ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARC ROSSO

Analogues de la forme de Killing et du théorème d'Harish-Chandra pour les groupes quantiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 3 (1990), p. 445-467

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_3_445_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 23, 1990, p. 445 à 467.

ANALOGUES DE LA FORME DE KILLING ET DU THÉORÈME D'HARISH-CHANDRA POUR LES GROUPES QUANTIQUES

PAR MARC ROSSO

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice de Cartan non dégénérée. Il est classique qu'on peut lui associer une algèbre de Lie simple définie sur $\mathbb{Z}$ et dont une présentation par générateurs et relations est donnée par le théorème de Chevalley-Serre:

g est l'algèbre de Lie engendrée par: X_i, Y_i, $H_i^\vee$, $1 \leqq i \leqq N$ avec les relations:

$$[H_j^\vee, H_j^\vee]=0$$
$$[H_i^\vee, X_j]=a_{ij}X_j, \qquad [H_i^\vee, Y_j]=-a_{ij}Y_j$$
$$[X_i, Y_j]=\delta_{ij}H_i^\vee$$
$$(\mathrm{ad}\, X_i)^{1-a_{ij}}(X_j)=0 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{ad}\, Y_i)^{1-a_{ij}}(Y_j)=0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

C'est aussi une présentation de l'algèbre enveloppante $U g$.

On notera $\mathscr{H}$ la sous-algèbre de Cartan engendrée par les $H_i^\vee$, R le système de racines correspondant dans $\mathscr{H}^*$, (α_i) la base de racines simples, (,) le produit scalaire invariant sur $\mathscr{H}^*$.

A cette même donnée d'une matrice de Cartan, Drinfeld et Jimbo ont associé une déformation, ou q-analogue, de $U g$ de la façon suivante:

$U_h g$ est la $C[[h]]$-algèbre engendrée au sens h-adique par $\mathscr{H}$ et des générateurs e_i, f_i, $1 \leqq i \leqq N$, avec les relations:

$$[a_1, a_2]=0, \qquad \forall\, a_1, a_2 \in \mathscr{H}$$
$$[a, e_i]=\alpha_i(a)\, e_i \quad \text{et} \quad [a, f_i]=-\alpha_i(a) f_i, \qquad \forall\, a \in \mathscr{H}$$
$$[e_i, f_j]=\delta_{ij}\frac{\mathrm{sh}\,(h/2\, H_i)}{\mathrm{sh}\,(h/4\,(\alpha_i, \alpha_i))}, \quad \text{où } \alpha_j(H_i)=(\alpha_i, \alpha_j), \qquad \forall\, j=1, \ldots, N.$$

et, pour $i \neq j$, posant $q_i=\exp(h/2)\,(\alpha_i, \alpha_i)$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k}_{q_i} q_i^{-k(1-a_{ij}-k)/2}\, e_i^k\, e_j\, e_i^{1-a_{ij}-k}=0$$

Mêmes relations en remplaçant e_i par f_i, e_j par f_j.

Où

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n-1)\ldots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\ldots(q-1)}$$

$U_h g$ est une algèbre de Hopf: le coproduit Δ, l'antipode S et l'augmentation ε sont respectivement donnés par :

$$\Delta(a)=a\otimes 1+1\otimes a, \qquad \forall\, a\in\mathscr{H}$$

$$\Delta(e_i)=e_i\otimes \exp\frac{h}{4}\mathrm{H}_i+\exp-\frac{h}{4}\mathrm{H}_i\otimes e_i; \qquad \Delta(f_i)=f_i\otimes \exp\frac{h}{4}\mathrm{H}_i+\exp-\frac{h}{4}\mathrm{H}_i\otimes f_i$$

$$\mathrm{S}(a)=-a, \qquad \forall\, a\in\mathscr{H}$$

$$\mathrm{S}(e_i)=-\exp\frac{h}{4}(\alpha_i,\alpha_i)\,e_i \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}(f_i)=-\exp-\frac{h}{4}(\alpha_i,\alpha_i)\,f_i$$

$$\varepsilon(a)=0, \quad \forall\, a\in\mathscr{H}, \qquad \varepsilon(e_i)=\varepsilon(f_i)=0.$$

On peut aussi travailler sur $\mathbb{C}$ et non plus sur $\mathbb{C}[[h]]$ en introduisant un paramètre complexe non nul t $(=\exp-(h/4))$ et en considérant la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par e_i, f_i, $k_i(=\exp-(h/4)\mathrm{H}_i)$, k_i^{-1}, avec les relations qui se déduisent immédiatement de celles écrites pour $U_h g$. Δ, S, ε sont encore définies et on a une algèbre de Hopf que l'on notera $U_t g$.

On travaillera essentiellement avec $U_t\, g$ et t non algébrique (mais on aura recours à $U_h g$ dans la partie A). La théorie des représentations irréductibles de dimension finie a été étudiée ([6], [7]) et la classification se fait comme dans la théorie classique en termes de poids dominants.

On se propose de développer ici les analogues de deux outils classiques dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples: la forme de Killing (qui sera une forme bilinéaire définie sur $U_t g$ tout entière, ayant une propriété d'invariance par rapport à une représentation adjointe définie plus loin) et le théorème d'Harish-Chandra sur les caractères infinitésimaux.

Un des intérêts de ceci est de permettre une démonstration du théorème de complète réductibilité des représentations de dimension finie qui évite les difficultés posées par celle donnée dans [7].

L'article est donc naturellement divisé en trois parties. La première partie est consacrée à la construction de l'analogue de la forme de Killing, notée (,): le but du paragraphe préliminaire est la proposition 3, qui assurera la non-dégénérescence de (,) (proposition 9). En conséquence à cette proposition 9, on donne un critère permettant de décider si une forme linéaire sur $U_t\, g$ est de la forme (X,) pour un X dans $U_t g$. On en déduit en particulier que les formes ad-invariantes que l'on déduit des « traces de Markov » apparues en théorie des nœuds sont obtenues de cette façon (proposition 11). La deuxième partie est consacrée à l'analogue du théorème d'Harish-Chandra; il est à noter que l'action du groupe de Weyl tordue par la translation par la demi-somme des racines positives apparaît très naturellement du point de vue des formes linéaires ad-invariantes. Enfin, dans la troisième partie, on démontre le théorème de complète réductibilité.

NOTATIONS. — $U_h b_+$ (resp. $U_h b_-$) est la sous-algèbre unitaire de $U_h g$ engendrée par les e_i et les H_i (resp. par les f_i et les H_i).

— $U_t b_+$ (resp. $U_t b_-$) est la sous-algèbre unitaire de $U_t g$ engendrée par les e_i et les $k_i^{\pm 1}$ (resp. par les f_i et les $k_i^{\pm 1}$).

— T est le sous-groupe du groupe des éléments inversibles de $U_t g$ engendré par les k_i, et $\mathbb{C}[T]$ est son algèbre de groupe.

— $t_i = t^{(1/2)(\alpha_i \alpha_i)}$.

— Pour $\lambda \in \mathscr{H}^*$, e^λ est le caractère de T défini par: $e^\lambda(k_i) = t_i^{\lambda(H_i^\vee)}$.

— Rappelons enfin que lorsque t n'est pas une racine de l'unité $U_t g$ est un $U_t b_+$-module à droite libre, et que pour tout λ dans $\mathscr{H}^*$, on a construit par induction un module cyclique standard de plus haut poids e^λ; on notera $V(e^\lambda)$ son unique quotient irréductible (*voir* [7]).

— $I : \mathscr{H}^* \to \mathscr{H}$ est l'isomorphisme linéaire déduit du produit scalaire (,) sur $\mathscr{H}^*$. Ainsi, $H_i = I(\alpha_i)$.

— Pour $\alpha = \sum n_i \alpha_i$ dans Q, $k_\alpha = k_1^{n_1} \dots k_N^{n_N}$.

A. Un analogue de la forme de Killing, sur $U_t g$ tout entière

I. PRÉLIMINAIRES. — (1) Soit g une algèbre de Lie simple et $U_h g$ la $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre associée. Elle est en fait définie sur $\mathbb{Q}[[h]]$, et il en est de même de ses sous-algèbres $U_h b_\pm$, etc. On peut aussi considérer la $\mathbb{Q}(e^{h/4})$-sous-algèbre engendrée par les e_i, f_i, $\exp(\pm(h/4) H_i)$: ses relations de définition sont exactement celles déduites de la présentation de $U_h g$, *i.e.* c'est la $\mathbb{Q}(e^{h/4})$-algèbre universelle définie par ces générateurs et avec ces relations.

De même, soit $t \in \mathbb{C}^*$ non algébrique et $U_t g$ la $\mathbb{C}$-algèbre associée. Elle est en fait définie sur $\mathbb{Q}(t)$ et comme $\mathbb{Q}(t)$-algèbre, elle est isomorphe à la $\mathbb{Q}(e^{h/4})$-algèbre ci-dessus. On utilisera ceci de la façon suivante: supposons que l'on ait, dans $U_h g$ une relation de liaison entre monômes en les e_i, f_i, $\exp(\pm(h/4) H_i)$ et à coefficients dans $\mathbb{Q}(e^{h/4})$; on en déduit alors que la même relation est vraie dans $U_t g$ après substitution de t à $e^{-h/4}$.

(2) Les formules pour le coproduit indiquent que $U_h g$ n'est pas cocommutative; soit Δ' le coproduit opposé. Drinfeld a montré l'existence d'un élément inversible R de $U_h g \otimes U_h g$ tel que: $\forall x \in U_h g$, $R \Delta(x) R^{-1} = \Delta'(x)$.

Cette « R-matrice universelle » est obtenue par la méthode du double quantique, et possède la structure générale suivante:

$$R = \exp \frac{h}{2} t_0 \sum_{\beta \in \mathbb{N}^N} \exp \frac{h}{4} (H_\beta \otimes 1 - 1 \otimes H_\beta) P_\beta.$$

où :

– $t_0 \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ correspond au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$;

– pour $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_N)$, $H_\beta=\Sigma \beta_i H_i$;

– $P_\beta \in U_h b_+ \otimes U_h b_-$ est un polynôme en $e_i \otimes 1$, $1 \otimes f_i$, homogène de degré β_i en chacune de ces variables et ses coefficients sont dans $\mathbb{Q}(e^{h/4})$ (car ils proviennent de la dualité entre $U_h b_+$ et $U_h b_-$, et on peut travailler dès le départ sur $\mathbb{Q}$).

