarrow & I_{X', X}(L_0) & \rightarrow & I_{X', X}(M) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où  $F_{L_1}$  et  $F_{L_0}$  seront des isomorphismes et  $F_M$  sera un isomorphisme.

Supposons donc  $M = R$ . Dans ce cas, les localisés  $\Delta_{X'}(M) = \mathcal{D}_{f_0, X'}$  et  $\Delta_{X'}(I_{X', X}(M)) = \mathcal{I}_{X', X}(\mathcal{D}_{f_0, X})$  sont des  $\mathcal{D}_{f_0, X'}$ -modules avec action de  $G$  et le localisé  $\mathcal{F}_R$  du morphisme  $F_R$  est un morphisme de  $\mathcal{D}_{f_0, X'}$ -modules avec action de  $G$  (i. e. c'est un morphisme de  $\mathcal{D}_{f_0, X'}$ -modules et de  $\mathcal{O}_{X'}$ -modules  $G$ -équivariants). Il suffit donc de montrer que l'application induite sur les fibres géométriques en  $x_0 = B'/B'$  est un isomorphisme.

Soient  $Z = B'/B \cap B'$ ,  $i : x_0 \hookrightarrow X'$ ,  $j : Z \hookrightarrow Y$ ,  $i_Z : Z \hookrightarrow X$  les injections naturelles et  $p : Z \rightarrow x_0$  la projection. On a  $i_Z = \pi \circ j$  et on a le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow \pi \\ x_0 & \xrightarrow{i} & X' \end{array}$$

D'une part,

$$i^*(\mathcal{D}_{f_0, X'}) = \mathcal{O}_{x_0} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{f_0, X'}$$

où  $\mathcal{O}_{x_0} \approx \mathbb{F}$  est l'anneau des fonctions sur  $\{x_0\}$ . D'autre part :

$$\begin{aligned} i^*(\mathcal{I}_{X', X}(\mathcal{D}_{f_0, X})) &= i^*(\pi'_+(\pi^*(\mathcal{D}_{f_0, X}))) \\ &= p_+(j^*(\pi^*(\mathcal{D}_{f_0, X}))) \\ &= p_+(i_Z^*(\mathcal{D}_{f_0, X})) \\ &= p_+(\mathcal{D}_{f_0, Z \rightarrow X}) \\ &= \mathcal{D}_{f_0, x_0 \leftarrow Z} \otimes_{\mathcal{D}_{f_0, Z}} \mathcal{D}_{f_0, Z \rightarrow X}. \end{aligned}$$

On a utilisé l'égalité  $i^* \circ \pi'_+ = p_+ \circ j^*$  : c'est une conséquence du « changement de base » ([Bo], VI, théorème 8.4; ici on peut éviter de travailler en catégorie dérivée car les quatre foncteurs sont exacts à droite). Conformément à 1.3,  $\mathcal{D}_{f_0, x_0}$  est le f. o. d. t. avec action de  $B'$  sur la variété réduite à un point  $x_0 = B'/B'$  de paramètre  $f_0|_{b'} \in (b')^{B'}$  et  $\mathcal{D}_{f_0, x_0 \leftarrow Z} = \Omega_Z^{\max} \otimes_{\mathcal{O}_{x_0}} \mathcal{D}_{-f_0, x_0} (\simeq \Omega_Z^{\max})$  est un  $\mathcal{D}_{f_0, Z}$ -module à droite simple.

On remarque alors sur ces formules que les fibres géométriques sont des  $\mathbb{R}$ -modules à droite [la proposition 1.2 prouve seulement que ce sont des  $(\mathfrak{g}, B')$ -modules  $f_0$ -tordus] et qu'on a les identifications de  $\mathbb{R}$ -modules à droite :

$$\begin{aligned} i^*(\mathcal{D}_{f_0, X'}) &\simeq \Gamma(X', i_+(\mathcal{O}_{x_0})) \\ i^*(\mathcal{I}_{X', X}(\mathcal{D}_{f_0, X})) &\simeq \Gamma(X, i_{Z+}(\mathcal{D}_{f_0, x_0 \leftarrow Z})). \end{aligned}$$

Comme  $i$  et  $i_Z$  sont des immersions fermées (cf. lemme 3.4 ci-dessous), ces  $\mathbb{R}$ -modules sont simples et non nuls d'après 1.3. Le morphisme de  $\mathbb{R}$ -modules à droite  $i^*(\mathcal{F}_R)$  est donné, avec ces identifications, par  $\forall r \in \mathbb{R} (\simeq \mathcal{D}_{f_0, X'} \simeq \mathcal{D}_{f_0, X})$

$$i^*(\mathcal{F}_R)(1 \otimes r) = (\omega|_Z \otimes 1) \otimes (1 \otimes r)$$

où  $\omega|_Z \in \Gamma(Z, \Omega_Z^{\max})$  est la restriction à  $Z$  de  $\omega$ . Il est non nul, c'est donc un isomorphisme.

(b) Supposons par l'absurde qu'il existe  $k \geq 1$  et  $\mathcal{M}_0$  un  $\mathcal{D}_{f_0, X}$ -module tel que  $(L^{-k} \pi_+)(\pi^* \mathcal{M}_0) \neq 0$ . Soit  $k_0 \geq 1$ , le plus petit entier pour lequel un tel module  $\mathcal{M}_0$  existe. Si  $k_0 \neq 1$  alors le foncteur  $\mathcal{M} \rightarrow (L^{-k_0+1} \pi_+)(\pi^* \mathcal{M})$  est nul; si  $k_0 = 1$  alors ce foncteur est exact d'après (a); dans les deux cas, on en déduit que le foncteur  $\mathcal{M} \rightarrow (L^{-k_0} \pi_+)(\pi^* \mathcal{M})$  est exact à droite. Soit  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{D}_{f_0, X}$ -module libre tel que  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_0 \rightarrow 0$ , alors  $(L^{-k_0} \pi_+)(\pi^* \mathcal{L}) \neq 0$ . On peut donc supposer  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}_{f_0, X}$ .