A priori la R-matrice n'a pas de sens dans $U_t g \otimes U_t g$. Cependant, si on pose $\bar{R}=\sum_{\beta \in \mathbb{N}^N} \exp(h/4)(H_\beta \otimes 1 - 1 \otimes H_\beta) P_\beta$, chaque terme de la somme est défini dans $U_t g$ dès que t n'est pas algébrique. (La formule explicite obtenue pour g de type A_N suggère qu'il devrait être suffisant d'exclure les racines de l'unité.) Pour traiter de $\exp(h/2)\,t_0$, on peut procéder de la façon suivante :

Rappelons que $U_t g$ est Q-graduée, où Q est le réseau des racines. On définit un automorphisme de $U_t g \otimes U_t g$, respectant la $Q \times Q$-graduation, par :

pour ξ et η homogènes, de degrés respectifs α et β, on pose :

$$\psi(\xi \otimes \eta)=t^{-2(\alpha, \beta)} k_\beta^2 \xi \otimes k_\alpha^2 \eta=t^{2(\alpha, \beta)} \xi k_\beta^2 \otimes \eta k_\alpha^2.$$

LEMME 1. — *Dans* $U_h g \otimes U_h g$, ψ *coïncide avec l'automorphisme intérieur défini par* $\exp -(h/2)\, t_0$.

Démonstration. – Par définition de $I : \mathscr{H}^* \to \mathscr{H}$, on a :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathscr{H}^*, \quad \beta(I(\alpha))=(\beta, \alpha)=\alpha(I(\beta))=\langle I(\alpha), I(\beta)\rangle.$$

Soit (H_i^*) la base de $\mathscr{H}$ duale de la base (H_i) pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Alors :

$$\forall \alpha \in \mathscr{H}^*, \quad I(\alpha)=\Sigma \alpha(H_i) H_i^*=\Sigma \alpha(H_i^*) H_i.$$

Par définition, $t_0=\sum H_i \otimes H_i^*$.

$$t_0(\xi \otimes \eta)=\sum H_i \xi \otimes H_i^* \eta=\sum(\xi H_i+\alpha(H_i) \xi) \otimes(\eta H_i^*+\beta(H_i^*) \eta)$$
$$=(\xi \otimes \eta)\left(\sum(H_i+\alpha(H_i)) \otimes(H_i^*+\beta(H_i^*)\right)$$

d'où

$$t_0^n(\xi \otimes \eta)=(\xi \otimes \eta)\left(\sum(H_i+\alpha(H_i)) \otimes(H_i^*+\beta(H_i^*)\right)^n$$

et

$$\exp -\frac{h}{2} t_0 .(\xi \otimes \eta)=(\xi \otimes \eta) \exp -\frac{h}{2}\left(\sum H_i \otimes H_i^*+\sum \alpha(H_i) \otimes H_i^*+\sum H_i \otimes \beta(H_i^*)+\sum \alpha(H_i) \beta(H_i^*)\, 1 \otimes 1\right)$$

soit

$$\exp -\frac{h}{2} t_0 .(\xi \otimes \eta) \exp \frac{h}{2} t_0=t^{+2(\alpha, \beta)} \xi k_\beta^2 \otimes \eta k_\alpha^2.$$

CONSÉQUENCE. — La propriété : $\forall x \in U_h g$, $R\Delta(x) R^{-1} = \Delta'(x)$ se traduit pour l'élément $\bar{R}$ ci-dessus par $\bar{R}\,\Delta(x) = \psi(\Delta'(x))\,\bar{R}$.

(3) REPRÉSENTATION ADJOINTE DANS $U_t g$. — Notons L (resp. R) la représentation régulière gauche (resp. droite). On définit alors une représentation de $U_t g$ dans $\mathrm{End}(U_t g)$, appelée représentation adjointe, par :

$$\mathrm{ad} = (L \otimes R)(\mathrm{Id} \otimes S)\,\Delta.$$

Il est commode d'introduire de nouveaux générateurs : $E_i = e_i k_i$, $F_i = f_i k_i$. Ils vérifient

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + k_i^2 \otimes E_i, \qquad S(E_i) = -k_i^{-2} E_i$$
$$\Delta(F_i) = F_i \otimes 1 + k_i^2 \otimes F_i, \qquad S(F_i) = -k_i^{-2} F_i$$

si bien que si $\xi \in U_t g$ est un élément Q-homogène de degré β, on a :

$$\mathrm{ad}(E_i)(\xi) = E_i \xi - t^{2(\alpha_i, \beta)} \xi E_i$$
$$\mathrm{ad}(F_i)(\xi) = F_i \xi - t^{2(\alpha_i, \beta)} \xi F_i.$$

De plus, $\mathrm{ad}\,E_i$ et $\mathrm{ad}\,F_i$ possèdent la propriété de « pseudo-dérivation graduée » suivante : si $\xi_1, \ldots, \xi_p \in U_t g$ sont Q-homogènes de degrés respectifs $\beta_1, \ldots, \beta_p$, on a :

$$\mathrm{ad}\,E_i(\xi_1 \ldots \xi_p) = \sum t^{2(\alpha_i, \beta_1 + \ldots + \beta_{j-1})} \xi_1 \ldots \xi_{j-1}\, \mathrm{ad}\,E_i(\xi_j)\, \xi_{j+1} \ldots \xi_p.$$

En termes des nouveaux générateurs et de la représentation adjointe, les analogues des relations de Serre se réécrivent sous la forme habituelle :

PROPOSITION 2. — *$U_t g$ est la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par E_i, F_i, $k_i^{\pm 1}$, $1 \leqq i \leqq N$, avec les relations* :

$$k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1; \qquad k_i k_j = k_j k_i$$
$$k_i E_j k_i^{-1} = t^{(\alpha_i, \alpha_j)} E_j; \qquad k_i F_j k_i^{-1} = t^{-(\alpha_i, \alpha_j)} F_j$$
$$\mathrm{ad}\,E_i(F_j) = \delta_{ij} \frac{k_i^4 - 1}{t_i^4 - 1}$$

Pour $i \neq j$,

$$(\mathrm{ad}\,E_i)^{1 - a_{ij}}(E_j) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{ad}\,F_i)^{1 - a_{ij}}(F_j) = 0$$

Désormais, on appellera $U_t\, n_+$ (resp. $U_t n_-$) la sous-algèbre unitaire engendrée par les E_i (resp. par les F_i) et $U_t b_+$ (resp. $U_t b_-$) la sous-algèbre unitaire engendrée par les E_i et $k_i^{\pm 1}$ (resp. par les F_i et $k_i^{\pm 1}$).

(4) COMMENT UTILISER R DANS $U_t g$. — Si on affecte à k_i le degré 0 et à E_i et à F_i le degré 1, les sous-algèbres $U_t b_\pm$ sont $\mathbb{N}$-graduées. On dispose donc d'une filtration

décroissante :

$$(\mathrm{U}_t b_\pm)_\mathrm{N} = \{ \xi \in \mathrm{U}_t b_\pm ; \text{chaque monôme de } \xi \text{ est de degré } \geqq \mathrm{N} \}.$$
$$(\mathrm{U}_t b_\pm)_p (\mathrm{U}_t b_\pm)_q \subset (\mathrm{U}_t b_\pm)_{p+q}.$$

Alors $\mathrm{U}_t b_+ \otimes \mathrm{U}_t b_-$ est $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-filtrée donc $\mathbb{N}$-graduée pour la filtration totale.

Remarque. — $\bigcap (\mathrm{U}_t b_\pm)_n = \{0\}$.

Étant donnés un nombre fini d'éléments linéairement indépendants $\xi_1, \ldots, \xi_p$ dans $\mathrm{U}_t n_+$, on dispose encore d'une filtration décroissante sur la somme directe d'espaces vectoriel : $\oplus [\mathrm{U}_t b_+ \otimes \mathrm{U}_t b_- \xi_j]$ (on transporte la filtration de $\mathrm{U}_t b_-$ à $\mathrm{U}_t b_- \xi_j$).

Ces différentes filtrations décroissantes permettent de définir sur les différents espaces vectoriels envisagés des systèmes fondamentaux de voisinage de 0, d'où des espaces vectoriels topologiques, séparés d'après la remarque.

Maintenant, en termes des nouveaux générateurs, $\bar{\mathrm{R}}$ s'écrit :

$$\bar{\mathrm{R}} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^\mathrm{N}} (k_\beta^{-2} \otimes 1) \mathrm{P}_\beta,$$

où P_β est homogène de degré β_i en $\mathrm{E}_i \otimes 1$ et $1 \otimes \mathrm{F}_i$.

Pour

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_\mathrm{N}) \qquad \text{soit} \quad l(\beta) = \beta_1 + \ldots + \beta_\mathrm{N}.$$

Alors $(k_\beta^{-2} \otimes 1) \mathrm{P}_\beta \in (\mathrm{U}_t b_+ \otimes \mathrm{U}_t b_-)_{2 l(\beta)}$, si bien que l'on peut donner un sens à $\bar{\mathrm{R}}$ dans le complété de $\mathrm{U}_t b_+ \otimes \mathrm{U}_t b_-$ pour la topologie associée à la définition.

On s'intéressera surtout à exploiter les relations qui résultent de

$$\bar{\mathrm{R}} \Delta(x) = \psi(\Delta'(x)) \bar{\mathrm{R}},$$

au moins pour $x \in \mathrm{U}_t n_-$. *A priori* une telle formule n'a lieu que dans $\mathrm{U}_h g$. Cependant, pour x dans la $\mathbb{Q}(e^{h/4})$-sous-algèbre, l'égalité ci-dessus implique une suite d'égalités, $\mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$-degré par $\mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$-degré, qui sont en fait des combinaisons linéaires finies de monômes à coefficients dans $\mathbb{Q}(e^{h/4})$ et que l'on peut donc spécialiser à $\mathrm{U}_t g$. La même hiérarchie d'égalités a donc encore lieu dans $\mathrm{U}_t g \otimes \mathrm{U}_t g$ ce qui donne un sens à l'égalité ci-dessus.

PROPOSITION 3. — *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{U}_t n_-$, Q-*homogène de degré* $-\alpha$ *et tel que* :

$$\forall i = 1, \ldots, \mathrm{N}, \quad \operatorname{ad} \mathrm{E}_i(\mathrm{F}) = 0.$$

Alors $\mathrm{F} = 0$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe de tels éléments non nuls et considérons-en un F dont le degré $(-\alpha) \in \mathrm{Q}_-$ est maximal (pour l'ordre partiel habituel sur Q) parmi les degrés des éléments satisfaisant à ces conditions.

Par hypothèse, $\forall i$, $\mathrm{E}_i \mathrm{F} = t^{-2(\alpha_i, \alpha)} \mathrm{F} \mathrm{E}_i$.

LEMME 4. — $\Delta(\mathrm{F})=\mathrm{F}\otimes 1+k_\alpha^2\otimes\mathrm{F}$.

Démonstration. – Posons: $\Delta(\mathrm{F})=\sum a_j\otimes b_j$: les b_j sont dans $\mathrm{U}_t n_-$ et on peut les supposer Q-homogènes, linéairement indépendants. Alors:

$$(\mathrm{E}_i\otimes 1+k_i^2\otimes\mathrm{E}_i)(\sum a_j\otimes b_j)=t^{-2(\alpha_i,\alpha)}(\sum a_j\otimes b_j)(\mathrm{E}_i\otimes 1+k_i^2\otimes\mathrm{E}_i)$$

soit:

$$\sum(\mathrm{E}_i a_j-t^{-2(\alpha_i,\alpha)}a_j\mathrm{E}_i)\otimes b_j+\sum k_i^2 a_j\otimes(\mathrm{E}_i b_j-t^{-2(\alpha_i,\alpha+\partial a_j)}b_j\mathrm{E}_i)=0$$

Or, $\alpha+\partial a_j=-\partial b_j$. ($\partial a_j$ désigne le Q-degré de a_j.)

$$\sum(\mathrm{E}_i a_j-t^{-2(\alpha_i,\alpha)}a_j\mathrm{E}_i)\otimes b_j+\sum k_i^2 a_j\otimes\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(b_j)=0\qquad\text{avec}\quad \partial\mathrm{F}\leqq\partial a_j,\quad \partial b_j\leqq 0.$$

On regarde les b_j et on se demande s'ils apparaissent dans la première somme:

– Si $b_j=\mathrm{F}$, alors $a_j=k_\alpha^2$ et le terme à gauche de $\otimes$ est nul; donc si b_j apparaît dans la première somme: $\partial b_j>\partial\mathrm{F}$. On regarde un degré minimal parmi ceux des b_j tels que: $\partial b_j>\partial\mathrm{F}$.

– Si β est ce degré minimal, on doit avoir: $\sum(\mathrm{E}_i a_j-t^{-2(\alpha_i,\alpha)}a_j\mathrm{E}_i)\otimes b_j=0$. (Sommation sur tous les b_j de degré β.)

[En effet, ce terme ne peut être compensé par un terme de la deuxième $\sum$ puisque $\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(\mathrm{F})=0$.] Les formules pour Δ indiquent que a_j peut s'écrire: $k_\beta^2 a'_j$ avec a'_j dans $\mathrm{U}_t n_-$, si bien que:

$$(\mathrm{E}_i a_j-t^{-2(\alpha_i,\alpha)}a_j\mathrm{E}_i)=k_{-\beta}^2\,t^{2(\alpha_i,\beta)}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(a'_j),$$

d'où: $\sum\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(a'_j)\otimes b_j=0$. (Somme sur $\partial b_j=\beta$.)

Comme les b_j sont linéairement indépendants: $\forall j$, $\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(a'_j)=0$, et ceci pour tout i. Mais comme $\partial\mathrm{F}<\partial a'_j$ si $\partial b_j\neq 0$ et comme on a supposé F de degré maximal, $a'_j=0$, $\forall j$.

Ceci implique que b_j n'apparaissait pas.

Il ne peut donc subsister que le terme de degré 0, qui est 1.

On va maintenant utiliser $\bar{\mathrm{R}}$.

On a: $\Delta'(\mathrm{F})=\mathrm{F}\otimes k_\alpha^2+1\otimes\mathrm{F}$, et $\psi(\Delta'(\mathrm{F}))=\mathrm{F}\otimes 1+k_\alpha^{-2}\otimes\mathrm{F}$.

On va exploiter les relations déduites de $\bar{\mathrm{R}}(\mathrm{F}\otimes 1+k_\alpha^2\otimes\mathrm{F})=(\mathrm{F}\otimes 1+k_\alpha^{-2}\otimes\mathrm{F})\bar{\mathrm{R}}$.

Posons: $\mathrm{P}_\beta=\sum\mathrm{Q}_s\mathrm{E}_s\otimes\mathrm{F}_s$, où les E_s sont linéairement indépendants dans $(\mathrm{U}_t g)_\beta$ et les F_s sont linéairement indépendants dans $(\mathrm{U}_t g)_{-\beta}$., pour s dans un certain ensemble d'indices S_β. Alors:

$$\sum\sum(\mathrm{Q}_s k_\beta^{-2}\mathrm{E}_s\mathrm{F}\otimes\mathrm{F}_s+\mathrm{Q}_s k_\beta^{-2}\mathrm{E}_s k_\alpha^2\otimes\mathrm{F}_s\mathrm{F})$$
$$=\sum\sum(\mathrm{Q}_s\mathrm{F}k_\beta^{-2}\mathrm{E}_s\otimes\mathrm{F}_s+\mathrm{Q}_s k_\alpha^{-2}k_\beta^{-2}\mathrm{E}_s\otimes\mathrm{F}\mathrm{F}_s).$$

Comme $E_i F = t^{-2(\alpha_i, \alpha)} FE_i$, on a : $\forall s \in S_\beta$, $E_s F = t^{-2(\beta, \alpha)} FE_s$ et par ailleurs :

$$F k_\beta^{-2} = t^{-2(\beta, \alpha)} k_\beta^{-2} F.$$

$$\sum\sum (Q_s k_\beta^{-2} E_s F \otimes F_s + t^{-2(\beta, \alpha)} Q_s k_\beta^{-2} k_\alpha^2 E_s \otimes F_s F)$$
$$= \sum\sum (Q_s k_\beta^{-2} E_s F \otimes F_s + Q_s k_\alpha^{-2} k_\beta^{-2} E_s \otimes FF_s).$$

Soit :

$$\sum\sum t^{-2(\beta, \alpha)} Q_s k_\beta^{-2} k_\alpha^4 E_s \otimes F_s F = \sum\sum Q_s k_\beta^{-2} E_s \otimes FF_s.$$

Lorsque E_s décrit une base de $(U_t n_+)_\beta$, les $k_\beta^{-2} E_s$ sont linéairement indépendants et il en est de même de la famille : $(k_\beta^{-2} E_s, k_\beta^{-2} k_\alpha^4 E_s)$, s décrivant S_β. On en déduit alors que $FF_s = 0$ et $F_s F = 0$ pour tout s, donc en particulier : $FF_i = 0$ et $F_i F = 0$, d'où $F(k_i^4 - 1) = 0$, ce qui est faux.

II. Forme bilinéaire ad-invariante sur $U_t g$.

Définition 5. — *Soit* (ρ, V) *une représentation de* $U_t g$. *Un élément* $v \in V$ *est dit invariant si* : $\forall x \in U_t g$, $\rho(x) v = \varepsilon(x) v$.

$U_t g$ agissant sur elle-même par l'action adjointe ad, elle agit aussi sur $U_t g \otimes U_t g$ par : $(\mathrm{ad} \otimes \mathrm{ad}) \circ \Delta$. Elle agit donc aussi sur l'espace des formes bilinéaires sur $U_t g$, qui est $(U_t g \otimes U_t g)^*$, par ${}^t[(\mathrm{ad} \otimes \mathrm{ad}) \circ \Delta \circ S]$. On a donc une notion de forme bilinéaire ad-invariante sur $U_t g$.

En terme des générateurs E_i, F_i, k_j la propriété de ad-invariance pour une forme (,) se traduit par :

$$\forall \xi, \eta \in U_t g, \quad \forall i = 1, \ldots, N :$$
$$(\mathrm{ad}\, k_i(\xi), \mathrm{ad}\, k_i(\eta)) = (\xi, \eta)$$
$$(\mathrm{ad}\, E_i(\xi), \eta) = -(\mathrm{ad}\, k_i^2(\xi), \mathrm{ad}\, E_i(\eta))$$
$$(\mathrm{ad}\, F_i(\xi), \eta) = -(\mathrm{ad}\, k_i^2(\xi), \mathrm{ad}\, F_i(\eta))$$

Remarque. — On dispose d'une décomposition triangulaire : $U_t g = U_t n_- \otimes \mathbb{C}[T] \otimes U_t n_+$ qui permet de définir sur $U_t g$ une filtration croissante d'algèbre :

$(U_t g)_N$ est le sous-espace vectoriel de $U_t g$ engendré par les F.K.E (écriture dans la décomposition triangulaire) tels que le degré de E en les E_i et le degré de F en les F_i sont $\leqq N$. (Ces degrés sont bien définis car l'idéal des relations définissant $U_t n_\pm$ est engendré par des éléments homogènes.) Alors les relations de définition de $U_t g$ montrent immédiatement que les $(U_t g)_N$ forment une filtration croissante d'algèbre.

Théorème 6. — *Il existe une unique forme bilinéaire ad-invariante sur* $U_t g$, (,) *satisfaisant aux conditions suivantes* :

(i) *sa restriction à* $\mathbb{C}[T] \times \mathbb{C}[T]$ *est donnée par* : $(k_\alpha, k_\beta) = t^{-(1/4)(\alpha, \beta)}$, $\forall \alpha, \beta \in Q$;

(ii) *en termes de la décomposition triangulaire, et avec des notations évidentes* : (F.K.E, F′, K′, E′) = (E, F′) (K, K′) (F, E′);

(iii) *tout élément de* $(U_t g)_N$ *est orthogonal, à droite et à gauche, à tout élément* F.K.E *tel que* $\deg F \geqq N+1$ *ou* $\deg E \geqq N+1$.

De plus, sa restriction à la sous-algèbre des éléments de Q*-degré* 0 *est symétrique : en fait,* $(E, F) \neq 0 \Rightarrow \partial E + \partial F = 0$ (*il s'agit des* Q*-degrés*) *et alors* :

$$(F, E) = t^{4(\delta, \partial E)}(E, F).$$

δ *désigne la demi-somme des racines positives.*

Démonstration. — On va construire (,) sur $(U_t g)_N$ par récurrence sur N, le cas $N=0$ étant donné par (i). Au vu de (ii), il s'agit essentiellement de savoir définir (E, F) et (F, E).

Remarques. — Pour ξ et η Q-homogènes, $(\xi, \eta) \neq 0 \Rightarrow \partial\xi + \partial\eta = 0$.

— D'après (i) et la propriété d'invariance, on a :

$$\forall i, j = 1, \ldots, N, \quad \forall \alpha \in Q, \qquad (\operatorname{ad} E_i(F_j), k_\alpha) = -t^{-2(\alpha_i, \alpha_j)}(F_j, \operatorname{ad} E_i(k_\alpha))$$

avec $\operatorname{ad} E_i(k_\alpha) = (t^{-(\alpha_i, \alpha)} - 1) k_\alpha E_i$. D'où, pour tout α tel que $(\alpha, \alpha_i) \neq 0$: $(F_j, E_i k_\alpha) = -\delta_{ij} t_i^4 (t_i^4 - 1)^{-1}$.

— Un calcul analogue donne : $(E_i, F_j) = -\delta_{ij}(t_i^4 - 1)^{-1}$.