Soient  $\Omega_{Y|X}^\bullet$  le complexe (de de Rham) des faisceaux des formes différentielles relatives et  $\Omega_Z^\bullet = j^*(\Omega_{Y|X}^\bullet)$  celui des formes différentielles sur  $Z$ . On a l'égalité ([Bo], VI, 5.3)

$$L^{-k} \pi_+ (\pi^* (\mathcal{D}_{f_0, X})) = h^{\delta-k} (\pi' (\Omega_{Y|X}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi^* (\mathcal{D}_{f_0, X})))$$

où  $h^i$  est la cohomologie du complexe en degré  $i$ . Ce complexe est un complexe de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $G$ -équivariants. Il suffit donc de démontrer que  $i^*(L^{-k} \pi_+ (\pi^* (\mathcal{D}_{f_0, X}))) = 0$ ,  $\forall k \geq 1$ . Or,  $i^*$  est un foncteur exact dans la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules  $G$ -équivariant, on a donc :

$$\begin{aligned} i^*(L^{-k} \pi_+ (\pi^* \mathcal{D}_{f_0, X})) &= h^{\delta-k} (i^*(\pi' (\Omega_{Y|X}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi^* (\mathcal{D}_{f_0, X})))) \\ &= h^{\delta-k} (p. (j^*(\Omega_{Y|X}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi^* (\mathcal{D}_{f_0, X})))) \\ &= h^{\delta-k} (p. (\Omega_Z^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_Z} j^*(\pi^* (\mathcal{D}_{f_0, X})))) \\ &= h^{\delta-k} (p. (\Omega_Z^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}_{f_0, X})) \\ &= (L^{-k} p_+) (\mathcal{D}_{f_0, Z \rightarrow X}) \\ &= 0, \quad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

car  $\mathcal{D}_{f_0, Z \rightarrow X}$  est un  $\mathcal{D}_{f_0, Z}$ -module localement libre ([Bo], VI, 7.3).

LEMME 3.4. — Soient  $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$  deux sous algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$ , alors l'immersion naturelle  $K_1/K_1 \cap K_2 \hookrightarrow G/K_2$  est fermée.

Démonstration. — C'est classique : on peut trouver une base  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $\mathfrak{g}$  et  $i_1 < \dots < i_s \leq l \leq r$  tels que,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\mathfrak{g}_i := FX_{i+1} \oplus \dots \oplus FX_n$  est une sous algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{g}_l$  et  $\mathfrak{k}_1 = FX_{i_1} \oplus \dots \oplus FX_{i_s} \oplus \mathfrak{g}_r$ . Alors on a un isomorphisme  $\Phi : F^l \rightarrow G/K_2$  donné par  $\Phi(t_1, \dots, t_l) = \exp(t_1 X_1) \dots \exp(t_l X_l) K_2$  et

$$\Phi^{-1}(K_1/K_1 \cap K_2) = \{(t_1, \dots, t_l) \mid \forall k \neq i_1, \dots, i_s, \text{ on a } t_k = 0\} \approx F^s.$$

#### 4. Géométrie des orbites.

4.1. ON RASSEMBLE DANS CETTE PARTIE QUELQUES LEMMES GÉOMÉTRIQUES. — Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente sur  $F$ ,  $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{b}$  une polarisation en  $f_0$ ,  $\Omega = G f_0$ ,  $p : \Omega \rightarrow X = G/B$  la projection canonique :  $\forall g \in G$   $p(g.f_0) = gB$ ,  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{k}$  une sous-algèbre subordonnée à  $f$  (i. e.  $f|_{\mathfrak{k}, \mathfrak{h}} = 0$ ). On note

$$\forall \mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{s}^\perp := \{f' \in \mathfrak{g}^* \mid f'(\mathfrak{s}) = 0\}, \quad \mathfrak{s}^B f_0 := \{X \in \mathfrak{g} \mid f_0([X, \mathfrak{s}]) = 0\},$$

$\text{Ad}$  et  $\text{Ad}^*$  les actions adjointes et coadjointes de  $G$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^*$  et,  $\forall g \in G$ ,  $\mathfrak{b}_g := \text{Ad}(g) \mathfrak{b}$  : c'est une polarisation en  $g.f_0 := \text{Ad}^*(g).f_0$ .

On pose  $Z = \Omega \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$  : c'est une sous variété algébrique stable par  $K$ .

LEMME 4.1. — Avec ces notations :

$$(a) p(Z) = \{g \in \mathbf{B} \mid (gf_0 - f)|_{\mathfrak{f} \cap \mathfrak{b}_g} = 0\}.$$

(b) Soit  $f_1 = g \cdot f_0 \in Z$ . Alors :

$$(\alpha) \{f' \in Z \mid p(f') = p(f_1)\} = f_1 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}_g)^\perp.$$

(\beta)  $\Lambda := \mathbf{K} \cdot (f_1 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}_g)^\perp)$  est une sous variété lagrangienne, irréductible, lisse et fermée incluse dans  $Z$ . Son espace tangent est  $T_{f_1}(\Lambda) = (\mathfrak{f}^{\mathbf{B}f_1} \cap (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}_g))^\perp$ .

Démonstration. — (a) Soient  $E = \{g \in \mathbf{G} \mid g \cdot f_0 - f \in \mathfrak{f}^\perp\}$  et  $F = \{g \in \mathbf{G} \mid gf_0 - f \in (\mathfrak{f} \cap \mathfrak{b}_g)^\perp\}$ . On veut montrer  $F = E \cdot \mathbf{B}$ .

Soit  $g \in F$ , l'égalité  $(\mathfrak{f} \cap \mathfrak{b}_g)^\perp = \mathfrak{f}^\perp + \mathfrak{b}_g^\perp$  prouve qu'il existe  $f' \in \mathfrak{b}_g^\perp$ ,  $f'' \in \mathfrak{f}^\perp$  tel que  $gf_0 - f = f' + f''$ . Comme  $\mathbf{B}f_0 = f_0 + \mathfrak{b}^\perp$  ([B-C-D...], prop. 3.1.7), il existe  $b \in \mathbf{B}$  tel que  $g(bf_0 - f_0) = -f'$  d'où  $gbf_0 - f = f'' \in \mathfrak{f}^\perp$  et  $gb \in E$ .

Réciproquement, soient  $g \in E$  et  $b \in \mathbf{B}$ , alors  $gbf_0 - f = g(bf_0 - f_0) + gf_0 - f \in \mathfrak{b}_g^\perp + \mathfrak{f}^\perp$  donc  $gb \in F$ .

(b) On peut supposer  $f_1 = f_0 \in Z$ .

$$(\alpha) \{f' \in Z \mid p(f') = p(f_0)\} = Z \cap \mathbf{B}f_0 = (f_0 + \mathfrak{f}^\perp) \cap \mathbf{B}f_0 = f_0 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b})^\perp.$$