Ces remarques montrent que l'on peut définir de façon unique (,) sur $(U_t g)_1$ en satisfaisant à (i), (ii) et on vérifie immédiatement la propriété d'invariance. On la prolonge à $(U_t g)_1 \times U_t g$ et $U_t g \times (U_t g)_1$ grâce à (iii).

Le lemme suivant permettra le passage de $(U_t g)_N$ à $(U_t g)_{N+1}$.

LEMME 7. — (1) *Soit* $E' \in U_t n_+$, $\alpha \in Q$ *tel que* $(\alpha, \alpha_i) \neq 0$. *Alors* :

$$E_i E' = [\operatorname{ad} E_i(E') - k_\alpha^{-1} \operatorname{ad} E_i(k_\alpha E')](1 - t^{-(\alpha_i, \alpha)})^{-1}.$$

(2) *Soit* $F' \in U_t n_-$, $\alpha \in Q$ *tel que* $(\alpha, \alpha_i) \neq 0$. *Alors* :

$$F_i F' = [\operatorname{ad} F_i(F' k_\alpha) k_\alpha^{-1} - t^{-(\alpha_i, \alpha)} \operatorname{ad} F_i(F')](1 - t^{-(\alpha_i, \alpha)})^{-1}.$$

Démonstration. — (1) $\operatorname{ad} E_i(k_\alpha E') = k_\alpha \operatorname{ad} E_i(E') + (t^{-(\alpha_i, \alpha)} - 1) k_\alpha E_i E'$, d'où l'assertion.

(2) $\operatorname{ad} F_i(F' k_\alpha) = \operatorname{ad} F_i(F') k_\alpha + t^{2(\alpha_i, \partial F')} F' F_i k_\alpha (1 - t^{-(\alpha_i, \alpha)})$.

Or,

$$\operatorname{ad} F_i(F') = F_i F' - t^{2(\alpha_i, \partial F')} F' F_i$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ad} F_i(F' k_\alpha) &= \operatorname{ad} F_i(F') k_\alpha + (1 - t^{-(\alpha_i, \alpha)})(F_i F' - \operatorname{ad} F_i(F')) k_\alpha \\ &= t^{-(\alpha_i, \alpha)} \operatorname{ad} F_i(F') k_\alpha + (1 - t^{-(\alpha_i, \alpha)}) F_i F' k_\alpha,\end{aligned}$$

d'où l'assertion.

Supposons (,) définie sur $(U_t g)_N$, avec les propriétés requises. Pour la définir sur $(U_t g)_{N+1}$, il s'agit essentiellement de calculer (E, F) et (F, E) avec E et F de degré $(N+1)$ respectivement en les E_i et les F_i.

D'après le lemme, on peut écrire $\mathrm{E}=\sum k_{\beta_i}^{-1}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)})$, avec $\mathrm{E}'_{(i)}\in(\mathrm{U}_t g)_{\mathrm{N}}$ $\beta_i\in\mathrm{Q}$ et E_i pouvant apparaître plusieurs fois. Alors nécessairement :

$$(\mathrm{E},\mathrm{F})=\sum(\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)}),\mathrm{F}),$$

que l'on définit par :

$$=-\sum t^{2\,(\alpha_i,\,\partial\mathrm{E}'_{(i)})}(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(\mathrm{F})) \tag{1}$$

et l'hypothèse de récurrence permet de calculer le deuxième membre. Il s'agit de voir que ceci ne dépend que de E et non de la décomposition choisie.

Le lemme permet aussi d'écrire $\mathrm{F}=\sum\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})k_{\gamma_j}^{-1}$. Alors (1) donne :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E},\mathrm{F})=-\sum t^{2\,(\alpha_i,\,\partial\mathrm{E}'_{(i)})}(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\ &\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})k_{\gamma_j}^{-1}\\ &+t^{2\,(\alpha_i,\,\partial\mathrm{F})}(t^{(\alpha_i,\,\gamma_j)}-1)\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})\mathrm{E}_i k_{\gamma_j}^{-1})\end{aligned}$$

Par (iii), le deuxième terme est bien défini et nul.

$$(\mathrm{E},\mathrm{F})=-\sum t^{2\,(\alpha_i,\,\partial\mathrm{E}'_{(i)})}(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})k_j^{-1}). \tag{1'}$$

Mais l'autre façon de calculer donnerait :

$$(\mathrm{E},\mathrm{F})=\sum(\mathrm{E},\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})),$$

que l'on définirait par :

$$=-\sum t^{-2\,(\alpha_j,\,\partial\mathrm{E})}(\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j(\mathrm{E}),\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j}) \tag{2}$$

utilisant l'expression donnée par le lemme pour E :

$$\begin{aligned}&=-\sum t^{-2\,(\alpha_j,\,\partial\mathrm{E})}((1-t^{(\beta_i,\,\alpha_j)})\mathrm{F}_j k_{\beta_i}^{-1}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)})+k_{\beta_i}^{-1}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)}),\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})\\ &=-\sum t^{-2\,(\alpha_j,\,\partial\mathrm{E})}(k_{\beta_i}^{-1}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)}),\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j}).\end{aligned} \tag{2'}$$

LEMME 8 :

$$(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})k_{\gamma_j}^{-1})=t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j}))$$
$$(k_{\beta_i}^{-1}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)}),\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})=t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}(\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)}),\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})$$

Démonstration. — Montrons par exemple la première égalité.

On réécrit $\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})=\sum\mathrm{F}_\nu.\mathrm{K}_\nu.\mathrm{E}_\nu$ et seuls les termes ν pour lesquels $\mathrm{E}_\nu=1$ peuvent donner une contribution non nulle.

$$\begin{aligned}(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},(\textstyle\sum\mathrm{F}_\nu.\mathrm{K}_\nu.\mathrm{E}_\nu)k_{\gamma_j}^{-1})&=\textstyle\sum(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\mathrm{F}_\nu.\mathrm{K}_\nu.k_{\gamma_j}^{-1})\\ &=t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}\textstyle\sum(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\mathrm{F}_\nu.\mathrm{K}_\nu)\\ &=t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)}.\textstyle\sum\mathrm{F}_\nu.\mathrm{K}_\nu\mathrm{E}_\nu)\end{aligned}$$

Ainsi (1)′ devient :

$$(\mathrm{E},\mathrm{F}) = -\sum t^{2\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)})}\,(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j}))\,t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}$$

et (2)′ devient :

$$(\mathrm{E},\mathrm{F}) = -\sum t^{-2\,(\alpha_j,\,\partial \mathrm{E})}\,(\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)}),\,\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})\,t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}$$

Or :

$$\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j = t^{-2\,(\alpha_i,\,\alpha_j)}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i + \delta_{ij}\,\mathrm{ad}\,\frac{k_i^4-1}{t_i^4-1}$$

Alors :

$$\begin{aligned}(1)'\quad (\mathrm{E},\mathrm{F}) = &-\sum t^{2\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)}-\alpha_j)}\,(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j}))\,t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}\\ &-\sum \delta_{ij}\,t^{2\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)})}\,(t_i^4-1)^{-1}\,(t^{4\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{F}'_{(j)})}-1)\,(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\,\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})\,t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}\\ (2)'\quad (\mathrm{E},\mathrm{F}) = &-\sum t^{-2\,(\alpha_j,\,\partial \mathrm{E}-\alpha_i)}\,(\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)}),\,\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})\,t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}\\ &+\sum \delta_{ij}\,t^{-2\,(\alpha_j,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)})}\,(t_i^4-1)^{-1}\,(t^{4\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)})}-1)\,(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\,\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j})\,t^{1/4\,(\beta_i,\,\gamma_j)}\end{aligned}$$

Alors : — les deuxièmes sommes sont égales terme à terme : c'est clair pour $i \neq j$ et pour $i = j$, on a comparé :

$$-\,t^{2\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)})}\,(t_i^4-1)^{-1}\,(t^{4\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{F}'_{(j)})}-1)$$

avec

$$t^{-2\,(\alpha_j,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)})}\,(t_i^4-1)^{-1}\,(t^{4\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)})}-1)$$

mais le terme bilinéaire ne peut être non nul que pour $\partial \mathrm{E}'_{(i)} + \partial \mathrm{F}'_{(j)} = 0$, d'où l'égalité.

— les premières sommes sont égales terme à terme : dans (1)′, on a :

$$\begin{aligned}&t^{2\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)}-\alpha_j)}\,(k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\,\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j}))\\ &\qquad = -\,t^{2\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)})}\,t^{-2\,(\alpha_j,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)}+\alpha_i)}\,(\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j}))\end{aligned}$$

et c'est bien défini car les deux termes sont dans $(\mathrm{U}_t g)_\mathrm{N}$; et dans (2)′, on a :

$$-\,t^{2\,(\alpha_i,\,\partial \mathrm{E}'_{(i)}-\alpha_j)}\,t^{-2\,(\alpha_j,\,\partial \mathrm{E}-\alpha_i)}\,(\mathrm{ad}\,\mathrm{F}_j\,k_{\beta_i}\mathrm{E}'_{(i)},\,\mathrm{ad}\,\mathrm{E}_i\,(\mathrm{F}'_{(j)}k_{\gamma_j}))$$

qui sont bien égaux car $\partial \mathrm{E} = \partial \mathrm{E}_{(i)} + \alpha_i$.

Conclusion. — (E, F), calculé par (1) ou par (2), donne le même résultat, ce qui montre qu'il ne dépend que de E et F et non des décompositions choisies.

On voit de plus sur (1) que si E est de degré $\geqq \mathrm{N}+2$ en les E_i et F de degré $\mathrm{N}+1$ en les F_i, alors $(\mathrm{E},\mathrm{F}) = 0$. Même chose pour $\deg \mathrm{E} = \mathrm{N}+1$ et de $\mathrm{F} \geqq \mathrm{N}+2$ en utilisant (2).

Des calculs tout à fait analogues permettent de montrer que l'hypothèse de récurrence permet de calculer (F, E) pour F, $E \in (U_t g)_{N+1}$.

Alors, par (ii), on définit (,) sur $(U_t g)_{N+1}$ tout entière et il faut s'assurer de la ad-invariance.

– Le procédé même de définition de (,) par récurrence assure la ad-invariance de la restriction de (,) à $U_t b_+ \times U_t b_-$ et $U_t b_- \times U_t b_+$: en effet, par bilinéarité, il suffit de vérifier que :

$$(\operatorname{ad} E_i (k_\alpha E'), F k_\beta) = t^{2(\alpha_i, \partial E')} (k_\alpha E', \operatorname{ad} E_i (F k_\beta))$$

pour $E' \in (U_t n_+)_N$, $F \in (U_t n_-)_{N+1}$. (Démonstration analogue pour ad F_i.)