(\beta) Remarquons que  $f_0 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b})^\perp$  est stable sous  $\mathbf{K} \cap \mathbf{B}$ . L'application

$$j: \mathbf{K} \times_{\mathbf{K} \cap \mathbf{B}} (f_0 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b})^\perp) \rightarrow \mathbf{G} \cdot f$$

donnée par  $j(k, f') = k \cdot f'$  est une immersion fermée : elle est la composée :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{K} \times_{\mathbf{K} \cap \mathbf{B}} (f_0 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b})^\perp) & \xrightarrow{j_1} & \mathbf{K} \times_{\mathbf{K} \cap \mathbf{B}} (f_0 + \mathfrak{b}^\perp) & \xrightarrow{j_2} & \mathbf{G} \times_{\mathbf{B}} (f_0 + \mathfrak{b}^\perp) & \xrightarrow{j_3} & \mathbf{G} \cdot f_0 \\ (k, f') & \rightarrow & (k, f') & \rightarrow & (k, f') & \rightarrow & k \cdot f' \end{array}$$

où  $j_1$  est fermée car  $f_0 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b})^\perp$  est fermée dans  $f_0 + \mathfrak{b}^\perp$ ,  $j_2$  est fermée d'après le lemme 3.4 et  $j_3$  est un isomorphisme. En particulier, son image  $\Lambda$  est une sous variété fermée lisse irréductible de  $\Omega$  et on a l'égalité de sous espace de  $\mathfrak{g}^*$  :

$$T_{f_0}(\Lambda) = \mathfrak{f} \cdot f_0 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b})^\perp = (\mathfrak{f}^{\mathbf{B}f_0} \cap (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}))^\perp = (\mathbf{W}^{\mathbf{B}f_0})^\perp$$

avec

$$\mathbf{W} := \mathfrak{f} + (\mathfrak{f}^{\mathbf{B}f_0} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{f}^{\mathbf{B}f_0} \cap (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}) = \mathbf{W}^{\mathbf{B}f_0}$$

car  $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{f}^{\mathbf{B}f_0}$  et  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{\mathbf{B}f_0}$ .

Le sous espace  $\mathbf{W}$  est lagrangien pour  $\mathbf{B}f_0$ , donc  $T_{f_0}(\Lambda)$  est un sous-espace lagrangien de  $T_{f_0}(\Omega)$  :  $\Lambda$  est lagrangienne.

Les inclusions  $\mathbf{K}f_1 \subset \Lambda \subset Z$  prouvent que  $Z$  est une variété coïso trope ([Gi]) et que les  $\mathbf{K}$ -orbites de  $Z$  sont des sous variétés isotropes. Les lemmes suivants étudient les cas

d'égalités :

LEMME 4.2. — Avec ces notations. Soient  $C$  une composante irréductible de  $Z$  et  $f_1 = g f_0 \in C$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i)  $\dim C = \frac{1}{2} \dim \Omega$ .

(ii)  $p(C) = K.p(f_1)$ .

(iii)  $C = K(f_1 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}_g)^\perp)$ .

(iv)  $C = p^{-1}(K.p(f_1)) \cap Z$ .

Dans ce cas  $C$  est une variété lagrangienne lisse et  $p(C)$  est fermée.

Démonstration. — (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Soient  $f' = g' f_0$  un point lisse de  $Z$  tel que  $f' \in C$  et  $\Lambda = K.(f' + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}_{g'})^\perp)$ .  $\Lambda$  est une sous variété fermée et irréductible de  $Z$  donc  $\Lambda \subset C$  puis  $\Lambda = C$  car  $\Lambda$  et  $C$  ont même dimension. En particulier  $p(C) = p(\Lambda)$  est une  $K$ -orbite (et est donc fermée : lemme 3.4).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : On a  $C \subset p^{-1}(K.p(f_1)) \cap Z = K(p^{-1}(p(f_1)) \cap Z) = K.(f_1 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}_g)^\perp) = \Lambda$ . Comme  $C$  est coisotrope et que  $\Lambda$  est lagrangienne et irréductible, on a  $C = \Lambda$ . En particulier  $C$  est lisse.

(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) : résulte de 4.1. b  $\alpha$ ).

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : résulte de 4.1. b  $\beta$ ).

COROLLAIRE 4.3. — Avec ces notations. On a l'équivalence :

(i)  $Z$  est lagrangienne.

(ii)  $p(Z)$  est une réunion finie de  $K$ -orbites.

La projection  $p$  met alors en bijection les composantes irréductibles de  $Z$  et les  $K$ -orbites de  $p(Z)$ .

Démonstration :

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : clair,

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : écrivons

$$p(Z) = \bigcup_{i=1}^n K.p(f_i) \quad \text{avec } f_i = g_i f_0 \in Z.$$

Alors

$$Z = \bigcup_{i=1}^n p^{-1}(K.p(f_i)) \cap Z = \bigcup_{i=1}^n K.(f_i + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}_{g_i})^\perp)$$

est lagrangienne.

COROLLAIRE 4.4. — Avec ces notations. Supposons que  $f_0$  appartient à une composante irréductible  $\Lambda$  de  $Z$  qui est lagrangienne. Soit  $b'$  une (autre) polarisation en  $f_0$  telle que



$\dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}') = 1$ , alors

$$\dim((\mathfrak{f} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'))/(\mathfrak{f} \cap (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'))) = 1.$$

*Démonstration.* — On a  $(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')^{\mathfrak{B}_{f_0}} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$  donc  $\mathfrak{B}_{f_0}$  induit sur l'espace vectoriel de dimension 2 :  $(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')$  une forme bilinéaire non dégénérée; l'image  $i$  de  $\mathfrak{f} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')$  dans cet espace est isotrope donc  $\dim i \leq 1$ .

Supposons que cette inégalité est stricte. On a alors

$$(*) \quad \mathfrak{f} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$$

d'où  $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{f}^{\mathfrak{B}_{f_0}} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')$ . On peut donc trouver  $X \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{f}^{\mathfrak{B}_{f_0}}$  tel que  $X \notin \mathfrak{b}'$ . Puisque  $\Lambda$  est lagrangienne, on a les égalités

$$\Lambda = \mathbf{K}(f_0 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b})^\perp) = \mathbf{K}(f_0 + (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}')^\perp)$$

[lemme 4.2 (iii)] puis

$$T_{f_0}(\Lambda) = (\mathfrak{f}^{\mathfrak{B}_{f_0}} \cap (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}))^\perp = (\mathfrak{f}^{\mathfrak{B}_{f_0}} \cap (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}'))^\perp$$

(lemme 4.1.b), d'où

$$\mathfrak{f}^{\mathfrak{B}_{f_0}} \cap (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{f}^{\mathfrak{B}_{f_0}} \cap (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}').$$

On en déduit  $X \in \mathfrak{b} \cap (\mathfrak{f} + \mathfrak{b}') \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$  d'après (\*). Contradiction. Donc  $\dim i = 1$ .

LEMME 4.5. — *Reprenons les notations du lemme 4.2 : Soient C une composante irréductible de Z et  $f_1 = g f_0 \in C$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\dim C = 1/2 \dim \Omega$  et l'intersection  $\Omega \cap (f + \mathfrak{f}^\perp)$  est transverse en  $f_1$ ;
- (ii)  $C = \mathbf{K}f_1$ ;
- (iii)  $\dim \mathbf{K}f_1 = 1/2 \dim \Omega$ ;
- (iv)  $2 \dim (g(f_1) + \mathfrak{f}) = \dim g + \dim g(f_1)$ .

*Démonstration* (cf. [Fu]). — On peut supposer  $f_1 = f_0$ .

(i)  $\Rightarrow$  (iv) : Par hypothèse on a,  $T_{f_0}(C) = T_{f_0}(\Omega) \cap T_{f_0}(f_0 + \mathfrak{f}^\perp) = (g(f_0) + \mathfrak{f})^\perp$  et  $\dim T_{f_0}(C) = 1/2 \dim \Omega$ . On en déduit  $\dim g - \dim (g(f_0) + \mathfrak{f}) = 1/2 (\dim g - \dim g(f_0))$  c'est l'égalité cherchée;

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : c'est clair;

(iv)  $\Rightarrow$  (i) et (ii) : Par hypothèse  $g(f_0) + \mathfrak{f}$  est lagrangienne pour  $\mathfrak{B}_{f_0}$  on a donc

$$\begin{aligned} (g(f_0) + \mathfrak{f})^\perp &= (\mathfrak{f}^{\mathfrak{B}_{f_0}})^\perp = T_{f_0}(\mathbf{K}f_0) \subset T_{f_0}(\Omega \cap (f + \mathfrak{f}^\perp)) \\ &\subset T_{f_0}(\Omega) \cap T_{f_0}(f + \mathfrak{f}^\perp) = g(f_0)^\perp \cap \mathfrak{f}^\perp = (g(f_0) + \mathfrak{f})^\perp. \end{aligned}$$

Donc ces inclusions sont des égalités. On en déduit, d'une part que  $\dim \mathbf{K}f_0 = \dim C$  puis  $\mathbf{K}f_0 = C$  et  $\dim C = 1/2 \dim \Omega$  et d'autre part que l'intersection  $\Omega \cap (f + \mathfrak{f}^\perp)$  est transverse en  $f_0$ .

(ii) → (iii) : La variété  $Kf_1 = C$  est à la fois isotrope et coïsothrope, elle est donc lagrangienne.

4.2. EXEMPLES. — Donnons divers exemples qui éclairent la géométrie de  $Z$ . Dans ces exemples  $\mathfrak{g}$  a pour base  $(e_i)_{i=1, \dots, N}$ . On note  $e_i e_j$  pour  $[e_i, e_j]$  et on ne donne que les crochets  $e_i e_j$  non nuls avec  $i < j$ .

(a)  $Z$  peut être lagrangienne et contenir une infinité de  $K$ -orbites.

$N=4$ ; avec  $e_1 e_2 = e_3, e_1 e_3 = e_4; f = f_0 = e_4^*$  et  $\mathfrak{f} = F e_2$ .

On a  $\Omega = \{(x_1, x_3) : = x_3 e_1^* + (1/2) x_1^2 e_2^* - x_1 e_3^* + e_4^*\} \simeq F^2, Z = \{(0, x_3)\} \simeq F$  et l'action de  $K$  sur  $Z$  est triviale.

(b)  $p(Z)$  n'est pas forcément localement fermé.

$N=5$ ; avec  $e_1 e_2 = e_4, e_1 e_4 = e_5, e_2 e_3 = e_5; f = f_0 = e_5^*, \mathfrak{b} = F e_1 \oplus F e_3 \oplus F e_5$  et  $\mathfrak{f} = F e_1$ .

On a

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : = x_4 e_1^* + (x_3 + (1/2) x_1^2) e_2^* - x_2 e_3^* - x_1 e_4^* + e_5^*\} \simeq F^4,$$

$$Z = \{(x_1, x_2, x_3, 0)\} \simeq F^3, G/B \simeq \{(t_2, t_4) : = \exp(t_2 e_2) \exp(t_4 e_4) B\} \simeq F^2$$

et  $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_4 + x_1 x_2)$ . Donc  $p(Z) = \{(t_2, t_4) | t_2 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ .

(c)  $Z$  n'est pas forcément lisse [Fu].

$N=6$ ; avec  $e_1 e_3 = e_4, e_1 e_5 = e_6, e_2 e_3 = e_5, e_2 e_4 = e_6; f = f_0 = e_6^*$  et  $\mathfrak{f} = F e_3$ .

On a

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_4, x_5) : = x_5 e_1^* + x_4 e_2^* + x_1 x_2 e_3^* - x_2 e_4^* - x_1 e_5^* + e_6^*\} \simeq F^4$$

et  $Z = \{(x_1, x_2, x_4, x_5) | x_1 x_2 = 0\}$ .

(d) On peut avoir  $Z = Z_1 \cup Z_2$  avec  $Z_1$  lagrangienne et  $Z_2$  pas.

$N=7$ ; avec  $e_1 e_3 = e_4, e_1 e_5 = 2 e_6, e_1 e_6 = e_7, e_2 e_3 = e_6, e_2 e_4 = e_7; f_0 = f = e_7^*$  et  $\mathfrak{f} = F(e_3 + e_4) \oplus F(e_5 + e_6)$ .

On a  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_4, x_6) : = x_6 e_1^* + x_4 e_2^* + x_1 x_2 e_3^* - x_2 e_4^* + x_1^2 e_5^* - x_1 e_6^* + e_7^*\} \simeq F^4$  et  $Z = Z_1 \cup Z_2$  où  $Z_1 = \{(0, 0, x_4, x_6)\} \simeq F^2$  est une  $K$ -orbite et  $Z_2 = \{(1, x_2, x_4, x_6)\} \simeq F^3$  n'est pas lagrangienne.

### 5. Modules simples associés à une composante lagrangienne

Le but de cette partie est d'associer à chaque composante lagrangienne  $\Lambda$  de  $Z$  un  $\mathfrak{g}$ -module simple  $M_\Lambda$ . On relie en 5.4 ces modules avec ceux introduits dans [Be].

5.1. CONSTRUCTION DU MODULE SIMPLE  $M_\Lambda$ . — Gardons les notations de 3 et 4 et celles de 2 avec  $X = G/B, \mathcal{D} = \mathcal{D}_{f_0, X}, H = K$  et  $\mu = f$  (plus précisément  $\mu = f|_t$ ).

LEMME 5.1. —  $p(Z)$  est la réunion des  $K$ -orbites admissibles de  $X$ .

Démonstration. — C'est une reformulation du lemme 4.2. (a).

Pour chaque  $K$ -orbite  $\omega$  de  $p(Z)$ , on note  $i_\omega : \omega \rightarrow X$  l'injection,  $\mathcal{M}_\omega = i_{\omega+}(\mathcal{O}_\omega)$  : l'unique  $\mathcal{D}_{f_0, X}$ -module  $(K, f)$ -équivariant simple de support  $\omega$  et  $M_\omega = \Gamma_X(\mathcal{M}_\omega)$ .

PROPOSITION 5.2. — *Avec ces notations, soient  $\Lambda$  une composante irréductible de  $Z$  que l'on suppose lagrangienne et  $\omega$  la  $K$ -orbite  $p(\Lambda)$  alors le  $\mathfrak{g}$ -module  $M_\omega$  ne dépend pas du choix de la polarisation  $\mathfrak{b}$ .*

On note  $M_\Lambda$  ce module.

Montrons tout d'abord quelques lemmes.