Or

$$\operatorname{ad} E_i (k_\alpha E') = k_\alpha \operatorname{ad} E_i (E') + (t^{-(\alpha, \alpha_i)} - 1) k_\alpha E_i E'.$$

Donc :

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} E_i (k_\alpha E'), F k_\beta) &= t^{-(1/4)(\alpha, \beta)} (\operatorname{ad} E_i (E') + (t^{-(\alpha, \alpha_i)} - 1) E_i E', F)\\ &= t^{-(1/4)(\alpha, \beta)} (k_\alpha^{-1} \operatorname{ad} E_i (k_\alpha E'), F)\\ &= t^{-(1/4)(\alpha, \beta)} (\operatorname{ad} E_i (k_\alpha E'), F)\\ &= t^{-(1/4)(\alpha, \beta)} t^{2(\alpha_i, \partial E')} (k_\alpha E', \operatorname{ad} E_i (F))\end{aligned}$$

[en effet, $\operatorname{ad} E_i (E') + (t^{-(\alpha, \alpha_i)} - 1) E_i E' \in (U_t n_+)_{N+1}$ et on a appliqué la définition donnée par la formule (1)].

Par ailleurs :

$$\operatorname{ad} E_i (F k_\beta) = \operatorname{ad} E_i (F) k_\beta + t^{2(\alpha_i, \partial F)} (t^{-(\beta, \alpha_i)} - 1) F k_\beta E_i$$

mais, dans $(U_t g)_N$, $(k_\alpha E', F k_\beta E_i) = 0$, donc :

$$\begin{aligned}(k_\alpha E', \operatorname{ad} E_i (F k_\beta)) &= (k_\alpha E', \operatorname{ad} E_i (F) k_\beta)\\ &= t^{-(1/4)(\alpha, \beta)} (k_\alpha E', \operatorname{ad} E_i (F))\end{aligned}$$

(procéder comme dans le lemme ci-dessus). D'où le résultat.

– Cas général : montrons que

$$(\operatorname{ad} E_i (FKE), F'K'E') = t^{-2(\alpha_i, \partial E + \partial F)} (FKE, \operatorname{ad} E_i (F'K'E'))$$

lorsque ad E_i(FKE) et ad E_i(F'K'E') sont dans $(U_t g)_{N+1}$.

On a :

$$(*) \quad \begin{aligned}(\operatorname{ad} E_i (FKE), F'K'E') &= (\operatorname{ad} E_i (FKE), F'K'E') + t^{2(\alpha_i, \partial F)} (F \operatorname{ad} E_i (KE), F'K'E')\\ &= (E, F') (\operatorname{ad} E_i (F) K, K'E') + t^{2(\alpha_i, \partial F)} (F, E') (\operatorname{ad} E_i (KE), F'K')\end{aligned}$$

(car $\operatorname{ad} E_i$ envoie $U_t n_-$ dans $U_t b_-$).

$(**)$ $(FKE, \operatorname{ad} E_i(F'K'E')) = (FKE, \operatorname{ad} E_i(F'K')E') + t^{2(\alpha_i, \partial F')}(FKE, F'K' \operatorname{ad} E_i(E'))$

1° Cas : $(F, E') \neq 0$; donc $\partial F + \partial E' = 0$ et le premier terme de (*) est nul.

$$\begin{aligned}(*) &= -t^{2(\alpha_i, \partial F)}(F, E')(KE, \operatorname{ad} E_i(F'K'))\, t^{2(\alpha_i, \partial E)} \\ &= -t^{2(\alpha_i, \partial F + \partial E)}(F, E')(KE, \operatorname{ad} E_i(F')K')\end{aligned}$$

$$(**) = (FKE, \operatorname{ad} E_i(F'K')E') = (FKE, \operatorname{ad} E_i(F')K'E') = (F, E')(KE, \operatorname{ad} E_i(F')K')$$

d'où :

$$(*) = -t^{2(\alpha_i, \partial F + \partial E)}(**).$$

2° Cas : $(E, F') \neq 0$; $\partial E + \partial F' = 0$ et le deuxième terme de $(*)$ est nul.

$$\begin{aligned}(**) &= t^{2(\alpha_i, \partial F')}(FKE, F' \operatorname{ad} E_i(K')E') + t^{2(\alpha_i, \partial F')}(F, \operatorname{ad} E_i(E'))(K, K')(E, F') \\ &= (E, F')\, t^{2(\alpha_i, \partial F')}[(FK, \operatorname{ad} E_i(K')E') + (FK, K' \operatorname{ad} E_i(E'))] \\ &= (E, F')\, t^{2(\alpha_i, \partial F')}(FK, \operatorname{ad} E_i(K'E')) \\ &= -(E, F')\, t^{2(\alpha_i, \partial F' - \partial F)}(\operatorname{ad} E_i(FK), K'E') \\ &= -(E, F')\, t^{-2(\alpha_i, \partial E + \partial F)}(\operatorname{ad} E_i(F)K, K'E')\end{aligned}$$

d'où encore

$$(*) = -t^{-2(\alpha_i, \partial E + \partial F)}(**).$$

Montrons enfin que :

$$(FKE, F'K'E') = t^{4(\delta, \partial E' + \partial F')}(F'K'E', FKE)$$

où δ est la demi-somme des racines positives.

On le fait par récurrence sur les degrés de E en les E_i et de F en les F_i.

– On a vu que :

$$(F_i, E_i) = t_i^4(E_i, F_i) = t^{4(\delta, \alpha_i)}(E_i, F_i)$$

– $(FKE, F'K'E') = (E, F')(K, K')\ (F, E')$ et on calcule par exemple (E, F') par la formule (1) :

$$\begin{aligned}(E, F') &= -\sum t^{2(\alpha_i, \partial E'_{(i)})}(k_{\beta_i} E'_{(i)}, \operatorname{ad} E_i(F')) \\ &= -\sum t^{2(\alpha_i \partial E'_{(i)})}\, t^{-4(\delta, \partial E'_{(i)})}(\operatorname{ad} E_i(F'), k_{\beta_i} E'_{(i)})\end{aligned}$$

(d'après l'hypothèse de récurrence)

$$= \sum t^{2(\alpha_i, \partial E'_{(i)})}\, t^{-4(\delta, \partial E'_{(i)})}\, t^{2(\alpha_i, \partial F')}(F', \operatorname{ad} E_i(k_{\beta_i} E'_{(i)}))$$

Or $\partial E'_{(i)} + \partial F' = -\alpha_i$.

$$\begin{aligned}(E, F') &= \sum t^{-4(\delta, \partial E'_{(i)})} t^{-2(\alpha_i, \alpha_j)} (F', \operatorname{ad} E_i (k_{\beta_i} E'_{(i)})) \\ &= \sum t^{-4(\delta, \partial E'_{(i)} + \alpha_i)} (F', \operatorname{ad} E_i (k_{\beta_i} E'_{(i)})) \\ &= t^{-4(\delta, \partial E)} (F', E).\end{aligned}$$

PROPOSITION 9. — *La forme bilinéaire ad-invariante est non dégénérée.*

Démonstration. — Montrons d'abord que sa restriction à $\mathbb{C}[T]$ est non dégénérée.

Soit $\sum a_\alpha k_\alpha$ un élément du radical. Alors $\forall \beta \in Q$ et $\forall n \in N$, $(\sum a_\alpha k_\alpha, k_{4\beta}^n) = 0$ soit: $\sum a_\alpha t^{n(\alpha, \beta)} = 0$.

Considérons le polynôme de Laurent: $\sum a_\alpha X^{(\alpha, \beta)}$. On voit que t ainsi que toutes ses puissances en sont des racines; il est donc nul. Soit α_0 tel que $a_{\alpha_0} \neq 0$; il existe β dans Q tel que $(\beta, \alpha) \neq (\beta, \alpha_0)$ pour $\alpha \neq \alpha_0$ dans le support de (a_α); la nullité du polynôme de Laurent correspondant implique: $a_{\alpha_0} = 0$, une contradiction.

— *La restriction à* $U_t n_+$ *est non dégénérée.* — Soit par exemple $F \in U_t n_-$ (que l'on peut supposer . Q-homogène) tel que: $\forall E \in U_t n_+$, $(E, F) = 0$; en particulier: $\forall E \in U_t n_+$, homogène et $\forall i$, $\forall \alpha$, $(\operatorname{ad} E_i (k_\alpha E), F) = 0$, d'où $(k_\alpha E, \operatorname{ad} E_i (F)) = 0$.

On procède par récurrence sur le degré de F comme polynôme en les F_j.

— Pour $\deg(F) = 1$, on a déjà vu que $(E_j, F_j) \neq 0$.

— ad E_i envoie $U_t n_-$ dans $U_t b_-$ (*cf.* la formule de dérivation tordue) et diminue de 1 le degré en les F_j.

Si $\operatorname{ad} E_i (F) \neq 0$, écrivons-le: $\operatorname{ad} E_i (F) = \sum F_\nu K_\nu$ avec les K_ν linéairement indépendants. Alors: $\forall \alpha$, $(k_\alpha E, \operatorname{ad} E_i (F)) = \sum (k_\alpha, K_\nu)(E, F_\nu) = 0$. Or, on peut trouver des $K_{\nu'}$ dans $C[T]$ tels que la matrice $((K_{\nu'}, K_\nu))$ soit inversible.

Alors $(E, F_\nu) = 0$ pour tout E, d'où, par hypothèse de récurrence, $F_\nu = 0$ et finalement: $\operatorname{ad} E_i (F) = 0$, $\forall i$. Mais on a vu dans les préliminaires que ceci implique que $F = 0$.

— *La restriction à* $U_t b_\pm$ *est non dégénérée.* — Soit $\sum F_\nu K_\nu$ dans le radical, avec les F_ν linéairement indépendants. Fixons ν_0: d'après le point précédent, il existe $E \in U_t n_+$ tel que $(E, F_{\nu_0}) \neq 0$ et $(E, F_\nu) = 0$ pour $\nu \neq \nu_0$. Alors $\forall K \in \mathbb{C}[T]$, $(K, K_{\nu_0}) = 0$, d'où $K_{\nu_0} = 0$. Contradiction.

— (,) *est non dégénérée.* — On procède comme ci-dessus, en utilisant la non-dégénérescence de la restriction à $U_t b_\pm$ et le fait que:

$$(FKE, F'K'E') = (F, E')(K, K')(E, F').$$

CONSÉQUENCE. — On dispose d'une injection:

$$\begin{aligned} j:\ & U_t g \to (U_t g)^* \\ & \xi \to (\xi, .) \end{aligned}$$

Il est immédiat que les formes linéaires obtenues sont à support dans un sous-espace $(U_t g)_N$ et que la restriction de cette application envoie $\mathbb{C}[T]$ dans l'ensemble des combinaisons linéaires de caractères sur $\mathbb{C}[T]$.