### 5.2. POLARISATIONS ADJACENTES.

DÉFINITION. — *Deux polarisations  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$  en  $f_0$  sont dites adjacentes si  $\dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}') = 1$ .*

LEMME 5.3. — *Soient  $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ ,  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$  deux polarisations en  $f_0$ , alors il existe une suite  $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}'$  de polarisations en  $f_0$  telles que  $\forall i = 1, \dots, r, (\mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{b}_i)$  sont adjacentes.*

Remarque. — On a  $r \geq \dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')$ . Mais il n'existe pas toujours de suite pour laquelle on ait l'égalité : prendre pour  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  les deux polarisations  $\mathfrak{b}_1$  et  $\mathfrak{b}_2$  dans l'exemple de ([Be], Appendice A).

Démonstration. — On procède par récurrence sur  $\dim \mathfrak{g}$ . Soient  $\mathfrak{z}$  le centre de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z} \cap \text{Ker } f_0$ .

Si  $\mathfrak{z}_0 \neq 0$ , on applique le résultat à  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$ .

Si  $\mathfrak{z}_0 = 0$ , on a  $\mathfrak{z} = \text{FZ}$  avec  $f_0(Z) = 1$ . Soit  $Y \in C_2(\mathfrak{g}) \setminus \mathfrak{z}$  où  $C_i(\mathfrak{g})$  est le  $i$ -ième terme de la suite centrale ascendante, et  $\mathfrak{g}' = \{T \in \mathfrak{g} \mid [T, Y] = 0\}$  : c'est un idéal de codimension un de  $\mathfrak{g}$ . Si  $Y \notin \mathfrak{b}$ , alors  $\mathfrak{b}_1 = \text{FY} \oplus (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}')$  est une polarisation en  $f_0$  et  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1)$  sont adjacentes. On peut donc supposer  $Y \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ . On a alors  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}'$  et  $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{g}'$ . Soient  $f'_0 = f_0|_{\mathfrak{g}'}$ , on a  $\mathfrak{g}'(f'_0) = \mathfrak{g}(f_0) \oplus \text{FY}$ , donc  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  sont des polarisations en  $f'_0$ .

On applique alors le résultat à  $\mathfrak{g}'$  pour conclure.

LEMME 5.4. — (a) *Soient  $f_0 \in \mathfrak{g}^*$  et  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$  deux polarisations en  $f_0$  adjacentes, alors  $\mathfrak{d} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  et  $[\mathfrak{d}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ .*

(b) *Soient  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{f}$  une sous-algèbre subordonnée à  $f$  telle que  $f_0$  appartient à une composante irréductible lagrangienne  $\Lambda$  de  $Z = \text{G} \cdot f_0 \cap (f + \mathfrak{f}^\perp)$ , alors on est dans une et une seule des trois situations suivantes :*

(i)  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{f} \not\subset \mathfrak{b}'$ .

(ii)  $\mathfrak{b}' \cap \mathfrak{f} \not\subset \mathfrak{b}$ .

(iii)  $\exists \mathfrak{b}''$  polarisation en  $f_0$  telle que  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'')$  et  $(\mathfrak{b}'', \mathfrak{b}')$  sont adjacentes,  $\mathfrak{b}'' \cap \mathfrak{f} \not\subset \mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'' \cap \mathfrak{f} \not\subset \mathfrak{b}'$ .

Démonstration. — (a) Écrivons  $\mathfrak{b} = \text{FX} \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$  et  $\mathfrak{b}' = \text{FY} \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ . Montrons tout d'abord que  $[\text{X}, \text{Y}] \in \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ . Comme  $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')^{\text{B}f_0}$ , il suffit de voir que,  $\forall Z \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ , on a  $f_0([\text{X}, \text{Y}], Z) = 0$ . Or  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$  est un idéal de  $\mathfrak{b}$ , donc  $[\text{X}, Z] \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ , d'où  $f_0([\text{X}, Z], \text{Y}) \in f_0([\mathfrak{b}', \mathfrak{b}']) = 0$ . De même  $f_0([\text{X}, [\text{Y}, Z]]) = 0$ . On en déduit l'égalité cherchée grâce à l'identité de Jacobi.

Donc  $\mathfrak{d}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  sont des sous-algèbres de codimension un de  $\mathfrak{d}$ , on a  $[\mathfrak{d}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ .

(b) Écrivons  $\dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{f}) = \dim(\mathfrak{b}' \cap \mathfrak{f}) + \delta$  avec  $\delta \in \{-1, 0, 1\}$ . Dans le cas (i), on peut écrire  $\mathfrak{b} = \text{FX} \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$  avec  $X \in \mathfrak{f}$ ; donc  $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{b}' \subset (\text{FX})^{\mathfrak{b}'_0} \cap \mathfrak{b}' = (\text{FX} + \mathfrak{b}')^{\mathfrak{b}'_0} \subset \mathfrak{b}^{\mathfrak{b}'_0} = \mathfrak{b}$  et  $\delta = 1$ . Dans le cas (ii), on a  $\delta = -1$  et dans le cas (iii) on a  $\delta = 0$ . Donc ces trois cas s'excluent mutuellement.

Supposons qu'on n'est ni dans le cas (i) ni dans le cas (ii) : on a  $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ . Soit  $\mathfrak{b}'' = (\mathfrak{f} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')$ , on a  $f_0([\mathfrak{b}'', \mathfrak{b}'']) = 0$  et  $\dim \mathfrak{b}'' = \dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}') + 1$  (corollaire 4.4) donc  $\mathfrak{b}''$  est une polarisation en  $f_0$ . On a  $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{b}'' \not\subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$  donc  $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{b}'' \not\subset \mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{b}'' \not\subset \mathfrak{b}'$ .

5.3. INDÉPENDANCE DE LA POLARISATION.

*Démonstration de la proposition 5.2.* — On peut supposer  $f_0 \in \Lambda$ . Soient  $\mathfrak{b}'$  une (autre) polarisation en  $f_0$ ,  $X' = G/B'$ ,  $\mathcal{D}_{f_0, X'}$ ,  $\mathcal{I}_{X', X}$  comme en 3.2,  $p' = \Omega \rightarrow G/B'$ ,  $\omega' = p'(\Lambda)$ ,  $i_{\omega'}$ ,  $\mathcal{O}_{\omega'}$ ,  $\mathcal{M}_{\omega'}$ ,  $M_{\omega'}$  comme ci-dessus. Il suffit de montrer d'après la proposition 3.2 l'égalité  $\mathcal{I}_{X', X}(\mathcal{M}_{\omega}) = \mathcal{M}_{\omega'}$ .