De plus, $\forall E \in U_t n_+$, $\forall F \in U_t\, n$, on dispose d'une injection

$$\begin{aligned} i_{E,F}: \quad & \mathbb{C}[T] \to U_t g \\ & K \to FKE \end{aligned}$$

et $\forall \xi \in U_t g, j(\xi) \circ i_{E,F}$ est une combinaison linéaire de caractères.

Réciproquement. — Soit $\varphi \in (U_t g)^*$ qui soit à support dans un $(U_t g)_N$ et telle que: $\forall E \in U_t n_+$, $\forall F \in U_t n_-$, $\varphi \circ i_{E,F}$ soit une combinaison linéaire de caractères. On peut se restreindre à E décrivant une base de $(U_t n_+)_N$, F décrivant une base de $(U_t n_-)_N$ et on dispose ainsi d'un nombre fini de combinaisons linéaires de caractères $\varphi \circ i_{E,F}$. Si pour chaque (E, F) il existe $K_{E,F} \in \mathbb{C}[T]$ tel que $(K_{E,F}, .)$ coïncide avec cette combinaison linéaire de caractères, alors, désignant par (E′), (F′) les bases duales de (F) et (E), on aura:

$$\begin{aligned} \forall K, \quad \varphi(FKE) &= (K_{E,F}, K) \\ &= (F', E)(K_{E,F}, K)(E', F) \end{aligned}$$

soit $\varphi = (\sum F' K_{E,F} E', .)$.

On dispose ainsi d'un critère permettant de décider si une certaine forme linéaire est dans l'image de j.

III. Formes linéaires invariantes et représentations. — Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de $U_t g$. Identifiant End V à $V \otimes V^*$, on obtient une représentation $\tilde{\rho}$ dans End V, définie par: $\tilde{\rho} = (\rho \otimes {}^t\rho)(I \otimes S)\Delta$. D'où une représentation dans $(\text{End}\, V)^*$ et une notion de forme linéaire invariante sur End V.

Par ailleurs, toute forme linéaire sur End V est de la forme: $A \to \text{Tr}(DA)$ pour un certain $D \in \text{End}\, V$.

Proposition 10. — (1) *Soit* (ρ, V) *une représentation de dimension finie de* $U_t g$. *Alors*: $\psi : A \to \text{Tr}(\rho(k_{-4\delta}) A)$ *est une forme linéaire invariante sur* End V (δ *est la demi-somme des racines positives*).

(2) *Si de plus* (ρ, V) *est irréductible, alors toute forme linéaire invariante est proportionnelle à* ψ.

Démonstration. — (1) On recherche les $D \in \text{End}\, V$ tels que:

$$\forall A \in \text{End}\, V, \quad \forall x \in U_t g, \qquad \text{Tr}[D\, \tilde{\rho}(x) A] = \varepsilon(x) \text{Tr}[DA].$$

Il suffit de le voir pour A de la forme: $v \otimes w^*$, avec $v \in V$ et $w^* \in V^*$.

Posons: $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. On calcule immédiatement:

$$\text{Tr}[D\tilde{\rho}(x) A] = \langle w^*, \sum \rho(S(x_{(2)}) D \rho(x_{(1)}) v \rangle$$

et ceci doit être égal à: $\varepsilon(x) \text{Tr}[D v \otimes w^*] = \varepsilon(x) \langle w^*, Dv \rangle$.

Ainsi, D définit une forme invariante si et seulement si :

$$\forall x \in \mathrm{U}_t g, \quad \sum \rho(\mathrm{S}(x_{(2)})\mathrm{D}\rho(x_{(1)}) = \varepsilon(x)\mathrm{D}.$$

Pour $x = k_i$, on voit que D commute à $\rho(k_i)$, $\forall i = 1, \ldots, \mathrm{N}$.

Pour $x = e_i$, on obtient : $\mathrm{D}\rho(e_i) = t_i^{-4}\rho(e_i)\mathrm{D}$.

Pour $x = f_i$, on obtient : $\mathrm{D}\rho(f_i) = t_i^4\rho(f_i)\mathrm{D}$.

On vérifie immédiatement que ces relations sont satisfaites par $\mathrm{D} = \rho(k_{-4\delta})$, d'où (1).

(2) Supposons maintenant (ρ, V) irréductible : on sait que V est un module de plus haut poids; soit λ ce plus haut poids et $v_+ \neq 0$ un vecteur de plus haut poids. V est somme de ses sous-espaces de poids : $\mathrm{V} = \oplus \mathrm{V}_\mu$ et $\dim \mathrm{V}_\lambda = 1$. Alors $\mathrm{D}(\mathrm{V}_\mu) \subset \mathrm{V}_\mu$ et en particulier : $\mathrm{D}v_+ = \nu v_+$. Soit $v \in \mathrm{V}_\mu$: il est combinaison linéaire de vecteurs

$$\rho(f_{i_1}) \ldots \rho(f_{i_p}) v_+ \text{ avec } \mu = \lambda - (\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_p}).$$

Or,

$$\mathrm{D}\rho(f_{i_1}) \ldots \rho(f_{i_p}) v_+ = (t_{i_1} \ldots t_{i_p})^4 \rho(f_{i_1}) \ldots \rho(f_{i_p}) v_+$$

donc D agit dans V_μ comme l'homothétie de rapport

$$\nu(t_{i_1} \ldots t_{i_p})^4 = \nu\, t^{4(\delta, \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_p})}.$$

Posons : $\nu = \nu_0 t^{-4(\delta, \lambda)}$ alors D agit dans V_μ par $\nu_0 t^{-4(\delta, \mu)}$, d'où $\mathrm{D} = \nu_0 \rho(k_{-4\delta})$.

Remarque 1. — Une forme linéaire invariante sur End V définit par composition une forme linéaire ad-invariante sur $\mathrm{U}_t g : x \to \mathrm{Tr}[\rho(k_{4\delta})\rho(x)]$.

Remarque 2. — Les $\rho(k_{-4\delta})$ sont précisément les états matriciaux permettant de définir la « trace de Markov » sur l'algèbre de groupe du groupe de tresses agissant dans les puissances tensorielles $\mathrm{V}^{\otimes k}$ via la R-matrice.

PROPOSITION 11. — *Soit j l'injection définie par la forme bilinéaire ad-invariante et $\psi \in (\mathrm{U}_t g)^*$ la forme linéaire ad-invariante déterminée par une représentation de dimension dont tous les poids sont radiciels. Alors ψ est dans l'image de j (et donc en fait dans l'image du centre de $\mathrm{U}_t g$).*

Démonstration. — Comme les $\rho(e_i)$, $\rho(f_i)$ sont nilpotents, ψ a son support dans un $(\mathrm{U}_t g)_\mathrm{N}$.

Soient $\mathrm{E} \in (\mathrm{U}_t n_+)_\mathrm{N}$, $\mathrm{F} \in (\mathrm{U}_t n_-)_\mathrm{N}$. Alors :

$$\psi(\mathrm{FKE}) = t^{4(\delta, \partial \mathrm{E})} \sum e^\mu(\mathrm{K})\, \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}_\mu}[\rho(k_{-4\delta})\rho(\mathrm{E})\rho(\mathrm{F})]$$

où $V=\oplus V_\mu$. Donc :

$$\psi\circ i_{E,F}=t^{4(\delta,\partial E)}\sum \mathrm{Tr}_{V_\mu}[\rho(k_{-4\delta})\,\rho(E)\,\rho(F)]\,e^\mu$$

et comme $j(k_{4\mu})=e^\mu$, l'assertion provient du critère établi à la fin du II.

B. Un analogue du théorème d'Harish-Chandra sur les caractères infinitésimaux

I. Notations, rappels et préliminaires. — Soit Z le centre de $U_t g$: c'est exactement l'ensemble des éléments ad-invariants de $U_t g$.

Pour $\lambda\in\mathscr{H}^*$, on note e^λ le caractère de $\mathbb{C}[T]$ défini par : $e^\lambda(k_i)=t^{(\lambda,\alpha_i)}$.

On a construit, par induction, le module cyclique standard $M(e^\lambda)$; soit v_+ un vecteur de plus haut poids. Alors, $\forall z\in Z$, zv_+ est encore un vecteur de plus haut poids e^λ, donc $zv_+=\chi_\lambda(z)\,v_+$, où $\chi_\lambda : Z\to\mathbb{C}$ est un morphisme d'algèbres. De plus, l'action de $z\in Z$ sur tout sous-module et sur toute image homomorphe de $M(e^\lambda)$ est encore la multiplication scalaire par $\chi_\lambda(z)$.

Soit δ la demi-somme des racines positives et $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathscr{H}^*$ définie par : $\lambda\sim\mu\Leftrightarrow\exists\, w\in W$ tel que $\lambda+\delta=w(\mu+\delta)$.

On montre alors comme dans la situation classique que si λ et μ sont des poids et si $\lambda\sim\mu$, alors $\chi_\lambda=\chi_\mu$.

Soit $\xi=\varepsilon_-\otimes\mathrm{id}\otimes\varepsilon_+ : U_t g\,(=U_t n_-\otimes\mathbb{C}[T]\otimes U_t n_+)\to\mathbb{C}[T]$; alors sa restriction à Z est un morphisme d'algèbres et $\forall z\in Z$, $\chi_\lambda(z)=e^\lambda(\xi(z))$.

Soit $\eta : \mathbb{C}[T]\to\mathbb{C}[T]$ l'automorphisme d'algèbres défini par : $\eta(k_i)=k_i t_i^{-1}$ et $\psi=\eta\,\xi_{|Z} : Z\to\mathbb{C}[T]$. On a : $e^\lambda(\xi(z))=e^{\lambda+\delta}(\psi(z))=\chi_\lambda(z)$.

Pour $p\in\mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}[T^{(p)}]$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}[T]$ engendrée par les $k_i^{\pm p}$.

Lemme 1. — (1) *Soit* $K\in\mathbb{C}[T]$, *non nul. Alors il existe un poids* λ *tel que* $e^{\lambda+\delta}(K)\neq 0$.

(2) *Soient* λ *et* μ *deux poids appartenant à deux* W-*orbites distinctes.*

Alors, $\forall p\in\mathbb{N}^*$, *il existe un élément de* $\mathbb{C}[T^{(p)}]^W$ *sur lequel* e^λ *et* e^μ *prennent des valeurs distinctes.*

Démonstration. — (1) Posons $K=\sum a_\alpha k_\alpha$, (a_α) à support fini.

Remarquons que si λ est un poids, alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda_n=n\lambda+(n-1)\delta$ en est un et si pour tout poids λ et pour tout entier n on a : $e^{\lambda_n+\delta}(K)=0$, alors : $\sum a_\alpha t^{n(\lambda+\delta,\alpha)}=0$ et le polynôme de Laurent $\sum a_\alpha X^{(\lambda+\delta,\alpha)}$ devrait avoir une infinité de racines. On conclut alors comme dans la démonstration du fait que la restriction de (,) à $\mathbb{C}[T]$ est non dégénérée.

(2) Notons $\{e^{\mu_1},\ldots,e^{\mu_r}\}$ la réunion des orbites de e^μ et de e^λ privée de e^λ. Pour chaque $s\in\{1,\ldots,r\}$, il existe un monôme $k(s)$ en les $k_i^{\pm p}$ tel que : $e^\lambda(k(s))\neq e^{\mu_s}(k(s))$. Formons $K=\prod[k(s)-e^{\mu_s}(k(s))]$. Alors K est annulé par tous les e^{μ_s} mais pas par e^λ. Alors $\sum w(K)$ est W-invariant, annulé par e^μ, mais :

$$(e^\lambda,\sum w(K))=\mathrm{Card}\{w;\,w(\lambda)=\lambda\}.(e^\lambda,K)\neq 0.$$

COROLLAIRE. — *pour tout z dans* $Z: \psi(z) \in \mathbb{C}[T]^W$.

II. L'ANALOGUE DU THÉORÈME D'HARISH-CHANDRA.

THÉORÈME. — *Soient* λ *et* μ *deux poids tels que* $\chi_\lambda = \chi_\mu$. *Alors*: $\lambda \sim \mu$.

Démonstration. — D'après le point (2) du lemme, il suffit de voir que ψ est surjective sur $\mathbb{C}[T^{(4)}]^W$. On note par la même lettre j les injections de Z dans $(U_t g)^*$ et de $\mathbb{C}[T]$ dans $\mathbb{C}[T]^*$ définies par la forme bilinéaire invariante. D'après la propriété (ii) de celle-ci le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\xi} & \mathbb{C}[T] \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ (U_t g)^* & \xrightarrow[\mathrm{Res}]{} & \mathbb{C}[T]^* \end{array}$$

où Res désigne la restriction à $\mathbb{C}[T]$.

Soit (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie dont le plus haut poids est radiciel et $\mathrm{Ch}\,V = \sum \dim V_\mu e^\mu$ son caractère. On a: $\mathrm{Ch}\,V = j(\sum \dim V_\mu k_{-4\mu})$ Notons Tr_V la trace usuelle sur End V et $\sigma(\mathrm{Tr}_V)$ la forme linéaire ad-invariante déterminée par (ρ, V) sur $U_t g$: $\sigma(\mathrm{Tr}_V): x \to \mathrm{Tr}_V(\rho(k_{-4\delta})\rho(x))$.

Soit $\mathbb{C}[Q]$ l'algèbre du réseau des racines et $\tilde{\sigma}$ l'automorphisme défini par: $\tilde{\sigma}(e^\lambda) = t^{-4(\lambda, \delta)} e^\lambda$. Alors la restriction de $\sigma(\mathrm{Tr}_V)$ à $\mathbb{C}[T]$ est précisément $\tilde{\sigma}(\mathrm{Ch}\,V)$ et $\tilde{\sigma}(\mathrm{Ch}\,V) = j(\sum \dim V_\mu t^{-4(\mu, \delta)} k_{-4\mu})$.

Remarquons aussi que: $\eta^{-1}(k_{-4\mu}) = t^{-4(\mu, \delta)} k_{-4\mu}$, si bien qu'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[T^{(4)}] & \xrightarrow{\eta^{-1}} & \mathbb{C}[T^{(4)}] \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{C}[Q] & \xrightarrow[\tilde{\sigma}]{} & \mathbb{C}[Q] \end{array}$$

Considérons maintenant $K \in \mathbb{C}[T^{(4)}]^W$. $j(K)$ est un élément W-invariant de $\mathbb{C}[Q]$. On sait alors qu'on peut l'écrire: $j(K) = \sum a_\mu \mathrm{Ch}\,V(\mu)$ où $V(\mu)$ est le module de plus haut poids μ.

Alors:

$$\begin{aligned} j \circ \eta^{-1}(K) &= \sigma \circ j(K) = \sum a_\mu \tilde{\sigma}(\mathrm{Ch}\,V(\mu)) \\ &= \sum a_\mu \mathrm{Res}(\sigma(\mathrm{Tr}_{V(\mu)})) \end{aligned}$$

Mais il existe z_μ dans Z tel que $j(z_\mu) = \sigma(\mathrm{Tr}_{V(\mu)})$. Donc:

$$\begin{aligned} j \circ \eta^{-1}(K) &= \sum a_\mu \mathrm{Res}\, j(z_\mu) \\ &= \sum a_\mu j \circ \xi(z_\mu) \\ &= j \circ \xi(\sum a_\mu z_\mu) \end{aligned}$$

j étant injective :

$$K = \eta \circ \xi \left(\sum a_\mu z_\mu\right) = \psi \left(\sum a_\mu z_\mu\right).$$

C. Complète réductibilité des représentations de dimension finie

Pour $\lambda \in \mathscr{H}^*$, on notera $M(\lambda)$ le module standard de plus haut poids e^λ et $V(\lambda)$ son unique quotient irréductible. Comme dans la situation classique, $M(\lambda)$ admet un caractère dans $Z\langle P\rangle$, où P désigne le réseau des poids.

On notera $\leqq$ la relation d'ordre partiel usuelle sur P et $\lambda \to \lambda^*$ l'involution donnée par $-w_0$, où w_0 est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl. Elle préserve la relation d'ordre $\leqq$. De plus, si λ est un poids dominant, le dual $V(\lambda)^*$ muni de la représentation contragrédiente est isomorphe à $V(\lambda^*)$.

THÉORÈME. — *Lorsque t n'est pas algébrique, toute représentation de dimension finie de $U_t g$ est complètement réductible.*

Démonstration. — Soit V un $U_t g$-module de dimension finie. Pour montrer qu'il est complètement réductible, on peut supposer, par un argument de suite de Jordan-Hölder, que l'on est en présence d'une suite exacte :

$$0 \to V(\lambda) \to V \to V(\mu) \to 0$$

Alors :

(1) Si V n'est pas complètement réductible, alors il est indécomposable, engendré par tout vecteur v dont l'image dans $V(\mu)$ est non nulle.

(2) La complète réductibilité pour $U_t sl(2)$ implique que V est somme de ses sous-espaces de poids : $V = \oplus V_\nu$.

(3) Nécessairement : $\lambda \neq \mu$.

En effet, si $\mu = \lambda$, alors $\dim V_\lambda = 2$ et V_λ est annulé par $U_t n_+$. Tout élément non nul v de V_λ engendre un module de plus haut poids e^λ qui ne rencontre V_λ que suivant $C.v$. Mais si on choisit ce v dans $V_\lambda \setminus V(\lambda)_\lambda$, le module qu'il engendre devrait être V tout entier.

(4) Si μ n'est pas $<\lambda$, alors en fait $\lambda < \mu$.

Remarquons que V ne peut avoir de poids e^ν avec $\nu > \mu$. Soit $x \in V$ dont l'image dans $V(\mu)$ engendre $V(\mu)_\mu$: comme V est somme de ses sous-espaces de poids, e^μ doit être un poids de V et on peut supposer x dans V_μ; de plus, pour $i = 1, \ldots, N$, $\rho(e_i) x \in V(\lambda)$. En fait, on a même $\rho(e_i) x = 0$ car sinon ce serait un vecteur de poids $e^{\mu + \alpha_i}$ dans $V(\lambda)$, ce qui est impossible. Donc, x est un vecteur de plus haut poids e^μ, qui engendre V; on sait alors que tous les poids de V sont $\leqq \mu$ et en particulier $\lambda < \mu$.

(5) Si $\mu < \lambda$: la suite exacte duale : $0 \to V(\mu^*) \to V^* \to V(\lambda^*) \to 0$ avec $\mu^* < \lambda^*$ et V^* indécomposable nous ramène à la situation du point précédent.

Remarque. — Cette suite d'arguments: réduction à une suite exacte courte et points (1) à (5) est due au Professeur A. Borel, dans une étude de la possibilité de démontrer le théorème de complète réductiblité pour les algèbres de Lie complexes semi-simples de façon purement algébrique et sans utiliser l'opérateur de Casimir.

La suite de la démonstration donnée ici (qui se transpose immédiatement au cas des algèbres de Lie semi-simples) donne une réponse partielle à cette question: bien qu'elle nécessite l'utilisation de tout le centre de l'algèbre enveloppante, elle ne requiert aucune formule explicite pour un quelconque élément du centre.

CONSÉQUENCE. — Tout revient à montrer qu'on ne peut pas avoir de suite exacte $0 \to V(\lambda) \to V \to V(\mu) \to 0$ avec $\lambda < \mu$ et V indécomposable.

Remarque. — Dans une telle situation, V est un module cyclique engendré par un vecteur de plus haut poids μ: c'est donc un quotient de dimension finie du module standard $M(\mu)$. Or, on montre, dans la situation classique, en utilisant la complète réductibilité des représentations de dimension finie, qu'un tel quotient de dimension finie est nécessairement irréductible et cette démonstration s'adapterait immédiatement à la situation des groupes quantiques.

On a donc une équivalence entre les deux points suivants:

(i) *Toute représentation de dimension finie de* $U_t g$ *est complètement réductible.*

(ii) *Tout* $U_t g$-*module cyclique engendré par un vecteur de plus haut poids et de dimension finie est irréductible.*

On va s'attacher à montrer ce dernier point. On procède par étapes:

(1) Soit V un $U_t g$-module cyclique engendré par un vecteur de plus haut poids e^λ., où λ est dans le réseau des poids. Alors V possède une suite de Jordan-Hölder, dont les quotients sont de la forme $V(\mu)$ avec $\mu \leqq \lambda$ et $\mu + \delta \in W(\lambda + \delta)$.

En particulier, Ch V est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des $\operatorname{Ch} V(\mu)$ avec $\mu \leqq \lambda$ et $\mu + \delta \in W(\lambda + \delta)$.

Démonstration (cf. Humphreys, dans: *Lie Theories and their applications*). — Soit $d(V) = \sum \dim V_\mu$ la somme portant sur les μ tels que:

$$(*) \qquad \mu \leqq \lambda \qquad \text{et} \qquad \mu + \delta \in W(\lambda + \delta).$$

Cette somme est finie.

On fait une récurrence sur $d(V)$.

Supposons $d(V) = 1$. Si V est irréductible, c'est fini. Sinon V possède un sous-module maximal propre, qui contient certainement au moins un vecteur de plus haut poids e^μ pour un poids $\mu < \lambda$. Mais le centre Z agit dans le sous-module engendré par ce vecteur par le caractère χ_λ; donc $\chi_\lambda = \chi_\mu$ et μ devrait satisfaire à $(*)$ d'après l'analogue du théorème d'Harish-Chandra. Contradiction.