Les deux lemmes ci-dessus permettent de supposer que  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  sont adjacentes et que  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{f} \not\subset \mathfrak{b}'$ . Dans ce cas : soient  $\pi : Y = G/B \cap B' \rightarrow X = G/B$  et  $\pi' : Y \rightarrow X'$  les projections naturelles et  $\bar{\omega} = \pi^{-1}(\omega) \simeq K/K \cap B \cap B' \simeq K/K \cap B'$  [en effet, les lemmes 5.4 et 3.5 prouvent que  $K/K \cap B \cap B'$  est ouvert et fermé dans  $\pi^{-1}(\omega)$ ]. La restriction de  $\pi'$  à  $\bar{\omega}$  induit un isomorphisme noté  $\sigma'$  de  $\bar{\omega}$  sur  $\omega'$  et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\omega} & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \pi \\ \omega & \xrightarrow{i_{\omega}} & X \end{array}$$

est cartésien et la formule du changement de base donne alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{X', X}(\mathcal{M}_{\omega}) &= \pi'_+ \circ \pi^*(i_{\omega+}(\mathcal{O}_{\omega})) \\ &= (\pi'_+ \circ j_+)(\sigma^*(\mathcal{O}_{\omega})) \\ &= i_{\omega'+} \circ \sigma'_+(\mathcal{O}_{\bar{\omega}}) \\ &= i_{\omega'+}(\mathcal{O}_{\omega'}) \\ &= \mathcal{M}_{\omega'}. \end{aligned}$$

5.4. CONSTRUCTION PAR RÉCURRENCE DE  $M_{\omega}$ . — Soit  $\omega$  une K-orbite admissible de  $G/B$ . Le seul but de ce paragraphe est de démontrer que les modules  $M_{\omega}$  coïncident avec ceux introduits dans [Be], § 3 (notre « paramètre  $\omega$  » est la projection dans  $G/B$  du « paramètre  $\omega$  de [Be] » qui lui est une K-orbite dans  $Z$ ) et donc que ceux-ci ne dépendent pas de la polarisation choisie pour leur construction lorsque  $\omega$  est la projection  $p(\Lambda)$  d'une composante irréductible lagrangienne de  $Z$ . (On peut donner de cette dernière affirmation une démonstration directe basée sur les lemmes 5.3 et 5.4.)

Soient  $\mathfrak{g}_1$  un idéal de codimension 1 de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{b}$ ,  $U_1 = U(\mathfrak{g}_1)$ ,  $f_1 = f_0|_{\mathfrak{g}_1}$ ,  $I_1$  l'idéal primitif associé à  $G_1 f_1$ ,  $i_1 : X_1 = G_1/B \hookrightarrow X = G/B$  l'injection canonique.

LEMME 5.5. — Avec ces notations. Soient  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_{f, X}$ -module,  $\mathcal{M}_1$  un  $\mathcal{D}_{f_1, X_1}$ -module,  $M := \Gamma_X(\mathcal{M})$  et  $M_1 := \Gamma_{X_1}(\mathcal{M}_1)$ . Alors :

- (a)  $\Gamma_X(i_{1+}(\mathcal{M}_1)) = U \otimes_{U_1} M_1$ .  
 (b)  $\Gamma_X(i_1^*(\mathcal{M})) = M/I_1 M$ .

Démonstration. — Il suffit de montrer que  $D_{f, X_1 \rightarrow X} \simeq U/I_1 U$  comme  $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g})$ -bimodules.

Pour cela, écrivons  $\mathfrak{g} = FT \oplus \mathfrak{g}_1$  d'où un isomorphisme :

$$\begin{aligned} F \times X_1 &\xrightarrow{\sim} X \\ (t, x_1) &\rightarrow (\text{expt } T) \cdot i_1(x_1). \end{aligned}$$

Ceci permet d'identifier les algèbres (lemme A3 de [Be]) :

$$\begin{aligned} U/I &\simeq D_{f_0, X} &\simeq A_1 \otimes D_{f_1, X_1} && \text{où } A_1 = F \langle t, \partial_t \rangle \\ T &\rightarrow & -\partial_t \otimes 1 \\ u_1 &\rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \otimes (\text{ad } T)^n(u_1), \quad \forall u_1 \in U_1. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que, avec cette identification, on a l'égalité  $I_1 U/I \simeq t A_1 \otimes D_{f_1, X_1}$ . L'inclusion  $\subset$  est claire car tout élément  $u_1$  de  $I_1$  est nul dans  $D_{f_1, X_1}$ . L'inclusion  $\supset$  résulte de l'existence d'un élément  $u_0$  de  $I_1$  dont l'image dans  $D_{f_0, X}$  est  $t \otimes 1$  (corol. A3 de [Be]).

Si  $N$  est un  $\mathfrak{g}$ -module, on note  $\Gamma_f^0(\mathfrak{f}, N) = \{n \in N \mid \exists p \geq 1 \text{ tel que } (\mathfrak{f}^f)^p \cdot n = 0\}$ , c'est un sous- $\mathfrak{g}$ -module de  $N$ .

COROLLAIRE 5.6. — Avec ces notations; soient  $\omega$  une  $K$ -orbite admissible de  $X$ ,  $\omega_1 := i_1^{-1}(\omega)$  : c'est une  $K_1 (= K \cap G_1)$ -orbite admissible de  $X_1$ ,  $M_\omega := \Gamma_X(i_{\omega+}(\mathcal{O}_\omega))$  et  $M_{\omega_1} := \Gamma_{X_1}(i_{\omega_1+}(\mathcal{O}_{\omega_1}))$ .

- (a) Si  $\mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{f}$  alors  $M_\omega = U \otimes_{U_1} M_{\omega_1}$ .  
 (b) Si  $\mathfrak{g}_1 \not\supset \mathfrak{f}$  alors  $M_\omega = \Gamma_f^0(\mathfrak{f}, \text{Hom}_{U_1}(U, M_{\omega_1}))$ .

Ceci permet de construire le module  $M_\omega$  par récurrence sur  $\dim X$ .

Démonstration. — (a) Dans ce cas  $\mathcal{M}_\omega = i_{1+}(\mathcal{M}_{\omega_1})$ .

(b) Dans ce cas  $\mathcal{M}_{\omega_1} = i_1^*(\mathcal{M}_\omega)$  et le foncteur  $\mathcal{N} \rightarrow i_1^*(\mathcal{N})$  est une équivalence entre la catégorie des  $\mathcal{D}_{f_0, X}$ -modules  $(K, f_0)$ -équivariants et celle des  $\mathcal{D}_{f_1, X_1}$ -modules  $(K_1, f_1)$ -équivariants ([B-B-3], 1.3). Soit  $M' = \Gamma_f^0(\mathfrak{f}, \text{Hom}_{U_1}(U, M_{\omega_1}))$ ; il suffit donc de montrer que les  $\mathfrak{g}_1$ -modules  $M_{\omega_1}$  et  $M'/I_1 M'$  sont isomorphes. Écrivons  $\mathfrak{g} = FT \oplus \mathfrak{g}_1$  et soit  $a = f_0(T)$ ; comme  $(D_{f_0, X} \simeq A_1 \otimes D_{f_1, X_1})$ -module,  $M'$  est isomorphe à  $\mathbb{C}[t] e^{at} \otimes M_{\omega_1}$  pour l'action produit tensorielle ([Be], § 3). Donc  $M'/I_1 M' \simeq M'/(t \otimes 1) M' \simeq M_{\omega_1}$ .

## 6. $U/(I + U \mathfrak{f}')$ .

6.1. C'est la partie centrale de cet article : on étudie les  $\mathfrak{g}$ -modules simples contenant des vecteurs propres sous la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{f}$  de valeur propre  $f$  : ils sont annulés

par un idéal primitif  $I$ . On fixe un tel idéal et on étudie (avec les notations de 0.1) le  $\mathfrak{g}$ -module  $U/(I+U\mathfrak{f}^f)$  qui est « universel » parmi les modules annihilés par  $I$  et engendrés par un vecteur propre sous  $\mathfrak{f}$  de valeur propre  $f$ .

**THÉORÈME.** — Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente sur  $F$ ,  $U := U(\mathfrak{g})$ ,  $\Omega$  une orbite de  $G$  dans  $\mathfrak{g}^*$ ,  $I$  l'idéal primitif de  $U$  associé à  $\Omega$ ,  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{f}$  une sous-algèbre telle que  $f([\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]) = 0$ ,  $Z := \Omega \cap (f + \mathfrak{f}^\perp)$ ,  $M$  le  $\mathfrak{g}$ -module  $U/(I+U\mathfrak{f}^f)$  où  $\mathfrak{f}^f = \{T - f(T) \mid T \in \mathfrak{f}\}$  et  $S$  l'ensemble des  $\mathfrak{g}$ -modules simples  $N$  d'annulateur  $I$  tels que  $N^{\mathfrak{f}, f} \neq 0$  où  $N^{\mathfrak{f}, f} := \{n \in N \mid \mathfrak{f}^f \cdot n = 0\}$ .

(a) Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i)  $Z$  est lagrangienne.
- (ii)  $M$  est de longueur finie.
- (iii)  $S$  est un ensemble fini.

(b) Dans ce cas :

( $\alpha$ )  $Z$  est une variété lisse.

( $\beta$ ) L'application  $\Lambda \rightarrow M_\Lambda$  construite en 5 est une bijection entre l'ensemble des composantes irréductibles de  $Z$  et l'ensemble  $S$ .

( $\gamma$ ) On pose  $m_\Lambda := \dim(M_\Lambda)^{\mathfrak{f}, f}$ . On a alors un isomorphisme de  $\mathfrak{g}$ -modules :  $M \simeq \bigoplus_\Lambda (M_\Lambda)^{m_\Lambda}$ . En particulier  $m_\Lambda < \infty$  et  $M$  est semi-simple.

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{b}$  une polarisation en  $f_0$  et prenons les notations de 3. Les foncteurs  $N \rightarrow \Delta_x(N)$  et  $\mathcal{N} \rightarrow \Gamma_x(\mathcal{N})$  induisent des équivalences inverses entre la catégorie des  $\mathfrak{g}$ -modules annihilés par  $I$  et  $\mathfrak{f}^f$ -localement nilpotents et celle des  $\mathcal{D}_{f_0, x}$ -modules  $(K, f)$ -équivalents.

En effet, un  $\mathfrak{g}$ -module  $N$  (d'action  $\rho$ ) est  $\mathfrak{f}^f$ -localement nilpotent si et seulement si  $(\rho - f)|_{\mathfrak{f}}$  est la différentielle d'une action (algébrique)  $\pi$  de  $K$  sur  $N$ . On munit alors  $\Delta_x(N) = \mathcal{D}_{f_0, x} \otimes_{\mathbb{R}} N$  de la structure de  $\mathcal{O}_x$ -module  $K$ -équivalent donnée par  $k \cdot (d \otimes n) = (k \cdot d) \otimes \pi(k)n$ ,  $\forall k \in K, d \in \Gamma(U, \mathcal{D}_{f_0, x}), n \in N$  (où  $k \cdot d \in \Gamma(k \cdot U, \mathcal{D}_{f_0, x})$  est donné par l'action naturelle de  $K$  sur  $\mathcal{D}_{f_0, x}$ ) ce qui en fait un  $\mathcal{D}_{f_0, x}$ -module  $(K, f)$ -équivalent. Réciproquement, si  $\mathcal{N}$  est  $\mathcal{D}_{f_0, x}$ -module  $(K, f)$ -équivalent alors  $N = \Gamma_x(\mathcal{N})$  est un  $K$ -module dont la différentielle est  $(\rho - f)|_{\mathfrak{f}}$ .

(a) (i)  $\Rightarrow$  (ii) Si  $Z$  est lagrangienne, il existe un nombre fini d'orbites admissibles (corollaire 4.3 et lemme 5.1) et  $M$  est un  $\mathcal{D}_{f_0, x}$ -module holonome (proposition 2.1) il est donc de longueur finie.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Si  $M$  est de longueur finie,  $M$  n'a qu'un nombre fini de quotients simples (à équivalence près) donc  $S$  est fini.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) A chaque orbite admissible  $\omega$ , on a associé un  $\mathfrak{g}$ -module simple  $M_\omega = \Gamma_x(\mathcal{M}_\omega)$  de  $S$  avec  $\text{supp}(\mathcal{M}_\omega) = \omega$ . Donc, si  $S$  est fini il n'y a qu'un nombre fini d'orbites admissibles et  $Z$  est lagrangienne.

(b) ( $\alpha$ ) C'est le lemme 4.2.

(β) On a les bijections successives (corollaire 4.3 et proposition 2.1) :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{composantes} & & \text{orbites} & & \mathcal{D}_{f_0, X}\text{-module} \\
 \text{irréductibles} & \longleftrightarrow & \text{admissibles} & \longleftrightarrow & \text{simples } (K, f)\text{-} \\
 \text{de } Z & & \text{de } X & & \text{équivariants} \\
 \Lambda & \longleftrightarrow & p(\Lambda); & \omega \longrightarrow & \mathcal{M} \longrightarrow \Gamma_X(\mathcal{M})
 \end{array}$$

dont la composée est l'application  $\Lambda \rightarrow M_\Lambda$  qui ne dépend pas du choix de la polarisation (lemme 5.2).

(γ) La proposition 2.1 (d). prouve que  $M$  est une somme directe de modules simples : il existe un entier  $m'_\Lambda$  tel que  $M = \bigoplus_\Lambda (M_\Lambda)^{m'_\Lambda}$ . On a alors

$$m'_\Lambda = \dim(\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, M_\Lambda)) = \dim(M_\Lambda^{\mathfrak{f}}) = m_\Lambda.$$

COROLLAIRE. — Avec ces notations.

(1) On a les équivalences :

$$Z = \emptyset \iff M = 0 \iff S = \emptyset.$$

(2) Si  $Z$  est une  $K$ -orbite alors  $M$  est multiple d'un module simple :  $M = (M_Z)^{m_Z}$ .

Démonstration. — (1) Clair.

(2)  $Z$  est lagrangienne et irréductible (lemme 4.5).

6.2. EXEMPLE DE MULTIPLICITÉ. — Si  $Z$  est une  $K$ -orbite, le module  $M = U/(I + U\mathfrak{f}^f)$  n'est pas toujours simple (i. e. on peut avoir  $m_Z \geq 2$ ) :

Soient  $\mathfrak{g}$  la sous-algèbre de Lie de dimension 9 de l'algèbre de Weyl  $A_2 = F \langle x, y, \partial_x, \partial_y \rangle : \mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$  où  $\mathfrak{h}$  est (l'algèbre de Heisenberg) engendrée par  $x, y, \partial_x, \partial_y, 1$  et  $\mathfrak{n}$  est [le radical unipotent d'un Borel de  $\mathfrak{sp}(2, F)$ ] engendrée par  $x\partial_y, \partial_x^2, \partial_x\partial_y, \partial_y^2; f_0 = 1^*, \Omega = G.f_0, \mathfrak{f}$  est la sous-algèbre de dimension 4 engendrée par

$$\partial_x + x\partial_y, \partial_y + \partial_x^2, \partial_x\partial_y, \partial_y^2$$

et  $f = 0$ .

On vérifie par un petit calcul que  $Z = K.f_0$ . (On sait *a priori* grâce au lemme 4.5 que  $K.f_0$  est une composante irréductible de  $Z$  car  $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{g}(f_0)$  est lagrangienne pour  $B_{f_0}$ .) L'unique  $\mathfrak{g}$ -module simple de  $S$  est alors  $M_Z = F[x, y]$  (via l'action naturelle de  $A_2$ ) et on a  $(M_Z)^{\mathfrak{f}, f} = F \cdot 1 \oplus F \cdot (x^2 - 2y)$  donc  $m_Z = 2$ .

Remarque. — Supposons un nouvel instant que  $F = \mathbb{C}$ . Soient  $\mathfrak{g}_0$  et  $\mathfrak{f}_0$  les algèbres de Lie définies comme  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{f}$  mais sur le corps de base  $\mathbb{R}$  de sorte que  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{f}$  sont leur complexifiée; soient  $\pi_0$  la représentation unitaire irréductible de  $G_0$  associée à  $\Omega_0 := iG.f_0$  et  $\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty}$  le  $\mathfrak{g}$ -module des vecteurs distributions de cette représentation. Le même calcul prouve que  $Z_0 := \Omega_0 \cap \mathfrak{f}_0^\perp$  est une  $K_0$ -orbite mais que  $M_0 := (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{\mathfrak{f}_0, 0}$  est de dimension 2.

6.3. VOICI TROIS QUESTIONS OUVERTES. — (1) A-t-on l'implication :  $\Lambda$  est lagrangienne  $\Rightarrow m_\Lambda < \infty$  ? — Notre démonstration utilise l'hypothèse plus forte : «  $Z$  est

lagrangienne » et peut se généraliser si on suppose que «  $\Lambda$  est lagrangienne et  $p(\Lambda)$  est ouvert dans  $p(Z)$  ».

(2) *Existe-t-il une caractérisation géométrique de la propriété de multiplicité 1 :  $m_\Lambda = 1$  ? Il est probable que  $m_\Lambda = 1 \Rightarrow \Lambda$  est une K-orbite.* — Lorsque  $\mathfrak{f}$  est l'ensemble des points fixes d'une involution de  $\mathfrak{g}$  et  $f \in \mathfrak{f}^\perp$ , la variété  $Z$  est une K-orbite et  $m_Z = 1$  [Be].

(3) *Soit  $Z^0 \subset T^*X$  la variété caractéristique du  $\mathcal{D}_{f^0, X}$ -module  $\Delta_X(M)$  localisé de  $M := U/(I + U\mathfrak{f}')$ . Quel lien existe-t-il entre  $Z$  et  $Z^0$  ? En particulier, a-t-on l'égalité  $\dim Z = \dim Z^0$  ?*

On a seulement prouvé l'équivalence :  $\dim Z = \dim X \Leftrightarrow \dim Z^0 = \dim X$ . Remarquons que ces variétés ne sont pas en général isomorphes : dans l'exemple 4.2.(b),  $Z$  est irréductible mais pas  $Z^0$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [B-B 1] A. BEILINSON et J. BERNSTEIN, *Localisation de  $\mathfrak{g}$ -modules* (C. R. Acad. Sci. Paris, t. 292, 1981, p. 15-18).
- [B-B 2] A. BEILINSON et J. BERNSTEIN, *A generalisation of Casselman's Submodule Theorem* (Progress in Math., 40, Birkhäuser, 1983, p. 35-52).
- [B-B 3] A. BEILINSON et J. BERNSTEIN, *A Proof of Jantzen Conjectures* (preprint).
- [Be] Y. BENOIST, *Les modules simples sphériques d'une algèbre de Lie nilpotente* (Compos. Math., vol. 73, 1990, p. 295-327).
- [B-C-D...] P. BERNAT, N. CONZE, M. DUFLO, M. LEVY-NAHMAS, M. RAIS, P. RENOARD et M. VERGNE, *Représentations des groupes de Lie résolubles* (Mon. Soc. Math. Fr., Dunod, Paris, 1972).
- [Bo] A. BOREL et al., *Algebraic D-modules*, Acad. Press, 1987.
- [Di] J. DIXMIER, *Algèbre enveloppante*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [Fu] H. FUJIWARA, *Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents* (Pacific Journ. Math., vol. 127, 1986, p. 329-352).
- [Gi] V. GINZBURG, *Symplectic Geometry and Representations* (Funct. An. and Appl., vol. 17, 1983, p. 225-227).
- [Ka] M. KASHIWARA, *Representation Theory and D-modules on Flag Varieties* (Astérisque, vol. 173-174, 1989, p. 55-109).
- [Ki 1] A. KIRILLOV, *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents* (Uspek. Math. Nauk., vol. 17, 1962, p. 57-110).
- [Ki 2] A. KIRILLOV, *Éléments de la théorie des représentations*, Ed. M.I.R., 1974.
- [Li] G. LION, *Intégrales d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indice de Maslov*, LN 587, Springer, 1977, p. 160-176.
- [Mi] D. MILICIC, *D-modules and representation theory*, Livre en préparation.
- [Pe] R. PENNEY, *Abstract Plancherel Theorems and a Frobenius Reciprocity Theorem* (Journ. Funct. Anal., vol. 18, 1975, p. 177-190).

(Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> juin 1989  
révisé le 18 octobre 1989).

Yves BENOIST,  
Université Paris-VII,  
U.A. n° 748 du C.N.R.S.,  
U.F.R. de Mathématiques,  
2, place Jussieu,  
75231 Paris Cedex 05.