Pour l'étape de récurrence, on procède de même: à moins que V ne soit irréductible, il doit contenir un sous-module de plus haut poids V' engendré par un vecteur de plus haut poids e^μ pour un poids $\mu < \lambda$ qui devrait satisfaire à $(*)$. L'hypothèse de récurrence s'applique alors à chacun des modules de plus haut poids V' et V/V'. A partir de leurs suites de Jordan-Hölder, on en fabrique une pour V ayant les quotients de la forme requise.

(2) Appliquons ceci à $V=M(\lambda)$. Soit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ l'ensemble fini des $\mu \leqq \lambda$ tels que $\mu+\delta \in W(\lambda+\delta)$, ordonné de façon à ce que: $\lambda_i \leqq \lambda_j \Rightarrow i \leqq j$. On a alors un système d'équations: $\mathrm{Ch}\, M(\lambda_j)=\sum a_{ij}\, \mathrm{Ch}\, V(\lambda_i)$, $a_{ij} \in \mathbb{N}, a_{ij}=1$ et on somme sur les $i \leqq j$. Posons $a_{ij}=0$ pour $i>j$. La matrice (a_{ij}) est alors inversible sur $\mathbb{Z}$, ce qui permet d'exprimer chaque $\mathrm{Ch}\, V(\lambda_j)$ comme combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des $\mathrm{Ch}\, M(\lambda_j)$ pour lesquels $i \leqq j$.

(3) Par conséquent, si V est un module cyclique de plus haut poids e^λ avec λ un poids, Ch V est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire des $\mathrm{Ch}\, M(\mu)$ avec $\mu \leqq \lambda$ et $\mu+\delta \in W(\lambda+\delta)$.

(4) $\mathrm{Ch}\, M(\lambda)$ est donné par: $d\, \mathrm{Ch}\, M(\lambda)=e^{\lambda+\delta}$ où $d=\prod(e^\alpha-e^{-\alpha})=\sum \varepsilon(w)\, e^{w\delta}$.

Démonstration. — On a: $\mathrm{Ch}\, M(\lambda)=\mathrm{Ch}\, M(0)\; e^\lambda$ et il suffit donc d'établir: $\mathrm{Ch}\, M(0)=e^\delta d^{-1}$.

On va utiliser le résultat suivant de Lusztig [6]:

THÉORÈME. — *Lorsque t n'est pas algébrique, et si λ est un poids dominant, le caractère du module irréductible de dimension finie* $V(\lambda)$ *est le même que celui du module irréductible correspondant sur l'algèbre de Lie g.*

Soit λ un poids dominant: d'après le (3):

$$\mathrm{Ch}\, V(\lambda)=\sum c_\mu(\lambda)\, \mathrm{Ch}\, M(\mu)=\left(\sum c_\mu(\lambda)\, e^{\mu+\delta}\right) e^{-\delta}\, \mathrm{Ch}\, M(0),$$

où l'on somme sur les $\mu \leqq \lambda$ tels que $\mu+\delta \in W(\lambda+\delta)$.

λ étant dominant, $\lambda+\delta$ est strictement dominant, donc les $w(\lambda+\delta)$ sont deux à deux distincts; pour $\mu+\delta=w(\lambda+\delta)$, posons: $c_w(\lambda)=c_\mu(\lambda)$. Ainsi:

$$\mathrm{Ch}\, V(\lambda)=\left(\sum c_w(\lambda)\, e^{w(\lambda+\delta)}\right) e^{-\delta}\, \mathrm{Ch}\, M(0).$$

Utilisant le résultat de Lusztig, on obtient donc, pour tout poids dominant λ:

$$d\left(\sum c_w(\lambda)\, e^{w(\lambda+\delta)}\right) e^{-\delta}\, \mathrm{Ch}\, M(0)=\sum \varepsilon(w)\, e^{w(\lambda+\delta)}.$$

On en déduit tout d'abord que $\mathrm{Ch}\, M(0)$ est dans le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{Z}[P]$, puis que quels que soient les poids dominants λ et μ:

$$\left(\sum c_w(\lambda)\, e^{w(\lambda+\delta)}\right)\left(\sum \varepsilon(w)\, e^{w(\mu+\delta)}\right)=\left(\sum \varepsilon(w)\, e^{w(\lambda+\delta)}\right)\left(\sum c_w(\mu)\, e^{w(\mu+\delta)}\right)$$

et quitte à remplacer λ par $n\lambda+(n-1)\delta$, $n \in \mathbb{N}^*$ on a:

$$\left(\sum c_w(n\lambda+(n-1)\delta)\, e^{nw(\lambda+\delta)}\right)\left(\sum \varepsilon(w)\, e^{w(\mu+\delta)}\right)=\left(\sum \varepsilon(w)\, e^{nw(\lambda+\delta)}\right)\left(\sum c^w(\mu)\, e^{w(\mu+\delta)}\right)$$

Or, λ et μ étant fixés, pour n assez grand les $e^{nw(\lambda+\delta)} e^{w'(\mu+\delta)}$, w et $w' \in W$, sont deux à deux distincts.

En effet, si

$$e^{nw(\lambda+\delta)}\, e^{w'(\mu+\delta)}=e^{nw_1(\lambda+\delta)}\, e^{w'_1(\mu+\delta)},$$

on a :

$$n(w(\lambda+\delta)-w_1(\lambda+\delta))=w'_1(\mu+\delta)-w'(\mu+\delta)$$

et pour $w'_1 \neq w'$ ceci est non nul.

Fixons un tel entier n: on a alors: $\forall\, w, w' \in \mathrm{W}$

$$c_w(n\lambda+(n-1)\delta)\,\varepsilon(w')=\varepsilon(w)\,c_{w'}(\mu)$$

soit encore :

$$\varepsilon(w')\,c_{w'}(\mu)=\varepsilon(w)\,c_w(n\lambda+(n-1)\delta)$$

Ainsi $\varepsilon(w')\,c_{w'}(\mu)$ ne dépend ni de μ ni de w'. Appellons k cet entier non nul.

Pour tout poids dominant λ, on a :

$$\sum c_w(\lambda)\,e^{w(\lambda+\delta)}=k\sum\varepsilon(w)\,e^{w(\lambda+\delta)}$$

donc

$$d\,\mathrm{Ch}\,\mathrm{V}(\lambda)=(k\sum e(w)\,e^{w(\lambda+\delta)})\,de^{-\delta}\,\mathrm{Ch}\,\mathrm{M}(0),$$

d'où : $kde^{-\delta}\,\mathrm{Ch}\,\mathrm{M}(0)=1$.

Comme le terme maximal de $\mathrm{Ch}\,\mathrm{M}(0)$ est e^0, on en déduit immédiatement que $k=1$, puis la formule cherchée pour $\mathrm{Ch}\,\mathrm{M}(0)$.

(5) Soit V en $\mathrm{U}_t g$-module cyclique engendré par un vecteur de plus haut poids e^λ., où λ est un poids dominant, et qui est de plus de dimension finie. Alors le groupe de Weyl agit sur l'ensemble des poids de V et pour tout poids μ de V et tout w dans W on a : $\dim \mathrm{V}_{w\mu}=\dim \mathrm{V}_\mu$.

(La démonstration est la même que celle dans la proposition suivant le théorème 2 de [7].)

(6) Sous les mêmes hypothèses qu'au (5), on a, d'après les points (3) et (4) $d\,\mathrm{Ch}\,\mathrm{V}=\sum c_w(\lambda)\,e^{w(\lambda+\delta)}$ et d'après (5) $d\,\mathrm{Ch}\,\mathrm{V}$ est anti-invariant. Ceci implique que $c_w(\lambda)=\varepsilon(w)$.

On a donc obtenu une formule de caractères, sous la seule hypothèse que V était un module cyclique, de plus haut poids e^λ et de dimension finie, et la formule obtenue est la même que pour $\mathrm{V}(\lambda)$. D'où $\mathrm{V}=\mathrm{V}(\lambda)$.

Remarque. — L'idée de la fin de la démonstration est inspirée de la remarque suivant le théorème 10.4 dans le livre de V. Kac : *Infinite dimensional Lie Algebras*.

Remarque. — Dans le cas où $g=sl(\mathrm{N}+1)$, le théorème est vrai dès que t n'est pas une racine de l'unité. En effet, la construction explicite d'une base à la Poincaré-Birkhoff-Witt pour $\mathrm{U}_t n_-$ donne directement $\mathrm{Ch}\,\mathrm{M}(0)$ et évite le recours au résultat de Lusztig (le résultat a été formulé dans le cadre des $\mathrm{C}[[h]]$-algèbres, mais en fait les mêmes calculs ont lieu dès que t n'est pas racine de l'unité). Pour ce qui est de la forme de Killing, le fait que t ne soit pas algébrique n'est intervenu que dans la preuve du fait qu'elle est non dégénérée, car on avait besoin de spécialiser la R-matrice; ici, la formule explicite obtenue pour R montre que les seuls pôles éventuels sont des racines de l'unité.

(*Voir* [8] pour le théorème à la Poincaré-Birkhoff-Witt et la formule pour la R-matrice universelle pour $U_h sl(N+1)$.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL, Communication privée.

[2] V. G. DRINFLED, *Quantum Groups* (*Proc. of I.C.M.*, Berkeley, 1986).

[3] J. E. HUMPHREYS, *Finite and Infinite Dimensional Modules for Semisimple Lie Algebras*, dans *Lie Theories and their Applications*, Queen's Papers in *Pure Appl. Math.*, n° 48.

[4] M. JIMBO, *A q-Difference Analog of Ug and the Yank, Baxter Equation* (*Lett. Math. Phys.*, Vol. 10, 1985, p. 63-69).

[5] M. JIMBO, *A q-Analog of* $U(gl(N+1))$, *Hecke Algebras and the Yang-Baxter Equation* (*Lett. Math. Phys.*, vol. 11, 1986, p. 247-252).

[6] G. LUSZTIG, *Quantum Deformations of Certain Simple Modules over Enveloping Algebras* (*Adv. Maths.*, vol. 70, 1988, p. 237-249).

[7] M. ROSSO, *Finite Dimensional Representations of the Quantum Analog of the Enveloping Algebra of a Complex Simple Lie Algebra* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 117, 1988, p. 581-593).

[8] M. ROSSO, *An Analogue of P.B.W. Theorem and the Universal R-matrix for* $U_h sl(N+1)$ (*Comm. Math. Phys.*, vol. 124, 1989, p. 307-318).

(Manuscrit reçu le 30 mai 1989).
révisé le 12 septembre 1989).

M. ROSSO,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex.