ÉRIC LEICHTNAM

Le problème de Cauchy ramifié

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 3 (1990), p. 369-443
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_3_369_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 23, 1990, p. 369 à 443.

LE PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ

PAR ERIC LEICHTNAM

0. Introduction

Cet article a pour objet l'étude du problème de Cauchy ramifié linéaire non caractéristique pour les opérateurs analytiques à caractéristiques multiples de multiplicité constante.

Soit $a(x, D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients fonctions holomorphes de $x=(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ décrivant un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que l'hyperplan S d'équation $x^0=0$ soit non caractéristique pour $a(x, D)$. Soit T l'hypersurface de S d'équation $x^0=x^1=0$. Soient $a_m(x, \xi)$ le symbole principal de $a(x, D)$ et :

$$(*) \qquad a_m(x, \xi)=\prod_{\mathrm{S}} a_{m,\, s}(x, \xi)^{m_s}$$

sa décomposition en facteurs irréductibles. Notons d le degré du polynôme réduit

$$b(x, \xi)=\prod_{\mathrm{S}} a_{m,\, s}(x, \xi)$$

et supposons que l'équation en $\xi_0 \in \mathbb{C}$

$$b(0; \xi_0, 1, 0, \ldots, 0)=0$$

admet d racines distinctes. On sait alors construire (*voir* [5]) d hypersurfaces caractéristiques distinctes $\mathrm{K}_i=\{x; k^i(x)=0\}$ issues de T.

Soient U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ [sur lequel les coefficients de $a(x, D)$ sont holomorphes] et x_0 un point de $\mathrm{U} \cap (\mathrm{S} \setminus \mathrm{T})$. Soient v (resp. $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$) un germe en x_0 de fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{C}^n$) tel que v (resp. chaque u_j) se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin d'origine x_0 tracé dans $\mathrm{U} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{d} \mathrm{K}_j\right)$ [resp. $\mathrm{U} \cap (\mathrm{S} \setminus \mathrm{T})$]. Choisissons Δ un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathrm{U} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{d} \mathrm{K}_j\right)$ connexe et simplement connexe ainsi que son intersection avec S tel que l'origine 0 appartienne à $\overline{\mathrm{S} \cap \Delta}$. Alors v (resp. les u_j) se prolongent en fonctions uniformes sur Δ (resp. $\Delta \cap \mathrm{S}$).

Résoudre le problème de Cauchy ramifié

$$(0.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a(x, \mathrm{D})\, u(x) = v(x) \\ \mathrm{D}^h_{x^0}\, u(x)\,|_{\mathrm{S}} = u_h(x'), \qquad 0 \leqq h < m \end{array}\right.$$

c'est par définition trouver un voisinage ouvert Ω de 0 contenu dans U et une fonction u holomorphe sur $\Omega \cap \Delta$ vérifiant $a(x, \mathrm{D})\, u = v$ sur $\Omega \cap \Delta$ et $\mathrm{D}^h_{x^0}\, u\,|_{\mathrm{S} \cap \Delta} = u_h$, $0 \leqq h \leqq m-1$, et admettant un prolongement holomorphe le long de tout chemin issu de $\Omega \cap \mathrm{S} \cap \Delta$ et tracé dans $\Omega \diagdown \bigcup_{j=1}^{d} \mathrm{K}_j$.

Dans la suite de cet article, on commettra fréquemment l'abus de notation qui consiste à désigner par les mêmes lettres les déterminations et leur prolongement ramifié sur le revêtement universel de $\Omega \diagdown \bigcup_{j=1}^{d} \mathrm{K}_j$.

Le résultat principal de cet article est le :

THÉORÈME 0.1. — *Soient* U *un voisinage ouvert de* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ *et* v *une fonction holomorphe quelconque sur le revêtement universel de* U *privé de la réunion des hypersurfaces caractéristiques* $k^i(x) = 0$ $(1 \leqq i \leqq d)$. *Alors il existe un voisinage ouvert* Ω *de* 0 *inclus dans* U *et une solution du problème* (0.1) *holomorphe sur le revêtement universel de* Ω *privé de la réunion des hypersurfaces* $k^i(x) = 0$ $(1 \leqq i \leqq d)$. *En outre on peut énoncer les résultats suivants. Si toutes les données* v *et* u_h $(0 \leqq h \leqq m-1)$ *sont de détermination finie alors la solution est de détermination finie. Si* $a(x, \mathrm{D})$ *est à caractéristiques simples* [i.e. *les entiers* m_s *dans* $(*)$ *sont tous égaux à* 1] *et si toutes les données sont dans la classe de Nilsson relativement à la réunion des hypersurfaces caractéristiques alors la solution est dans la classe de Nilsson.*

REMARQUES 0.2. — 1° Le théorème 0.1 est tout à fait conforme au principe fondamental énoncé par Jean Leray : les singularités de la solution du problème de Cauchy ramifié sont déterminées par les singularités des données.

2° Soient $\mathscr{S}_1, \ldots, \mathscr{S}_p$ des hypersurfaces analytiques transverses à S issues de T, deux à deux transverses et non caractéristiques (pour $a(x, \mathrm{D})$) en chacun de leurs points. Si le second membre du problème (0.1) est ramifié autour de la réunion des $\mathscr{S}_j (1 \leqq j \leqq p)$ et des hypersurfaces caractéristiques alors il existe une unique solution ramifiée autour de la réunion des $\mathscr{S}_j$ et des hypersurfaces caractéristiques et tous les résultats du théorème 0.1 sont encore valables dans cette situation. En effet, on introduit des champs de vecteurs holomorphes sans zéros $\mathrm{X}_j (1 \leqq j \leqq p)$ transverses à S tels que $\mathscr{S}_j$ est caractéristique pour $\mathrm{X}_j (1 \leqq j \leqq p)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème (0.1) au problème de Cauchy obtenu en remplaçant $a(x, \mathrm{D})$ par $\mathrm{X}_1 \circ \ldots \circ \mathrm{X}_p \circ a(x, \mathrm{D})$ et en rajoutant les traces convenables. Ce qui précède est la réponse à une question posée par Pierre Schapira.

3° Si toutes les données v et (u_h) sont de détermination finie alors les résultats démontrés dans l'appendice C et la preuve du théorème 0.1 permettent dans certains cas (*voir* théorème 0.6) de majorer avec précision les valeurs propres de la monodromie de la solution en fonction de celles des données.

Dans le cas particulier où le second membre du problème (0.1) est de la forme $\sum_{i=1}^{d} v^i(\log k^i(x), x)$ où $(t, x) \mapsto v^i(t, x)$ $(1 \leqq i \leqq d)$ appartient à l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\omega \times \Omega)$ des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}_\omega \times \Omega$, $\mathcal{R}_\omega$ désignant le revêtement universel du disque de $\dot{\mathrm{D}}_\omega$ de $\mathbb{C}$ ouvert pointé de centre 0 et de rayon $\omega > 0$; le théorème (0.1) est prouvé dans [5], la solution est de la forme $\sum_{i=1}^{d} h^i(\log k^i(x), x)$ où $h^i \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_{\omega'} \times \Omega')$ $(1 \leqq i \leqq d)$, elle est construite explicitement en fonction des données. La clause relative à l'unicité dans notre théorème 0.1 est donc un résultat de [5]. Dans la suite nous supposerons $d \geqq 2$.

Pour donner une meilleure idée de la structure des fonctions holomorphes ramifiées autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques nous allons calculer le groupe fondamental π_1 (pointé en x_0) de $\Omega' \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{d} \mathrm{K}_j \right)$, dans le cas particulier mais significatif où toutes les hypersurfaces caractéristiques sont des hyperplans.

LEMME 0.3. — *Soit Ω' un polydisque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Supposons que les K_j $(1 \leqq j \leqq d)$ soient des hyperplans. Alors le groupe fondamental π_1 de $\Omega' \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{d} \mathrm{K}_j \right)$ est égal à :*

$$\mathbb{Z} \times (\underbrace{\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}}_{d-1 \text{ fois}})$$

et son groupe d'homologie H_1 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est égal à $\mathbb{Z}^d$.

Preuve. — On sait (*voir* [3]) que le H_1 est le quotient du π_1 par son groupe des commutateurs donc la seconde assertion découle de la première. Il existe un changement linéaire de coordonnées permettant d'écrire $x^0 = k^1(x)$, $x^1 = k^2(x)$, $k^i(x) = \lambda_i x^0 + x^1$ $(2 \leqq i \leqq d)$ où les nombres complexes λ_i sont non nuls et deux à deux distincts. Par abus nous noterons K_i les droites de $\mathbb{C}^2 = \{(x^0, x^1)\}$ définies par les équations $k^i(x) = 0$. Un argument d'homogénéité montre que le groupe fondamental de Ω' privé de la réunion des hypersurfaces caractéristiques coïncide avec le groupe fondamental de $\mathbb{C}^2 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{d} \mathrm{K}_j \right)$.

L'application suivante :

$$\mathbb{C}^2 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{d} \mathrm{K}_j \right) \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0, -\lambda_2, -\lambda_3, \ldots, \lambda_d\}$$

$$(x^0, x^1) \mapsto \left(x^0, \frac{x^1}{x^0} \right)$$

définit un difféomorphisme. On obtient alors immédiatement le résultat.

Dans cet article nous ne supposons pas que les K_i sont des hyperplans. Dans le cas $d \geqq 3$ le π_1 du lemme 0.3 n'est pas commutatif. Ceci nous conduit à donner la définition générale suivante :

DÉFINITION 0.4. — Soient Ω' un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, $x_0 \in S \cap \Omega'$, et u un germe holomorphe en x_0 prolongeable le long de tout chemin de $\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{d} K_j$. On dit que u est à monodromie abélienne si u est invariant sous l'action du sous-groupe D des commutateurs du groupe fondamental de $\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{d} K_j$. D'après la théorie des revêtements il est équivalent de dire que u permet de définir une fonction holomorphe sur le revêtement associé à D.

Nous montrerons dans la section 8 en construisant des contre-exemples que si le second membre du problème (0.1) est à monodromie abélienne alors en général la solution ne sera pas à monodromie abélienne toutefois le théorème suivant (prouvé dans la section 8) indique que la monodromie de la solution est – en un certain sens – proche d'une monodromie abélienne.

THÉORÈME 0.5. — *Supposons que le second membre v du problème* (0.1) *soit à monodromie abélienne et reprenons les notations du théorème* 0.1. *Alors le groupe* D (voir *déf.* 0.4) *définit une représentation unipotente d'ordre* $\leqq 2$ *du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel engendré par les déterminations* (*en un point fixé*) *de la solution u du problème* (0.1). *Si cette représentation est diagonalisable alors u est à monodromie abélienne.*

Le théorème suivant est démontré à la fin de la section 3, c'est la réponse à une question posée par Jean-Pierre Labesse et Gilles Lebeau.

THÉORÈME 0.6. — *Supposons que toutes les données du problème* (0.1) *sont de détermination finie. Si la monodromie de v est résoluble* [*resp. la monodromie de toutes les données est unipotente*] *alors la monodromie de la solution est résoluble* [*resp. unipotente*].

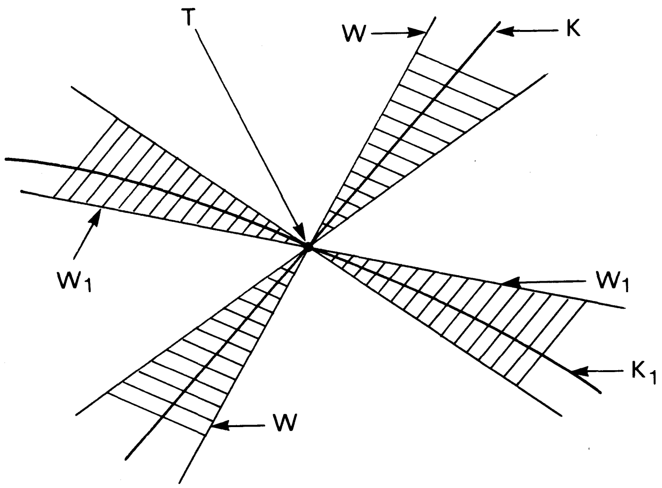
Lorsque $d=2$ la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques définit un diviseur à croisement normal, dans cette situation on vérifie que si v est une fonction holomorphe ramifiée autour de la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques alors il existe $\omega > 0$, un voisinage ouvert Ω de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et une fonction $g(t_1, t_2, x)$ holomorphe sur $\mathscr{R}_{\omega}^{2} \times \Omega$ tels que : $\forall x \in \Omega$, $|k^i(x)| < \omega$, $1 \leqq i \leqq 2$ et le prolongement ramifié de v le long de tout chemin de $\Omega \setminus \bigcup_j K_j$ coïncide avec :

$$g(\operatorname{Log} k^1(x), \log k^2(x), x). \tag{0.2}$$

Lorsque $d \geqq 3$ il semble qu'il n'existe pas (en général) de représentation – analogue à la formule (0.2) – des fonctions holomorphes ramifiées autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques. Pour contourner cette difficulté Lê dung Trang m'a suggéré de désingulariser suivant le lieu des hypersurfaces caractéristiques en introduisant des voisinages effilés. Cette suggestion a été le point de départ de ce travail; j'ai donc plaisir à remercier ici Lê Dung Trang.

Maintenant nous allons décrire la stratégie de la preuve du théorème 0.1. Dans la section 2 nous définissons les voisinages effilés d'hypersurfaces caractéristiques ou non caractéristiques issues de T. On donne une expression explicite du revêtement universel d'un voisinage effilé, ceci nous permet d'obtenir dans la proposition 2.5 une représentation — analogue à la formule (0.2) — des fonctions holomorphes ramifiées dans un voisinage effilé d'une hypersurface caractéristique.

Sur le dessin ci-dessous W_1 [resp. W] représente un voisinage effilé de l'hypersurface caractéristique K_1 [resp. d'une hypersurface K non caractéristique issue de T].



Dans la section 3 nous admettons le théorème 3.1 qui affirme qu'on peut recouvrir un voisinage ouvert de l'origine par un nombre fini de voisinages effilés $W_i (1 \leqq i \leqq N)$ tels que pour toute fonction holomorphe ramifiée dans W_i — encore notée v — définie à partir d'une détermination de v en un point de W_i il existe une fonction holomorphe ramifiée u sur W_i solution de l'équation $a(x, D) u = v$. Nous introduisons un nombre fini d'hyperplans non caractéristiques $H(i, j)$ issus de T et nous rappelons le théorème de [5] qui affirme l'existence d'une solution holomorphe ramifiée autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques K_l, $1 \leqq l \leqq d$ pour chaque problème de Cauchy du type :

$$\begin{gathered} a(x, D) u = 0 \\ \partial_n^h u |_{H(i, j)} = w_h, \qquad 0 \leqq h < m. \end{gathered}$$

Nous prouvons alors qu'on peut prolonger un germe de solution u du problème (0.1) le long de tout chemin Γ ne rencontrant pas les hypersurfaces caractéristiques. En outre nous montrons que le prolongement ramifié u le long de Γ possède une structure particulière grâce à laquelle il n'y a pas de problèmes de rétrécissements d'ouverts lorsque le chemin Γ passe d'un voisinage effilé W_i à un voisinage effilé W_j. La structure du germe de solution et les précisions du théorème 3.1 permettent de voir que la solution est de détermination finie si les données le sont et de prouver le théorème 0.6. Nous utilisons le fait (démontré dans l'appendice C) que la solution du problème de Cauchy à second membre nul est de détermination finie si les données de Cauchy le sont.

Dans l'appendice B nous prouvons le théorème 3.1 dans le cas d'un voisinage effilé d'une hypersurface *non* caractéristique en reprenant une suggestion de Claude Wagschal et en utilisant le théorème de Cauchy-Kovaleski. Dans la section 4 nous considérons un voisinage effilé W_2 de l'hypersurface caractéristique $(k^2)^{-1}(0)$ et une détermination de v en un point de W_2. La proposition 2.5 assure l'existence d'une fonction $g'(t, x)$ holomorphe sur un ensemble de la forme $\mathscr{R}(c, \omega) \times \Omega$ où

$$\mathscr{R}(c, \omega) = \{ t = (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, \operatorname{Re} t_1 < \log \omega, \operatorname{Re} t_2 \text{-} \operatorname{Re} t_1 \leqq c \}$$

telle que le prolongement ramifié de v le long des chemins de W_2 coïncide avec $g'(\log x^0, \log k^2(x), x)$. Nous chercherons alors une solution $u(x)$ — holomorphe ramifiée dans W_2 — de l'équation $a(x, D) u = v$ sous la forme $u(x) = h(\log x^0, \log k^2(x), x)$ où $h \in \mathscr{H}(\mathscr{R}(c, \omega) \times \Omega)$. Le lemme 4.3 assure que quand on applique $a(x, D)$ à $h(\log x^0, \log k^2(x), x)$ le coefficient de $(e^{-t_1} \partial_{t_1})^{m_2} \circ (e^{-t_2} \partial_{t_2})^{m - m_2}$ n'est pas nul, m_2 désignant la multiplicité de l'hypersurface $(k^2)^{-1}(0)$. Ce fait permet de ramener la preuve du théorème 3.1 [*i. e.* l'existence d'une solution u de l'équation $a(x, D) u = v$] à la convergence de la série $\sum_{l \geqq 0} \mathscr{H}^l g(t, x)$ sur un ensemble du type $\mathscr{R}(c, \omega) \times \Omega$ où $\mathscr{H}$ et g sont définis dans la section 4. La proposition 4.5 assure la convergence de cette série. On pose $\mathscr{D}_j = e^{-t_j} \partial_{t_j}$, $1 \leqq j \leqq 2$ et on définit deux opérateurs d'intégrations à extrémités variables :

$$\mathscr{D}_1^{-1} u(t_1, t_2) = \int_{t_2 - c}^{t_1} e^{\theta} u(\theta, t_2) \, d\theta, \qquad \mathscr{D}_2^{-1} u(t_1, t_2) = \int_{t_1 + c}^{t_2} e^{\sigma} u(t_1, \sigma) \, d\sigma.$$

L'opérateur $\mathscr{H}$ précédemment mentionné est alors somme finie de termes du type :

$$b_{\lambda, \mu, \beta}(x) \mathscr{D}_1^{\mu} \mathscr{D}_2^{\lambda} \mathscr{D}_1^{-m_2} \mathscr{D}_2^{-(m - m_2)} D_x^{\beta}$$

où λ et μ sont des entiers $\geqq 0$ (*voir* § 4 pour plus de précisions). $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ commutent mais $\mathscr{D}_i$ et $\mathscr{D}_j^{-1}$ ne commutent pas. L'obtention de majorations sur le terme général de $\mathscr{H}^l g$ permettant d'établir la convergence de la série $\sum_{l \geqq 0} \mathscr{H}^l g$ nécessite alors l'étude de commutateurs convenables (*voir* § 5 et l'appendice A).

Le procédé de désingularisation que nous utilisons ne nous permet pas de construire explicitement la solution du problème (0.1) en fonction des données. Toutefois lorsque $d = 2$ nous montrons [*voir* remarque (7.23)] qu'il est possible de construire explicitement la solution en fonction des données.

Enfin il m'est agréable de remercier Gilles Lebeau qui a bien voulu lire ce texte et dont les remarques ont permis d'en améliorer le contenu.

PLAN DE L'ARTICLE

1. Notations

Nous commençons par rappeler quelques notations. Les coordonnées d'un point x de $\mathbb{C}^{n+1}$ seront notées $(x^j)_{0 \leqq j \leqq n}$. Si $\beta=(\beta_0, \ldots, \beta_n)$ est un multi-indice à composantes entières, on appelle longueur de β l'entier $|\beta|=\sum_0^n |\beta_i|$. L'opérateur de dérivation par rapport à la variable $x^j (0 \leqq j \leqq n)$ sera noté D_{x^j} et, si $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$ est un multi-indice de dérivation, nous poserons :

$$D_x^\beta = D_{x^0}^{\beta_0} \times \ldots \times D_{x^n}^{\beta_n}.$$

On peut écrire $a(x, D)$ sous la forme :

$$a(x, D)=\sum_{|\beta| \leqq m} a_\beta(x) D_x^\beta,$$

les fonctions a_β étant holomorphes sur un polydisque ouvert U de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Par définition le polynôme caractéristique de $a(x, D)$ a pour expression :

$$a_m(x, \xi)=\sum_{|\beta|=m} a_\beta(x) \xi^\beta.$$

Maintenant, nous rappelons comment sont définies dans [5] les hypersurfaces caractéristiques $k^i=0$, $1 \leqq i \leqq d$. On sait que l'anneau A des polynômes à $n+1$ indéterminées à coefficients dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine est factoriel; le polynôme caractéristique $a_m(x, \xi)$ de $a(x, D)$ se décompose en facteurs irréductibles :

$$(*) \qquad \prod_{S} a_{m,\, s}(x, \xi)^{m_s} = a_m(x, \xi)$$

l'entier $m_s \geqq 1$ est appelé la multiplicité du facteur irréductible $a_{m,\,s}(x, \xi)$; $a_{m,\,s}(x, \xi)$ est un polynôme homogène en ξ de degré d_s et à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine; sans restreindre la généralité, on peut supposer ces coefficients holomorphes dans U. On a $m = \sum d_s m_s$. Considérons alors le polynôme de degré $d = \sum d_s$.

$$b(x, \xi) = \prod_{s} a_{m,\,s}(x, \xi).$$

Nous supposerons que l'équation en ξ_0 :

$$b(0; \xi_0, 1, 0, \ldots, 0) = 0$$

admet d racines distinctes $(\lambda_i)_{1 \leqq i \leqq d}$. Alors il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\forall (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{C}^2, \quad b(0; \xi_0, \xi_1, 0, \ldots, 0) = \mathrm{C} \prod_{j=1}^{d} (\xi_0 - \lambda_j \xi_1).$$

Nous noterons $k^i\,(1 \leqq i \leqq d)$ la solution du problème de Cauchy du premier ordre :

$$b(x, \operatorname{grad} k^i(x)) = 0$$
$$k^i(x) = x^1 \qquad \text{pour} \quad x^0 = 0$$
$$\operatorname{grad} k^i(0) = (\lambda_i, 1, 0, \ldots, 0);$$

ces fonctions k^i sont définies et holomorphes au voisinage de l'origine, nous pouvons évidemment les supposer définies et holomorphes dans U. Dans [5] sont donc ainsi construites d hypersurfaces caractéristiques (issues de T) K_i d'équations $k^i(x) = 0$ $(1 \leqq i \leqq d)$. Les hypothèses précédentes montrent que quitte à diminuer U nous pouvons supposer que pour $1 \leqq i \leqq d$, $k^i(x) = (\lambda_i(x)\,x^0 + x^1)\,c_i(x)$ où $x \mapsto \lambda_i(x)$, $x \to c_i(x)$ sont des fonctions holomorphes sur U vérifiant $\lambda_i(0) = \lambda_i$, $c_i(0) = 1$, $\forall x \in \mathrm{U}\; 0{,}99 < |c_i(x)| < 1{,}01$.

Remarque 1.1. — Soit K une hypersurface d'équation locale $k(x) = 0$ $(\mathit{grad}\, k(x) \neq 0)$ caractéristique pour l'opérateur $a(x, \mathrm{D})$ et issue de T. On vérifie aisément qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ et $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ tels que $\operatorname{grad} k(0) = \mathrm{C}(\lambda_i, 1, 0, \ldots, 0)$. La théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre montre alors qu'il existe un voisinage V de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\mathrm{V} \cap \mathrm{K} = \mathrm{V} \cap \mathrm{K}_i$.

2. Voisinages effilés et revêtements universels

Dans cette section nous construisons des voisinages effilés d'hypersurfaces caractéristiques ou non caractéristiques (def. 2.3), nous montrons qu'ils recouvrent un voisinage de l'origine (lemme 2.4) et nous donnons en utilisant la proposition 2.2 une représentation des fonctions holomorphes ramifiées dans un voisinage effilé d'une hypersurface caractéristique (prop. 2.5).

DÉFINITION 2.1. — Soient $\omega>0$ et $c<0$, on pose

$$\mathrm{X}(c, \omega)=\left\{(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2/0<|z_1|<\omega,\ 0<\left|\frac{z_2}{z_1}\right|<e^c\right\}$$

PROPOSITION 2.2. — *Soient* $\omega>0$ *et* $c<0$.

1° *Posons*

$$\mathscr{R}(c,\omega)=\{(t_1, t_2)\in\mathbb{C}^2/\mathrm{Re}\,t_1<\log\omega, \mathrm{Re}\,t_2-\mathrm{Re}\,t_1\leqq c\}.$$

$\mathscr{R}(c, \omega)$ *est convexe. Soit* $(t_1, t_2)\in\mathscr{R}(c, \omega)$ *alors les segments* $[(t_2-c, t_2), (t_1, t_2)]$ *et* $[(t_1, t_1+c), (t_1, t_2)]$ *sont inclus dans* $\mathscr{R}(c, \omega)$ *et on a* $\mathrm{Re}\,t_2\leqq\mathrm{Re}\,t_2-c<\log\omega$.

2° *Le revêtement universel* $\mathscr{R}'(c, \omega)$ *de* $\mathrm{X}(c, \omega)$ *est donné par*

$$\mathscr{R}'(c,\omega)=\{(t_1, t_2)\in\mathbb{C}^2/\mathrm{Re}\,t_1<\log\omega, \mathrm{Re}\,t_2-\mathrm{Re}\,t_1<c\}$$
$$p'\,|\,\mathscr{R}'(c,\omega)\mapsto\mathrm{X}(c,\omega)$$
$$(t_1, t_2)\mapsto(e^{t_1}, e^{t_2}).$$

Le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{X}(c, \omega))$ *de* $\mathrm{X}(c, \omega)$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}^2$.

Note. — Nous travaillerons avec des fonctions holomorphes sur des *ouverts* de la forme $\mathscr{R}'(c+\varepsilon, \omega)$. Pour définir les opérateurs d'intégration $\mathscr{D}_1^{-1}$, $\mathscr{D}_2^{-1}$ dans la section 4 nous utiliserons les ensembles $\mathscr{R}(c, \omega)$ car ils contiennent les deux segments mentionnés dans le 1°. Notons que $\mathscr{R}(c, \omega)$ contient l'ouvert $\mathscr{R}'(c, \omega)$ et que $\forall\varepsilon>0$, $\mathscr{R}'(c+\varepsilon, \omega)$ contient $\mathscr{R}(c, \omega)$.

Preuve. — 2° $\dot{\mathrm{D}}_\omega$ désignant le disque pointé de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon $\omega>0$ et $\mathscr{R}_\omega$ désignant le demi-plan de $\mathbb{C}$ défini par $\mathrm{Re}\,z<\log\omega$, le revêtement de $\dot{\mathrm{D}}_\omega\times\dot{\mathrm{D}}_\omega$ est donné par :

$$p\,|\,\mathscr{R}_\omega^2\to\dot{\mathrm{D}}_\omega^2$$
$$(t_1, t_2)\mapsto(e^{t_1}, e^{t_2}).$$

Il est clair que $\mathscr{R}'(c, \omega)=p^{-1}(\mathrm{X}(c, \omega))$, comme p est surjective ceci entraîne que $\mathrm{X}(c, \omega)=p(\mathscr{R}'(c, \omega))$. On voit que p induit un revêtement p' de $\mathrm{X}(c, \omega)$.

Comme $\mathscr{R}'(c, \omega)$ est une partie convexe de $\mathbb{C}^2$, p' définit un revêtement simplement connexe de $\mathrm{X}(c, \omega)$. En outre il est clair que le groupe G des automorphismes du revêtement universel p' est engendré par les deux translations $(t_1, t_2)\mapsto(t_1+2i\pi, t_2)$, $(t_1, t_2)\mapsto(t_1, t_2+2i\pi)$. Comme G est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ on en déduit que le groupe fondamental de $\mathrm{X}(c, \omega)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Dans cette section nous fixons un polydisque ouvert U *de centre* $0\in\mathbb{C}^{n+1}$.

DÉFINITION 2.3. — Rappelons (*voir* 1) que pour $1\leqq i\leqq d$, $k^i(x)=(\lambda_i(x)x^0+x^1)c_i(x)$, posons $\mathrm{C}=1+\max\limits_{1\leqq i\leqq d}|\lambda_i|$.

1° Soient $i\in\{1, 2, \ldots, d\}$ et $r>0$, nous dirons que l'ensemble W défini par :

$$\mathrm{W}=\{x\in\mathrm{U}/|\lambda_i(0)x^0+x^1|<r|x^0|, k^i(x)\neq0\}$$

est un voisinage effilé de l'hypersurface caractéristique $(k^i)^{-1}(0)$. W *ne contient aucun point de* $(k^i)^{-1}(0)$.

2° Pour chaque hypersurface $s^{-1}(0)$ de U ayant une équation du type $x^0=0$ ou $\lambda x^0+x^1=0\,(\lambda\in\mathbb{C})$ nous allons définir des voisinages effilés de $s^{-1}(0)$ *contenant* $s^{-1}(0)\setminus T$ [nous utiliserons en effet des hypersurfaces non caractéristiques ne rencontrant pas les hypersurfaces caractéristiques de sorte que le second membre v du problème (0.1) ne présente pas de singularités suivant $s^{-1}(0)\setminus T$].

Premier cas : $s(x)=x^0$, on pose

$$W=\{x\in U/\,|s(x)|<r\,|x^1|\}\qquad \text{où}\quad r>0.$$

Deuxième cas : $s(x)=x^0+(x^1/\lambda)\,(\lambda\in\mathbb{C})$ et $|\lambda|>C$, on pose

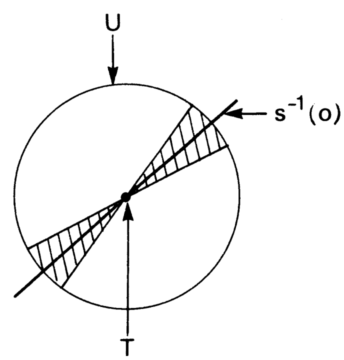
$$W=\{x\in U/\,|s(x)|<r\,|x^1|\}\qquad \text{où}\quad r>0\quad \text{et}\quad r\neq\frac{1}{|\lambda|}.$$

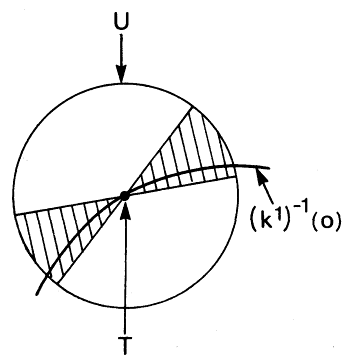
Troisième cas : $s(x)=\lambda x^0+x^1\,(\lambda\in\mathbb{C})$ et $|\lambda|\leqq C$, on pose

$$W=\{x\in U/\,|s(x)|<r\,|x^0|\}\qquad \text{où}\quad r>0.$$

La figure (2.1) [resp. (2.2)] ci-dessous représente un voisinage effilé de l'hypersurface non caractéristique $s^{-1}(0)$ [resp. de $(k^1)^{-1}(0)$]

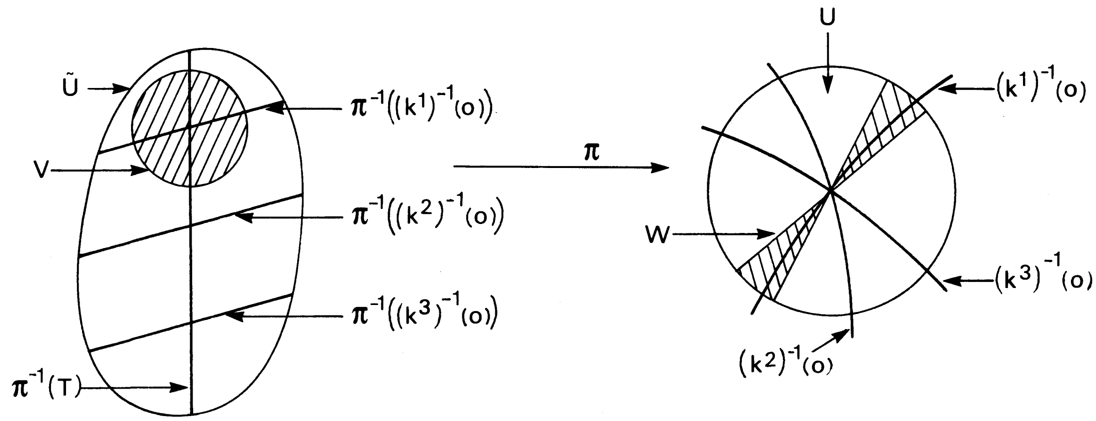
(2.1)





(2.2)

On peut donner une interprétation plus géométrique des voisinages effilés. Considérons $(\pi, \tilde{U})$ l'éclatement de U suivant $T: x^0 = x^1 = 0$, $\pi: \tilde{U} \to U$. $\pi^{-1}(T)$ est appelé le diviseur exceptionnel de l'éclatement (*voir* [4]). Un voisinage effilé W de $(k^1)^{-1}(0)$ est l'image par π d'un ouvert V de $\tilde{U}$ contenant l'intersection du diviseur exceptionnel et de $(\pi^{-1})((k^1)^{-1}(0))$, nous illustrons ce fait à l'aide de la figure ci-dessous



LEMME 2.4. — *Reprenons les notations de la définition* 2.3. *Considérons pour chaque* $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ *un voisinage effilé* W_i *de l'hypersurface caractéristique* $(k^i)^{-1}(0)$. *Supposons les* W_i *deux à deux disjoints. Alors il existe un polydisque ouvert* U_1 (*inclus dans le polydisque* U *de la définition* 2.3) *de centre* 0 *tel que les trois assertions suivantes sont vérifiées.*

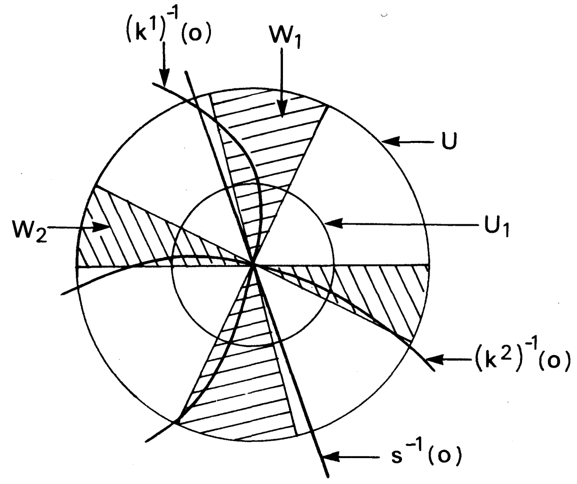
1° *Toute hypersurface de* U_1 *non incluse dans la réunion des* $(W_i \cup (k^i)^{-1}(0)) \cap U_1$ *et ayant une équation du type* $x^0 = 0$ *ou* $\lambda x^0 + x^1 = 0$ *est non caractéristique pour* $a(x, D)$ *en chacun de ses points* (*dans* U_1) *et ne rencontre pas dans* $U_1 \setminus T$ *les hypersurfaces caractéristiques.*

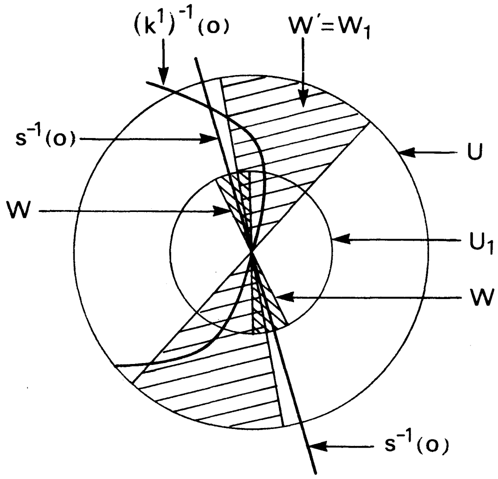
2° *Si pour chaque hypersurface* $s^{-1}(0)$ *de* U_1 *non incluse dans la réunion des* $(W_i \cup (k^i)^{-1}(0))) \cap U_1$ *et ayant une équation du type* $x^0 = 0$ *ou* $\lambda x^0 + x^1 = 0$ *on se donne un voisinage effilé* W_s (voir 2°) *de la définition* 2.3) *de* $s^{-1}(0)$ *alors la réunion de tous les* W_s *et de tous les* $W_i \cup (k^i)^{-1}(0)$ *recouvre* U_1 *et on peut en extraire un recouvrement fini. En outre chaque hypersurface* $s^{-1}(0)$ *possède un voisinage effilé* W_s *ne rencontrant aucune hypersurface caractéristique dans* U_1 *et tel que toute hypersurface de* U_1 *incluse dans* W_s *et ayant une équation du type* $\lambda x^0 + x^1 = 0$ *est non caractéristique.*

3° *Conservons les notations du* 2°. *Considérons deux voisinages effilés* W *et* W' *éléments de l'ensemble constitué des* W_s *et des* W_i. *Supposons* $W \cap W' \cap U_1 \neq \varnothing$, *alors* $W \cap W' \cap U_1$ *est un ouvert connexe* (*par arcs*) *ainsi que son intersection avec tout polydisque ouvert de centre* 0 *et* $(W \cap W' \cap U_1) \cup T$ *contient des hypersurfaces ayant des équations du type :* $\lambda' x^0 + x^1 = 0$ $(\lambda' \in \mathbb{C}^*)$, *non caractéristiques et ne rencontrant pas dans* $U_1 \setminus T$ *les hypersurfaces caractéristiques.*

En outre l'intersection d'un voisinage effilé et d'un polydisque ouvert de centre l'origine est connexe.

La figure (2.3) [resp. (2.4)] illustre le 1° [resp. le 3°] du lemme 2.4.





Preuve 1°. — Il existe pour chaque $1 \leqq i \leqq d$ un réel $r_i > 0$ tel que :

$$W_i = \{ x = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^n) \in U / |\lambda_i(0)\, x^0 + x^1| < r_i |x^0|,\ k^i(x) \neq 0 \}.$$

Reprenons les notations de la section 1, il est clair qu'il existe un polydisque ouvert U_1 (inclus dans U) de centre 0 tel que pour tout x de U_1 et tout nombre complexe λ vérifiant $\forall j \in \{1, 2, \dots, d\}$, $|\lambda - \lambda_j(0)| \geqq r_j/2$ on a :

$$(*) \qquad b(x;\, 1, 0, \dots, 0) \neq 0, \qquad b(x;\, \lambda, 1, 0, \dots, 0) \neq 0$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}, \quad |\lambda_i(x) - \lambda_i(0)| < \frac{r_i}{8}, \qquad |\lambda - \lambda_i(x)| \geqq \frac{r_i}{4}.$$

L'hyperplan S d'équation $x^0 = 0$ ne rencontre pas les $(W_i \cup (k^i)^{-1})(0)) \setminus T$. Une hypersurface de U_1 d'équation $\lambda x^0 + x^1 = 0$ est non incluse dans la réunion des $(W_i \cup (k^i)^{-1}(0)) \cap U_1$ si et seulement si $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $|\lambda - \lambda_i(0)| \geqq r_i$. Cela dit les propriétés $(*)$ montrent que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$:

$$(**)\qquad (x \in U_1 \setminus T \text{ et } k^i(x)=0) \quad \Rightarrow \quad |\lambda_i(0)\, x^0 + x^1| = |\lambda_i(0) - \lambda_i(x)| . |x^0| < \frac{r_i}{8} |x^0|.$$

Par conséquent une hypersurface d'équation $\lambda x^0 + x^1 = 0$ telle que $|\lambda - \lambda_i(0)| \geqq r_i/2$ ne rencontre pas $(k^i)^{-1}(0)$ dans $U_1 \setminus T$. Les propriétés $(*)$ et $(**)$ permettent alors d'obtenir immédiatement le 1°.

2° Notons $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions $s : x \mapsto s(x)$ de la forme $s(x) = x^0$ ou $s(x) = \lambda x^0 + x^1$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et vérifie $\forall i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $|\lambda - \lambda_i(0)| \geqq r_i$. Pour chaque s de $\mathscr{F}$ considérons un voisinage effilé W_s de $s^{-1}(0)$. Il est clair que :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, d\}$$

$$\left\{ x \in U_1 / x^0 \neq 0 \text{ et } \frac{x^1}{x^0} \in D(-\lambda_i(0), r_i) \right\} \subset W_i \cup (k^i)^{-1}(0)$$

si $s(x) = \lambda x^0 + x^1$ alors il existe $r' > 0$ tel que :

$$\left\{ x \in U_1 / x^0 \neq 0 \text{ et } \frac{x^1}{x^0} \in D(-\lambda, r') \right\} \subset W_s$$

si $s(x) = x^0$ alors il existe $R > 0$ tel que :

$$\left\{ x \in U_1 / (x^0 = 0 \text{ et } x^1 \neq 0) \text{ ou } \left(x^0 \neq 0 \text{ et } \left| \frac{x^1}{x^0} \right| \geqq R \right) \right\} \subset W_s.$$

Il est alors clair que la réunion des W_s et des $W_i \cup (k^i)^{-1}(0)$ contient U_1, la compacité du disque fermé $\bar{D}(0, R)$ de $\mathbb{C}$ permet d'extraire un recouvrement fini. Enfin on vérifie aisément que chaque hypersurface $s^{-1}(0)\,(s \in \mathscr{F})$ possède un voisinage effilé W'_s ne rencontrant pas les ensembles :

$$\left\{ x \in U / |\lambda_i(0)\, x^0 + x^1| \leqq \frac{r_i}{2} |x^0| \right\}, \qquad 1 \leqq i \leqq d.$$

La propriété $(**)$ du 1° montre alors que W'_s ne rencontre pas dans U_1 les hypersurfaces caractéristiques.

3° Pour fixer les idées nous raisonnerons dans le cas où W est un voisinage effilé d'une hypersurface d'équation : $x^0 + (x^1/\lambda) = 0\,(|\lambda| > C)$

$$W = \left\{ x \in U / \left| x^0 + \frac{x^1}{\lambda} \right| < r |x^1| \right\} \qquad \text{où} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad r \neq \frac{1}{|\lambda|}.$$

où $\forall j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $|\lambda - \lambda_i(0)| \geqq r_i$, et dans le cas où W′ est égal au voisinage effilé W_1 de $(k^1)^{-1}(0)$.

Considérons le difféomorphisme

$$\psi \mid \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

$$(x^0, x^1) \mapsto \left(x^0, \frac{x^1}{x^0} \right).$$

On vérifie aisément que $B = \{ z \in \mathbb{C}^* / \lvert (1/z) + (1/\lambda) \rvert < r \}$ est un disque ouvert si $\lvert \lambda \rvert r < 1$, est le complémentaire d'un disque fermé si $\lvert \lambda \rvert r > 1$. $A = \{ z \in \mathbb{C} / \lvert \lambda_1(0) + z \rvert < r_1 \}$ est un disque ouvert. Il est clair que $A \cap B$ est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$. Posons

$$F = \{ (x^0, x^1) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} / \psi(x^0, x^1) \in \mathbb{C}^* \times (A \cap B) \}$$

F est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Un argument d'homogénéité en (x^0, x^1) permet de voir que

$$E = \{ x = (x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n) \in U_1 / (x^0, x^1) \in F \}$$

est un ouvert connexe de U_1. Quitte à diminuer U on peut évidemment supposer que les différentielles des k^j $(1 \leqq j \leqq d)$ ne s'annulent pas dans U. $W \cap W' \cap U_1$ est le complémentaire dans l'ouvert E de l'hypersurface fermée lisse holomorphe d'équation $k^1 = 0$. Donc $(W \cap W' \cap U_1)$ est connexe ainsi que son intersection avec tout polydisque ouvert de centre 0. De même on vérifie que $(W \cap U_1) \setminus S$ est connexe (S est l'hyperplan d'équation $x^0 = 0$). Comme $\lvert \lambda - \lambda_1(0) \rvert \geqq r_1$, $(W \cap U_1) \setminus S$ contient un point $z = (z^0, z^1, z^2, \ldots, z^n)$ tel que $\lvert (z^1/z^0) + \lambda_1(0) \rvert > r_1$. Comme $W \cap W' \cap U_1 \neq \varnothing$, $(W \cap U_1) \setminus S$ contient un point $y = (y^0, y^1, y^2, \ldots, y^n)$ tel que $\lvert (y^1/y^0) + \lambda_1(0) \rvert < r_1$, un argument de connexité montre alors que $(W \cap U_1) \setminus S$ contient des points $(x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ tels que $\lambda' = -(x^1/x^0) \neq 0$ et $r_1/2 \leqq \lvert \lambda_1(0) - \lambda' \rvert < r_1$. Comme les W_i sont deux à deux disjoints on a $\lvert \lambda' - \lambda_i(0) \rvert \geqq r_i/2$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Les propriétés $(*)$ et $(**)$ écrites dans la preuve de 1° montrent alors que $(W \cap W' \cap U_1) \cup T$ contient des hypersurfaces non caractéristiques d'équation $\lambda' x^0 + x^1 = 0$ $(\lambda' \in \mathbb{C}^*)$ ne rencontrant pas dans $U_1 \setminus T$ les hypersurfaces caractéristiques. Enfin les démonstrations précédentes montrent que l'intersection d'un voisinage effilé et d'un polydisque ouvert de centre l'origine est connexe.

PROPOSITION 2.5. — *Soit $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ et W'_i, un voisinage effilé de $(k^i)^{-1}(0)$. Alors il existe deux polydisques ouverts $U'_2 \subset U'$ (inclus dans U) de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, il existe un voisinage effilé W''_i (inclus dans W'_i)* de $(k^i)^{-1}(0)$, *il existe deux réels $\omega_1 > 0$ et $c_1 < 0$ tels que :*

$$\forall x \in U'_2 \cap W''_i, \quad (x^0, k^i(x)) \in X(c_1, \omega_1) \qquad (\text{voir } déf.\ 2.1)$$

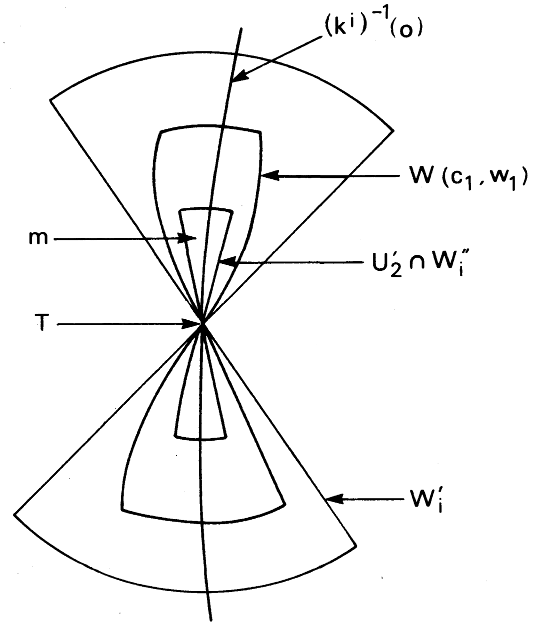
et, pour tout point $m \in U'_2 \cap W''_i$ et tout germe holomorphe f en m se prolongeant le long de tout chemin d'origine m tracé dans W'_i, il existe $g \in \mathscr{H}(\mathscr{R}'(c_1, \omega_1) \times U')$ telle que le prolongement ramifié $\tilde{f}$ de f le long de tout chemin de $U'_2 \cap W''_i$ coïncide avec $g(\log x^0, \log k^1(x), x)$.

Note. — $x \mapsto g(\log x^0, \log k^i(x), x)$ définit de manière naturelle une fonction holomorphe ramifiée sur l'ensemble

$$W(c_1, \omega_1) = \{ x \in U'/(x^0, k^i(x)) \in X(c_1, \omega_1) \}.$$

En général $W(c_1, \omega_1)$ est « tordu » et ne définit pas un voisinage effilé (au sens de la définition 2.3) de l'hypersurface $(k^i)^{-1}(0)$ mais il contient un ensemble de la forme $U'_2 \cap W''_i$.

Le dessin ci-dessous illustre la situation :



Preuve. — Fixons $i \in \{1, 2, \ldots, d\}\}$. D'après la définition 2.3, il existe $r_i > 0$ tel que :

$$W_i = \{ x \in U / |\lambda_i(0) x^0 + x^1| < r_i |x^0|, k^i(x) \neq 0 \}.$$

Rappelons que $k^i(x) = (\lambda_i(x) x^0 + x^1) c_i(x)$ et que

$$\forall x \in U, \quad 0{,}99 < |c_i(x)| < 1{,}01.$$

Le changement de variable χ_i :

$$x \mapsto \chi_i(x) = (y^0 = x^0, y^1 = k^i(x), y^2 = x^2, \ldots, y^n = x^n)$$

induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert U_i (inclus dans U) de 0 sur un voisinage ouvert $\chi_i(U_i) = V_i$ de 0. Cela dit on peut affirmer que :

$$|\lambda_i(0) - \lambda_i(x)| . |x^0| + \frac{|k^i(x)|}{|c_i(x)|} \geqq |\lambda_i(0) x^0 + x^1|$$

Cette inégalité montre qu'il existe $R>0$, $\omega_1>0$, $c_1<0$ tels que si U′ [resp. Z] désigne le polydisque ouvert de rayon R de centre $0\in\mathbb{C}^{n+1}$ [resp. $0\in\mathbb{C}^{n-1}$] alors les trois assertions suivantes sont vérifiées :

$$R>(\sup_{x\in U}|\lambda_i(x)|)\,\omega_1+\frac{\omega_1}{0,99} \tag{1}$$

$$\forall x\in U',\qquad (x^0,k^i(x))\in X(c_1,\omega_1)\ \Rightarrow\ x\in W'_i \tag{2}$$

$$X(c_1,\omega_1)\times Z\subset V_i=\chi_i(U_i). \tag{3}$$

Avec ces notations nous pouvons énoncer et prouver le lemme suivant :

LEMME 2.6 :

$$y=(y^0,y^1,y^2,\ldots,y^n)\in X(c_1,\omega_1)\times Z\ \Rightarrow\ \chi_i^{-1}(y)\in W'_i.$$

Preuve du lemme 2.6. – Considérons $y\in X(c_1,\omega_1)\times Z$. Notons $x=\chi_i^{-1}(y)\in U_i\subset U$. Prouvons que $x=(x^0,x^1,x^2,\ldots,x^n)$ appartient à U′, pour $2\leqq j\leqq n$ on a $|x^j|=|y^j|<R$; d'après (1) on a $|x^0|=|y^0|<\omega_1<R$. Enfin (1) montre que :

$$|x^1|\leqq|\lambda_i(x)x^0+x^1|+|\lambda_i(x)x^0|<|\lambda_i(x)|\,\omega_1+\frac{\omega_1}{0,99}<R$$

donc $x\in U'$. Le lemme découle alors de (2).

Cela dit on peut affirmer que

$$|\lambda_i(0)x^0+x^1|+|\lambda_i(0)-\lambda_i(x)|\,.\,|x^0|\geqq\frac{|k^i(x)|}{|c_i(x)|}.$$

Cette inégalité montre qu'il existe un polydisque ouvert U'_2 (inclus dans U′) de centre $0\in\mathbb{C}^{n+1}$ et un voisinage effilé W''_i(inclus dans W'_i) de $(k^i)^{-1}(0)$ tels que :

$$x\in U'_2\cap W''_i\ \Rightarrow\ \chi_i(x)\in X(c_1,\omega_1)\times Z. \tag{4}$$

Considérons m un point de $U'_2\cap W''_i$ et un germe holomorphe f en m se prolongeant le long de tout chemin d'origine m tracé dans W'_i. Le lemme 2.6 montre que le germe holomorphe $f\circ\chi_i^{-1}$ en $\chi_i(m)$ permet de définir une fonction holomorphe sur le revêtement universel de $X(c_1,\omega_1)\times Z$. L'expression que la proposition 2.2 fournit du revêtement universel de $X(c_1,\omega_1)$ montre qu'il existe $g\in\mathscr{H}(\mathscr{R}'(c_1,\omega_1)\times Z)$ telle que le prolongement ramifié de $f\circ\chi_i^{-1}$ le long de tout chemin d'origine $\chi_i(m)$ tracé dans $X(c_1,\omega_1)\times Z$ coïncide avec $g(\log y^0,\ \log y^1, y^2,\ldots,y^n)$. Comme les polydisques Z et U′ ont même rayon, g définit une fonction holomorphe (encore notée g) sur $\mathscr{R}'(c_1,\omega_1)\times U'$. L'assertion (4) montre que le prolongement ramifié $\tilde{f}$ de f le long de tout chemin de $U'_2\cap W''_i$ coïncide avec $g(\log x^0,\log k^1(x), x)$.

3. Preuve du théorème 0.1

Dans cette section nous admettons le théorème 3.1 dont l'énoncé est en partie calqué sur celui du lemme 2.4 et nous montrons que ce théorème entraîne le théorème 0.1.

THÉORÈME 3.1. — *Soit v une fonction holomorphe ramifiée (dans un voisinage de l'origine) autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques.*

1° *Il existe un polydisque ouvert* U (*notation de la définition* 2.3) *de centre* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ *et pour chaque* $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ *il existe un voisinage effilé* W_i *de l'hypersurface caractéristique* $(k^i)^{-1}(0)$ (*les* W_j *étant deux à deux disjoints*) *tels que : pour toute fonction* $\tilde{v}$ (*définie par un germe de* v *en un point de* W_i) *holomorphe sur le revêtement universel* $\mathcal{R}(W_i)$ *de* W_i *on peut trouver une fonction* u *holomorphe sur* $\mathcal{R}(W_i)$ *telle que :*

$$a(x, D)\, u = \tilde{v}.$$

2° *Il existe un polydisque ouvert* U_1 (*inclus dans* U) *vérifiant les trois assertions du lemme* 2.4 *et tel que pour chaque hypersurface* $\mathcal{S}$ *de* U_1 *non incluse dans la réunion des* $(W_i \cup (k^i)^{-1}(0)) \cap U_1$ *et ayant une équation du type* $x^0 = 0$ *ou* $\lambda x^0 + x^1 = 0$ *il existe un voisinage effilé* W (voir *le* 2° *de la définition* 2.3) *de* $\mathcal{S}$ *tel que pour toute fonction* $\tilde{v}$ (*définie par un germe de* v *en un point de* W) *holomorphe sur* $\mathcal{R}(W)$ *on peut trouver une fonction* u *holomorphe sur* $\mathcal{R}(W)$ *telle que :*

$$a(x, D)\, u = \tilde{v}.$$

3° *Si* v *est de détermination finie* [*resp. et en plus à monodromie unipotente*] *alors on peut supposer qu'il en est de même des fonctions* u *mentionnées en* 1° *et* 2°. *Si* $a(x, D)$ *est à caractéristiques simples et si* v *est dans la classe de Nilsson alors on peut supposer qu'il en est de même des fonctions* u *mentionnées en* 1° *et* 2°.

Remarque. — Dans la première version de cet article l'énoncé du 2° était beaucoup plus compliqué; je remercie vivement Claude Wagschal de m'avoir indiqué que l'énoncé actuel du 2° suffisait pour mon objet.

Admettons le théorème 3.1, quitte à diminuer U nous prendrons $U = U_1$ ce qui allègera la notation. Le lemme 2.4 montre alors qu'il existe un nombre fini de voisinage ouverts effilés W_i, $1 \leqq i \leqq N$ tels que :

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} W_i \cup \bigcup_{j=1}^{d} (k^j)^{-1}(0).$$

Soit $i \neq l$ tel que $W_i \cap W_l \neq \varnothing$, d'après le lemme 2.4 $W_i \cap W_l$ est connexe par arcs et $(W_i \cap W_l) \cup T$ contient une hypersurface non caractéristique en chacun de ces points $H(i, l)$ ayant une équation du type : $x^0 + \lambda_{i, l} x^1 = 0$ $(\lambda_{i, l} \in \mathbb{C})$ et ne rencontrant pas dans $U \setminus T$ les hypersurfaces caractéristiques.

Le lemme 2.4 et le 2° du théorème 3.1 nous permettent de supposer qu'un et un seul des voisinages effilés W_i rencontre S. Quitte à changer la numérotation nous supposerons que W_1 contient $U \cap (S \setminus T)$ et que pour $2 \leqq j \leqq N$, W_j ne rencontre pas S. Pour alléger les énoncés ultérieurs nous noterons H(1, 1) l'hyperplan S d'équation $x^0=0$. Ce qui a été dit dans la section 1 montre clairement que le symbole principal de $a(x, D)$ vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis de $H(i, l)$ ou de l'hyperplan S. Le résultat suivant est crucial et démontré dans [5].

THÉORÈME 3.2 [5]. — *Il existe un polydisque ouvert* Ω' *de centre* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ *et pour toute* $H(i, l)$ *précédemment introduite il existe un voisinage* $Y(i, l)$ *de* T *dans* $H(i, l)$, $Y(i, l)$ *étant inclus dans* $(W_i \cap W_l) \cup T$, *tels que pour toutes données de Cauchy* $(u'_j)_{0 \leqq j < m}$ *holomorphes sur le revêtement universel de* $Y(i, l) \setminus T$ *le problème de Cauchy*

$$a(x, D)\, u = 0$$

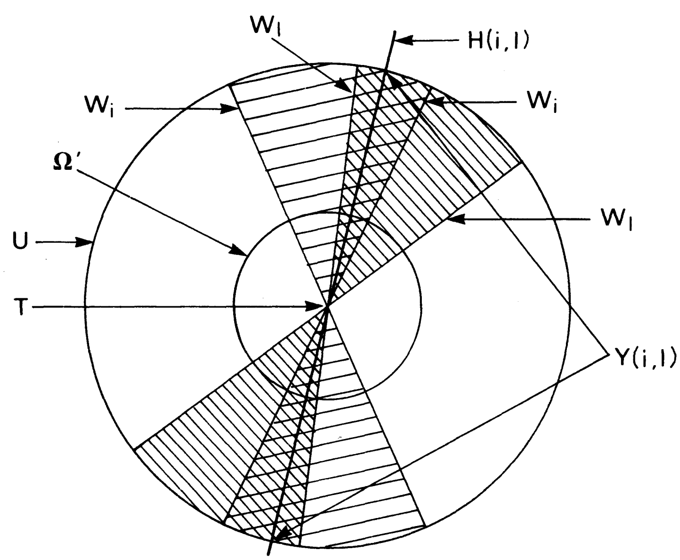
$$\partial_n^j u \big|_{H(i, l)} = u'_j, \qquad 0 \leqq j < m$$

[∂_n *désignant la dérivée normale pour* $H(i, l)$] *admet une unique solution h holomorphe sur le revêtement universel de* Ω' *privé de la réunion des hypersurfaces caractéristiques* K_j $(1 \leqq j \leqq d)$ *construites dans la section* 1. *En outre si les données de Cauchy* u'_j $(0 \leqq j < m)$ sont de détermination finie alors la solution h est de détermination finie (voir *Appendice* C).

Dorénavant et jusqu'à la fin de cette section nous nous donnons des ensembles Ω', $Y(i, l)$ fournis par le théorème 3.2 et nous pouvons supposer Ω' inclus dans $U = \bigcup_{i=1}^{N} W_i \cup \bigcup_{j=1}^{d} (k^j)^{-1}(0)$.

Remarque cruciale 3.3. — Reprenons les notations du théorème 3.2. Comme $Y(i, l)$ est inclus dans $(W_i \cap W_l) \cup T$, le théorème 3.1 fournit des fonctions u'_i ramifiées dans le voisinage effilé W_i et les *traces suivant* $H(i, l)$ *de chaque détermination de* u'_i *sont holomorphes sur le revêtement universel de* $Y(i, l) \setminus T$. Naturellement $Y(i, l) \cap \Omega'$ et Ω' sont en général beaucoup plus petits que respectivement $Y(i, l)$ et U; et on peut supposer $H(i, l) \cap \Omega' \subset Y(i, l) \cup T$.

La figure ci-dessous illustre la situation :



Preuve du théorème 0.1 (existence et détermination finie). — D'après le théorème 3.2 on peut supposer les données de Cauchy identiquement nulles. Soit x_0 un point de $S \cap W_1 \cap \Omega'$ et u^0 un germe en x_0 de solution du problème de Cauchy

$$(0.1) \qquad \begin{cases} a(x, D)\, u^0 = v^0 \\ D_{x^0}^h u^0 |_S = 0, \qquad 0 \leqq h < m \end{cases}$$

où v^0 est le germe de v en x_0. Il faut montrer que si Γ est un chemin $\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{d} K_j$ d'origine x_0 le germe u^0 se prolonge le long de Γ. De plus il faut montrer que lorsque v est de détermination finie alors le prolongement ramifié u de u^0 l'est également. Pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, N\}^2$ avec $i \neq j$ et $W_i \cap W_j \cap \Omega' \neq \varnothing$ choisissons un point $x_{i,j}$ appartenant à $\Omega' \cap H(i, j) \cap W_i \cap W_j$ [dans le cas où $H(1, 1) = S$ on pose $x_{1,1} = x_0$]. Si Γ' est un chemin d'origine x_0 paramétré par $[0, 1]$ il existe une subdivision $t_1 = 0 < t_2 < \ldots < t_p = 1$ de $[0, 1]$ et pour chaque indice $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ il existe un voisinage effilé $W_{i(j)}$ tel que le chemin $\gamma'_j = \Gamma'|_{[t_j, t_{j+1}]}$ soit d'image contenue dans $W_{i(j)}$. Quitte à modifier la subdivision on peut supposer que $i(j) \neq i(j+1)$ pour $1 \leqq j \leqq p-2$; en outre $W_{i(1)}$ contient x_0 et donc rencontre $S \setminus T$, d'après la convention faite avant l'énoncé du théorème 3.2 on a $i(1) = 1$.

Γ' est égal au chemin composé $\gamma'_1 \circ \gamma'_2 \circ \ldots \circ \gamma'_{p-1}$. Soit $j \in \{1, \ldots, p-2\}$, comme $\gamma'_j(t_{j+1}) = \gamma'_{j+1}(t_{j+1})$ appartient à $W_{i(j)} \cap W_{i(j+1)} \cap \Omega'$ et que cet ensemble est connexe par arcs il existe un chemin l_j joignant dans $W_{i(j)} \cap W_{i(j+1)} \cap \Omega'$ le point $\gamma'_j(t_{j+1})$ au point $\tilde{x}_j = x_{i(j), i(j+1)}$. On définit alors les chemins suivants (on pose $x_0 = \tilde{x}_0$) :

$$\gamma_1 = \gamma'_1 \circ l_1, \qquad \gamma_j = l_{j-1}^{-1} \circ \gamma'_j \circ l_j \quad (2 \leqq j \leqq p-2), \qquad \gamma_{p-1} = l_{p-2}^{-1} \circ \gamma'_{p-1}.$$

Pour chaque $1 \leqq j \leqq p-2$, γ_j est d'origine $\tilde{x}_{j-1}$ et d'extrémité $\tilde{x}_j$. En outre chaque chemin $\gamma_j (1 \leqq j \leqq p-1)$ est tracé dans $W_{i(j)}$. Désignons par Γ le chemin composé $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \gamma_{p-1}$. On va prouver qu'on peut prolonger le germe u^0 (en x_0) de solution du problème (0.1) le long de Γ. La définition de Γ montrera alors qu'on a prolongé le germe u^0 le long de Γ'. Notons v^j le germe de fonction holomorphe en $\tilde{x}_j$ obtenu en prolongeant v^0 le long de $\gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_j$. L'existence du prolongement ramifié de u^0 le long de Γ sera établie dès que l'on aura prouvé par récurrence sur $1 \leqq j \leqq p-1$ l'assertion suivante :

$(\mathscr{P}_j)$. Le germe u^0 se prolonge le long de $\gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_j$ en un germe u^j en l'extrémité de γ_j. En outre u^j s'écrit $u^j = u'^j + f^j$ où le germe u'^j [resp. f^j] se prolonge le long de tout chemin de $W_{i(j)}\left[\text{resp. } \Omega' \setminus \bigcup_{l=1}^{d} K_l\right]$. De plus on a $a(x, D)\, u'^j = v^j$.

Prouvons l'assertion $(\mathscr{P}_1)$. Le théorème 3.1 assure qu'il existe un germe u'^0 au point $\tilde{x}_0 = x_0$ se prolongeant le long de tout chemin de $W_{i(1)}$ tel que $a(x, D)\, u'^0 = v^0$. D'autre part, le théorème 3.2 montre qu'il existe un germe f^0 en $\tilde{x}_0$ se prolongeant le long de tout chemin de $\Omega' \setminus \bigcup_{l=1}^{d} K_l$ solution du problème

$$a(x, D) f^0 = 0$$
$$D_{x^0}^h f^0 |_S = - D_{x^0}^h u'^0 |_S, \qquad 0 \leqq h < m.$$

Par unicité $u'^0 + f^0$ coïncide avec u^0. Le chemin γ_1 est tracé dans $W_{i(1)}$. Notons u'^1 [resp. f^1] le germe de fonction holomorphe en $\tilde{x}_1$ obtenu en prolongeant u'^0 [resp. f^0] le long du chemin γ_1. L'assertion $(\mathscr{P}_1)$ est alors clairement vérifiée. Supposons maintenant le résultat prouvé à l'ordre $j \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$. Le point $\tilde{x}_j$ appartient à $\tilde{H}_j = H(i(j), i(j+1))$. D'après le théorème 3.1 il existe un germe $\tilde{u}'^{j+1}$ en $\tilde{x}_j$ solution de l'équation $a(x, D)\, \tilde{u}'^{j+1} = v^j$ et se prolongeant le long de tout chemin de $W_{i(j+1)}$. En outre, d'après le théorème 3.2, il existe un germe $\tilde{g}^{j+1}$ en $\tilde{x}_j$ solution du problème

$$a(x, D)\, \tilde{g}^{j+1} = 0$$
$$\partial_n^h \tilde{g}^{j+1} |_{\tilde{H}_j} = - \partial_n^h \tilde{u}'^{j+1} |_{\tilde{H}_j} + \partial_n^h u'^j |_{\tilde{H}_j}, \qquad 0 \leqq h < m$$

se prolongeant le long de tout chemin de $\Omega' \setminus \bigcup_{l=1}^{d} K_l$ (d'après la remarque cruciale 3.3, les données de Cauchy du problème précédent vérifient en effet les hypothèses du théorème 3.2). Par hypothèse de récurrence on a $a(x, D)\, u'^j = v^j$. Par unicité le germe $\tilde{u}'^{j+1} + \tilde{g}^{j+1}$ coïncide avec u'^j. Le chemin γ_{j+1} est tracé dans $W_{i(j+1)}$. Notons alors u'^{j+1} [resp. g^{j+1}, resp. φ^{j+1}] le germe de fonction holomorphe en l'extrémité de γ_{j+1} obtenu en prolongeant $\tilde{u}'^{j+1}$ [resp. $\tilde{g}^{j+1}$, resp. f^j] le long du chemin γ_{j+1}. On a clairement $a(x, D)\, u'^{j+1} = v^{j+1}$. L'assertion $(\mathscr{P}_{j+1})$ est alors vérifiée par u'^{j+1} et $f^{j+1} = g^{j+1} + \varphi^{j+1}$.

Maintenant nous supposons que v est de détermination finie et nous allons prouver que u l'est aussi. Auparavant nous allons définir quelques espaces de dimension finie. Rappelons que $H(1, 1) = S$ et que $x_{1,1} = x_0$.

Définition 3.4. — 1° Reprenons le point $x_{i,j}$ de $H(i, j)$ précédemment introduit. Le théorème 3.1 assure l'existence d'un nombre fini de fonctions holomorphes ramifiées de détermination finie sur W_j dont les déterminations au point $x_{i,j}$ *engendrent* un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $G(i, j)$ (constitué de germes holomorphes en $x_{i,j}$) tel que $a(x, D)(G(i, j))$ coïncide avec l'espace vectoriel (de dimension finie) engendré par les déterminations de v en $x_{i,j}$. Dans la suite nous fixons un tel $G(i, j)$.

Soit maintenant un indice $l \in \{1\} \cup (\{1, 2, \ldots, N\} \setminus \{j\})$ tel que $W_j \cap W_l \neq \varnothing$. Reprenons le point $x_{j,l}$ de $H(j, l)$. On note $G(i, j, l)$ l'espace vectoriel constitué des germes en $x_{j,l}$ obtenus en prolongeant les éléments de $G(i, j)$ le long des chemins tracés dans W_j d'origine $x_{i,j}$ et d'extrémité $x_{j,l}$. Comme $G(i, j)$ est stable sous l'action des lacets de W_j de base $x_{i,j}$ on constate que $G(i, j, l)$ est isomorphe à $G(i, j)$.

2° Avec les notations précédentes on pose $\tilde{G}(j, l) = \sum_i G(i, j, l)$ où la somme est étendue aux indices i tels que $G(i, j, l)$ est défini. On peut prolonger les éléments de $\tilde{G}(j, l)$

le long de tout chemin de W_j et $\tilde{G}(j, l)$ est stable sous l'action des lacets de W_j de base $x_{j,l}$.

3° Notons $E(i, j)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les déterminations en x_0 des prolongements ramifiés sur $\Omega' \setminus \bigcup_{l=1}^{d} K_l$ des germes u en $x_{i,j}$ solution des problèmes de Cauchy du type :

$$a(x, D)u = 0$$
$$\partial_n^h u \big|_{H(i,j)} = \partial_n^h w \big|_{H(i,j)}, \qquad 0 \leqq h < m$$

où w décrit $G(i, j) + \tilde{G}(i, j)$. Rappelons que d'après la remarque cruciale 3.3 les données de Cauchy du problème précédent vérifient les hypothèses du théorème 3.2. Ce théorème assure en outre que $E(i, j)$ est de dimension finie.

4° Notons F l'espace vectoriel (de dimension finie) des germes en x_0 engendré par les déterminations de v en x_0. Notons F_0 l'espace vectoriel constitué des germes u en x_0 tels que $a(x, D)u \in F$ et $D_{x^0}^h u \big|_S = 0$ pour $0 \leqq h < m$. D'après le théorème de Cauchy-Kowaleska F est isomorphe à F_0.

LEMME 3.5. — *Reprenons les notations de la définition précédente* ($x_{1,1} = x_0$). *Alors* $\tilde{G}_{1,1}$ *est inclus dans l'espace vectoriel* $F_0 + \sum E(i, j)$.

Preuve. — Soit $g(x)$ un germe en x_0 élément de $\tilde{G}_{1,1}$. Ce qui est écrit dans les points 1°, 2° et 4° de la définition 3.4 montre que $a(x, D)g$ appartient à F. Désignons alors par h le germe en x_0 solution du problème :

$$a(x, D)u = 0$$
$$D_{x^0}^j u \big|_S = D_{x^0}^j g \big|_S, \qquad 0 \leqq j < m.$$

Par définition h appartient à $\sum E(i, j)$. En outre on constate que $g - h$ appartient à F_0. Ceci prouve le lemme.

Considérons le germe u^0 en x_0 de solution du problème de Cauchy :

$$\text{(0.1)} \qquad \begin{cases} a(x, D)u = v^0 \\ D_{x^0}^h u \big|_S = 0, \qquad 0 \leqq h < m \end{cases}$$

où v^0 est le germe de v en x_0. Pour démontrer que le prolongement ramifié u de u^0 est de détermination finie il suffit de montrer que si Γ' est un lacet de base x_0 tracé dans $\Omega' \setminus \bigcup_{l=1}^{d} K_l$ alors le germe obtenu en prolongeant u^0 le long de Γ' appartient à l'espace vectoriel de dimension finie $F_0 + \sum_{i,j} E(i, j)$.

Reprenons la décomposition $\Gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \circ \gamma_{p-1}$ du lacet Γ homotope à Γ' considérée dans la première partie de la démonstration. On observe que les voisinages effilés $W_{i(1)}$ et $W_{i(p-1)}$ rencontrent S, d'après la convention faite avant l'énoncé du théorème 3.2 on a $i(1)=i(p-1)=1$. Pour alléger les notations nous poserons $(1 \leqq j \leqq p-2)$.

$$\tilde{x}_{p-1}=x_{1,1}=x_0, \qquad G_j=G(i(j), i(j+1)), \qquad \tilde{G}_j=\tilde{G}(i(j), i(j+1)).$$

On pose en outre $\tilde{G}_{p-1}=\tilde{G}(1, 1)$. Rappelons que v^j désigne le germe en $\tilde{x}_j$ obtenu en prolongeant v^0 le long de $\gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_j$. En raisonnant par récurrence sur $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ nous allons prouver l'assertion suivante :

(DF_j) : La décomposition du germe u^j obtenu par prolongement de u^0 le long de $\gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_j : u^j = u'^j + f^j$ est telle que : $u'^j \in \tilde{G}_j$, f^j est obtenu par prolongement ramifié le long de $\gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_j$ d'un élément de $\sum E(k, l)$ (*voir* définition 3.4). En outre $a(x, D)\, u'^j = v^j$.

Rappelons que $\tilde{G}_{p-1}=\tilde{G}_{1,1}$. Si l'assertion (DF_{p-1}) est vraie alors le lemme 3.5 montre que le germe obtenu en prolongeant u^0 le long de Γ' appartient à l'espace vectoriel de dimension finie $F_0+\sum E(k, l)$.

Prouvons l'assertion (DF_1). D'après le 1° de la définition 3.4 et le théorème 3.1 il existe un germe u'^0 (au point x_0) élément de $G(1, 1)$ se prolongeant le long de tout chemin de $W_{i(1)}$ tel que $a(x, D)\, u'^0 = v^0$. Par définition le germe f^0 en x_0 solution du problème :

$$a(x, D) f^0 = 0$$
$$D^h_{x^0} f^0 |_S = -D^h_{x^0} u'^0 |_S, \qquad 0 \leqq h < m$$

appartient à $\sum E(k, l)$. Notons u'^1 [resp. f^1] le germe de fonction holomorphe en $\tilde{x}_1$ obtenu en prolongeant u'^0 [resp. f^0] le long du chemin γ_1. Par définition, u'_1 appartient à $\tilde{G}(i(1), i(2))=\tilde{G}_1$. Ceci prouve (DF_1). Soit $j \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$. Supposons (DF_j) démontrée. Le point $\tilde{x}_j$ appartient à $\tilde{H}_j = H(i(j), i(j+1))$. D'après la définition 3.4 et le théorème 3.1 il existe un germe $\tilde{u}'^{j+1}$ en x_j élément de G_j, solution de l'équation $a(x, D)\, \tilde{u}'^{j+1} = v^j$ et se prolongeant le long de tout chemin de $W_{i(j+1)}$. Par définition le germe $\tilde{g}^{j+1}$ en $\tilde{x}_j$ solution du problème

$$a(x, D)\, \tilde{g}^{j+1} = 0$$
$$\partial^h_n \tilde{g}^{j+1} |_{\tilde{H}_j} = -\partial^h_n \tilde{u}'^{j+1} |_{\tilde{H}_j} + \partial^h_n u'^j |_{\tilde{H}_j}, \qquad 0 \leqq h < m$$

définit lorsqu'on le prolonge le long du chemin $(\gamma_1 \circ \ldots \circ \gamma_j)^{-1}$ un élément de $\sum E(k, l)$. Par unicité le germe $\tilde{u}'^{j+1} + \tilde{g}^{j+1}$ coïncide avec u'^j. Notons alors u'^{j+1} [resp. g^{j+1}, resp. φ^{j+1}] le germe de fonction holomorphe en $\tilde{x}_{j+1}$ obtenu en prolongeant $\tilde{u}'^{j+1}$ [$\tilde{g}^{j+1}$, resp. f^j] le long du chemin γ_{j+1}. Comme $\tilde{u}'^{j+1}$ appartient à G_j, la définition 3.4 montre que u'^{j+1} appartient à $\tilde{G}_{j+1}$. L'assertion (DF_{j+1}) est alors vérifiée par u'^{j+1} et $f^{j+1} = g^{j+1} + \varphi^{j+1}$.

Remarque 3.6. — Supposons que $a(x, D)$ est à caractéristiques simples et que toutes les données de Cauchy et v sont dans la classe de Nilsson. Le théorème 3.1 permet de supposer que les éléments de $G(i, j)$ [resp. $\tilde{G}(i, j)$] définissent des fonctions holomorphes ramifiées dans W_j [resp. W_i] appartenant à la classe de Nilsson. Le théorème 1 de [8] montre alors que si les données de Cauchy $u_h(x')$, $0 \leqq h < m$ appartiennent à la classe de

Nilsson alors la solution du problème

$$a(x, \mathrm{D})\, u = 0$$
$$\mathrm{D}^h_{x^0} u|_{\mathrm{S}} = u_h(x'), \qquad 0 \leqq h < m$$

et les éléments de $\sum \mathrm{E}(i, j)$ appartiennent à la classe de Nilsson. Les démonstrations précédentes montrent alors que la solution du problème (0.1) est dans la classe de Nilsson.

Maintenant nous allons préparer la preuve du théorème 0.6. Nous supposons que v et toutes les données de Cauchy du problème (0.1) sont de détermination finie et à monodromie résoluble (dans le rappel 3.9 nous verrons que c'est toujours le cas pour les données de Cauchy) [resp. unipotente] et nous montrerons qu'il en est de même de la solution.

Nous noterons π_1 le groupe fondamental pointé en x_0 de Ω' privé de la réunion des hypersurfaces caractéristiques (Ω' est le voisinage de l'origine introduit dans le théorème 3.2). Si f est une fonction holomorphe ramifiée sur Ω' privé de la réunion des hypersurfaces caractéristiques et si F est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les déterminations de f en x_0, le groupe fondamental π_1 agit sur F. On appellera monodromie de f la représentation de π_1 dans GL(F) ainsi définie.

Rappel 3.7. — Soit G un groupe opérant sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie F, on dit que la représentation

$$\rho \begin{cases} \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{F}) \\ g \mapsto \rho(g) \end{cases}$$

est résoluble [resp. unipotente] s'il existe une filtration croissante de F par des sous-espaces vectoriels stables par G $\{0\} = \mathrm{F}'_0 \subset \mathrm{F}'_1 \subset \ldots \subset \mathrm{F}'_k = \mathrm{F}$ et telle que les quotients $\mathrm{F}'_j/\mathrm{F}'_{j-1}$ soient de dimension $\leqq 1$ [resp. et en plus G opère trivialement sur les $\mathrm{F}'_j/\mathrm{F}'_{j-1}$]. La représentation est résoluble [resp. unipotente] si et seulement si il existe une base de F dans laquelle les matrices de tous les $\rho(g)$ sont triangulaires supérieures [resp. et en plus tous les éléments diagonaux valent 1]. Soit F′ un sous-espace vectoriel de F stable par G, si la représentation de F est résoluble [resp. unipotente] alors elle induit une représentation de F′ résoluble [resp. unipotente]. C'est immédiat d'après l'assertion prise pour définition.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.8. — *Soit* G *un groupe opérant sur un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* F *de dimension finie. Supposons qu'il existe une famille finie* $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_k$ *de sous-espaces vectoriels de* F *vérifiant* $\sum \mathrm{E}_i = \mathrm{F}$ *telle que pour chaque* $1 \leqq i \leqq k$, E_i *est stable par* G *et* G *définit une représentation résoluble* [*resp. unipotente*] *de* E_i. *Alors* G *définit une représentation résoluble* [*resp. unipotente*] *de* F.

Preuve. — On procède par récurrence sur k, il suffit de prouver ce lemme dans le cas $k = 2$. Comme G définit par hypothèse une représentation résoluble [resp. unipotente] de E_1 et E_2 il existe deux filtrations croissantes de E_1 et E_2 respectivement satisfaisant toutes les conditions du rappel 3.7 :

$$\{0\}=E_{1,1}\subset E_{1,2}\subset E_{1,3}\subset \ldots \subset E_{1,p}=E$$
$$\{0\}=E_{2,1}\subset E_{2,2}\subset E_{2,3}\subset \ldots \subset E_{2,q}=E_2.$$

Pour $1\leqq i\leqq p$ posons $F_i=E_{1,i}$, pour $1\leqq j\leqq q$ posons $F_{p+j}=E_1+E_{2,j}$. Pour $1\leqq j\leqq q-1$ il existe une surjection naturelle de $E_{2,j+1}/E_{2,j}$ sur $(E_1+E_{2,j+1})/(E_1+E_{2,j})$. Donc F_{p+j+1}/F_{p+j} est de dimension (sur $\mathbb{C}$) $\leqq 1$. Comme $(F_l)_{1\leqq l\leqq p+q}$ définit une filtration croissante stable par G de E_1+E_2 le rappel 3.7 montre que G définit une représentation résoluble de E_1+E_2. Supposons en plus que G, définisse une représentation unipotente de E_1 et E_2, soit $j\in\{1, \ldots, q-1\}$ tel que $(E_1+E_{2,j+1})/(E_1+E_{2,j})$ soit une droite complexe, soit $e\in E_{2,j+1}\setminus E_{2,j}+E_1$ par hypothèse on a $\forall g\in G$, $g.e-e\in E_{2,j}\subset E_{2,j}+E_1$, donc G opère trivialement sur F_{p+j+1}/F_{p+j}. Comme il est clair que G opère trivialement sur les autres quotients de la filtration (F_l) ceci prouve le lemme.

RAPPEL 3.9. — Posons $x'=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Considérons une fonction $u_1(x')$ holomorphe ramifiée autour de $x^1=0$ et de détermination finie. On sait (*voir* [1]) que u_1 est somme finie de fonctions du type :

$$(*)\qquad x_1^{\alpha}\log^{n_1}x_1 f(\log x_1, x')$$

où $n_1\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $f(\log x_1, x')$ est uniforme. La monodromie d'une fonction (non identiquement nulle) de type $(*)$ est clairement résoluble, elle est unipotente si et seulement si $\alpha\in\mathbb{Z}$. Le lemme 3.8 et le rappel 3.7 montrent alors que la monodromie de $u_1(x')$ est résoluble. Supposons maintenant que la monodromie de $u_1(x')$ est unipotente, on vérifie alors aisément que u_1 est somme finie de fonctions du type $(*)$ où tous les α appartiennent à $\mathbb{Z}$. Le lemme 3.8 et le rappel 3.7 montrent que la réciproque est vraie.

LEMME 3.10. — *Reprenons les notations de la définition* 3.4. *La représentation du groupe fondamental* π_1 *dans* $\sum E(i,j)$ est résoluble. Si de plus v est à monodromie unipotente alors on peut supposer que cette représentation est unipotente.

Preuve. — Conservons les notations de la définition 3.4, soit $w\in G(i,j)+\tilde{G}(i,j)$. Posons $u_h=\partial_n^h w|_{H(i,j)}$, $0\leqq h<m$. Considérons alors le germe g en $x_{i,j}$ de solution du problème de Cauchy suivant :

$$a(x, D)g=0$$
$$\partial_n^h g|_{H(i,j)}=u_h,\qquad 0\leqq h<m.$$

D'après l'appendice C le prolongement ramifié $\tilde{g}$ de g le long de tout chemin de $\Omega'\setminus\bigcup_{l=1}^{d}K_l$ peut être écrit sous la forme $g=\sum_{i=1}^{d}g_i(\log k^i(x), x)$ $(g_i\in\mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega\times U)$, où $g_i(\log k^i(x), x)$ est somme finie de termes du type :

$$(**)\qquad (k^i)^{\alpha'}(x)\log^{m_1}k^i(x)\times h(\log k^i(x), x)$$

où $m_1 \in \mathbb{N}$, $\alpha' \in \mathbb{C}$, $h(\log k^i(x), x)$ est uniforme. La monodromie de $(**)$ est résoluble. Si la monodromie de v est unipotente alors le théorème 3.1 et le lemme 3.8 permettent de supposer que la représentation du groupe fondamental du voisinage effilé W_j [resp. W_i] dans $G(i, j)$ [resp. $\tilde{G}(i, j)$] est unipotente. Le rappel 3.7 montre alors que la monodromie de chaque $u_h (0 \leqq h < m)$ est unipotente, d'après le rappel 3.9 chaque u_h est donc une somme finie de termes du type $(*)$ où tous les α appartiennent à $\mathbb{Z}$. L'appendice C permet alors de supposer que tout les α' figurant dans les expressions $(**)$ appartiennent à $\mathbb{Z}$. Dans ce cas il est clair que la monodromie d'un terme du type $(**)$ est unipotente. Le lemme 3.10 découle alors du lemme 3.8 et du rappel 3.7.

Maintenant nous pouvons terminer la preuve du théorème 0.6. Rappelons que nous étudions la monodromie de la solution u du problème

$$(0.1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a(x, D)u = v \\ D_{x^0}^h u|_S = u_h(x'), \qquad 0 \leqq h < m. \end{array} \right.$$

Notons E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension finie d'après l'appendice C) engendré par les déterminations en x_0 de la solution du problème :

$$\begin{gathered} a(x, D)u = 0 \\ D_{x^0}^h u|_S = u_h(x'), \qquad 0 \leqq h < m. \end{gathered}$$

La preuve du lemme 3.10 montre que la représentation de π_1 dans E est résoluble [resp. unipotente si les u_h sont à monodromie unipotente]. Reprenons les notations de la définition 3.4. Par hypothèse la représentation de π_1 dans l'espace vectoriel F engendré par les déterminations de v en x_0 est résoluble [resp. unipotente]. Si γ est un lacet de base x_0 de $\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{d} K_j$ nous noterons $\gamma . v'$ l'action de γ sur un élément v' de F. D'après le rappel 3.7 il existe une base $(v_1, \ldots, v_k)$ de F telle que $\forall l \in \{1, 2, \ldots, k\}$ et pour tout γ on a :

$$\gamma . v_l = \sum_{p=1}^{l} \alpha_{p, l}(\gamma) v_p \qquad \text{où} \quad \alpha_{p, l}(\gamma) \in \mathbb{C}.$$

Si v est à monodromie unipotente alors les $\alpha_{l, l}(\gamma)$ valent 1. Conservons les notations de la définition 3.4, une base de F_0 est constitué des germes u_l en x_0 solution des problèmes de Cauchy :

$$\begin{gathered} a(x, D)u_l = v_l \\ D_{x^0}^h u_l|_S = 0, \qquad 0 \leqq h < m. \end{gathered}$$

D'après le théorème 0.1 on peut prolonger les u_l le long de tout chemin de $\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{d} K_j$. La preuve du fait que la solution du problème (0.1) est de détermination finie (si les données le sont) montre que si γ est un lacet de base x_0 alors il existe $u'_l \in F_0$,

$f_l \in \sum E(i, j)$ tels que $\gamma . u_l = u'_l + f_l$ et $a(x, D) u'_l = \gamma . v_l (1 \leqq l \leqq k)$. On a :

$$a(x, D) u'_l = \gamma . v_l = \sum_{p=1}^{l} \alpha_{p, l}(\gamma) a(x, D) u_p.$$

Par unicité on a $u'_l = \sum_{p=1}^{l} \alpha_{p, l}(\gamma) u_p$. Les lemmes 3.8 et 3.10 montrent alors que la représentation π_1 dans $F_0 + E + \sum E(i, j)$ est résoluble; si la monodromie des données est unipotente alors on peut supposer que cette représentation est unipotente. La preuve que la solution u du problème (0.1) est de détermination finie montre que l'espace vectoriel engendré par les déterminations de u en x_0 est un sous-espace vectoriel (stable par π_1) de $F_0 + E + \sum E(i, j)$. Le théorème 0.6 découle alors du rappel 3.7.

4. Préparation à la preuve du théorème 3.1

Dans cet article nous travaillerons beaucoup avec les ensembles $\mathscr{R}(c, \omega)$ car ils contiennent les deux segments mentionnés dans le 1° de la proposition 2.2 et nous permettront de définir un peu plus loin les opérateurs d'intégration $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$. Pour alléger les notations ultérieures nous dirons qu'une fonction f est holomorphe sur $\mathscr{R}(c, \omega) \times U'$ (U' étant un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est la restriction d'une fonction holomorphe sur $\mathscr{R}'(c + \varepsilon, \omega) \times U'$.

Nous commençons la preuve des parties 1° et 3° du théorème 3.1. Pour fixer les idées nous raisonnerons dans le cas de l'hypersurface caractéristique $(k^2)^{-1}(0)$. Quitte à diminuer le polydisque U de la définition 2.3 on peut supposer − en reprenant les notations de la proposition 2.5 − qu'il existe un voisinage effilé W'_2 de $(k^2)^{-1}(0)$ tel que dans W'_2 tout germe de v (le second membre du problème (0.1)) en un point de W'_2 définit une fonction holomorphe ramifiée dans W'_2 encore notée v. D'après la proposition 2.5 il existe deux polydisques $U'_2 \subset U'$, un voisinage effilé $W''_2 (\subset W'_2)$ de $(k^2)^{-1}(0)$ et deux réels $\omega_1 > 0$ et $c_1 < 0$ tels que pour toute fonction − encore notée v − holomorphe ramifiée dans $U'_2 \cap W''_2$ définie à partir d'un germe de v en un point de $U'_2 \cap W''_2$, il existe $g' \in \mathscr{H}(\mathscr{R}(c_1, \omega_1) \times U')$ telle que :

$$\forall x \in U'_2 \cap W''_2, \qquad v(x) = g'(\log x^0, \log k^2(x), x).$$

Nous chercherons une fonction $(t_1, t_2, x) \mapsto h(t_1, t_2, x)$ holomorphe sur un ouvert de $\mathscr{R}(c_1, \omega_1) \times U'$ de la forme $\mathscr{R}'(c'_1, \omega'_1) \times U''$ telle que dans l'intersection d'un polydisque ouvert de centre 0 et d'un voisinage effilé de $(k^2)^{-1}(0)$ on ait :

$$a(x, D) h(\log x^0, \log k^2(x), x) = v(x) = g'(\log x^0, \log k^2(x), x)$$

Nous chercherons donc la fonction holomorphe ramifiée $u(x)$ du théorème 3.1 sous la forme $h(\log x^0, \log k^2(x), x)$. Cela dit on prouve aisément le lemme suivant :

LEMME 4.1. — *Il existe des fonctions holomorphes sur un voisinage de l'origine $c_{\lambda,\,\mu,\,\beta}(x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^2$, $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\beta| \leqq m-\lambda-\mu$ telles que :*

$$a(x, \mathrm{D})\, h(\log x^0, \log k^2(x), x) = \sum_{\lambda+\mu\leqq m} c_{\lambda,\,\mu,\,\beta}(x)\, \mathrm{D}_x^\beta (e^{-t_1}\partial_{t_1})^\mu \circ (e^{-t_2}\partial_{t_2})^\lambda \, h(t_1, t_2, x)\Big|_{\substack{t_1=\log x^0\\ t_2=\log k^2(x)}}. \tag{4.1}$$

Comme l'hypersurface $(k^2)^{-1}(0)$ est caractéristique pour $a(x, \mathrm{D})$ le coefficient $\mathrm{C}_{m,\,0,\,(0,\,\ldots,\,0)}$ est identiquement nul. Nous omettrons les restrictions $(t_1, t_2) = (\log x^0, \log k^2(x))$ dans (4.1), nous chercherons une fonction $h(t, x)$ solution de l'équation

$$\sum_{\substack{\lambda+\mu\leqq m\\ |\beta|\leqq m-\lambda-\mu}} c_{\lambda,\,\mu,\,\beta}(x)\, \mathrm{D}_x^\beta (e^{-t_1}\partial_{t_1})^\mu (e^{-t_2}\partial_{t_2})^\lambda h(t, x) = g'(t, x). \tag{4.2}$$

où $t=(t_1, t_2) \in \mathscr{R}(c_1, \omega_1)$, $x \in \mathrm{U}'$ et $g' \in \mathscr{H}(\mathscr{R}(c_1, \omega_1) \times \mathrm{U}')$ est donnée. Rappelons la formule $(*)$ de la section 0 :

$$a_m(x, \xi) = \prod_{\mathrm{S}} a_{m,\,s}(x, \xi)^{m_s}. \tag{$*$}$$

Quitte à changer la notation nous supposerons que $a_{m,\,2}(x, \operatorname{grad} k^2(x))$ est identiquement nul, l'équation $k^2=0$ définit donc une hypersurface caractéristique de *multiplicité* m_2.

LEMME 4.2. — *Dans le membre de gauche de* (4.2) *le coefficient de chaque monôme de dérivation du type $(e^{-t_2}\partial_{t_2})^{m-i}(e^{-t_1}\partial_{t_1})^{i_1}\mathrm{D}_x^\beta$* où *$i=i_1+|\beta|<m_2$ est identiquement nul.*

Preuve. — Notons d_s le degré en ξ de $a_{m,\,s}$, on a :

$$m-i-\sum_{\mathrm{S}\neq 2} m_s d_s = m-i-(m-m_2 d_2) = d_2 m_2 - i \geqq m_2 d_2 - m_2 + 1 > m_2(d_2-1),$$

donc dans le coefficient de $(e^{-t_2}\partial_{t_2})^{m-i}(e^{-t_1}\partial_{t_1})^{i_1}\mathrm{D}_x^\beta$ apparaîtra en facteur le terme $a_{m,\,2}(x, \operatorname{grad} k^2(x))$ qui est identiquement nul.

LEMME 4.3. — *Soit $i \in \{0, 1, \ldots, m_2\}$. Le coefficient de $(e^{-t_1}\partial_{t_1})^i(e^{-t_2}\partial_{t_2})^{m-i}$ dans le premier membre de* (4.2) *est identiquement nul si $i<m_2$, et ne s'annule pas à l'origine si $i=m_2$.*

Preuve. — Le cas $i<m_2$ découle du lemme précédent. Supposons donc $i=m_2$. Quitte à faire un changement de variables nous pouvons supposer que $k^2(x)=x^1$. Rappelons (*voir* 1) que $a(x, \mathrm{D}) = \sum_{|\beta|\leqq m} a_\beta(x)\mathrm{D}_x^\beta$. Posons :

$$p(x, \lambda) = a_m(x; \lambda, 1, 0, 0, \ldots, 0) = \sum_{\beta_0\leqq m} a_{(\beta_0,\, m-\beta_0,\, 0)}(x)\,\lambda^{\beta_0}$$

comme $(k^2)^{-1}(0)$ est une hypersurface caractéristique de multiplicité constante m_2 on a :

$$\forall x \in \mathrm{U}, \qquad \frac{\partial^i p}{\partial \lambda^i}(x, 0) \equiv 0 \quad \text{si } 0 \leqq i < m_2; \qquad \frac{\partial^{m_2} p}{\partial \lambda^{m_2}}(0, 0) \neq 0.$$

Par conséquent on a :

$$a_m(x; \lambda, 1, 0, 0, \ldots, 0) = \sum_{m_2 \leqq \beta_0 \leqq m} a_{(\beta_0,\, m-\beta_0,\, 0)}(x)\, \lambda^{\beta_0}$$

et $a_{(m_2,\, m-m_2)}(0) \neq 0$. Cela dit, quand on applique $\mathrm{D}_{x^0}^{\beta_0} \circ \mathrm{D}_{x^1}^{m-\beta_0}$ à $h(\log x^0, \log x^1, x)$ on fait apparaître le monôme $(e^{-t_1}\partial_{t_1})^{\beta_0}(e^{-t_2}\partial_{t_2})^{m-\beta_0}$, on obtient alors aisément le lemme.

Quitte à restreindre U′ nous pouvons donc supposer que le coefficient de $(e^{-t_1}\partial_{t_1})^{m_2}(e^{-t_2}\partial_{t_2})^{m-m_2}$ dans le premier membre de (4.2) ne s'annule jamais dans U′. Il existe alors des fonctions $b_{\lambda,\, \mu,\, \beta}(x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^2$, $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\beta| \leqq m - \lambda - \mu$ holomorphes sur U′ et telles que l'équation (4.2) soit équivalente à :

$$(4.3) \quad (e^{-t_1}\partial_{t_1})^{m_2}(e^{-t_2}\partial_{t_2})^{m-m_2} h(t, x) = g(t, x) + \sum_{\substack{|\beta| + \lambda + \mu \leqq m \\ (\lambda,\, \mu) \neq (m-m_2,\, m_2),\ \lambda \neq m}} b_{\lambda,\, \mu,\, \beta}(x)(e^{-t_1}\partial_{t_1})^{\mu}(e^{-t_2}\partial_{t_2})^{\lambda} \mathrm{D}_x^{\beta} h(t, x)$$

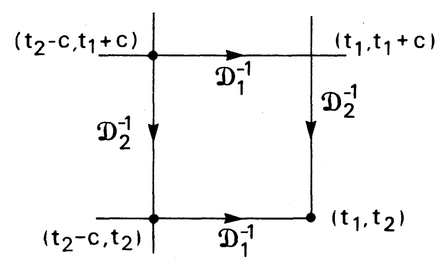
où $(t_1, t_2) \in \mathscr{R}(c_1, \omega_1)$, $x \in \mathrm{U}'$ et $g \in \mathscr{H}(\mathscr{R}(c_1, \omega_1) \times \mathrm{U}')$ est donnée. Le lemme 4.2 montre (et c'est crucial) que si $\lambda + \mu + |\beta| = m$ et $\lambda > m - m_2$ alors $b_{\lambda,\, \mu,\, \beta}$ est identiquement nulle, posons $\mathscr{D}_1 = e^{-t_1}\partial_{t_1}$, $\mathscr{D}_2 = e^{-t_2}\partial_{t_2}$. Soit $c \in]-\infty, c_1 - 3]$ (c ne sera choisi qu'à la fin de la preuve), pour $u \in \mathscr{H}(\mathscr{R}(c, \omega) \times \mathrm{U}')$ on pose

$$\mathscr{D}_1^{-1} u(t, x) = \int_{t_2 - c}^{t_1} e^{\theta} u(\theta, t_2, x)\, d\theta, \qquad \mathscr{D}_2^{-1} u(t, x) = \int_{t_1 + c}^{t_2} e^{\sigma} u(t_1, \sigma, x)\, d\sigma,$$

où $t = (t_1, t_2) \in \mathscr{R}(c, \omega)$.

Remarque 4.4. — Rappelons (*cf.* proposition 2.2) que les segments d'intégration $[(t_2 - c, t_2), (t_1, t_2)]$ et $[(t_1, t_1 + c), (t_1, t_2)]$ sont inclus dans $\mathscr{R}(c, \omega)$.

Le dessin suivant fait dans $\mathbb{R}^2$ (dans le plan des $\mathrm{Re}\, t_1$, $\mathrm{Re}\, t_2$) :



permet de deviner (*cf.* lemme 5.4) que $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ commutent. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathscr{D}_1^{-k} = \mathscr{D}_1^{-1} \circ \ldots \circ \mathscr{D}_1^{-1}$ (k fois), $\mathscr{D}_2^{-k} = \mathscr{D}_2^{-1} \circ \ldots \circ \mathscr{D}_2^{-1}$ (k fois). Soit

$u_1 \in \mathscr{H}(\mathscr{R}(c_1, \omega_1) \times U')$, on observe que :

$$\mathscr{D}_1^{m_2} \circ \mathscr{D}_2^{m-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2}(u_1) = u_1.$$

Reprenons les notations de l'équation (4.3) et posons :

$$(4.4) \qquad \mathscr{K} = \sum_{\substack{|\beta|+\lambda+\mu \leqq m \\ (\lambda, \mu) \neq (m-m_2, m_2), \lambda \neq m}} b_{\lambda, \mu, \beta}(x)\, \mathscr{D}_1^{\mu} \mathscr{D}_2^{\lambda} \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \mathscr{D}_1^{-m_2} D_x^{\beta},$$

rappelons [*cf.* lemme (4.2)] que si $|\beta|+\lambda+\mu=m$ et $\lambda > m-m_2$ alors $b_{\lambda, \mu, \beta}$ est identiquement nulle. $u_1 = \sum_{l \geqq 0} \mathscr{K}^l(g)$ définit une solution formelle de l'équation

$$(4.5) \qquad u_1(t, x) = g(t, x) + \mathscr{K} u_1(t, x)$$

$h(t, x) = \sum \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2} \mathscr{K}^l g(t, x)]$ définit une solution formelle de l'équation (4.3). Rappelons que nous cherchons la fonction holomorphe ramifiée $u(x)$ du théorème 3.1 sous la forme $h(\log x^0, \log k^2(x), x)$. La suite de cet article est essentiellement consacrée à la preuve de la proposition suivante qui établit la convergence de ces séries dans un espace convenable.

PROPOSITION 4.5. — *Il existe* $\omega \in]0, e^{-2}\omega_1]$, $c \in]-\infty, c_1-3]$ *et un voisinage* Ω $(\subset U')$ *de* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ *tel que pour tout* $g \in \mathscr{H}(\mathscr{R}(c_1, \omega_1) \times U')$ *les séries de somme* $u_1 = \sum_{l \geqq 0} \mathscr{K}^l g$, $h = \sum_{l \geqq 0} \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2} \mathscr{K}^l g$ convergent uniformément sur tout compact de $\mathscr{R}(c, \omega) \times \Omega$. *En outre si g est de détermination finie* [*resp. et en plus à monodromie unipotente*] *alors il en est de même de h. Si* $a(x, D)$ *est à caractéristiques simples et si g est dans la classe de Nilsson alors il en est de même de h.*

REMARQUE 4.6. — Reprenons les notations de la proposition 4.5. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Posons

$$A(c, \varepsilon, \omega) = \{(t_1, t_2) \in \mathscr{R}'(c+\varepsilon, \omega);\ \operatorname{Re} t_2 < c + \log \omega\}.$$

Il est clair que si (t_1, t_2) appartient à $A(c, \varepsilon, \omega)$ alors les segments $[(t_2-c, t_2), (t_1, t_2)]$ et $[(t_1, t_1+c), (t_1, t_2)]$ sont inclus dans l'ouvert convexe $A(c, \varepsilon, \omega)$. On vérifie alors aisément que $\forall l \in \mathbb{N}$ les fonctions $\mathscr{K}^l g$, $\mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathscr{K}^l g$ sont holomorphes sur $A(c, \varepsilon, \omega) \times U'$. Enfin on vérifie immédiatement que la fonction $h(t, x)$ définit une fonction holomorphe sur $\mathscr{R}'(c, \omega) \times \Omega$ solution de l'équation (4.3).

PREUVE DES PARTIES 1° ET 3° DU THÉORÈME 3.1 A PARTIR DE LA PROPOSITION 4.5. — Reprenons les notations utilisées au début de cette section. Fixons un couple (c, ω) vérifiant les conditions de la proposition 4.5. En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 2.5 on vérifie qu'il existe un polydisque ouvert U_3 (inclus dans U_2' et Ω) de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et un voisinage effilé W_2 (inclus dans les voisinages effilés W_2' et W_2'') de $(k^2)^{-1}(0)$ *tels que :*

(1) $\qquad \forall x \in U_3 \cap W_2, \quad (x^0, k^2(x)) \in X(c-1, \omega) \qquad$ (*voir* déf. 2.1).

Tout germe de v en un point de $U_3 \cap W_2$ définit une fonction ramifiée encore notée v dans W'_2 donc comme au début de cette section il existe $g' \in \mathscr{H}(\mathscr{R}(c_1, \omega_1) \times U')$ telle que dans $U_3 \cap W_2$ on ait $v(x) = g'(\log x^0, \log k^2(x), x)$.

D'après la proposition 4.5, (1) et ce qui précède il existe $h(t, x)$ holomorphe sur $\mathscr{R}'(c, \omega) \times \Omega$ telle que

$$\forall x \in U_3 \cap W_2, \quad a(x, D)\, h(\log x^0, \log k^2(x), x) = g'(\log x^0, \log k^2(x), x)$$

et $u(x) = h(\log x^0, \log k^2(x), x)$ définit une fonction holomorphe ramifiée dans $U_3 \cap W_2$ et vérifie toutes les conditions demandées dans le théorème 3.1. On raisonne de même pour les autres hypersurfaces caractéristiques et on obtient donc un polydisque $U(=U_3)$ et des voisinages effilés W_i de $(k^i)^{-1}(0)$, $1 \leqq i \leqq d$ vérifiant les assertions 1° et 3° du théorème 3.1.

Pour démontrer la proposition 4.5 nous devrons étudier soigneusement les propriétés des opérateurs $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$. Il est clair que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ d'une part, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_1^{-1}$ d'autre part ne commutent pas ($\mathscr{D}_i$ et $\mathscr{D}_i^{-1}$ non plus bien sûr). L'objectif de la section 5 est d'étudier les commutateurs qui apparaissent ainsi.

5. Relations de commutations

Comme D_x^β commute avec $\mathscr{D}_i$, $\mathscr{D}_i^{-1}$, $i=1,2$ nous omettrons la variable x et considérerons des fonctions de $t=(t_1, t_2) \in \mathscr{R}(c, \omega)$ seulement. Ceci allègera les notations. Rappelons que c désigne un réel $\leqq c_1 - 3$ et que :

$$\mathscr{D}_1^{-1} u(t_1, t_2) = \int_{t_2 - c}^{t_1} e^\theta u(\theta, t_2)\, d\theta, \qquad \mathscr{D}_2^{-1} u(t_1, t_2) = \int_{t_1 + c}^{t_2} e^\sigma u(t_1, \sigma)\, d\sigma$$

$u(t_1, t_2)$ étant holomorphe sur un ouvert convexe de la forme $A(c, \varepsilon, \omega)$ (*cf.* remarque 4.6).

DÉFINITION 5.1. — On définit des opérateurs de trace : $T_1 u = e^c u(t_1, t_1 + c)$, $T_2 u = e^{-c} u(t_2 - c, t_2)$. Il est clair que $\mathscr{D}_1 T_2 \equiv 0$, $\mathscr{D}_2 T_1 \equiv 0$, $\mathscr{D}_1 \circ \mathscr{D}_2 = \mathscr{D}_2 \circ \mathscr{D}_1$ et que pour $(i, j) \in \{1, 2\}$, $T_i \mathscr{D}_j^{-1} \equiv 0$, $\mathscr{D}_i \circ \mathscr{D}_i^{-1} = \mathrm{id}$, $(p \in \mathbb{N}$ ou $-q \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathscr{D}_i^p \circ \mathscr{D}_i^q = \mathscr{D}_i^{p+q}$.

LEMME 5.2. — *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ alors on a :*

$$\mathscr{D}_1 \mathscr{D}_2^{-k} = \mathscr{D}_2^{-k} \mathscr{D}_1 - \mathscr{D}_2^{-(k-1)} T_1$$
$$\mathscr{D}_2 \mathscr{D}_1^{-k} = \mathscr{D}_1^{-k} \mathscr{D}_2 - \mathscr{D}_1^{-(k-1)} T_2$$

Preuve. — On a

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1 \mathscr{D}_2^{-1} u(t_1, t_2) &= e^{-t_1} \partial_{t_1} \left[\int_{t_1 + c}^{t_2} e^\sigma u(t_1, \sigma)\, d\sigma \right] \\ &= -e^c u(t_1, t_1 + c) + \int_{t_1 + c}^{t_2} e^\sigma e^{-t_1} \partial_{t_1} u(t_1, \sigma)\, d\sigma \\ &= -T_1 u + \mathscr{D}_2^{-1} \mathscr{D}_1 u. \end{aligned}$$

On prouve alors la première égalité du lemme par récurrence sur k en utilisant le fait que $T_1 \mathscr{D}_2^{-1} \equiv 0$. On prouve de même la deuxième égalité.

REMARQUE 5.3. — Dans les lemmes 5.5, 5.7 et 5.8 nous établirons des identités algébriques en regardant comment $\mathscr{D}_i$ commute avec $\mathscr{D}_j^{-1}$ $(i \neq j)$ et comment $\mathscr{D}_i$ commute avec T_i. En remplaçant dans chaque groupe de termes de ces identités $\mathscr{D}_1^p$ par e^{-pt_1}, $\mathscr{D}_2^p$ par $e^{-p(t_1+c)}$ (où $p \in \mathbb{Z}$), T_1 par e^c, T_2 par e^{-c} nous obtiendrons des égalités faisant intervenir des exponentielles. Ces égalités nous seront utiles pour majorer [*voir* les clauses (7.13) et (7.16) du théorème 7.9] les termes de la série $\sum \mathscr{H}_g^q$ (définie dans la proposition 4.5) issus des relations de commutation. En effet le lemme 7.3 et le théorème 7.4 montrent en gros que pour q entier $\geqq 0$ les majorations des opérateurs $\mathscr{D}_1^q$, $\mathscr{D}_1^{-q}$, $\mathscr{D}_2^{-q}$ font respectivement intervenir e^{-qt_1}, e^{qt_1}, $e^{q(t_1+c)}$. Indiquons par ailleurs que nous devrons contrôler soigneusement le nombre de fois où $\mathscr{D}_2$ apparaît dans $\mathscr{H}^q g$, en effet les majorations des opérateurs d'intégration feront intervenir e^{t_1} ou e^{t_1+c} ce qui ne permet pas de contrôler e^{-t_2}.

Le lemme suivant constitue une agréable surprise

LEMME 5.4. — $\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} = \mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1^{-1}$.

Preuve. — $\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} - \mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1^{-1}$ s'annule pour $t_1 = t_2 - c$, cela dit le lemme 5.2 montre que :

$$\mathscr{D}_1 [\mathscr{D}_1^{-1} \circ \mathscr{D}_2^{-1} - \mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1^{-1}] = \mathscr{D}_2^{-1} - \mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1 \circ \mathscr{D}_1^{-1} + T_1 \circ \mathscr{D}_1^{-1} \equiv 0.$$

Ceci prouve le lemme 5.4.

LEMME 5.5. — *Soient p et $q \in \mathbb{N}^*$, on peut alors affirmer que*

1°
$$\mathscr{D}_2^q \mathscr{D}_1^{-p} = \mathscr{D}_1^{-p} \mathscr{D}_2^q + \sum_{\substack{l=0 \\ l \geqq p-q}}^{p-1} \mathscr{D}_1^{-l} B_l$$

où B_l est la somme d'au plus 4^q termes du type :

$$\varepsilon(\alpha, \beta, l) T_2^{\alpha_1} \mathscr{D}_2^{\beta_1} \ldots T_2^{\alpha_q} \mathscr{D}_2^{\beta_q} \tag{5.1}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$ *appartiennent à* $\mathbb{N}^q$, $\varepsilon(\alpha, \beta, l) \in \{0, 1, -1\}$, $\sum \beta_i = q + l - p$, $\sum \alpha_i = p - l$.

2°
$$\mathscr{D}_1^p \mathscr{D}_2^{-q} = \mathscr{D}_2^{-q} \mathscr{D}_1^p + \sum_{\substack{l=0 \\ l \geqq q-p}}^{q-1} \mathscr{D}_2^{-l} B'_l$$

où B'_l est la somme d'au plus 4^p termes du type :

$$\varepsilon(\alpha, \beta, l) T_1^{\alpha_1} \mathscr{D}_1^{\beta_1} \ldots T_1^{\alpha_p} \mathscr{D}_1^{\beta_p}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ *appartient à* $\mathbb{N}^p$, $\varepsilon(\alpha, \beta, l) \in \{0, 1, -1\}$, $\sum \beta_i = p - q + l$, $\sum \alpha_i = q - l$.

REMARQUE 5.6. — Les égalités données à la fin de 1° et 2° sont importantes, elles permettent de prouver [*voir* (7.13) et (7.16)] que les commutateurs n'augmentent pas la taille des termes relativement à $\mathscr{D}_2^q \circ \mathscr{D}_1^{-p}$ ou $\mathscr{D}_1^p \circ \mathscr{D}_2^{-q}$. On observe que dans 1° l décrit au plus $q \leqq 2^q$ valeurs, il apparaît donc dans 1° au plus $2^q \times 4^q$ termes du type (5.1); le fait que ce nombre 8^q ne dépend pas de $\mathscr{D}_1^{-p}$ interviendra de manière cruciale dans la preuve du théorème 7.9 pour établir que le nombre de termes issus des relations de commutation dans $\mathscr{H}^l g$ est majoré par C^l où C est une constante indépendante de l. Naturellement on peut formuler la même observation pour le 2°.

Preuve. — Nous ne prouverons que le 1°, la démonstration du 2° étant analogue à celle du 1°. On prouve le résultat par récurrence sur q, p étant quelconque; le cas $q=1$ est un résultat du lemme 5.2. Soit donc $q \geqq 1$ et supposons le résultat prouvé au rang q. L'hypothèse de récurrence montre que :

$$\mathscr{D}_2^{q+1}\mathscr{D}_1^{-p}=\mathscr{D}_2(\mathscr{D}_1^{-p}\mathscr{D}_2^q)+\sum_{\substack{l=0\\ l\geqq p-q}}^{p-1}\mathscr{D}_2\mathscr{D}_1^{-l}\circ\Big(\sum_{(\alpha,\,\beta)\in \mathrm{I}_l}\varepsilon(\alpha,\beta,l)\,\mathrm{T}_2^{\alpha_1}\mathscr{D}_2^{\beta_1}\dots\mathrm{T}_2^{\alpha_q}\mathscr{D}_2^{\beta_q}\Big)$$

où I_l est un ensemble d'indices de cardinal $\leqq 4^q$. Le lemme 5.2 montre alors que le second membre de l'égalité précédente est égal à :

$$\mathscr{D}_1^{-p}\mathscr{D}_2^{q+1}+\mathscr{T}_1+\mathscr{T}_2+\mathscr{T}_3+\mathscr{T}_4$$

avec

$$\mathscr{T}_1=-\mathscr{D}_1^{-(p-1)}\mathrm{T}_2\mathscr{D}_2^q$$

$$\mathscr{T}_2=\sum_{\substack{l=1\\ l\geqq p-q}}^{p-1}\mathscr{D}_1^{-l}\circ\Big(\sum_{(\alpha,\,\beta)\in \mathrm{I}_l}\varepsilon(\alpha,\beta,l)\,\mathscr{D}_2\mathrm{T}_2^{\alpha_1}\mathscr{D}_2^{\beta_1}\dots\mathrm{T}_2^{\alpha_q}\mathscr{D}_2^{\beta_q}\Big)$$

$$\mathscr{T}_3=-\sum_{\substack{l=1\\ l\geqq p-q}}^{p-1}\mathscr{D}_1^{-(l-1)}\sum_{(\alpha,\,\beta)\in \mathrm{I}_l}\varepsilon(\alpha,\beta,l)\,\mathrm{T}_2^{1+\alpha_1}\mathscr{D}_2^{\beta_1}\dots\mathrm{T}_2^{\alpha_q}\mathscr{D}_2^{\beta_q}$$

$$\mathscr{T}_4=\sum_{(\alpha,\,\beta)\in \mathrm{I}_0}\varepsilon(\alpha,\beta,0)\,\mathscr{D}_2\mathrm{T}_2^{\alpha_1}\mathscr{D}_2^{\beta_1}\dots\mathrm{T}_2^{\alpha_q}\mathscr{D}_2^{\beta_q}$$

$(\sum \beta_i=q-p,\ \sum\alpha_i=p)$.

(Si $p>q$ la dernière sommation est identiquement nulle.)

On vérifie alors immédiatement que chaque terme $\mathscr{T}_j\,(1\leqq j\leqq 4)$ vérifie les assertions — au cran $q+1$ — du 1° du lemme 5.5.

LEMME 5.7. — *Soient p, $q\in\mathbb{N}^*$, on peut alors affirmer que :*

1° $$\mathscr{D}_2^q\mathrm{T}_2=\mathrm{T}_2\left(\sum_{h=0}^{q}\mathrm{C}_q^h e^{-hc}\mathscr{D}_2^{q-h}\mathscr{D}_1^h\right)$$

$$\mathrm{T}_2\mathscr{D}_2^q=\sum_{h=0}^{q}\mathrm{C}_q^h(-1)^h e^{-hc}\mathscr{D}_2^{q-h}\mathrm{T}_2\mathscr{D}_1^h$$

2°
$$\mathscr{D}_1^p \mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_1 \left(\sum_{h=0}^{p} \mathrm{C}_p^h e^{hc} \mathscr{D}_1^{p-h} \mathscr{D}_2^h \right)$$

$$\mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^p = \sum_{h=0}^{p} \mathrm{C}_p^h e^{hc} (-1)^h \mathscr{D}_1^{p-h} \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_2^h$$

3° *Soient* $h_1, h_2, \ldots, h_s \in \mathbb{N}$ *alors on a :*

$$\mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^{h_1} \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^{h_2} \ldots \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^{h_s} = e^{(s-1)c} \mathscr{D}_1^{h_1 + \ldots + h_{s-1}} \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^{h_s},$$

on a un énoncé analogue en remplaçant T_1, $\mathscr{D}_1$, $e^{(s-1)c}$ *respectivement par* T_2, $\mathscr{D}_2$, $e^{-(s-1)c}$.

Preuve. — On prouve aisément le 3° en raisonnant par récurrence sur s et en utilisant l'identité $\mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^{h_1} \mathrm{T}_1 = e^c \mathscr{D}_1^{h_1} \mathrm{T}_1$. Prouvons maintenant le 1°. Soit $u(t_1, t_2)$ une fonction holomorphe, la fonction obtenue en appliquant $\mathscr{D}_2$ à $u(t_2 - c, t_2)$ est égale à $e^{-t_2} (\partial_{t_1} u)(t_2 - c, t_2) + e^{-t_2} (\partial_{t_2} u)(t_2 - c, t_2)$. On obtient alors les deux formules suivantes :

$$\mathrm{T}_2 \mathscr{D}_2 u + e^{-c} \mathrm{T}_2 \mathscr{D}_1 u = \mathscr{D}_2 \mathrm{T}_2 u$$
$$\mathscr{D}_2 \mathrm{T}_2 u - e^{-c} \mathrm{T}_2 \mathscr{D}_1 u = \mathrm{T}_2 \mathscr{D}_2 u$$

on prouve alors aisément les deux formules du 1° par récurrence sur q en utilisant les deux précédentes formules et en procédant comme pour la preuve de la formule du binôme de Newton. On prouve le 2° de manière analogue.

LEMME 5.8. — *Soient* $p, q \in \mathbb{N}^*$, *on peut alors affirmer que :*

1°
$$\mathscr{D}_2^q \mathscr{D}_1^{-p} = \mathscr{D}_1^{-p} \mathscr{D}_2^q + \sum_{\substack{l=0 \\ l \geqq p-q}}^{p-1} \mathscr{D}_1^{-l} \mathrm{K}_l$$

où K_l *est la somme d'au plus* 8^q *termes de la forme :*

$$\pm \mathrm{T}_2 \mathscr{D}_1^a \mathscr{D}_2^b e^{\mathrm{A}c}$$

où $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = q + l - p$ *et* $\mathrm{A} = b + 1 - q$.

2°
$$\mathscr{D}_1^p \mathscr{D}_2^{-q} = \mathscr{D}_2^{-q} \mathscr{D}_1^p + \sum_{\substack{l=0 \\ l \geqq q-p}}^{q-1} \mathscr{D}_2^{-l} \mathrm{K}_l'$$

où K_l' *est la somme d'au plus* 8^p *termes de la forme :*

$$\pm \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^a \mathscr{D}_2^b e^{\mathrm{A}c}$$

où $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = p - q + l$ et $\mathrm{A} = q + b - l - 1$.

Preuve. — Prouvons le 1°. Reprenons les notations du 1° du lemme 5.5. Soit $l \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \cap [p-q, +\infty[$, dans un terme du type (5.1) on a $\sum \alpha_i = p - l \geqq 1$ donc l'un des α_i est non nul, rappelons aussi que $\sum \beta_i = q + l - p$. Le 3° du lemme 5.7 montre alors que B_l est somme d'au plus 4^q termes du type :

$$\pm e^{-(p-l-1)c}\mathscr{D}_2^{q+l-p-k}T_2\mathscr{D}_2^k \tag{5.2}$$

où $k\in\mathbb{N}$, $k\leqq q+l-p\leqq q$.

Le 1° du lemme 5.7 montre alors que (5.2) est somme d'au plus $2^{q+l-p-k}(\leqq 2^q)$ termes du type

$$\pm e^{-(h+p-l-1)c}T_2\mathscr{D}_2^{q+l-p-h}\mathscr{D}_1^h \tag{5.3}$$

où $0\leqq h\leqq q+l-p$. On observe que $A=-(h+p-l-1)=q+l-p-h+1-q$. Enfin il est clair que K_l est somme d'au plus $2^q\times 4^q$ termes du type (5.3). Ceci prouve le 1°. On prouve le 2° de manière analogue.

6. Normes et fonctions majorantes

Si (u_α) et (v_α) appartiennent à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^{n+1}}$, alors on écrit $\sum u_\alpha x^\alpha \ll \sum v_\alpha x^\alpha$ pour indiquer que $\forall\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}$, $|u_\alpha|\leqq|v_\alpha|$. Cela dit, pour $R>0$, posons

$$1-\frac{x}{R}=\prod_{i=0}^{n}\left(1-\frac{x^i}{R}\right)$$

et, pour $k\in\mathbb{N}$, notons

$$\Phi_k^R=\frac{R^{-k}k!}{(1-(x/R))^{k+1}}.$$

On observe que $D_{x^i}\Phi_k^R\ll\Phi_{k+1}^R$ $(0\leqq i\leqq n)$. La proposition suivante nous permettra de contrôler l'action des coefficients des opérateurs différentiels en x; elle est essentiellement démontrée dans [5].

PROPOSITION 6.1. — *Soient $k\in\mathbb{N}$, $C>0$ et $R>0$. Considérons une fonction $u(x)$ holomorphe sur un voisinage de l'origine et telle que $u(x)\ll C\Phi_k^R(x)$. Alors*

(*a*) $\forall\beta\in\mathbb{N}^{n+1}$, $D_x^\beta u\ll C\Phi_{k+|\beta|}^R$.

(*b*) *Soit $R'>R$ et $a(x)$ une fonction holomorphe et bornée par $M>0$ sur $\{x\in\mathbb{C}^{n+1}/\sup_{0\leqq i\leqq n}|x^i|<R'\}$, alors*

$$a(x)u(x)\ll\left(\frac{R'}{R'-R}\right)^{n+1}MC\Phi_k^R.$$

Preuve. — Le (*a*) est trivial; prouvons le (*b*). Les inégalités de Cauchy montrent que

$$a(x)\ll M\left(1-\frac{x}{R'}\right)^{-1}$$

$$au \ll \mathrm{MCR}^{-k}\frac{k!}{1-(x/\mathrm{R}')}\,\frac{1}{(1-(x/\mathrm{R}))^{k+1}}$$

On vérifie aisément que $(0 \leqq i \leqq n)$

$$\left(\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}'-\mathrm{R}}-\frac{1}{1-(x^i/\mathrm{R}')}\right)\frac{1}{(1-(x^i/\mathrm{R}))^{k+1}}=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'-\mathrm{R}}\left(1-\frac{x^i}{\mathrm{R}}\right)^{-k}\left(1-\frac{x^i}{\mathrm{R}'}\right)^{-1}$$

comme les coefficients de cette série entière sont $\geqq 0$, on a :

$$\frac{1}{1-(x^i/\mathrm{R}')}\times\frac{1}{(1-(x^i/\mathrm{R}))^{k+1}}\ll\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}'-\mathrm{R}}\,\frac{1}{(1-(x^i/\mathrm{R}))^{k+1}}$$

on en déduit immédiatement le résultat.

7. Preuve de la proposition 4.5

Les résultats centraux de cette section sont les théorèmes 7.7 et 7.9. Le théorème 7.9 permet de décomposer $\mathscr{H}^q g$ en C^q termes auxquels on pourra appliquer les majorations fournies par le théorème 7.7, ce qui nous permettra de prouver la convergence de la série.

Rappelons l'expression notée (4.4) de $\mathscr{H}$

$$\mathscr{H}=\sum_{\lambda+\mu+|\delta'|\leq m} b_{\lambda,\mu,\delta'}(x)\,\mathscr{D}_1^{\mu}\,\mathscr{D}_2^{\lambda}\,\mathscr{D}_1^{-m_2}\,\mathscr{D}_2^{-(m-m_2)}\,\mathrm{D}_x^{\delta'}$$

Rappelons que dans cette sommation $b_{\lambda,\mu,\delta'}$ est identiquement nul dans les deux cas suivants (*cf.* lemme 4.2) $|\lambda|+|\mu|=m$ et $\lambda\geqq m-m_2$ ou $|\delta'|+\lambda+\mu=m$ et $\lambda>m-m_2$. Dans cette section nous considérerons (*cf.* l'énoncé de la proposition 4.5) $g\in\mathscr{H}(\mathscr{R}(c_1,\omega_1)\times\mathrm{U}')$, nous travaillerons avec un réel fixé $\mathrm{R}\in]0,1[$ (R ne dépend que de U′, ω_1 et des coefficients de $\mathscr{H}$) tel que le polydisque noté $\Delta(2\mathrm{R})$ de centre $0\in\mathbb{C}^{n+1}$ et de rayon $2\mathrm{R}$ soit inclus dans U′ et tel que les coefficients $b_{\lambda,\mu,\delta'}$ de $\mathscr{H}$ soient holomorphes et bornées sur le polydisque $\Delta(3\mathrm{R})$. Rappelons (lemme 5.4) que $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ commutent, les monômes d'opérateurs intégro-différentiels composant $\mathscr{H}$ seront alors de trois types que nous décrivons ci-après.

– *Premier type.* – $\mu\geqq m_2$ et $\lambda\leqq m-m_2$, comme $(\mu,\lambda)\neq(m_2,m-m_2)$ on a $\lambda<m-m_2$, on obtient alors le monôme

$$\mathrm{D}_x^{\delta'}\,\mathscr{D}_1^{\mu-m_2}\circ\mathscr{D}_2^{\lambda-(m-m_2)}. \tag{7.1}$$

– *Deuxième type.* – $\mu<m_2$ et $\lambda\leqq m-m_2$ on obtient alors le monôme.

$$\mathrm{D}_x^{\delta'}\,\mathscr{D}_1^{\mu-m_2}\circ\mathscr{D}_2^{\lambda-(m-m_2)}. \tag{7.2}$$

Il n'y a pas de termes vérifiant $\mu\geqq m_2$ et $\lambda>m-m_2$ car $\lambda+\mu\leqq m$.

— *Troisième type.* — $\lambda > m - m_2$ et $\mu < m_2$ et, on a alors $\lambda + \mu + |\delta'| \leqq m - 1$ et on obtient le monôme

$$\mathrm{D}_x^{\delta'} \mathscr{D}_2^{\lambda - (m - m_2)} \circ \mathscr{D}_1^{\mu - m_2} \tag{7.3}$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}^q$ est la somme au plus C^q (C = constante ne dépendant que de m et n) opérateurs du type :

$$b_{\lambda^q, \mu^q, \delta'^q} \mathscr{D}_2^{\lambda^q} \circ \mathscr{D}_1^{\mu^q} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathrm{D}_x^{\delta'^q} \circ \dots \circ b_{\lambda^1, \mu^1, \delta'^1}(x) \mathscr{D}_2^{\lambda^1} \circ \mathscr{D}_1^{\mu^1} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathrm{D}_x^{\delta'^1}. \tag{7.4}$$

En appliquant l'opérateur (7.4) à la fonction $g(t, x)$ nous obtenons la fonction :

$$\mathscr{D}_2^{\lambda^q} \circ \mathscr{D}_1^{\mu^q} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \dots \circ \mathscr{D}_2^{\lambda^1} \circ \mathscr{D}_1^{\mu^1} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ [b_{\lambda^q, \mu^q, \delta'^q} \mathrm{D}_x^{\delta'^q} (b_{\lambda^{q-1}, \mu^{q-1}, \delta'^{q-1}} \mathrm{D}_x^{\delta'^{q-1}} (\dots (b_{\lambda^1, \mu^1, \delta'^1} \mathrm{D}_x^{\delta'^1} g(t, x))) \dots] \tag{7.5}$$

Pour contrôler l'action des coefficients de $\mathscr{H}$ nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 7.0. — *Rappelons qu'au début de cette section nous avons supposé que tous les coefficients de* $\mathscr{H}$ *sont holomorphes et bornés par* M *sur le polydisque noté* $\Delta(3\mathrm{R})$ *de centre* 0 *et de rayon* 3 R. *Reprenons les notations utilisées pour définir le terme* (7.5). *Soit* K′ *un compact non vide de* $\mathscr{R}(c_1, \omega_1)$. *Soit* $\mathrm{C}_{\mathrm{K}'}$, *une constante* >0 *telle que pour tout* t *de* K′ *on ait :*

$$x \mapsto g(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} \Phi_0^{\mathrm{R}}(x).$$

Alors pour tout t *de* K′ *on a :*

$$x \mapsto b_{\lambda^q, \mu^q, \delta'^q} \mathrm{D}_x^{\delta'^q} (b_{\lambda^{q-1}, \mu^{q-1}, \delta'^{q-1}} \mathrm{D}_x^{\delta'^{q-1}} (\dots (b_{\lambda^1, \mu^1, \delta'^1} \mathrm{D}_x^{\delta'^1} g(t, x)) \dots) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} (2^{n+1} \mathrm{M})^q \Phi^{\mathrm{R}}_{|\delta'^q| + \dots + |\delta'^1|}(x).$$

Preuve. — Nous allons prouver le résultat dans le cas $q=1$, on obtient le cas général en raisonnant par récurrence. Le (*a*) de la proposition 6.1 montre que pour tout t de K′ on a :

$$x \mapsto \mathrm{D}_x^{\delta'^1} g(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} \Phi^{\mathrm{R}}_{|\delta'^1|}(x).$$

Nous appliquons alors le (*b*) de la proposition 6.1 avec $\mathrm{R}' = 2\mathrm{R}$ $(\mathrm{R}'/(\mathrm{R}' - \mathrm{R}) = 2)$. Nous obtenons alors :

$$x \mapsto b_{\lambda^1, \mu^1, \delta'^1} \mathrm{D}_x^{\delta'^1} g(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} 2^{n+1} \mathrm{M} \Phi^{\mathrm{R}}_{|\delta'^1|}(x).$$

Nous aurons besoin du résultat suivant démontré dans [5].

LEMME 7.1 (voir [5]). — *Soit* $\mathrm{L}'' = (l^q, \dots, l^1) \in \mathbb{Z}^q$ *posons*

$$\sigma_+(\mathrm{L}'') = \max_{0 \leqq j \leqq q} \sum_{i=1}^{j} l_i, \qquad \sigma_-(\mathrm{L}'') = -\min_{0 \leqq j \leqq q} \sum_{i=1+j}^{q} l_i$$

$\left(\textit{on convient que} \sum_{i=1}^{0} = \sum_{i=1+q}^{q} = 0 \right)$. *Alors* $\sigma_+(L'')$ *et* $\sigma_-(L'')$ *appartiennent à* $\mathbb{N}$ *et on a :*

$$\sigma_+(L'')-\sigma_-(L'')=l_q+\ldots+l_1$$
$$\mathscr{D}_2^{l_q}\circ\ldots\circ\mathscr{D}_2^{l_1}=\mathscr{D}_2^{-\sigma_-(L'')}\circ\mathscr{D}_2^{\sigma_+(L'')}$$

Naturellement on a un énoncé identique pour $\mathscr{D}_1$.

Reprenons les notations utilisées pour définir l'opérateur (7.4) et posons $L=(\lambda^q-m+m_2, \ldots, \lambda^1-m+m_2)$, $L'=(\mu^q-m_2, \ldots, \mu^1-m_2)$, L et L' appartiennent à $\mathbb{Z}^q$. Pour majorer le terme (7.5) nous utiliserons les relations de commutations écrites dans la section 5, il apparaîtra alors l'opérateur suivant [en les variables (t_1, t_2)] :

$$\mathscr{D}_1^{-\sigma_-(L')}\circ\mathscr{D}_2^{-\sigma_-(L)}\circ\mathscr{D}_2^{\sigma_+(L)}\circ\mathscr{D}_1^{\sigma_+(L')}. \tag{7.6}$$

Si $\mathscr{D}_i$ et $\mathscr{D}_j^{-1}$ commutait pour $i\neq j$ alors la fonction (7.5) serait égale à la fonction holomorphe obtenue en appliquant l'opérateur (7.6) au membre de gauche de la deuxième inégalité du lemme 7.0. Disons − pour éclairer le lecteur (*voir* théorème 7.9) − que nous majorerons (7.6) et montrerons comment la majoration de (7.6) permet de majorer les termes que les relations de commutation introduisent dans l'expression de (7.5). Considérons un terme du type (7.4) et notons d' le nombre d'indices $i\in\{1, 2, \ldots, q\}$ tels que $\lambda^i>m-m_2$, le lemme 4.2 montre que pour un tel indice i on a $\lambda^i+\mu^i+|\delta'^i|\leqq m-1$. D'après le lemme 7.1 les relations suivantes sont clairement vérifiées :

$$\begin{gathered}\sigma_-(L)-\sigma_+(L)=q(m-m_2)-\lambda^q-\ldots-\lambda^1\\ \sigma_-(L')-\sigma_+(L')=qm_2-\mu^q-\ldots-\mu^1\\ \sigma_+(L)+\sigma_+(L')+\sigma_-(L)+\sigma_-(L')\leqq 4qm\\ \lambda^q+\ldots+\lambda^1+\mu^q+\ldots+\mu^1+|\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|\leqq qm-d'\\ |\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|\leqq qm-d'-(\lambda^q+\ldots+\lambda^1+\mu^q+\ldots+\mu^1)\\ \qquad\qquad=\sigma_-(L)+\sigma_-(L')-\sigma_+(L)-\sigma_+(L')-d'.\end{gathered} \tag{7.7}$$

Le second membre de la dernière relation représente le nombre d'opérateurs d'intégrations diminué de d' et du nombre d'opérateurs de dérivation en t_1, t_2.

LEMME 7.2. — *Avec ces notations on peut affirmer que*

(*a*) $\sigma_+(L)\leqq d'(m_2-1)$;

(*b*) $\sigma_-(L)-\sigma_+(L)+d'(m_2-1)\geqq\sigma_+(L')$;

(*c*) $d'(m_2-1)\geqq\sigma_+(L')+\sigma_+(L)-\sigma_-(L)-\sigma_-(L')$.

Preuve. − Prouvons le (*a*). Rappelons que d' désigne le nombre d'indices $k\in\{1, 2, \ldots, q\}$ tels que $\lambda^k-m+m_2>0$ (comme l'hypersurface $k^2=0$ est caractéristique on a toujours $\lambda^k\leqq m-1$) et on a alors $\lambda^k-m+m_2\leqq m_2-1$. Ceci prouve le (*a*). Prouvons le (b). Le lemme 7.1 permet d'écrire les identités :

$$\sigma_+(\mathrm{L}')=\operatorname*{Max}_{0\leqq b\leqq q}\sum_{i=1}^{b}(\mu^i-m_2),\qquad \sigma_-(\mathrm{L})=\operatorname*{Max}_{0\leqq b\leqq q}-\sum_{i=1+b}^{q}(\lambda^i-m+m_2)$$

l'inégalité $\lambda^i+\mu^i\leqq m$ montre que :

$$\mu^i-m_2\leqq m-m_2-\lambda^i$$

on peut alors affirmer que

$$\sigma_+(\mathrm{L}')\leqq\sum_{\mu^i-m_2\geqq 0}(m-m_2-\lambda^i)$$

Il y a exactement d' indices i tels que $\lambda^i-m+m_2>0$ et on a $\lambda^i-m+m_2\leqq m_2-1$ ou encore $-(m_2-1)\leqq-(\lambda^i-m+m_2)$. Les relations (7.7) permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned}\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})&=\sum_{i=1}^{q}(m-m_2-\lambda^i)\\&\geqq -d'(m_2-1)+\sum_{\mu^i-m_2\geqq 0}(m-m_2-\lambda^i)\geqq -d'(m_2-1)+\sigma_+(\mathrm{L}').\end{aligned}$$

Ceci prouve le (b). Il est clair que (b) entraîne (c).

LEMME 7.3. — *Soient* $\omega_1>0$ *et* $c_1<0$, *Pour tout* $(\omega, c)\in]0, e^{-2}\omega_1]\times]-\infty, c_1-3]$, *pour tout compact* K *convexe [contenant avec* (t_1, t_2) *les points* (t_2-c, t_2) *et* (t_1, t_1+c)) *de* $\mathscr{R}(c, \omega)$], *pour tout compact convexe* K' *de* $\mathscr{R}(c_1, \omega_1)$ *contenant* K *et avec chaque point* t *de* K *le polydisque de centre* t *et de rayon* 1, *pour toute fonction* $u(t_1, t_2)$ *holomorphe sur* $\mathscr{R}(c_1, \omega_1)$ *et pour tout* $(h_1, h_2)\in\mathbb{N}^2$ *nous pouvons affirmer que* $\forall(t_1, t_2)\in\mathrm{K}$ *on a :*

$$|\mathscr{D}_1^{h_1}\mathscr{D}_2^{h_2}u(t_1, t_2)|\leqq 2^{h_1+h_2}h_1!\,h_2!\,(\sup_{t'\in\mathrm{K}'}|u(t')|)\,|e^{-h_1t_1}|.|e^{-h_2t_2}|$$

$$|\mathrm{T}_1(\mathscr{D}_1^{h_1}\mathscr{D}_2^{h_2})u(t_1, t_2)|\leqq 2^{h_1+h_2}(h_1+h_2)!\,(\sup_{t'\in\mathrm{K}'}|u(t')|)\,|e^{-(h_1+h_2)t_1}|.|e^{c(1-h_2)}|$$

$$|\mathrm{T}_2(\mathscr{D}_1^{h_1}\mathscr{D}_2^{h_2})u(t_1, t_2)|\leqq 2^{h_1+h_2}(h_1+h_2)!\,(\sup_{t'\in\mathrm{K}'}|u(t')|)\,|e^{-(h_1+h_2)t_2}|.|e^{c(h_1-1)}|.$$

Note. — On peut travailler avec des ensembles K de la forme :

$$\mathrm{I}(\mathrm{A}, a, b, c, \omega)=\{(t_1, t_2)\in\mathbb{C}^2/\ c+a\leqq\operatorname{Re}t_2\leqq c+\operatorname{Re}t_1\leqq b+c<c+\log\omega,\ |\operatorname{Im}t_i|\leqq\mathrm{A},\ 1\leqq i\leqq 2\}$$

où $\mathrm{A}>0$, $a<0$ et $b<\log\omega$. On peut prendre $\mathrm{K}'=\mathrm{I}(\mathrm{A}+1, a-3, b+1, c+2, e\omega)$.

Preuve. — Prouvons brièvement la première assertion du lemme. Par récurrence on vérifie immédiatement que $\mathscr{D}_1^{h_1}\mathscr{D}_2^{h_2}u$ est somme d'au plus $2^{h_1+h_2}$ termes du type :

$$e^{-h_1t_1}e^{-h_2t_2}c_{p_1}d_{p_2}\partial_{t_1}^{p_1}\circ\partial_{t_2}^{p_2}u\qquad\text{où}\quad 0\leqq p_1\leqq h_1,\quad 0\leqq p_2\leqq h_2$$

et :

$$|c_{p_1}| \leqq \frac{h_1!}{p_1!}, \qquad |d_{p_2}| \leqq \frac{h_2!}{p_2!}.$$

La première assertion découle alors des inégalités de Cauchy. On prouve les deux assertions de la même manière.

THÉORÈME 7.4. — *Il existe* $C>0$ *tel que* $\forall y, t \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in [y, t]$, *et pour toute fonction q holomorphe sur un voisinage de* $[y, t]$ *on a :*

$$|\mathcal{D}^{-k} q(z)| \leqq |y-t| \frac{C^k}{k!} \sup_{\mathcal{O} \in [y, t]} |q(\mathcal{O})| [\operatorname{Max}(|e^y|, |e^t|)]^k$$

où $\mathcal{D}^{-1} q(z) = \int_y^z e^{\varphi} q(\varphi) \, d\varphi$ *(l'intégrale est prise suivant le segment* $[y, z]$*) et* $\mathcal{D}^{-k} = \mathcal{D}^{-1} \circ \ldots \circ \mathcal{D}^{-1}$ *(k fois).*

REMARQUE 7.5. — $\mathcal{D}^{-1}$ correspond à l'opération de primitivation suivant le chemin $v \mapsto e^{y+v(z-y)}$ où v décrit $[0, 1]$, ce chemin est de longueur $|e^y| \, |z-y| \int_0^1 |e^{v(z-y)}| \, dv$, cette longueur est clairement majorée par $|z-y| \times \operatorname{Max}(|e^y|, |e^z|)$. Si on majorait brutalement dans l'expression de $\mathcal{D}^{-k} q(z)$ $|q(\varphi)|$ par $\sup_{\mathcal{O} \in [y, t]} |q(\mathcal{O})|$ alors nous obtiendrons l'inégalité suivante :

$$|\mathcal{D}^{-k} q(z)| \leqq \sup_{\mathcal{O} \in [y, t]} |q(\mathcal{O})| \frac{(|z-y| \times \operatorname{Max}(|e^y|, |e^z|))^k}{k!}$$

une inégalité de ce type nous obligerait dans la suite à imposer $|\operatorname{Im} t_2 - \operatorname{Im}(t_1 + c)| \leqq \mathrm{Cte}$, et nous ne pourrions prouver la convergence de la série $\sum \mathcal{H}^l g$ que sur une partie du revêtement universel. Le théorème 7.4 indique alors qu'il se produit pour les fonctions continues (comme il intervient le sup de $|q|$ sur le segment on peut appliquer le théorème de densité de Stone-Weierstrass) un phénomène de cancellation. Enfin nous verrons dans la preuve du théorème 7.7 qu'il est essentiel, pour majorer les opérateurs d'intégration, de ne prendre le sup de $|q(\mathcal{O})|$ que sur le segment d'intégration.

Preuve. — Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 7.6. — *Soient* $k \in \mathbb{N}^*$, $(y, t) \in \mathbb{C}^2$, *et q une fonction holomorphe sur un voisinage de* $[y, t]$, *alors* $\forall z \in [y, t]$ *on a :*

$$\mathcal{D}^{-k} q(z) = \sum_{b=1}^{k} \frac{1}{(b-1)!} \frac{(-1)^{b+1}}{(k-b)!} e^{(k-b)z} \int_y^z q(\mathcal{O}) e^{b\mathcal{O}} \, d\mathcal{O}.$$

Preuve du lemme 7.6. — Nous allons raisonner par récurrence sur $k \geqq 1$. On observe que $\partial/\partial z \left(\int_y^z q(\mathcal{O}) e^{b\mathcal{O}} \, d\mathcal{O} \right) = q(z) e^{bz}$. Dans le cas $k=1$ le lemme est trivialement vérifié.

Soit $k \geqq 1$, supposons le lemme prouvé au rang k et posons :

$$\mathrm{A}(z)=\sum_{b=1}^{k+1} \frac{1}{(b-1)!} \frac{(-1)^{b+1}}{(k+1-b)!} e^{(k+1-b) z} \int_{y}^{z} q(\mathcal{O}) e^{b\mathcal{O}} d\mathcal{O}$$

$e^{-z}(\partial/\partial z)\,\mathrm{A}(z)$ est égal à :

$$\sum_{b=1}^{k+1} \frac{1}{(b-1)!} \frac{(-1)^{b+1}(k+1-b)}{(k+1-b)!} e^{(k-b) z} \int_{y}^{z} q(\mathcal{O}) e^{b\mathcal{O}} d\mathcal{O}$$
$$+\sum_{b=1}^{k+1} \frac{1}{(b-1)!} \frac{(-1)^{b+1}}{(k+1-b)!} e^{(k-b+b) z} q(z).$$

La formule du binôme de Newton montre que :

$$\sum_{b=1}^{k+1} \frac{1}{(b-1)!} \frac{(-1)^{b+1}}{(k+1-b)!}=\frac{1}{k!}(1-1)^{k}=0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a $e^{-z}(\partial/\partial z)\,\mathrm{A}(z)=\mathscr{D}^{-k} q(z)$, comme $\mathrm{A}(y)$ est nul on a $\mathrm{A}(z)=\mathscr{D}^{-k-1} q(z)$. Ceci prouve le lemme.

Preuve du théorème 7.4. — Il est clair qu'il existe $\mathrm{C}>0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{b=1}^{k} \frac{1}{(b-1)!} \frac{1}{(k-b)!} \leqq \frac{\mathrm{C}^{k}}{k!}.$$

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $b \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $(y, t) \in \mathbb{C}^2$ et q une fonction holomorphe sur un voisinage de $[y, t]$. Soit $z \in [y, t]$. Si $\operatorname{Re} t \geqq \operatorname{Re} y$ on a :

$$\left|e^{(k-b) z} \int_{y}^{z} q(\mathcal{O}) e^{b\mathcal{O}} d\mathcal{O}\right| \leqq |e^{(k-b) z} e^{b z}|\,.\,|z-y| \sup_{\mathcal{O} \in [y, t]} |q(\mathcal{O})|.$$

Si $\operatorname{Re} t<\operatorname{Re} y$ on a :

$$\left|e^{(k-b) z} \int_{y}^{z} q(\mathcal{O}) e^{b\mathcal{O}} d\mathcal{O}\right| \leqq |e^{(k-b) y} e^{b y}|\,.\,|z-y| \sup_{\mathcal{O} \in [y, t]} |q(\mathcal{O})|$$

le théorème 7.4 découle alors du lemme 7.6.

Rappelons que dans le début de cette section on s'est donné $g \in \mathscr{H}(\mathscr{R}(c_1, \omega_1) \times \mathrm{U}')$ et $\mathrm{R} \in]0, 1[$ tel que le polydisque de centre 0 et de rayon 2R soit inclus dans U'.

THÉORÈME 7.7. — *Il existe une constante absolue* $\mathrm{C}>0$ *telle que* $\forall \omega \in]0, e^{-2}\omega_1]$, $\forall c \in]-\infty, c_1-3]$, *pour tout compact* K *convexe* [*contenant avec* (t_1, t_2) *les points* (t_2-c, t_2) *et* (t_1, t_1+c) *de* $\mathscr{R}(c, \omega)$], *pour tout compact convexe* K' *de* $\mathscr{R}(c_1, \omega_1)$ *contenant* K *et avec chaque point* t *de* K *le polydisque de centre* t *et de rayon* 1, *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{N}^4$ *et pour toute fonction* $u(t_1, t_2, x)$ *holomorphe sur* $\mathscr{R}(c_1, \omega_1) \times \mathrm{U}'$

vérifiant

$$\forall (t_1, t_2) = t \in \mathrm{K}', \quad x \mapsto u(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} \Phi_k^{\mathrm{R}}$$

où $\mathrm{C}_{\mathrm{K}'}$ *est une constante* >0 *et* Φ_k^{R} *est défini dans la section* 6, *on peut alors affirmer que :*

1° *Si* δ *est un entier naturel tel que* $\delta \geqq q_1 - p_2$ *alors* $\forall\, t \in \mathrm{K}$ *on a :*

$$x \mapsto \mathscr{D}_1^{-p_1} \mathscr{D}_2^{-p_2} \mathscr{D}_1^{q_1} \mathscr{D}_2^{q_2} u(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} \Phi_k^{\mathrm{R}} \frac{|e^{p_1 t_1}|}{p_1 !} \times \frac{|e^{t_1 (p_2 - q_1 + \delta)}|}{p_2 !}$$
$$\times e^{(p_2 + \delta) c} |e^{-t_2 (q_2 + \delta)}| q_1 ! \, q_2 ! \, \mathrm{C}^{q_1 + q_2 + p_1 + p_2} (|t_1 + c - t_2| + 1)^2.$$

2° *Si* δ *est un entier naturel tel que* $\delta \geqq q_1 + q_2 - p_2$ *alors* $\forall\, t \in \mathrm{K}$ *on a :*

$$x \mapsto \mathscr{D}_1^{-p_1} \mathscr{D}_2^{-p_2} \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^{q_1} \mathscr{D}_2^{q_2} u(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} \frac{(q_1 + q_2)!}{p_1 ! \, p_2 !}$$
$$\mathrm{C}^{p_1 + p_2 + q_1 + q_2} \Phi_k^{\mathrm{R}} e^{c (p_2 + 1 + \delta - q_2)} |e^{t_1 p_1} e^{t_1 (p_2 - q_1 - q_2 + \delta)}| . |e^{-\delta t_2}| \times (|t_2 - c - t_1| + 1)^2.$$

3° $\forall\, t \in \mathrm{K}$ *on a :*

$$x \mapsto \mathscr{D}_1^{-p_1} \mathscr{D}_2^{-p_2} \mathrm{T}_2 \mathscr{D}_1^{q_1} \mathscr{D}_2^{q_2} u(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} \frac{(q_1 + q_2)!}{p_1 ! \, p_2 !} \times \mathrm{C}^{p_1 + p_2 + q_1 + q_2}$$
$$\times \Phi_k^{\mathrm{R}} e^{c (q_1 - 1)} |e^{t_1 p_1}| . |e^{p_2 (t_1 + c)}| . |e^{-t_2 (q_1 + q_2)}| (|t_2 - c - t_1| + 1)^2.$$

REMARQUE 7.8. — On verra dans la preuve qu'il est essentiel pour effectuer les majorations de mettre $\mathscr{D}_1^{-1}$ à gauche, le fait que $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ commutent est donc crucial.

Preuve. — Prouvons le 1°. Le lemme 7.3 et la proposition 6.1 montrent que pour tout t de K :

$$x \mapsto \mathscr{D}_1^{q_1} \mathscr{D}_2^{q_2} u(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} \Phi_k^{\mathrm{R}} 2^{q_1 + q_2} q_1 ! \, q_2 ! \, |e^{-q_1 t_1}| . |e^{-q_2 t_2}|.$$

On rappelle que $\forall (t_1, t_2) \in \mathrm{K}$, $\operatorname{Re} t_2 - \operatorname{Re} t_1 \leqq c$. Faisons l'observation essentielle suivante : sur le segment d'intégration de $\mathscr{D}_1^{-1} u = \int_{t_2 - c}^{t_1} e^{\mathcal{O}} u(\mathcal{O}, t_2, x)\, d\mathcal{O}$ nous majorons $|e^{p\mathcal{O}}|$ par $|e^{p t_1}|$ si $p \geqq 0$, par $|e^{p (t_2 - c)}|$ si $p < 0$. Sur le segment d'intégration de $\mathscr{D}_2^{-1} u = \int_{t_1 + c}^{t_2} e^{\sigma} u(t_1, \sigma, x)\, d\sigma$ nous majorons $|e^{-p\sigma}|$ pour $p \geqq 0$ par $|e^{-p t_2}|$. Cela dit on a $|e^{t_1 + c}| \geqq |e^{t_2}|$. Le théorème 7.4 montre alors qu'il existe une constante absolue $\mathrm{C}' > 0$ telle que $\forall\, t \in \mathrm{K}$ on a :

$$x \mapsto \mathscr{D}_2^{-p_2} \mathscr{D}_1^{q_1} \mathscr{D}_2^{q_2} u(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} \Phi_k^{\mathrm{R}} \mathrm{C}'^{q_1 + q_2 + p_2} \frac{q_1 ! \, q_2 !}{p_2 !}$$
$$\times (|t_2 - t_1 - c| + 1)) |e^{p_2 (t_1 + c)}| . |e^{-q_1 t_1}| . |e^{-q_2 t_2}|$$

Soit maintenant δ un entier naturel $\geqq q_1 - p_2$. Sur le segment d'intégration de $\mathscr{D}_1^{-1}((\mathcal{O}, t_2)\in \mathrm{K})$ on majore

$$(|t_2 - c - \mathcal{O}| + 1)|e^{(p_2 - q_1)\mathcal{O}}| \quad \text{par} \quad (|t_2 - c - t_1| + 1)|e^{(p_2 - q_1 + \delta) t_1}|e^{-\delta (t_2 - c)}|.$$

Le 1° découle alors du théorème 7.4. Prouvons brièvement le 2°. Comme précédemment on montre en utilisant le lemme 7.3 et le théorème 7.4 qu'il existe une constante absolue $\mathrm{C}' > 0$ telle que $\forall t \in \mathrm{K}$ on a :

$$x \mapsto \mathscr{D}_2^{-p_2} \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^{q_1} \mathscr{D}_2^{q_2} u(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'} \frac{|e^{(t_1 + c) p_2}|}{p_2 !} |e^{c(1 - q_2)}| e^{-t_1 (q_1 + q_2)}|$$
$$\times (q_1 + q_2)!\, \mathrm{C}'^{q_1 + q_2 + p_2} \Phi_k^{\mathrm{R}}(|t_2 - t_1 - c| + 1).$$

Soit δ un entier naturel $\geqq q_1 + q_2 - p_2$. Sur le segment d'intégration de $\mathscr{D}_1^{-1}((\mathcal{O}, t_2)\in \mathrm{K})$ on majore

$$(|t_2 - c - \mathcal{O}| + 1)|e^{\mathcal{O}(p_2 - q_1 - q_2)}| \quad \text{par} \quad (|t_2 - c - t_1| + 1)\, |e^{t_1 (p_2 + \delta - q_1 - q_2)}|.|e^{-\delta (t_2 - c)}|.$$

Le 2° découle alors du théorème 7.4. On prouve le 3° de manière analogue.

L'objet du théorème 7.9 est d'établir une décomposition des termes que les relations de commutation introduisent dans l'expression (7.5) en vue de leur appliquer les majorations du théorème 7.7. Cette décomposition étant un argument essentiel on en donne une démonstration détaillée dans l'appendice A.

THÉORÈME 7.9 :

1° *Soit* $q \geqq 1$, *reprenons les notations utilisées pour définir le terme* (7.5) *et les relations* (7.7). *Alors l'opérateur suivant*

$$\mathscr{D}_2^{\lambda_q} \circ \mathscr{D}_1^{\mu_q} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m - m_2)} \circ \ldots \circ \mathscr{D}_2^{\lambda_1} \circ \mathscr{D}_1^{\mu_1} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m - m_2)} \tag{7.8}$$

est la somme d'au plus 64^{mq} *termes qui sont soit du type* (7.6), *soit du type* (7.9) *ou* (7.10) *que nous définissons ci-après :*

$$\pm \mathscr{D}_1^{-p_1} \circ \mathscr{D}_2^{-p_2} \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^{h_1} \mathscr{D}_2^{h_2} e^{\mathrm{A}_1 c} \tag{7.9}$$

où $\mathrm{A}_1 \in \mathbb{Z}$ *et* p_1, p_2, h_1, h_2 *appartiennent à* $\mathbb{N}$

$$\pm \mathscr{D}_1^{-q_1} \circ \mathscr{D}_2^{-q_2} \mathrm{T}_2 \mathscr{D}_1^{k_1} \mathscr{D}_2^{k_2} e^{\mathrm{A}_2 c} \tag{7.10}$$

où $\mathrm{A}_2 \in \mathbb{Z}$ *et* q_1, q_2, k_1, k_2 *appartiennent à* $\mathbb{N}$.

Rappelons que le terme (7.6) *vérifie les assertions du lemme* 7.2 *et les relations* (7.7).

2° *De plus les entiers apparaissant dans les termes* (7.9) *vérifient les propriétés suivantes :*

$$p_1 + p_2 + h_1 + h_2 \leqq 4\, qm$$

(cette propriété n'est pas numérotée)

$$p_2 + d'(m_2 - 1) \geqq h_1 + h_2 \tag{7.11}$$

$$(7.12)\quad |\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|\leqq p_1+p_2-h_1-h_2-d'=\sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L}')-d'.$$

$$(7.13)\quad \mathrm{A}_1=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})-p_2+h_2-1.$$

3° *De plus les entiers apparaissant dans les termes* (7.10) *vérifient les propriétés suivantes :*

$$q_1+q_2+k_1+k_2\leqq 4\,qm$$

$$(7.14)\quad k_1+k_2\leqq d'(m_2-1)$$

$$(7.15)\quad |\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|\leqq q_1+q_2-k_1-k_2-d'=\sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L}')-d'.$$

$$(7.16)\quad \mathrm{A}_2=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})-q_2+k_2+1.$$

Remarque 7.10. — Nous prouverons le théorème 7.9 en raisonnant par récurrence sur q, en utilisant les relations (7.7) et les lemmes 5.7, 5.8 et 7.2. Les assertions (7.12) et (7.15) indiquent que les opérations de commutation ne changent pas la quantité représentée par le nombre de primitivations diminué du nombre de dérivations en t_1, t_2. Les assertions (7.11) et (7.14) sont à rapprocher des assertions (*a*) et (*b*) du lemme 7.2, on pourrait les démontrer directement par récurrence. Enfin les assertions (7.13) et (7.16) indiquent que si pour $p\in\mathbb{Z}$ on remplace $\mathscr{D}_1^p$ par e^{-pt_1}, $\mathscr{D}_2^p$ par $e^{-p(t_1+c)}$, T_1 par e^c, T_2 par e^{-c} (*voir* les remarques 5.3 et 5.6) alors les opérations de commutation ne changent pas la quantité.

$$e^{-\lambda^q(t_1+c)}e^{-\mu^q t_1}e^{m_2t_1}e^{(m-m_2)(t_1+c)}\times\ldots\times e^{-\lambda^1(t_1+c)}e^{-\mu^1t_1}e^{m_2t_1}e^{(m-m_2)(t_1+c)}.$$

Soient g holomorphe sur $\mathscr{R}(c_1,\omega_1)\times\mathrm{U}'$ (*cf.* énoncé de la proposition 4.5) et $\mathrm{R}\in]0,1[$ vérifiant les conditions imposées au début de cette section et dans le lemme 7.0. Il est alors clair (*voir* la note du lemme 7.3) que pour tout $\omega\in]0,e^{-2}\omega_1]$, pour tout $c\in]-\infty,c_1-3]$, pour tout compact convexe K [contenant avec (t_1,t_2), les points (t_2-c,t_2) et (t_1,t_1+c)] de $\mathscr{R}(c,\omega)$ il existe un compact convexe K′ de $\mathscr{R}(c_1,\omega_1)$ associé à K comme indiqué dans le théorème 7.7 et il existe $\mathrm{C}_{\mathrm{K}'}>0$ telle que :

$$(*)\quad \forall\, t\in\mathrm{K}',\quad x\mapsto g(t,x)\ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'}\Phi_0^{\mathrm{R}}(x).$$

Dorénavant nous travaillerons avec de tels R, ω_1, c_1, ω, c, K, K′... et nous supposerons $\omega_1<1$.

Maintenant nous pouvons aborder la preuve de la convergence de la série $\sum_{l\geq 0}\mathscr{H}^l g$.

Reprenons les notations utilisées pour définir les termes (7.5) et (7.6).

LEMME 7.11 (avec les notations précédentes). — *Il existe une constante absolue* $C>0$ *telle que pour tout* t *de* K *on a :*

$$x \mapsto \mathscr{D}_1^{-\sigma_-(L')} \circ \mathscr{D}_2^{-\sigma_-(L)} \circ \mathscr{D}_2^{\sigma_+(L)} \circ \mathscr{D}_1^{\sigma_+(L')} [b_{\lambda^q,\mu^q,\delta'^q} D_x^{\delta'^q} (b_{\lambda^{q-1},\mu^{q-1},\delta'^{q-1}} D_x^{\delta'^{q-1}} (\ldots (b_{\lambda^1,\mu^1,\delta'^1} D_x^{\delta'^1} g(t,x)))\ldots)]$$
$$\ll C_{K'} C^{\sigma_-(L')+\sigma_-(L)+\sigma_+(L)+\sigma_+(L')}$$
$$\times |e^{-2t_2 d'(m_2-1)} \times e^{d'(m_2-1)c} \times e^{c\sigma_-(L)} e^{t_1(\sigma_-(L)+d'(m_2-1)-\sigma_+(L'))} e^{t_1\sigma_-(L')}|$$
$$\times \frac{\sigma_+(L)!\,\sigma_+(L')!}{\sigma_-(L)!\,\sigma_-(L')!}(2^{n+1}M)^q \Phi^R_{|\delta'^q+\ldots+\delta'^1|}(|t_2-t_1-c|+1)^2$$

où M *est défini dans le lemme* 7.0.

Preuve. — Le (a) du lemme 7.2 montre que $d'(m_2-1)+\sigma_+(L) \leqq 2d'(m_2-1)$ comme $\omega_1<1$ et $c<0$ on a $\operatorname{Re} t_2<0$ et donc :

$$|e^{-t_2(d'(m_2-1)+\sigma_+(L))}| \leqq |e^{-2t_2 d'(m_2-1)}|$$

Le (b) du lemme 7.2 montre que $d'(m_2-1) \geqq \sigma_+(L')-\sigma_-(L)$.

Pour alléger l'écriture nous poserons

$$G(t,x) = b_{\lambda^q,\mu^q,\delta'^q} D_x^{\delta'^q} (b_{\lambda^{q-1},\mu^{q-1},\delta'^{q-1}} D_x^{\delta'^{q-1}} (\ldots (b_{\lambda^1,\mu^1,\delta'^1} D_x^{\delta'^1} g(t,x)))\ldots).$$

Nous allons utiliser la majoration de $G(t,x)$ fournie par la relation ($\ast$) et le lemme 7.0. Appliquons à la fonction $G(t,x)$ le 1° du théorème 7.7 avec $\delta=d'(m_2-1)$. Il existe alors une constante absolue $C>0$ telle que pour tout t de K on a :

$$x \mapsto \mathscr{D}_1^{-\sigma_-(L')} \circ \mathscr{D}_2^{-\sigma_-(L)} \circ \mathscr{D}_2^{\sigma_+(L)} \circ \mathscr{D}_1^{\sigma_+(L')} G(t,x)$$
$$\ll C_{K'} C^{\sigma_-(L')+\sigma_-(L)+\sigma_+(L)+\sigma_+(L')}$$
$$\times |e^{-2t_2 d'(m_2-1)} \times e^{d'(m_2-1)c} \times e^{c\sigma_-(L)} e^{t_1(\sigma_-(L)+d'(m_2-1)-\sigma_+(L'))} e^{t_1\sigma_-(L')}|$$
$$\times (2^{n+1}M)^q \frac{\sigma_+(L)!\,\sigma_+(L')!}{\sigma_-(L)!\,\sigma_-(L')!} \Phi^{R'}_{|\delta^q+\ldots+\delta'^1|}(|t_2-t_1-c|+1)^2.$$

LEMME 7.12. — *Pour tout* (t_1, t_2) *de* K *on a :*

$$|e^{-2t_2 d'(m_2-1)} e^{d'(m_2-1)c} e^{c\sigma_-(L)} e^{t_1(\sigma_-(L)+d'(m_2-1)-\sigma_+(L'))} e^{t_1\sigma_-(L')}|$$
$$\leqq |e^{-2t_2 d'(m_2-1)} e^{(t_1+c)(\sigma_-(L)+d'(m_2-1)-\sigma_+(L))} e^{t_1(\sigma_-(L')-\sigma_+(L'))}|.$$

Preuve. — Il est clair que :

$$e^{d'(m_2-1)c} e^{c\sigma_-(L)} e^{t_1(\sigma_-(L)+d'(m_2-1)-\sigma_+(L'))} e^{t_1\sigma_-(L')}$$
$$= e^{(t_1+c)(\sigma_-(L)+d'(m_2-1)-\sigma_+(L))} e^{t_1(\sigma_-(L')-\sigma_+(L'))} e^{(t_1+c)(\sigma_+(L))}$$

comme $\forall (t_1, t_2) \in K$ on a $\operatorname{Re}(t_1+c) \leqq 0$ on obtient immédiatement le résultat.

LEMME 7.13. — *Reprenons les notations des relations* (7.7), *on a :*

$$\frac{\sigma_+(\mathrm{L})!\,\sigma_+(\mathrm{L}')!}{\sigma_-(\mathrm{L})!\,\sigma_-(\mathrm{L}')!}(|\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|)!\leqq\frac{(\sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-d')!}{\sigma_-(\mathrm{L})!\,\sigma_-(\mathrm{L}')!}\leqq\frac{2^{\sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')}}{d'!}.$$

Preuve. — Les relations (7.7) montrent qu'on peut majorer le membre de gauche de l'inégalité du lemme par :

$$\frac{(\lambda^q+\ldots+\lambda^1-q(m-m_2)+\sigma_-(\mathrm{L}))!}{\sigma_-(\mathrm{L})!}\,\frac{(\mu^q+\ldots+\mu^1-qm_2+\sigma_-(\mathrm{L}'))!}{\sigma_-(\mathrm{L}')!}$$
$$\times(qm-d'-(\lambda^q+\ldots+\lambda^1+\mu^q+\ldots+\mu^1))!$$

on utilise alors l'inégalité $a!\,b!\,c!\leqq(a+b+c)!$ et on obtient immédiatement le résultat.

Reprenons les notations du théorème 7.9, nous allons énoncer trois lemmes ayant pour objet la préparation de la majoration du terme associé à l'expression (7.9) que les commutateurs font apparaître dans l'expression du terme (7.5).

LEMME 7.14. — *Il existe une constante absolue* $\mathrm{C}>0$ *telle que pour tout* t *de* K *et pour tous* p_1, p_2, h_1, h_2, A_1 *associés à un terme* (7.9) *du théorème* 7.9 *on a :*

$$x\mapsto\mathscr{D}_1^{-p_1}\circ\mathscr{D}_2^{-p_2}\,\mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{h_1}\,\mathscr{D}_2^{h_2}\,e^{\mathrm{A}_1 c}$$
$$\times[b_{\lambda^q,\,\mu^q,\,\delta'^q}\,\mathrm{D}_x^{\delta'^q}(b_{\lambda^{q-1},\,\mu^{q-1},\,\delta'^{q-1}}\,\mathrm{D}_x^{\delta'^{q-1}}(\ldots(b_{\lambda^1,\,\mu^1,\,\delta'^1}\,\mathrm{D}_x^{\delta'^1}\,g(t,x)))]$$
$$\ll\mathrm{C}_{\mathrm{K}'}\,\mathrm{C}^{p_1+p_2+h_1+h_2}\,|e^{-t_2 d'(m_2-1)}\,e^{cd'(m_2-1)}$$
$$\times e^{t_1 p_1}\,e^{t_1(p_2+d'(m_2-1)-h_2-h_1)}\,e^{cp_2}|\,e^{\mathrm{A}_1 c}\,e^{(1-h_2)c}$$
$$\times\frac{(h_1+h_2)!}{p_1!\,p_2!}(2^{n+1}\mathrm{M})^q\,\Phi^{\mathrm{R}}_{|\delta'^q+\ldots+\delta'^1|}(|t_2-t_1-c|+1)^2$$

où M *est défini dans le lemme* 7.0.

Preuve. — Reprenons la fonction notée $\mathrm{G}(t,x)$ dans la preuve du lemme 7.11. Nous utiliserons la majoration de $\mathrm{G}(t,x)$ fournie par la relation (∗) et le lemme 7.0. L'inégalité (7.11) du théorème 7.9 montre que $d'(m_2-1)\geqq h_1+h_2-p_2$. Appliquons à la fonction $\mathrm{G}(t,x)$ le 2° du théorème 7.7 avec $\delta=d'(m_2-1)$. Il existe alors une constante absolue $\mathrm{C}>0$ telle que pour tout t de K on a :

$$x\mapsto\mathscr{D}_1^{-p_1}\circ\mathscr{D}_2^{-p_2}\,\mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{h_1}\,\mathscr{D}_2^{h_2}\,e^{\mathrm{A}_1 c}\,\mathrm{G}(t,x)\ll\mathrm{C}_{\mathrm{K}'}\,\mathrm{C}^{p_1+p_2+h_1+h_2}$$
$$\times e^{c(p_2+1+d'(m_2-1)-h_2)}\,|e^{t_1 p_1}\,e^{t_1(p_2+d'(m_2-1)-h_2-h_1)}|\,.\,|e^{-d'(m_2-1)t_2}|\,e^{\mathrm{A}_1 c}$$
$$\times(2^{n+1}\mathrm{M})^q\times\frac{(h_1+h_2)!}{p_1!\,p_2!}\times\Phi^{\mathrm{R}}_{|\delta'^q+\ldots+\delta'^1|}\times(|t_2-t_1-c|+1)^2.$$

LEMME 7.15. — *Conservons les notations du lemme* 7.14. *Pour tout* (t_1, t_2) *de* K *on a :*

$$|e^{-t_2 d'(m_2-1)}\,e^{cd'(m_2-1)}\,e^{t_1 p_1}\,e^{t_1(p_2+d'(m_2-1)-h_2-h_1)}\,e^{cp_2}|\,e^{c(1-h_2+\mathrm{A}_1)}$$
$$\leqq|e^{-2t_2 d'(m_2-1)}\,e^{(t_1+c)(\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+d'(m_2-1))}\,e^{t_1(\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L}'))}|.$$

Preuve. — Le lemme découle immédiatement des égalités (7.12), (7.13) et de l'inégalité $|e^{-t_2 d'(m_2-1)}| \leqq |e^{-2t_2 d'(m_2-1)}|$.

LEMME 7.16. — *Conservons les notations du lemme* 7.14. *On a :*

$$\frac{(h_1+h_2)!}{p_1!\,p_2!}(|\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|)! \leqq \frac{(p_1+p_2-d')!}{p_1!\,p_2!} \leqq \frac{2^{p_1+p_2}}{d'!}.$$

Preuve. — En utilisant l'inégalité $a!\,b! \leqq (a+b)!$ et l'inégalité (7.12) on peut majorer le membre de gauche de l'inégalité du lemme par :

$$\frac{(h_1+h_2+|\delta'^1|+\ldots+|\delta'^q|)!}{p_1!\,p_2!} \leqq \frac{(p_1+p_2-d')!}{p_1!\,p_2!}.$$

Ceci prouve le lemme.

Conservons les notations du théorème 7.9, nous allons énoncer trois lemmes ayant pour objet la préparation de la majoration du terme associé à l'expression (7.10) que les commutateurs font apparaître dans l'expression du terme (7.5).

LEMME 7.17. — *Il existe une constante absolue* $C>0$ *telle que pour tout* t *de* K *et pour tous* q_1, q_2, k_1, k_2, A_2 *associés à un terme* (7.10) *du théorème* 7.9 *on a :*

$$\begin{aligned} x \mapsto {} & \mathscr{D}_1^{-q_1} \circ \mathscr{D}_2^{-q_2}\, T_2\, \mathscr{D}_1^{k_1} \mathscr{D}_2^{k_2} e^{A_2 c} \\ & \times [b_{\lambda^q,\,\mu^q,\,\delta'^q} D_x^{\delta'^q} (b_{\lambda^{q-1},\,\mu^{q-1},\,\delta'^{q-1}} D_x^{\delta'^{q-1}} (\ldots (b_{\lambda^1,\,\mu^1,\,\delta'^1} D_x^{\delta'^1} g(t, x))) \ldots)] \\ & \ll C_{K'}\, C^{q_1+q_2+k_1+k_2} |e^{-t_2(k_1+k_2)} e^{t_1 q_1} e^{(t_1+c) q_2} e^{A_2 c} e^{(k_1-1)c}| \\ & \times \frac{(k_1+k_2)!}{q_1!\,q_2!} (2^{n+1} M)^q\, \Phi^R_{|\delta'^q+\ldots+\delta'^1|} (|t_2-t_1-c|+1)^2 \end{aligned}$$

où M *est défini dans le lemme* 7.0.

Preuve (esquisse). — Reprenons la fonction notée $G(t, x)$ dans la preuve du lemme 7.11). Reprenons la majoration de $G(t, x)$ fournie par la relation ($*$) et le lemme 7.0. Le 3° du théorème 7.7 permet alors d'obtenir aisément le lemme 7.17.

LEMME 7.18. — *Conservons les notations du lemme* 7.17. *Pour tout* (t_1, t_2) *de* K *on a :*

$$\begin{aligned} & |e^{-t_2(k_1+k_2)} e^{t_1 q_1} e^{(t_1+c) q_2} e^{A_2 c} e^{(k_1-1)c}| \\ & \qquad \leqq |e^{-2t_2 d'(m_2-1)} e^{(t_1+c)(\sigma_-(L)-\sigma_+(L)+d'(m_2-1))} e^{t_1(\sigma_-(L')-\sigma_+(L'))}|. \end{aligned}$$

Preuve. — L'inégalité (7.14) assure que $(k_1+k_2) \leqq d'(m_2-1)$, comme $\operatorname{Re} t_2 \leqq \operatorname{Re}(t_1+c) \leqq 0$ on peut majorer le membre de gauche de l'inégalité du lemme par :

$$|e^{-t_2(k_1+k_2)} e^{-t_2 d'(m_2-1)} e^{(t_1+c) d'(m_2-1)} e^{-(t_1+c)(k_1+k_2)} e^{t_1 q_1} e^{(t_1+c) q_2} e^{(A_2+k_1-1)c}|$$

D'après les égalités (7.15), (7.16) ce terme est égal à :

$$\left| e^{-t_2 (k_1+k_2+d'(m_2-1))} e^{(t_1+c)(\sigma_-(\mathrm{L})+d'(m_2-1)-\sigma_+(\mathrm{L}))} e^{t_1(\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L}'))} \right|.$$

on obtient alors immédiatement le lemme 7.18.

LEMME 7.19. — *Conservons les notations du lemme* 7.17, *on a :*

$$\frac{(k_1+k_2)!}{q_1!\,q_2!}(|\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|)! \leqq \frac{(q_1+q_2-d')!}{q_1!\,q_2!} \leqq \frac{2^{q_1+q_2}}{d'!}.$$

Preuve. — En utilisant l'inégalité $a!\,b! \leqq (a+b)!$ et l'inégalité (7.15) on peut majorer le membre de gauche de l'inégalité du lemme par :

$$\frac{(k_1+k_2+|\delta'^1|+\ldots+|\delta'^q|)!}{q_1!\,q_2!} \leqq \frac{(q_1+q_2-d')!}{q_1!\,q_2!} \leqq \frac{2^{q_1+q_2}}{d'!}.$$

Le théorème suivant est alors crucial.

THÉORÈME 7.20 [avec les notations des relations (7.7)]. — *Si* Re t_1 *et* c *sont strictement négatifs alors on a :*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\, t_1 [\sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L}')+d'(m_2-1)] \\ &\qquad + c[\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+d'(m_2-1)] \leqq \left(\frac{q}{2}-1\right)\mathrm{Max}(c, \mathrm{Re}\, t_1). \end{aligned}$$

Preuve. — D'après les relations (7.7) nous devons majorer :

$$\mathrm{Re}\, t_1 [qm-(\lambda^1+\ldots+\lambda^q+\mu^1+\ldots+\mu^q)+d'(m_2-1)]+c\left[\sum_{i=1}^{q}(m-m_2-\lambda^i)+d'(m_2-1)\right]$$

il y a exactement d' indices i tels que $m-m_2-\lambda^i<0$ et pour un tel indice i on a $\lambda^i-m+m_2 \leqq m_2-1$, donc

$$\sum_{i=1}^{q}(m-m_2-\lambda^i)+d'(m_2-1) \geqq 0.$$

Par ailleurs il est clair que $qm-(\lambda^1+\ldots+\lambda^q+\mu^1+\ldots+\mu^q) \geqq 0$. Si pour au moins $[q/2]$ indices i ($[\ \cdot\ ]$ désigne la partie entière) on a $m-\lambda^i-\mu^i \geqq 1$ alors on majore le membre de gauche de l'inégalité du lemme par $((q/2)-1)\,\mathrm{Re}\, t_1$. Si pour au moins $[q/2]$ indices i on a $m-\lambda^i-\mu^i=0$ alors pour un tel indice i on a (*cf.* lemme 4.2) $m-m_2-\lambda^i \geqq 1$ et :

$$\sum_{i=1}^{q}(m-m_2-\lambda^i)+d'(m_2-1) \geqq \sum_{m-m_2-\lambda^i \geqq 1}(m-m_2-\lambda^i) \geqq \frac{q}{2}-1$$

on majore alors le membre de gauche de l'inégalité du lemme par $((q/2)-1)\,c$. Ceci prouve le théorème.

Preuve de la convergence de la série de la proposition 4.5. — Rappelons que (*voir* 6)

$$\Phi_k^{\mathrm{R}}(x)=\frac{\mathrm{R}^{-k}k!}{(1-(x/\mathrm{R}))^{k+1}}.$$

Rappelons que $\sigma_+(\mathrm{L})+\sigma_+(\mathrm{L}')+\sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')\leqq 4qm$ et que dans l'énoncé du théorème 7.9 on a $p_1+p_2+h_1+h_2\leqq 4qm$ et $q_1+q_2+k_1+k_2\leqq 4qm$.

Reprenons les notations utilisées pour définir les termes (7.4) et (7.5). Reprenons la fonction notée $\mathrm{G}(t, x)$ dans la preuve du lemme 7.11. Le théorème 7.9 montre qu'il existe une constante positive C (ne dépendant que de m et n) telle que $\mathscr{H}^q g$ est somme d'au plus C^q termes qui sont soit de la forme (7.6) $[\mathrm{G}(t, x)]$, soit de la forme (7.9) $[\mathrm{G}(t, x)]$, soit de la forme (7.10) $[\mathrm{G}(t, x)]$. En utilisant les lemmes 7.11, 7.12, 7.13 [resp. 7.14, 7.15, 7.16; resp. 7.17, 7.18, 7.19] et le théorème 7.20 pour estimer les termes du type (7.6) $[\mathrm{G}(t, x)]$ (resp. (7.9) $[\mathrm{G}(t, x]$, resp. (7.10) $[\mathrm{G}(t, x)]$) on voit que pour tout t de K chacun d'eux est majoré par

$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}'}\mathrm{C}^q\frac{|e^{-2t_2 d'(m_2-1)}|}{d'!}(|t_2-t_1-c|+1)^2\,\mathrm{R}^{-(|\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|)}$$
$$\times(2^{n+1}\mathrm{M})^q\frac{|e^{((q/2)-1)\,\mathrm{Max}\,(\mathrm{Re}\,t_1,\ c)}|}{(1-(|x|/\mathrm{R}))^{|\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|+1}}$$

On peut majorer $|\delta'^q|+\ldots+|\delta'^1|$ par qm et $|a|^{d'}/d'!$ par $e^{|a|}$. Rappelons que $0<\mathrm{R}<1$. Il existe donc une constante positive C_1 (ne dépendant que de m, n et M) telle qu'on puisse majorer $\mathscr{H}^q g$ par :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}'}(|t_2-t_1-c|+1)^2 e^{|e^{-2t_2(m_2-1)}|}\mathrm{C}_1^q\,\mathrm{R}^{-mq}\left(1-\frac{|x|}{\mathrm{R}}\right)^{-mq-1}\times e^{((q/2)-1)\,\mathrm{Max}\,(\mathrm{Re}\,t_1,\,c)}.$$

Il est clair que $\mathscr{R}(c, \omega)$ est réunion de toutes les parties convexes compactes K considérées dans la note qui suit l'énoncé du lemme 7.3.

Posons $\Omega=\left\{x\in\mathbb{C}^{n+1}/\prod_{i=0}^{n}(1-(|x_i|/\mathrm{R}))>1/2 \text{ et } \sup_i|x_i|<\mathrm{R}\right\}$. On constate alors que pour que la série $\sum_{q\geqq 0}\mathscr{H}^q g(t_1, t_2, x)$ converge il suffit que $x\in\Omega$ et $(t_1, t_2)\in\mathscr{R}(c, \omega)$ où $c\leqq c_1-3$, $0<\omega<e^{-2}\omega_1$ et où (c, ω) vérifie la condition $(\omega_1<1)$:

$$(**)\qquad 2^m\mathrm{C}_1\mathrm{R}^{-m}e^{(\mathrm{Max}/2)\,(\log\omega,\,c)}<\frac{1}{2}.$$

On prouve de la même façon la convergence de la série

$$h(t, x)=\sum_{q\geqq 0}\mathscr{D}_1^{-m_2}\circ\mathscr{D}_2^{-(m-m_2)}\mathscr{H}^q g(t, x).$$

Pour achever la preuve de la proposition 4.5 nous devons démontrer le lemme suivant :

LEMME 7.21. — 1° *Si g est de détermination finie* [*resp. et en plus à monodromie unipotente*] *alors il en est de même de $h(t, x)$.* 2° *Si $a(x, \mathrm{D})$ est à caractéristiques simples et si g est dans la classe de Nilsson alors il en est de même de $h(t, x)$.*

Preuve. — Admettons provisoirement le 1° et prouvons le 2°. Posons $p(x)=k^1(x)\times \ldots \times k^d(x)$. Les résultats du paragraphe 1 et la preuve du lemme 2.4 montrent qu'il existe $\mathrm{C}>0$, un polydisque ouvert U_1 de centre l'origine et un voisinage effilé W_2 de $(k^2)^{-1}(0)$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{W}_2, \quad \mathrm{C}\,|k^2(x)|^d \leqq |p(x)| \leqq |k^2(x)|.$$

Considérons une fonction $g(t, x)$ holomorphe sur $\mathscr{R}(c_1, \omega_1)\times \mathrm{U}'$ et appartenant à la classe de Nilsson. On peut donc majorer le prolongement ramifié de $g(\log x^0, \log k^2(x), x)$ le long d'un chemin tracé dans $\mathrm{W}_2 \cap \mathrm{U}_1$ par une expression du type $\mathrm{Cte}\times |k^2(x)|^{-\mathrm{N}}$. Plus précisément il existe $\mathrm{N}>0$, $\mathrm{R}'>0$ tels que (avec les notations de la note qui suit l'énoncé du lemme 7.3) pour tout compact K' de $\mathscr{R}(c_1, \omega_1)$ de la forme :

$$\mathrm{K}'=\mathrm{I}(\mathrm{A}+1,\ a-3,\ b+1,\ c+2,\ e\,\omega)$$

on a, pour tout t de K'

$$(*) \qquad x \mapsto g(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'}\,\Phi_0^{\mathrm{R}'}(x)$$

ou

$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}'}=(e^{c+a-1})^{-\mathrm{N}}\,\mathrm{C}(\mathrm{A}, b).$$

(e^{c+a-1}) représente en gros la distance de $p'(\mathrm{K}')$ au lieu singulier $(k^2)^{-1}(0)$, p' désignant le revêtement introduit dans la proposition 2.2. Reprenons les notations de la preuve de la proposition 4.5 et considérons $\mathrm{R}\in]0, \mathrm{R}'/3[$, $c<0$, et $\omega \in]0,1[$ tels que l'inégalité $(**)$ soit vérifiée. Dans le cas à caractéristiques simples on a $m_2=1$ (et $d'=0$), donc le terme $e^{|e^{-2t_2(m_2-1)}|}$ n'apparaît pas dans les majorations qui nous ont permis de prouver la proposition 4.5. Considérons un compact K de $\mathscr{R}(c, \omega)$ de la forme $\mathrm{K}=\mathrm{I}(\mathrm{A}, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \omega)$ comme dans la preuve de la proposition 4.5. Il est clair que pour tout (t_1, t_2) de K on a :

$$(|t_2-t_1-c|^2+1) \leqq e^{-4a-4c}(2+2\,\mathrm{A})^{100}.$$

On peut supposer que $g(\mathrm{t}, \mathrm{x})$ vérifie $(*)$. La preuve de la proposition 4.5 montre alors qu'il existe $\mathrm{C}>0$, $\mathrm{R}_1>0$ ne dépendant que de n, m, $\mathrm{R}'>0$, $\mathrm{R}>0$ et des coefficients des opérateurs tels que pour tout t de K on a :

$$x \mapsto h(t, x) \ll \mathrm{C}_{\mathrm{K}'}\,\mathrm{C}\,e^{-4a-4c}(2+2\,\mathrm{A})^{100}\,\Phi_0^{\mathrm{R}_1}.$$

Ceci prouve que $h(t, x)$ appartient à la classe de Nilsson.

Maintenant nous allons aborder la preuve du 1° du lemme 7.21. Reprenons les notations de la définition 2.1 et considérons $\omega_1 > 0$ et $c_1 < 0$; l'application suivante définit un difféomorphisme analytique :

$$\mathrm{X}(c_1, \omega_1) \to \dot{\mathrm{D}}_{\omega_1} \times \dot{\mathrm{D}}_{e^{c_1}}$$
$$(u, v) \mapsto (u, v/u).$$

Supposons alors $g(t, x)$ de détermination finie, en raisonnant comme dans le cas classique (*voir* [1]) d'une fonction de détermination finie holomorphe ramifiée autour d'un diviseur à croisement normal, on obtient que g est somme finie de termes du type :

$$(***) \qquad f(t_1, t_2, x) = a(e^{t_1}, e^{t_2 - t_1}, x)\, e^{\alpha_1 t_1} e^{\alpha_2 t_2} t_1^{n_1} t_2^{n_2}$$

où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $a(z, z', x)$ est holomorphe sur un ouvert du type $\dot{\mathrm{D}}_{\omega_1} \times \dot{\mathrm{D}}_{e^{c_1}} \times \mathrm{U}'$, U' désignant un polydisque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Si de plus g est à monodromie unipotente alors on peut supposer que les α_i appartiennent à $\mathbb{Z}$. Rappelons que la proposition 4.5 assure la convergence de la série $\sum_q \mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathscr{H}^q f(t, x)$ sur un ensemble $\mathscr{R}(c, \omega) \times \Omega$ où $c < c_1 - 3$ et $\omega < e^{-2} \omega_1$; Dans l'énoncé du lemme suivant nous poserons $c' = c + (1/2)$.

LEMME 7.22. — *Soit $f(t_1, t_2, x)$ la fonction donnée par la formule* (***). *Il existe quatre nombres complexes $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ tels que pour tout $i \neq j$, $\mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z}$, une partie finie* B *de* $\{\mu_j\}^2 \times \mathbb{N}^2$ *et pour tout* $(q, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathrm{B}$ *une fonction holomorphe sur* $\dot{\mathrm{D}}_\omega \times \dot{\mathrm{D}}_{e^{c'}} \times \mathrm{U}'$

$$(z, z', x) \to a_{q, \beta}(z, z', x)$$

telles que

$$\mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathscr{H}^q f = \sum_{\beta = (\gamma_1, \gamma_2, p_1, p_2) \in \mathrm{B}} e^{\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2} t_1^{p_1} t_2^{p_2} a_{q, \beta}(e^{t_1}, e^{t_2 - t_1}, x).$$

Si de plus f est à monodromie unipotente [i.e. *si* $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2$] *on peut supposer* $a_{q, \beta} \equiv 0$ dès que $\beta \notin \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^2$.

Preuve du 1° *du lemme* 7.21 *à partir du lemme* 7.22. — D'après la proposition 4.5 on sait que la série de fonctions $\sum \mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathscr{H}^q f(t, x)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathscr{R}(c, \omega) \times \Omega$. Nous allons prouver que pour chaque $\beta \in \mathrm{B}$ la série de fonctions $\sum_q a_{q, \beta}(e^{t_1}, e^{t_2 - t_1}, x)$ converge uniforméement sur les compacts de $\mathscr{R}(c, \omega) \times \Omega$. Raisonnons par l'absurde, pour fixer les idées on peut supposer qu'il existe $(\mu_1, \mu_2, p'_1, p'_2) = \beta_0 \in \mathrm{B}$ tels que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

(*a*) La série $\sum_q a_{q, \beta_0}(e^{t_1}, e^{t_2 - t_1}, x)$ ne converge pas uniformément sur les compacts de $\mathscr{R}(c, \omega) \times \Omega$.

(*b*) Soit $\beta = (\mu_1, \mu_2, p_1, p_2) \in \mathrm{B}$. Si $p_1 > p'_1$ ou si $p_1 = p'_1$ et $p_2 > p'_2$ alors la série $\sum_q a_{q, \beta}(e^{t_1}, e^{t_2 - t_1}, x)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathscr{R}(c, \omega) \times \Omega$.

Considérons alors τ_1, τ_2 les opérateurs de translation définis par

$$(\tau_1 u)(t_1, t_2) = u(t_1 + 2i\pi, t_2), \ (\tau_2 u)(t_1, t_2) = u(t_1, t_2 + 2i\pi).$$

Posons $N = \max_{(\gamma_1, \gamma_2, p_1, p_2) \in B} (p_1 + p_2 + 2)$. D'après la proposition 4.5 la série de fonctions de terme général :

$$u_q = (\tau_1 - e^{2i\pi\mu_1}\,\mathrm{Id})^{p'_1} \circ (\tau_2 - e^{2i\pi\mu_2}\,\mathrm{Id})^{p'_2} \circ \prod_{\substack{l \neq 1 \\ j \neq 2}} (\tau_1 - e^{2i\pi\mu_l}\,\mathrm{Id})^{N} (\tau_2 - e^{2i\pi\mu_j}\,\mathrm{Id})^{N} [\mathcal{D}_1^{-m_2} \circ \mathcal{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathcal{H}^q f(t, x)]$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathcal{R}(c, \omega) \times \Omega$. Rappelons que pour $l \neq j\, \mu_l - \mu_j$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$. La propriété (*b*) montre alors qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}^*$ et une série de fonctions $\sum_{q \geqq 0} v_q(t, x)$ convergeant uniformément sur les compacts de $\mathcal{R}(c, \omega) \times \Omega$ telle que $\forall q \in \mathbb{N}$ on a : $u_q(t, x) = v_q(t, x) + C\, a_{q, \beta_0}(e^{t_1}, e^{t_2 - t_1}, x)$ pour tout $(t_1, t_2, x) \in \mathcal{R}(c, \omega) \times \Omega$. Ce fait contredit la propriété (*a*). Enfin si f est à monodromie unipotente alors ce qui précède montre que $h(t, x)$ est somme finie de fonctions à monodromie unipotente. Le lemme 3.8 et le rappel 3.7 montrent alors que $h(t, x)$ est à monodromie unipotente. Ceci prouve le lemme 7.21.

Preuve du lemme 7.22. — Rappelons que $f(t_1, t_2, x)$ est définie par l'égalité $(***)$ écrite avant l'énoncé du lemme 7.22. Soient $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$. On observe que $\mathcal{D}_1^{q_1} \circ \mathcal{D}_2^{q_2} f$, $T_1 \mathcal{D}_1^{q_1} \circ \mathcal{D}_2^{q_2} f$, $T_2 \mathcal{D}_1^{q_1} \circ \mathcal{D}_2^{q_2} f$ peuvent s'écrire comme une somme finie de termes qui sont du même type que $(***)$ où la somme des exposants de t_1 et de t_2 est majorée par $n_1 + n_2$, et dans le cas de $T_i \mathcal{D}_1^{q_1} \circ \mathcal{D}_2^{q_2} f$ on remplace α_j par $\delta_{i,j}(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\delta_{i,j}$ désignant le symbole de Kronecker. La structure de la preuve de la proposition 4.5 montre alors que nous pouvons nous contenter de prouver le résultat du lemme 7.22 pour $\mathcal{D}_1^{-h_1} \circ \mathcal{D}_2^{-h_2} f(t, x)$ $(h_1, h_2 \in \mathbb{N})$ au lieu de pour $\mathcal{D}_1^{-m_2} \circ \mathcal{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathcal{H}^q f(t, x)$. Nous travaillerons donc avec :

$$(***) \qquad f(t_1, t_2, x) = a(e^{t_1}, e^{t_2 - t_1}, x)\, e^{\alpha_1 t_1} e^{\alpha_2 t_2} t_1^{n_1} t_2^{n_2}.$$

Écrivons le développement de Laurent de a relativement aux deux premières variables :

$$a(e^{t_1}, e^{t_2 - t_1}, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{ht_1} e^{k(t_2 - t_1)} a_{h,k}(x).$$

Soit $R' > 0$ tel que le polydisque fermé de rayon R' et de centre $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ soit inclus dans U', on a :

$$\forall h, k \in \mathbb{Z}, \quad a_{h,k}(x) \ll C(h, k)\, \Phi_0^{R'}(x)$$

où les $C(h, k)$ vérifient les conditions de décroissance évidentes pour assurer la convergence de la série pour tout $(e^{t_1}, e^{t_2 - t_1})$ élément de $\dot{D}_{\omega_1} \times \dot{D}_{e^c 1}$. Celà dit, rappelons la formule suivante démontrée dans le lemme 7.6 :

$$\mathscr{D}_2^{-h_2}[e^{(k+\alpha_2)t_2} t_2^{n_2}] = \sum_{b=1}^{h_2} \frac{1}{(b-1)!} \frac{(-1)^{b+1}}{(h_2-b)!} e^{(h_2-b)t_2} \int_{t_1+c}^{t_2} \sigma^{n_2} e^{(k+\alpha_2+b)\sigma} d\sigma.$$

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\mathrm{P}(\sigma)$ un polynôme de degré $\leqq \mathrm{N}$ on vérifie alors aisément que :

$$\int_{t_1+c}^{t_2} \mathrm{P}(\sigma) e^{z\sigma} d\sigma = \left[e^{z\sigma} \sum_{l=0}^{\mathrm{N}} (-1)^l \frac{\mathrm{P}^{(l)}(\sigma)}{z^{l+1}} \right]_{\sigma=t_1+c}^{\sigma=t_2}.$$

En utilisant les deux formules précédentes et leurs analogues pour $\mathscr{D}_1^{-1}$ on vérifie aisément que :

$$\mathscr{D}_1^{-h_1} \circ \mathscr{D}_2^{-h_2} [e^{ht_1} e^{k(t_2-t_1)} e^{\alpha_1 t_1} e^{\alpha_2 t_2} t_1^{n_1} t_2^{n_2}]$$

est somme d'un nombre fini *indépendant de h et k* de termes de l'un des trois types suivants :

$$\mathrm{Z}\, e^{\alpha_1 t_1} e^{\alpha_2 t_2} e^{ht_1} e^{k(t_2-t_1)} t_1^{l_1} t_2^{l_2} e^{j_1 t_1} e^{j_2 t_2}$$

$$\mathrm{Z}\, e^{(\alpha_1+\alpha_2)t_1} e^{ht_1} e^{kc} t_1^{l_1} t_2^{l_2} e^{j_1 t_1} e^{j_2 t_2} e^{(j_3+\alpha_2)c}$$

$$\mathrm{Z}\, e^{(\alpha_1+\alpha_2)t_2} e^{h(t_2-c)} e^{kc} t_1^{l_1} t_2^{l_2} e^{j_1 t_1} e^{j_2 t_2} e^{-(j_3+\alpha_1)c}$$

où Z désigne un nombre complexe de module $\leqq 1$, où les entiers naturels l_1, l_2, j_1, j_2, j_3 vérifient les inégalités $l_i \leqq n_1+n_2+2$, $j_i \leqq h_1+h_2$ $(1 \leqq i \leqq 3)$. Rappelons que le couple (c, ω) est fixé : $c < c_1 - 3$, $\omega < e^{-2}\omega_1$. En outre $c' = c + (1/2)$. On vérifie alors aisément que si $(e^{t_1}, e^{t_2-t_1})$ appartient à $\dot{\mathrm{D}}_{\omega_1} \times \dot{\mathrm{D}}_{e^{c'}}$ alors on a :

$$|e^{t_2-c}| = |e^{t_2-t_1} e^{t_1} e^{-c}| < |e^{c'-c} e^{t_1}| < e^{1/2}\omega < \omega_1$$

En outre on a $|e^c| < e^{c_1}$. Enfin on choisit quatre nombres complexes μ_j, $1 \leqq j \leqq 4$ tels que 0, α_1, α_2, $\alpha_1+\alpha_2$ appartiennent à la réunion des $\mu_j + \mathbb{Z}$ et tels que $\mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z}$ pour $i \neq j$. En réordonnant convenablement les termes précédents et suivant lesquels se décompose $\mathscr{D}_1^{-h_1} \circ \mathscr{D}_2^{-h_2} f(t, x)$ on obtient immédiatement l'existence des fonctions $(z, z', x) \to a_{q,\beta}(z, z', x)$ vérifiant les assertions du lemme 7.22.

REMARQUE 7.23. — Considérons brièvement le cas où l'opérateur $a(x, \mathrm{D})$ ne possède que deux hypersurfaces caractéristiques (*i. e.* $d=2$), nous allons indiquer comment il est alors possible de construire explicitement la solution du problème (0.1) en fonction des données. On vérifie aisément que le second membre v du problème (0.1) est de la forme $g'(\log k^1(x), \log k^2(x), x)$ où $g' \in \mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega^2 \times \Omega')$. Dans cette situation il est inutile de désingulariser et la preuve se simplifie considérablement. L'hypersurface $k^2=0$ [resp. $k^1=0$] est de multiplicité m_2 [resp. $m-m_2$]. Comme $d=2$ une adaptation du lemme 4.2 montre que le coefficient dans l'expression (4.2) de $(e^{-t_1}\partial_{t_1})^{m_2} \circ (e^{-t_2}\partial_{t_2})^{m-m_2}$ ne s'annule pas à l'origine et que le coefficient $c(x)$ dans l'expression (4.2) de $(e^{-t_1}\partial_{t_1})^a \circ (e^{-t_2}\partial_{t_2})^b \circ \mathrm{D}_x^\beta$ est identiquement nul dans le cas où

$a+b+|\beta|=m$ et ($a>m_2$ ou $b>m-m_2$). Posons $\mathscr{D}_1=e^{-t_1}\partial_{t_1}$, $\mathscr{D}_2=e^{-t_2}\partial_{t_2}$. Soit $y_0\in\mathscr{R}_\omega$, on définit alors les opérateurs d'intégration suivants :

$$\mathscr{D}_1^{-1}u(t_1, t_2, x)=\int_{y_0}^{t_1} e^{\theta} u(\theta, t_2, x)\, d\theta, \qquad \mathscr{D}_2^{-1}u(t_1, t_2, x)=\int_{y_0}^{t_2} e^{\sigma} u(t_1, \sigma, x)\, d\sigma$$

Comme y_0 est une constante on observe que $\mathscr{D}_i$ et $\mathscr{D}_j^{-1}$ commutent pour $i\neq j$. Une légère adaptation de la section 4 montre qu'il existe un opérateur $\mathscr{H}_2$ de la forme :

$$\mathscr{H}_2=\sum_{\substack{\lambda+\mu\leqq m-1\\ \lambda+\mu+|\beta|\leqq m}} b_{\lambda,\mu,\beta}(x)\,\mathscr{D}_1^{\mu}\mathscr{D}_2^{\lambda}\mathscr{D}_1^{-m_2}\mathscr{D}_2^{-(m-m_2)}\mathrm{D}_x^{\beta}$$

la fonction holomorphe $b_{\lambda,\mu,\beta}$ étant identiquement nulle dans le cas où $\lambda+\mu+|\beta|=m$ et ($\lambda>m-m_2$ ou $\mu>m_2$); et cet opérateur $\mathscr{H}_2$ vérifie la propriété suivante : posons $g(t, x)=(1/c(x))g'(t, x)$, si $u_1(t_1, t_2, x)$ appartient à $\mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega^2\times\Omega)$ et est solution de l'équation $u_1=g+\mathscr{H}_2u_1$ alors $h(t_1, t_2, x)=\mathscr{D}_2^{-(m-m_2)}\circ\mathscr{D}_1^{-m_2}u_1(t_1, t_2, x)$ est telle que

$$a(x, \mathrm{D})\,h(\log k^1(x), \log k^2(x), x)=g'(\log k^1(x), \log k^2(x), x).$$

Or comme dans l'expression de $\mathscr{H}_2$ on a $\lambda+\mu\leqq m-1$, on peut montrer facilement en adaptant (avec des simplifications considérables dues au fait qu'il n'y a plus de commutateurs) les résultats de 7 que la série $\sum_{l\geqq 0}\mathscr{H}_2^l g(t_1, t_2, x)$ converge dans un espace du type $\mathscr{H}(\mathscr{R}_\omega^2\times\Omega')$. En utilisant le résultat de [5] on en déduit alors que dans le cas $d=2$ on peut construire *explicitement* la solution du problème (0.1) en fonction des données.

8. Cas où le second membre du problème (0.1) est à monodromie abélienne

Le théorème 0.5 découlera du théorème suivant :

THÉORÈME 8.1. — *Soient $\mathscr{R}$ une variété holomorphe,* G *un sous-groupe de difféomorphismes holomorphes de $\mathscr{R}$,* P *un opérateur différentiel holomorphe sur $\mathscr{R}$ invariant par* G. *On suppose que pour toute fonction h holomorphe sur $\mathscr{R}$,* $\mathrm{P}\,h\equiv 0$ *entraîne que h est invariante par* G. *Soient u et v deux fonctions holomorphes sur $\mathscr{R}$ telles que v soit invariante par* G *et u soit solution de l'équation* $\mathrm{P}u=v$. *Alors* G *définit une représentation unipotente d'ordre* $\leqq 2$ *de l'espace vectoriel* F *sur* $\mathbb{C}$ *engendré par les* $u\circ g$, $g\in\mathrm{G}$. *Si cette représentation est diagonalisable alors u est invariante par* G.

REMARQUE 8.2. — L'exemple de $\mathscr{R}=\mathbb{C}$, $\mathrm{P}=\partial/\partial z$, $u(z)=z$, $v(z)\equiv 1$, G = groupe des translations de vecteurs appartenant à $\mathbb{Z}$, montre que l'hypothèse de diagonalisabilité ne peut être omise si on veut que u soit invariante par G.

Preuve. — Pour $g\in\mathrm{G}$ on pose $u\circ g=g.u$. Désignons par F_1 l'espace vectoriel engendré par les $g'.u-g.g'.u$ lorsque g et g' décrivent G. On a $\mathrm{F}=\mathrm{F}_1+\mathbb{C}u$. Les hypothèses du théorème montrent que $\forall g, g'\in\mathrm{G}$ on a : $\mathrm{P}(g'u-gg'u)=0$, $g'u-gg'u$ est invariant par G. Donc $\forall g, g'\in\mathrm{G}$ on a $(\mathrm{Id}-g)^2.g'u=0$. Donc G opère trivialement sur F_1 et définit une représentation unipotente d'ordre $\leqq 2$ de F. Dans le cas où l'hypothèse de diagonalisabilité est satisfaite on a $(\mathrm{Id}-g).g' u=0$.

THÉORÈME 0.5. — *Supposons que le second membre v du problème* (0.1) *soit à monodromie abélienne, alors le groupe des commutateurs* G *du groupe fondamental* π_1 *de* $\Omega\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{d} \mathrm{K}_j\right)$ *définit une représentation unipotente d'ordre* $\leqq 2$ *du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel défini par les germes* (*en un point fixé*) *de la solution u du problème* (0.1). *Si cette représentation est diagonalisable alors u est à monodromie abélienne.*

Preuve. — Le théorème 0.1 assure l'existence d'une solution u du problème (0.1) holomorphe sur un certain revêtement universel $\mathscr{R}$. On sait d'après [5] que toute solution (holomorphe sur $\mathscr{R}$) de l'équation $a(x, \mathrm{D})f=0$ est à monodromie abélienne. Par hypothèse v est invariante par G; $a(x, \mathrm{D})$ définit un opérateur différentiel holomorphe sur $\mathscr{R}$ invariant par G. Le résultat découle alors du théorème 8.1.

Maintenant nous allons construire un contre-exemple pour indiquer que si le second membre du problème (0.1) est à monodromie abélienne alors en général la solution ne sera pas à monodromie abélienne.

Notons $\mathscr{R}$ le revêtement universel de $\mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0, 1\})$ de $\mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$ est égal au produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. D'après le théorème de Nilsson-Schreier le sous-groupe D des commutateurs de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ est libre (à plus de deux générateurs). La théorie des revêtements galoisiens associe à D le revêtement abélianisé $\mathscr{R}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$, $\pi_1(\mathscr{R}^{\mathrm{ab}})=\mathrm{D}$. Introduisons les applications de revêtement

$$\mathscr{R} \xrightarrow{p} \mathscr{R}^{\mathrm{ab}}, \qquad \mathscr{R}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{q} \mathbb{C}\setminus\{0, 1\}.$$

Notons t_1 la variable de $\mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$. $\mathscr{R}^{\mathrm{ab}}$ est une surface de Riemann connexe non simplement connexe, d'après le théorème (de représentation conforme) de Riemann (*voir* [2]) son groupe de De Rham holomorphe n'est pas nul. En d'autres termes il existe une 1-forme différentielle holomorphe ω sur $\mathscr{R}^{\mathrm{ab}}$ qui n'est pas exacte; ω admet une primitive u qui est holomorphe sur $\mathscr{R}$ mais qui n'est pas uniforme sur $\mathscr{R}^{\mathrm{ab}}$. Il existe une fonction holomorphe v sur $\mathscr{R}^{\mathrm{ab}}$ (v est donc holomorphe ramifiée autour de $\{0, 1\}$ et à monodromie abélienne) telle que $\omega=vq^* dt_1$, *et on a :*

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}=v \qquad (u \text{ n'est pas à monodromie abélienne}).$$

Considérons $\mathbb{C}^2$ muni des coordonnées (z_0, z_1), désignons par Δ_1, Δ_2, Δ_3 les droites respectivement d'équations $z_0=0$, $z_1=0$, $z_1-z_0=0$, considérons le difféomorphisme holomorphe :

$$\mathbb{C}^2\setminus(\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3) \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$$
$$(z_0, z_1) \mapsto (z_0, z_1/z_0)$$

Notons (t_0, t_1) les coordonnées de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$, on a donc $z_0=t_0$, $z_1=t_1 t_0$. Si $g(t_0, t_1)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$ alors en posant $\tilde{g}(z_0, z_1)=g(z_0, z_1/z_0)$ on obtient une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^2\setminus(\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3)$ et

$$\frac{\partial\tilde{g}}{\partial z_1}=\frac{1}{z_0}\,\frac{\partial g}{\partial t_1}.$$

En posant $\tilde{v}(z_0, z_1)=v(z_1/z_0)$ et $\tilde{u}(z_0, z_1)=u(z_1/z_0)$ on obtient de la même façon des fonctions holomorphes ramifiées sur $\mathbb{C}^2\setminus(\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3)$ et $\partial\tilde{u}/\partial z_1=(1/z_0)\tilde{v}.(1/z_0)\tilde{v}$ est à monodromie abélienne mais $\tilde{u}$ n'est pas à monodromie abélienne. Posons $z=(z_0, z_1)\in\mathbb{C}^2$, désignons par $a(z, \mathrm{D})$ l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\circ\frac{\partial}{\partial z_1}\circ\left(\frac{\partial}{\partial z_0}+\frac{\partial}{\partial z_1}\right).$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3 définissent des hypersurfaces de $\mathbb{C}^2$ caractéristiques simples pour $a(z, \mathrm{D})$ et issues de $z_0=z_1=0$. $a(z, \mathrm{D})\tilde{u}$ est une fonction holomorphe ramifiée à monodromie abélienne bien que $\tilde{u}$ ne soit pas à monodromie abélienne. Désignons par H l'hypersurface non caractéristique d'équation $z_0+z_1=0$, désignons par ∂_n la dérivée normale relativement à H. Il est clair que la solution $\tilde{u}$ du problème

$$a(z, \mathrm{D})f=a(z, \mathrm{D})\tilde{u}$$
$$\partial_n^j f|_{\mathrm{H}}=\partial_n^j\tilde{u}|_{\mathrm{H}},\qquad 0\leqq j\leqq 2$$

n'est pas à monodromie abélienne bien que $a(z, \mathrm{D})\tilde{u}$ et les données de Cauchy le soient.

9. Appendice A
Preuve du théorème 7.9

Preuve. — Nous allons prouver le résultat en raisonnant par récurrence sur q. Les inégalités $p_1+p_2+h_1+h_2\leqq 4qm$ et $q_1+q_2+k_1+k_2\leqq 4qm$ seront trivialement vérifiées. Considérons le cas $q=1$ et donc l'opérateur

$$\mathscr{D}_2^{\lambda^1}\circ\mathscr{D}_1^{\mu^1}\circ\mathscr{D}_1^{-m_2}\circ\mathscr{D}_2^{-(m-m_2)}\tag{7.17}$$

nous avons ici $\mathrm{L}=(\lambda^1-m+m_2)$, $\mathrm{L}'=(\mu^1-m_2)$ et :

$$\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})=-\lambda^1+m-m_2,\qquad \sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L}')=-\mu^1+m_2.\tag{7.18}$$

Si $\mu^1\geqq m_2$ et $\lambda^1<m-m_2$ alors (7.17) est de la forme (7.1) et le 2° du lemme 5.8 montre que (7.17) est égal à :

$$\mathscr{D}_2^{\lambda^1-m+m_2}\circ\mathscr{D}_1^{\mu^1-m_2}+\sum_{\substack{l=0\\ l\geqq m-\lambda^1-\mu^1}}^{m-m_2-\lambda^1-1}\mathscr{D}_2^{-l}\mathrm{K}_l'\tag{7.19}$$

où K'_l est la somme d'au plus $8^{\mu^1-m_2}$ termes de la forme

$$\pm T_1 \mathscr{D}_1^a \mathscr{D}_2^b e^{Ac}$$

où $a+b=\lambda^1+\mu^1-m+l$ et $A=-\lambda^1+m-m_2+b-l-1$.

Cette dernière égalité montre − compte tenu de (7.18) − que (7.13) est vérifié. Le nombre d' défini avant les relations (7.7) est ici nul. Comme $\lambda^1+\mu^1 \leqq m$ il est clair que l majore $a+b$ et donc (7.11) est vérifiée. En outre les relations (7.18) et (7.7) montrent que :

$$|\delta'^1| \leqq m-\lambda^1-\mu^1=l-(a+b)=\sigma_-(L)-\sigma_+(L)+\sigma_-(L')-\sigma_+(L')$$

donc (7.12) est vérifiée. Le terme $\mathscr{D}_2^{\lambda^1-m+m_2} \circ \mathscr{D}_1^{\mu^1-m_2}$ n'est autre que le terme (7.6). Enfin l décrit au plus m valeurs dans (7.19), comme $m+1 \leqq 4^m$ et $\mu^1-m_2 \leqq m$ il est clair que (7.19) est somme d'au plus $4^m \times 8^m$ termes du type (7.6), (7.9). Si $\mu^1<m_2$ et $\lambda^1 \leqq m-m_2$ alors (7.17) est égal à $\mathscr{D}_1^{\mu^1-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{\lambda^1-m+m_2}$ qui n'est autre que le terme (7.6). Si $\lambda^1>m-m_2$ et $\mu^1<m_2$ alors ici $d'=1$, (7.17) est de la forme (7.3) et le 1° du lemme 5.8 montre que (7.17) est égal à :

$$\left[\mathscr{D}_1^{\mu^1-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{\lambda^1-m+m_2}+\sum_{\substack{l=0 \\ l \geqq m-\lambda^1-\mu^1}}^{m_2-\mu^1-1} \mathscr{D}_1^{-l} K_l\right] \tag{7.20}$$

où K_l est la somme d'au plus $8^{\lambda^1-m+m_2}$ termes de la forme :

$$\pm T_2 \mathscr{D}_1^a \mathscr{D}_2^b e^{Ac}$$

où $a+b=\lambda^1+\mu^1-m+l$ et $A=b-\lambda^1+m-m_2+1$.

Cette dernière égalité montre − compte tenu de (7.18) − que (7.16) est vérifiée. Le nombre d' défini avant les relations (7.7) est ici égal à 1. Comme l'hypersurface $k^2=0$ est caractéristique on a $\lambda^1 \leqq m-1$, il est alors clair que ($l \leqq m_2-\mu^1-1$) :

$$a+b=\lambda^1+\mu^1-m+l \leqq \lambda^1+\mu^1-m+m_2-\mu^1-1=m_2+\lambda^1-m-1 \leqq m_2-1.$$

Donc (7.14) est vérifiée. En outre d'après les relations (7.7) et (7.18) (et le lemme 4.2) on a :

$$|\delta'^1| \leqq m-\lambda^1-\mu^1-1=l-(a+b)-1=\sigma_-(L)-\sigma_+(L)+\sigma_-(L')-\sigma_+(L')-1.$$

Donc (7.15) est vérifiée. Le terme $\mathscr{D}_1^{\mu^1-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{\lambda^1-m+m_2}$ n'est autre que le terme (7.6). Enfin l décrit au plus m valeurs dans (7.20), comme $m+1 \leqq 4^m$ et $\lambda^1-m+m_2 \leqq m$ il est clair que (7.20) est somme d'au plus $4^m \times 8^m$ termes du type (7.6) ou (7.10). On a donc prouvé le théorème pour $q=1$. Soit $q \geqq 1$ supposons le théorème 7.9 démontré au rang q. Considérons l'opérateur

$$\mathscr{D}_2^{\lambda^{q+1}} \circ \mathscr{D}_1^{\mu^{q+1}} \circ \mathscr{D}_1^{-m_2} \circ \mathscr{D}_2^{-(m-m_2)}. \tag{7.21}$$

Pour démontrer le théorème 7.9 nous devons analyser le terme composé (7.21)∘(7.8). Nous distinguerons trois parties suivant que (7.21) soit du type (7.1), (7.2) ou (7.3); dans chacune de ces parties nous distinguerons trois cas suivant que l'on étudie les termes composés (7.21)∘(7.6), (7.21)∘(7.9), (7.21)∘(7.10). Nous montrerons que chacun de ces trois types de termes est somme d'au plus $(64)^m$ termes du type (7.6), (7.9) ou (7.10). Nous poserons :

$$\mathrm{L}_1=(\lambda^{q+1}-m+m_2,\ \lambda^q-m+m_2,\ \ldots,\ \lambda^1-m+m_2),$$
$$\mathrm{L}'_1=(\mu^{q+1}-m_2,\ \mu^q-m_2,\ \ldots,\ \mu^1-m_2).$$

Les relations (7.7) permettent alors d'écrire :

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_-(\mathrm{L}_1)-\sigma_+(\mathrm{L}_1)=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}\\ \sigma_-(\mathrm{L}'_1)-\sigma_+(\mathrm{L}'_1)=\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L}')+m_2-\mu^{q+1}\end{array}\right.\tag{7.22}$$

nous aurons à considérer l'opérateur suivant [qui est du type (7.6)] :

$$\mathscr{D}_1^{-\sigma_-(\mathrm{L}'_1)}\circ\mathscr{D}_2^{-\sigma_-(\mathrm{L}_1)}\circ\mathscr{D}_2^{\sigma_+(\mathrm{L}_1)}\circ\mathscr{D}_1^{\sigma_+(\mathrm{L}'_1)}.\tag{7.23}$$

PREMIÈRE PARTIE. — Supposons $\mu^{q+1}\geqq m_2$ et $\lambda^{q+1}<m-m_2$.

— *Premier cas.* — Étude de (7.21)∘(7.6).

— *Premier sous-cas.* — Supposons $\mu^{q+1}-m_2\leqq\sigma_-(\mathrm{L}')$, comme $\mathscr{D}_1^{-1}$ et $\mathscr{D}_2^{-1}$ commutent on vérifie aisément que (7.21)∘(7.6) est égal à

$$\mathscr{D}_1^{-(\sigma_-(\mathrm{L}')-\mu^{q+1}+m_2)}\circ\mathscr{D}_2^{-(\sigma_-(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1})}\circ\mathscr{D}_2^{\sigma_+(\mathrm{L})}\circ\mathscr{D}_1^{\sigma_+(\mathrm{L}')}.$$

Ce terme n'est autre que (7.23), il est donc du type (7.6).

Deuxième sous-cas. — Supposons $\mu^{q+1}-m_2>\sigma_-(\mathrm{L}')$. Alors nous devons faire commuter $\mathscr{D}_1^{\mu^{q+1}-m_2-\sigma_-(\mathrm{L}')}$ et $\mathscr{D}_2^{-(\sigma_-(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1})}$. Le 2° du lemme 5.8 montre que (7.21)∘(7.6) est égal à :

$$\mathscr{D}_2^{-(\sigma_-(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1})}\circ\mathscr{D}_2^{\sigma_+(\mathrm{L})}\circ\mathscr{D}_1^{\mu^{q+1}-m_2-\sigma_-(\mathrm{L}')+\sigma_+(\mathrm{L}')}+\sum_{\substack{l=0\\ l\geqq\sigma_-(\mathrm{L})+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}+\sigma_-(\mathrm{L}')}}^{\sigma_-(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}-1}\mathscr{D}_2^{-l}\mathrm{K}''_l\tag{7.24}$$

où K''_l est la somme d'au plus $8^{\mu^{q+1}-m_2-\sigma_-(\mathrm{L}')}(\leqq 8^m)$ termes de la forme :

$$\pm e^{\mathrm{A}c}\,\mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{a+\sigma_+(\mathrm{L}')}\mathscr{D}_2^{b+\sigma_+(\mathrm{L})}\tag{7.25}$$

où $a+b=\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}+l-m-\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_-(\mathrm{L}')$ et :

$$\mathrm{A}=\sigma_-(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}+b-l-1.\tag{7.26}$$

L'opérateur suivant :

$$\mathscr{D}_2^{-(\sigma_-(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1})}\circ \mathscr{D}_1^{\mu^{q+1}-m_2-\sigma_-(\mathrm{L}')+\sigma_+(\mathrm{L}')}\circ \mathscr{D}_2^{\sigma_+(\mathrm{L})}$$

n'est autre que le terme (7.23), il est donc du type (7.6). Considérons un terme du type $\mathscr{D}_2^{-l}\circ$(7.25) et prouvons (7.13). Les relations (7.26) et (7.22) montrent que :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}+b+\sigma_+(\mathrm{L})-l-1\\&=\sigma_-(\mathrm{L}_1)-\sigma_+(\mathrm{L}_1)-l+b+\sigma_+(\mathrm{L})-1.\end{aligned}$$

Ceci prouve (7.13). Le nombre d' est ici le même pour L_1 et L'_1 que pour L et L'. Prouvons (7.11). Reprenons les notations utilisées pour définir (7.25), Le (*c*) du lemme 7.2 montre que :

$$\begin{aligned}l+d'(m_2-1)&\geqq l+\sigma_+(\mathrm{L})+\sigma_+(\mathrm{L}')-\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_-(\mathrm{L}')\\&\geqq l+\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}-m+\sigma_+(\mathrm{L})+\sigma_+(\mathrm{L}')-\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_-(\mathrm{L}')\geqq a+b+\sigma_+(\mathrm{L})+\sigma_+(\mathrm{L}').\end{aligned}$$

Ceci prouve (7.11). Prouvons (7.12). Les relations (7.22) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}l-(a+b+\sigma_+(\mathrm{L})+\sigma_+(\mathrm{L}'))&=\sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L}')+m\\&\quad-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}=\sigma_-(\mathrm{L}_1)-\sigma_+(\mathrm{L}_1)+\sigma_-(\mathrm{L}'_1)-\sigma_+(\mathrm{L}'_1).\end{aligned}$$

L'inégalité (7.12) découle alors des inégalités (7.7). Enfin l décrit au plus m valeurs dans (7.24), comme $m+1\leqq 4^m$ il est clair que le terme composé (7.21)$\circ$(7.6) est somme d'au plus $4^m\times 8^m$ termes du type (7.6), (7.9) ou (7.10).

Deuxième cas de la première partie. — Étude de (7.21)$\circ$(7.9).

Premier sous-cas. — Supposons $\mu^{q+1}-m_2\leqq p_1$ (et $\lambda^{q+1}<m-m_2$) alors (7.21)$\circ$(7.9) est égal à

$$\mathscr{D}_1^{-(p_1+m_2-\mu^{q+1})}\circ \mathscr{D}_2^{-(p_2+m-m_2-\lambda^{q+1})}\mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{h_1}\,\mathscr{D}_2^{h_2}\,e^{\mathrm{A}_1c}.$$

Le nombre d' est ici le même pour L_1 et L'_1 que pour L et L'. Prouvons (7.11), l'hypothèse de récurrence affirme que $p_2+d'(m_2-1)\geqq h_1+h_2$, comme $m-m_2-\lambda^{q+1}\geqq 0$ on obtient immédiatement (7.11). Prouvons (7.12), l'hypothèse de récurrence affirme que :

$$|\delta'^1|+\ldots+|\delta'^q|\leqq p_1+p_2-h_1-h_2-d'=\sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L}')-d'$$

Les relations (7.22) et l'inégalité $|\delta'^{q+1}|\leqq m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}$ montrent alors que (7.12) est vérifiée. Prouvons (7.13), l'hypothèse de récurrence et les relations (7.22) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_1&=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})-p_2+h_2-1\\&=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}-(p_2+m-m_2-\lambda^{q+1})+h_2-1\\&=\sigma_-(\mathrm{L}_1)-\sigma_+(\mathrm{L}_1)-(p_2+m-m_2-\lambda^{q+1})+h_2-1\end{aligned}$$

Ceci prouve (7.13).

— *Deuxième sous-cas.* — Supposons $\mu^{q+1}-m_2>p_1$ (et $\lambda^{q+1}<m-m_2$). Alors nous devons faire commuter $\mathscr{D}_1^{(\mu^{q+1}-m_2-p_1)}$ et $\mathscr{D}_2^{-(p_2+m-m_2-\lambda^{q+1})}$. Le 2° du lemme 5.8 montre alors que le terme composé $(7.21)\circ(7.9)$ est égal à :

$$(7.27)\qquad \mathscr{D}_2^{-(p_2+m-m_2-\lambda^{q+1})}\circ\mathscr{D}_1^{(\mu^{q+1}-m_2-p_1)}\circ \mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{h_1}\,\mathscr{D}_2^{h_2}\,e^{\mathrm{A}_1 c} + \sum_{\substack{l=0\\ l\geqq p_1+p_2+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}}}^{p_2+m-m_2-\lambda^{q+1}-1} \mathscr{D}_2^{-l}\mathrm{K}_l''$$

où K_l'' est la somme d'au plus $8^{\mu^{q+1}-m_2-p_1}(\leqq 8^m)$ termes de la forme

$$(7.28)_l\qquad \pm\mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{a}\,\mathscr{D}_2^{b}\,e^{\mathrm{A}c}\mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{h_1}\,\mathscr{D}_2^{h_2}\,e^{\mathrm{A}_1 c}$$

si $b\in\mathbb{N}^*$ le terme précédent est identiquement nul, on peut donc supposer $b=0$ et alors $a=\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}-m-p_1-p_2+l\,(a\leqq m)$ et on a :

$$(7.29)_l\qquad \mathrm{A}=p_2+m-m_2-\lambda^{q+1}-1-l.$$

Le 2° et le 3° du lemme 5.7 montrent que le terme $(7.28)_l$ avec — $b=0$ — est la somme d'au plus $2^a(\leqq 2^m)$ termes du type :

$$(7.30)_l\qquad \pm\mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{h_1'}\,\mathscr{D}_2^{h_2'}\,e^{\mathrm{B}c}$$

où $h_1'+h_2'=h_1+h_2+a$, $\mathrm{B}\in\mathbb{Z}$ et on a :

$$(7.31)_l\qquad \mathrm{B}+1-h_2'=\mathrm{A}+1+\mathrm{A}_1+1-h_2.$$

Le nombre d' est ici le même pour L_1 et L_1' que pour L et L'. Prouvons (7.11) pour un terme composé $\mathscr{D}_2^{-l}\circ(7.30)_l$, l'hypothèse de récurrence montre que :

$$h_1+h_2-p_2+l\leqq l+d'(m_2-1)$$

comme $\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}-m-p_1\leqq 0$ on peut alors affirmer que :

$$h_1'+h_2'=h_1+h_2+a=h_1+h_2+\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}-m-p_1-p_2+l\leqq l+d'(m_2-1).$$

Ceci prouve (7.11). Prouvons (7.12), l'hypothèse de récurrence et les relations (7.22) montrent que :

$$\begin{aligned} l-h_1'-h_2'-d' &= p_1+p_2-h_1-h_2+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}-d'\\ &=\sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L}')+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}-d'\\ &=\sigma_-(\mathrm{L}_1)+\sigma_-(\mathrm{L}_1')-\sigma_+(\mathrm{L}_1)-\sigma_+(\mathrm{L}_1')-d'.\end{aligned}$$

(7.12) découle alors des relations (7.7). Prouvons (7.13) pour un terme composé $\mathscr{D}_2^{-l}\circ(7.30)_l$. Les relations $(7.31)_l$ et $(7.29)_l$ et l'hypothèse de récurrence montrent que :

$$\mathrm{B}+1-h_2'+l=p_2+m-m_2-\lambda^{q+1}+\mathrm{A}_1+1-h_2$$
$$=m-m_2-\lambda^{q+1}+p_2+\mathrm{A}_1+1-h_2=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}.$$

Les relations (7.22) montrent alors que (7.13) est démontrée. Maintenant nous devons étudier le terme

$$\mathscr{D}_2^{-(p_2+m-m_2-\lambda^{q+1})}\,\mathscr{D}_1^{\mu^{q+1}-m_2-p_1}\,\mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{h_1}\,\mathscr{D}_2^{h_2}\,e^{\mathrm{A}_1 c}. \tag{7.32}$$

Le 2° du lemme 5.7 montre que (7.32) est la somme d'au plus $2^{\mu^{q+1}-m_2-p_1}$ ($\leqq 2^m$) termes du type :

$$\mathscr{D}_2^{-(p_2+m-m_2-\lambda^{q+1})}\,\mathrm{T}_1\,\mathscr{D}_1^{h_1''}\,\mathscr{D}_2^{h_2''}\,e^{\mathrm{B}'c} \tag{7.33}$$

où $h_1''+h_2''=h_1+h_2+\mu^{q+1}-m_2-p_1$ et on a :

$$\mathrm{B}'+1-h_2''=1+\mathrm{A}_1-h_2. \tag{7.34}$$

Rappelons qu'ici d' est le même pour L_1 et L_1' que pour L et L'. Prouvons (7.11) pour chaque terme (7.33), l'hypothèse de récurrence et l'inégalité $m-m_2-\lambda^{q+1}\geqq\mu^{q+1}-m_2-p_1$ permettent d'écrire :

$$p_2+m-m_2-\lambda^{q+1}+d'(m_2-1)\geqq h_1+h_2+m-m_2-\lambda^{q+1}$$
$$\geqq h_1+h_2+\mu^{q+1}-m_2-p_1=h_1''+h_2''.$$

Ceci prouve (7.11). Prouvons (7.12) pour chaque terme (7.33), l'hypothèse de récurrence et les relations (7.22) permettent d'écrire :

$$-d'+p_2+m-m_2-\lambda^{q+1}-h_1''-h_2''=p_1+p_2-h_1-h_2+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}-d'$$
$$=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L}')+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}-d'$$
$$=\sigma_-(\mathrm{L}_1')+\sigma_-(\mathrm{L}_1')-\sigma_+(\mathrm{L}_1)-\sigma_+(\mathrm{L}_1')-d'.$$

Les relations (7.7) entraînent alors (7.12). Prouvons (7.13) pour chaque terme (7.33), l'hypothèse de récurrence et la relation (7.34) montrent que :

$$p_2+m-m_2-\lambda^{q+1}+\mathrm{B}'+1-h_2''=p_2-h_2+1+\mathrm{A}_1+m-m_2-\lambda^{q+1}$$
$$=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}.$$

Les relations (7.22) entraînent alors (7.13).

Maintenant nous devons majorer le nombre des termes. Dans (7.27) l décrit au plus m valeurs et il apparaît au plus $2^m\times 8^m$ termes composés du type $\mathscr{D}_2^{-l}\circ(7.30)_l$. Par ailleurs il apparaît au plus 2^m termes du type (7.33). Comme $m\leqq 2^m$, on constate que le terme composé (7.21)∘(7.9) est somme d'au plus

$$2^m\times 2^m\times 8^m+2^m\leqq(64)^m$$

termes du type (7.6), (7.9) ou (7.10).

Troisième cas de la première partie. — Étude de (7.21)∘(7.10).

Premier sous-cas. — Supposons $\mu^{q+1}-m_2 \leqq q_1$ (et $\lambda^{q+1}<m-m_2$) alors (7.21)∘(7.10) est égal à

$$\mathscr{D}_1^{-(q_1+m_2-\mu^{q+1})} \circ \mathscr{D}_2^{-(q_2+m-m_2-\lambda^{q+1})} \mathrm{T}_2 \mathscr{D}_1^{k_1} \mathscr{D}_2^{k_2} e^{\mathrm{A}_2 c}.$$

Le nombre d' est ici le même pour L_1 et L'_1 que pour L et L'. Prouvons (7.14), l'hypothèse de récurrence affirme que $k_1+k_2 \leqq d'(m_2-1)$, et entraîne trivialement (7.14). Prouvons (7.15), l'hypothèse de récurrence et les relations (7.22) montrent que :

$$\begin{aligned} q_1+m_2-\mu^{q+1}+q_2+m-m_2-\lambda^{q+1}-k_1-k_2 \\ =\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L}')+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1} \\ =\sigma_-(\mathrm{L}_1)-\sigma_+(\mathrm{L}_1)+\sigma_-(\mathrm{L}'_1)-\sigma_+(\mathrm{L}'_1) \end{aligned}$$

Les relations (7.7) montrent alors que (7.15) est prouvée. Prouvons (7.16), l'hypothèse de récurrence montre que :

$$q_2+m-m_2-\lambda^{q+1}+\mathrm{A}_2-1-k_2=\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}.$$

Les relations (7.22) montrent alors que (7.16) est vérifiée.

Deuxième sous-cas. — Supposons $\mu^{q+1}-m_2>q_1$ (et $\lambda^{q+1}<m-m_2$). Alors nous devons faire commuter $\mathscr{D}_1^{\mu^{q+1}-m_2-q_1}$ et $\mathscr{D}_2^{-(q_2+m-m_2-\lambda^{q+1})}$. Comme l'opérateur $\mathscr{D}_1^{\mu^{q+1}-m_2-q_1} \circ \mathrm{T}_2$ est identiquement nul, le 2° du lemme 5.8 montre alors que le terme composé (7.21)∘(7.10) est égal à :

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l \geqq q_1+q_2+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}}}^{q_2+m-m_2-\lambda^{q+1}-1} \mathscr{D}_2^{-l} \mathrm{K}''_l \tag{7.35}$$

où K''_l est la somme d'au plus $8^{\mu^{q+1}-m_2-q_1}$ $(\leqq 8^m)$ termes de la forme

$$\pm \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^a \mathscr{D}_2^b e^{\mathrm{A}c} \mathrm{T}_2 \mathscr{D}_1^{k_1} \mathscr{D}_2^{k_2} e^{\mathrm{A}_2 c} \tag*{$(7.36)_l$}$$

si $a \in \mathscr{N}^*$ le terme précédent est identiquement nul, on peut donc supposer $a=0$ et alors $b=\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}-m-q_1-q_2+l\,(b \leqq m)$ et on a :

$$\mathrm{A}+1-b+l=q_2+m-m_2-\lambda^{q+1}. \tag*{$(7.37)_l$}$$

Le 1° du lemme 5.7 et l'identité $\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2=e^{-c}\mathrm{T}_1$ montrent que le terme $(7.36)_l$ — avec $a=0$ — est la somme d'au plus 2^b $(\leqq 2^m)$ termes du type :

$$\pm \mathrm{T}_1 \mathscr{D}_1^{k'_1} \mathscr{D}_2^{k'_2} e^{\mathrm{B}c} \tag*{$(7.38)_l$}$$

où $k'_1+k'_2=k_1+k_2+b$, $B\in\mathbb{Z}$ et on a :

$$(7.39)_l \qquad B+1-k'_2=A+1-b+A_2-1-k_2.$$

Le nombre d' est ici le même pour L_1 et L'_1 que pour L et L'. Prouvons (7.11) pour un terme composé $\mathscr{D}_2^{-l}\circ(7.38)_l$ l'hypothèse de récurrence (7.14) montre que :

$$k_1+k_2+l\leqq l+d'(m_2-1)$$

comme $\mu^{q+1}+\lambda^{q+1}-m-q_1-q_2\leqq 0$ on peut alors affirmer que :

$$k'_1+k'_2=k_1+k_2+b=k_1+k_2+\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}-m-q_1-q_2+l\leqq l+d'(m_2-1).$$

Ceci prouve (7.11). Prouvons (7.12), l'hypothèse de récurrence (7.15) et les relations (7.22) montrent que :

$$\begin{aligned} l-k'_1-k'_2-d' &= q_1+q_2-k_1-k_2-d'+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1} \\ &= \sigma_-(L)+\sigma_-(L')-\sigma_+(L)-\sigma_+(L')+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}-d' \\ &= \sigma_-(L_1)+\sigma_-(L'_1)-\sigma_+(L_1)-\sigma_+(L'_1)-d'. \end{aligned}$$

(7.12) découle alors des relations (7.7). Prouvons (7.13) pour un terme composé $\mathscr{D}_2^{-l}\circ(7.38)_l$. Les relations $(7.39)_l$ et $(7.37)_l$ et l'hypothèse de récurrence (7.16) montrent que :

$$l+B+1-k'_2=q_2+m-m_2-\lambda^{q+1}+A_2-1-k_2=\sigma_-(L)-\sigma_+(L)+m-m_2-\lambda^{q+1}.$$

Les relations (7.22) montrent alors que (7.13) est démontrée. Maintenant nous devons majorer le nombre de termes. Dans (7.35) l décrit au plus m valeurs et il apparaît au plus $2^m\times 8^m$ termes du type $\mathscr{D}_2^{-l}\circ(7.38)_l$. Comme $m\leqq 2^m$, on constate que le terme composé $(7.21)\circ(7.10)$ est somme d'au plus $2^m\times 2^m\times 8^m$ termes du type (7.6), (7.9) ou (7.10).

DEUXIÈME PARTIE. — Supposons $\mu^{q+1}\leqq m_2$ et $\lambda^{q+1}\leqq m-m_2$.

Premier cas. — Étude du terme $(7.21\circ(7.6)$. $(7.21)\circ(7.6)$ n'est autre que (7.23), il est donc du type (7.6).

Deuxième cas. — Étude du terme $(7.21)\circ(7.9)$. Cette étude est rigoureusement identique à l'étude du premier sous-cas du deuxième cas de la première partie.

Troisième cas. — Étude du terme $(7.21)\circ(7.10)$. Cette étude est rigoureusement identique à l'étude du premier sous-cas du troisième cas de la première partie.

TROISIÈME PARTIE. — Supposons $\mu^{q+1}<m_2$ et $\lambda^{q+1}>m-m_2$. Dans toute cette (dernière partie) le nombre d'indices $i\in\{1,\ldots,q+1\}$ [resp. $\{1,\ldots,q\}$] tels que $\lambda^i>m-m_2$ est égal à $d'+1$ [resp. d'].

Premier cas. — Étude $(7.21)\circ(7.6)$.

Premier sous-cas. — Supposons $\lambda^{q+1}-m+m_2 \leqq \sigma_-(L)$. Alors (7.21)∘(7.6) est égal à

$$\mathscr{D}_1^{-(\sigma_-(L')-\mu^{q+1}+m_2)} \circ \mathscr{D}_2^{-(\sigma_-(L)+m-m_2-\lambda^{q+1})} \circ \mathscr{D}_2^{\sigma_+(L)} \circ \mathscr{D}_1^{\sigma_+(L')}.$$

Ce terme n'est autre que (7.23), il est donc du type (7.6).

Deuxième sous-cas. — Supposons $\lambda^{q+1}-m+m_2 > \sigma_-(L)$. Alors nous devons faire commuter $\mathscr{D}_2^{(\lambda^{q+1}-m+m_2-\sigma_-(L))}$ et $\mathscr{D}_1^{-(\sigma_-(L')-\mu^{q+1}+m_2)}$. Le 1° du lemme 5.8 montre que (7.21)∘(7.6) est égal à :

$$(7.40)\qquad \mathscr{D}_1^{-(\sigma_-(L')-\mu^{q+1}+m_2)} \circ \mathscr{D}_2^{(\lambda^{q+1}-m+m_2-\sigma_-(L)+\sigma_+(L))} \circ \mathscr{D}_1^{\sigma_+(L')} + \sum_{\substack{l=0 \\ l \geqq \sigma_-(L')+\sigma_-(L)+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}}}^{\sigma_-(L')-\mu^{q+1}+m_2-1} \mathscr{D}_1^{-l} K_l$$

où K_l est la somme d'au plus $8^{\lambda^{q+1}-m+m_2-\sigma_-(L)}$ $(\leqq 8^m)$ termes de la forme :

$$(7.41)\qquad \pm T_2\, \mathscr{D}_1^{a+\sigma_+(L')} \mathscr{D}_2^{b+\sigma_+(L)} e^{Ac}$$

où $a+b=\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}-m-\sigma_-(L)-\sigma_-(L')+l$, $A \in \mathbb{Z}$:

$$(7.42)\qquad A-1-b=-\lambda^{q+1}+m-m_2+\sigma_-(L).$$

Comme $\sigma_-(L_1)$ est ici nul, l'opérateur suivant

$$(7.43)\qquad \mathscr{D}_1^{-(\sigma_-(L')-\mu^{q+1}+m_2)} \circ \mathscr{D}_2^{\lambda^{q+1}-m+m_2-\sigma_-(L)+\sigma_+(L)} \mathscr{D}_1^{\sigma_+(L')}$$

n'est autre que le terme (7.23), il est donc du type (7.6). Considérons un terme du type $\mathscr{D}_1^{-l}$∘(7.41) et prouvons (7.16). Les relations (7.42) et (7.22) montrent que :

$$A-1-b-\sigma_+(L)=\sigma_-(L_1)-\sigma_+(L_1).$$

Ceci prouve (7.16). Prouvons (7.14) pour un terme du type $\mathscr{D}_1^{-l}$∘(7.41). Comme $\mu_{q+1}<m_2$ on a $\sigma_+(L'_1)=\sigma_+(L')$, le (*b*) du lemme 7.2 (appliqué avec L_1 et L'_1 à la place de L et L′) montre que :

$$(d'+1)(m_2-1) \geqq -\sigma_-(L_1)+\sigma_+(L_1)+\sigma_+(L'_1).$$

Il est clair que $a+b \leqq \lambda^{q+1}-m+m_2-\sigma_-(L)-1$, les relations (7.22) montrent alors que :

$$(d'+1)(m_2-1) \geqq \lambda^{q+1}-m+m_2-\sigma_-(L)+\sigma_+(L)+\sigma_+(L') \geqq a+b+\sigma_+(L)+\sigma_+(L').$$

Ceci prouve (7.14). Prouvons (7.15). Les relations (7.22) permettent d'écrire :

$$l-(a+b+\sigma_+(L)+\sigma_+(L'))=\sigma_-(L)+\sigma_-(L')-\sigma_+(L)-\sigma_+(L')+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}$$
$$=\sigma_-(L_1)-\sigma_+(L_1)+\sigma_-(L'_1)-\sigma_+(L'_1).$$

L'inégalité (7.15) découle alors des relations (7.7). Enfin l décrit au plus m valeurs dans (7.40), comme $m+1 \leqq 4^m$, il est clair que le terme composé (7.21)∘(7.6) est somme d'au plus $4^m \times 8^m$ termes du type (7.6), (7.9) ou (7.10).

Deuxième cas de la troisième partie. — Étude de (7.21)∘(7.9).

Premier sous-cas. — Supposons $\lambda^{q+1}-m+m_2 \leqq p_2$ (et $\mu^{q+1}<m_2$) alors (7.21)∘(7.9) est égal à

$$\mathscr{D}_1^{-(p_1+m_2-\mu^{q+1})} \circ \mathscr{D}_2^{-(p_2+m-m_2-\lambda^{q+1})} \mathrm{T}_1\, \mathscr{D}_1^{h_1} \mathscr{D}_2^{h_2} e^{\mathrm{A}_1 c}.$$

Prouvons (7.11), l'hypothèse de récurrence affirme que $p_2+d'(m_2-1) \geqq h_1+h_2$, comme $m-m_2-\lambda^{q+1}+m_2-1 \geqq 0$ on obtient :

$$p_2+m-m_2-\lambda^{q+1}+(d'+1)(m_2-1) \geqq h_1+h_2.$$

Ceci prouve (7.11). Prouvons (7.12), l'hypothèse de récurrence affirme que :

$$|\delta'^1|+\ldots+|\delta'^q| \leqq p_1+p_2-h_1-h_2-d' = \sigma_-(\mathrm{L})+\sigma_-(\mathrm{L}')-\sigma_+(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L}')-d'$$

les relations (7.22) et l'inégalité $|\delta'^{q+1}| \leqq m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}-1$ montrent alors que (7.12) est vérifiée. Enfin pour prouver (7.13) il suffit de recopier la preuve du premier sous-cas du deuxième cas de la première partie.

Deuxième sous-cas. — Supposons $\lambda^{q+1}-m+m_2>p_2$. Alors nous devons faire commuter $\mathscr{D}_2^{\lambda^{q+1}-m+m_2-p_2}$ et $\mathscr{D}_1^{-(p_1-\mu^{q+1}+m_2)}$. Comme l'opérateur $\mathscr{D}_2^{\lambda^{q+1}-m+m_2-p_2} \circ \mathrm{T}_1$ est identiquement nul, le 1° du lemme 5.8 montre que le terme composé (7.21)∘(7.9) est égal à :

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l \geqq p_1+p_2+m-\lambda^{q\pm1}\,\mu^{q+1}}}^{p_1-\mu^{q+1}+m_2-1} \mathscr{D}_1^{-l} \mathrm{K}_l \tag{7.45}$$

où K_l est la somme d'au plus $8^{\lambda^{q+1}-m+m_2-p_2}$ ($\leqq 8^m$) termes de la forme :

$$\pm \mathrm{T}_2\, \mathscr{D}_1^a \mathscr{D}_2^b e^{\mathrm{A}c}\, \mathrm{T}_1\, \mathscr{D}_1^{h_1} \mathscr{D}_2^{h_2} e^{\mathrm{A}_1 c} \tag{7.46$_l$}$$

si $b \in \mathscr{N}^*$ le terme précédent est identiquement nul, on peut donc supposer $b=0$ et alors $a=\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}-m-p_1-p_2+l\,(a \leqq m)$ et on a :

$$\mathrm{A}-1=-\lambda^{q+1}+m-m_2+p_2. \tag{7.47$_l$}$$

Le 2° du lemme 5.7 et l'identité $\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_1 = e^c \mathrm{T}_2$ montrent que le terme (7.46)$_l$ — avec $b=0$ — est la somme d'au plus 2^a ($\leqq 2^m$) termes de la forme :

$$\pm \mathrm{T}_2\, \mathscr{D}_1^{k'_1} \mathscr{D}_2^{k'_2} e^{\mathrm{B}c} \tag{7.48$_l$}$$

où $k'_1+k'_2=h_1+h_2+a$, $\mathrm{B} \in \mathbb{Z}$ et on a :

$$\mathrm{B}-1-k'_2=\mathrm{A}-1+\mathrm{A}_1+1-h_2. \tag{7.49$_l$}$$

Prouvons (7.14) pour un terme composé $\mathscr{D}_1^{-l}\circ(7.48)_l$. L'hypothèse de récurrence (7.11) affirme que :

$$d'(m_2-1)\geqq h_1+h_2-p_2.$$

Il est clair que $m_2-1\geqq\lambda^{q+1}-m+m_2$ et que $a\leqq\lambda^{q+1}-m+m_2-p_2-1$, on peut alors affirmer que :

$$(d'+1)(m_2-1)\geqq h_1+h_2-p_2+\lambda^{q+1}-m+m_2\geqq h_1+h_2+a.$$

Ceci prouve (7.14) pour un terme composé $\mathscr{D}_1^{-l}\circ(7.48)_l$. Prouvons (7.15). L'hypothèse de récurrence (7.12) et les relations (7.22) montrent que :

$$\begin{aligned} l-h_1-h_2-a&=l-h_1-h_2-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}+m+p_1+p_2-l\\ &=\sigma_-(\mathrm{L}_1)-\sigma_+(\mathrm{L}_1)+\sigma_-(\mathrm{L}_1')-\sigma_+(\mathrm{L}_1').\end{aligned}$$

Comme $|\delta'^{q+1}|\leqq m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}-1$ les relations (7.7) permettent d'obtenir immédiatement (7.15). Prouvons (7.16) pour un terme composé $\mathscr{D}_1^{-l}\circ(7.48)_l$. Les relations $(7.47)_l$ et $(7.49)_l$ et l'hypothèse de récurrence (7.13) montrent que :

$$\mathrm{B}=1+k_2'-\lambda^{q+1}+m-m_2+p_2+\mathrm{A}_1+1-h_2=1+k_2'+\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}.$$

Les relations (7.22) montrent alors que (7.16) est prouvée. Maintenant majorons le nombre de termes. Comme l décrit au plus m valeurs dans (7.45), l'inégalité $m\leqq 2^m$ montre que $(7.21)\circ(7.9)$ est somme d'au plus $2^m\times 2^m\times 8^m$ termes du type (7.6), (7.9) ou (7.10).

Troisième cas de la troisième partie. — Étude de $(7.21)\circ(7.10)$.

Premier sous-cas. — Supposons $\lambda^{q+1}-m+m_2\leqq q_2$ (et $\mu^{q+1}<m_2$) alors $(7.21)\circ(7.10)$ est égal à

$$\mathscr{D}_1^{-(q_1+m_2-\mu^{q+1})}\circ\mathscr{D}_2^{-(q_2+m-m_2-\lambda^{q+1})}\mathrm{T}_2\,\mathscr{D}_1^{k_1}\,\mathscr{D}_2^{k_2}\,e^{\mathrm{A}_2c}.$$

L'étude de ce terme est quasiment identique à l'étude du premier sous-cas du troisième cas de la première partie.

Deuxième sous-cas. — Supposons $\lambda^{q+1}-m+m_2>q_2$. Nous devons faire commuter $\mathscr{D}_2^{(\lambda^{q+1}-m+m_2-q_2)}$ et $\mathscr{D}_1^{-(q_1-\mu^{q+1}+m_2)}$. Le 1° du lemme 5.8 montre que le terme composé $(7.21)\circ(7.10)$ est égal à

$$(7.50)\qquad \mathscr{D}_1^{-(q_1-\mu^{q+1}+m_2)}\circ\mathscr{D}_2^{\lambda^{q+1}-m+m_2-q_2}\circ\mathrm{T}_2\,\mathscr{D}_1^{k_1}\,\mathscr{D}_2^{k_2}\,e^{\mathrm{A}_2c}+\sum_{\substack{l=0\\ l\geqq q_1+q_2+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}}}^{q_1-\mu^{q+1}+m_2-1}\mathscr{D}_1^{-l}\mathrm{K}_l$$

où K_l est la somme d'au plus $8^{\lambda^{q+1}-m+m_2-q_2}(\leqq 8^m)$ termes de la forme :

$$(7.51)_l\qquad \pm\mathrm{T}_2\,\mathscr{D}_1^a\,\mathscr{D}_2^b\,e^{\mathrm{A}c}\,\mathrm{T}_2\,\mathscr{D}_1^{k_1}\,\mathscr{D}_2^{k_2}\,e^{\mathrm{A}_2c}$$

si $a \in \mathbb{N}^*$ le terme précédent est identiquement nul, on peut donc supposer $a=0$ et alors $b=\lambda^{q+1}+\mu^{q+1}-m-q_1-q_2+l\,(b \leqq m)$ et on a :

$$(7.52)_l \qquad A-1-b=-\lambda^{q+1}+m-m_2+q_2.$$

Le 1° et le 3° du lemme 5.7 montrent que le terme $(7.51)_l$ – avec $a=0$ – est la somme d'au plus $2^b\,(\leqq 2^m)$ termes de la forme

$$(7.53)_l \qquad \pm T_2\, \mathscr{D}_1^{k_1'}\, \mathscr{D}_2^{k_2'}\, e^{Bc}$$

où $k_1'+k_2'=k_1+k_2+b$, $B \in \mathbb{Z}$ et on a :

$$(7.54)_l \qquad B-1-k_2'=A-1-b+A_2-1-k_2.$$

Prouvons (7.14) pour un terme composé $\mathscr{D}_1^{-l} \circ (7.53)_l$. L'hypothèse de récurrence affirme que $k_1+k_2 \leqq d'(m_2-1)$ par ailleurs on a :

$$b \leqq -1+\lambda^{q+1}-m+m_2-q_2 \leqq m_2-1$$

on en déduit alors que :

$$k_1'+k_2'=k_1+k_2+b \leqq k_1+k_2+m_2-1 \leqq (d'+1)(m_2-1)$$

ceci prouve (7.14). Prouvons (7.15) pour un terme composé $\mathscr{D}_1^{-l} \circ (7.53)_l$. L'hypothèse de récurrence (7.15) et les relations (7.22) montrent que :

$$\begin{aligned} l-k_1'-k_2' &= l-k_1-k_2-b=q_1+q_2-k_1-k_2+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1} \\ &= \sigma_-(L_1)-\sigma_+(L_1)+\sigma_-(L_1')-\sigma_+(L_1'). \end{aligned}$$

Comme $|\delta'^{q+1}| \leqq m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1}-1$ les relations (7.7) permettent d'obtenir immédiatement (7.15). Prouvons (7.16) pour un terme composé $\mathscr{D}_1^{-l} \circ (7.53)_l$. Les relations $(7.52)_l$, $(7.54)_l$ et l'hypothèse de récurrence (7.16) montrent que :

$$B=1+k_2'-\lambda^{q+1}+m-m_2+q_2+A_2-1-k_2=1+k_2'+\sigma_-(L)-\sigma_+(L)+m-m_2-\lambda^{q+1}.$$

Les relations (7.22) montrent alors que (7.16) est prouvée. Maintenant nous devons étudier le terme

$$(7.55) \qquad \mathscr{D}^{-(q_1-\mu^{q+1}+m_2)} \circ \mathscr{D}_2^{\lambda^{q+1}-m+m_2-q_2}\, T_2\, \mathscr{D}_1^{k_1}\, \mathscr{D}_2^{k_2}\, e^{A_2 c}.$$

Le 1° du lemme 5.7 montre que (7.55) est somme d'au plus $2^{\lambda^{q+1}-m+m_2-q_2}\,(\leqq 2^m)$ termes du type :

$$(7.56) \qquad \mathscr{D}_1^{-(q_1-\mu^{q+1}+m_2)}\, T_2\, \mathscr{D}_1^{k_1''}\, \mathscr{D}_2^{k_2''}\, e^{B'c}$$

où $k_1''+k_2''=k_1+k_2+\lambda^{q+1}-m+m_2-q_2$ et on a :

$$(7.57) \qquad B'-1-k_2''=A_2-1-k_2-\lambda^{q+1}+m-m_2+q_2.$$

Prouvons (7.14) pour chaque terme (7.56), l'hypothèse de récurrence (7.14) et l'inégalité $m_2-1 \geqq -m+m_2+\lambda^{q+1}-q_2$ montrent que :

$$m_2-1+d'(m_2-1) \geqq -m+m_2+\lambda^{q+1}-q_2+k_1+k_2=k_1''+k_2''$$

ceci prouve (7.14). Prouvons (7.15) pour chaque terme (7.56), l'hypothèse de récurrence et les relations (7.22) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} q_1-\mu^{q+1}+m_2-k_1''-k_2'' &= q_1+q_2-k_1-k_2+m-\lambda^{q+1}-\mu^{q+1} \\ &= \sigma_-(\mathrm{L}_1)-\sigma_+(\mathrm{L}_1)+\sigma_-(\mathrm{L}_1')-\sigma_+(\mathrm{L}_1'). \end{aligned}$$

Les relations (7.7) entraînent alors (7.15). Prouvons (7.16) pour chaque terme du type (7.56), l'hypothèse de récurrence (7.16) et la relation (7.57) permettent d'écrire :

$$\mathrm{B}'=1+k_2''+\mathrm{A}_2-1-k_2-\lambda^{q+1}+m-m_2+q_2=1+k_2''+\sigma_-(\mathrm{L})-\sigma_+(\mathrm{L})+m-m_2-\lambda^{q+1}.$$

Les relations (7.22) entraînent alors (7.16). Maintenant nous devons majorer le nombre de termes. Dans (7.50) l décrit au plus m valeurs et il apparaît au plus $2^m \times 8^m$ termes du type $\mathscr{D}_1^{-l} \circ (7.53)_l$. Par ailleurs il apparaît au plus 2^m termes du type (7.56). Comme $m \leqq 2^m$, on constate que le terme composé $(7.21) \circ (7.10)$ est somme d'au plus

$$2^m \times 2^m \times 8^m + 2^m \leqq (64)^m$$

termes du type (7.6), (7.9) ou (7.10). Ceci prouve le théorème 7.9.

Appendice B
Preuve du 2° du théorème 3.1

La proposition 4.5 fournit un polydisque ouvert U et pour chaque $1 \leqq j \leqq d$ un voisinage effilé W_j de $(k^j)^{-1}(0)$ vérifiant les assertions 1° et 3° du théorème 3.1. Considérons alors un polydisque ouvert U_1 de centre 0 vérifiant les conditions du lemme 2.4. Soit $\mathscr{S}$ une hypersurface non caractéristique de U_1 non incluse dans la réunion des $(\mathrm{W}_j \cup (k^j)^{-1}(0)) \cap \mathrm{U}_1$ et d'équation $s(x)=0$ où – avec les notations de la définition 2.3 – $s(x)$ est de la forme x^0 ou $x^0+(x^1/\lambda)\,(|\lambda|>\mathrm{C})$ ou $\lambda x^0+x^1\,(|\lambda| \leqq \mathrm{C})$. La preuve du 1° du lemme 2.4 montre que quitte à diminuer U_1 on peut supposer que sur U_1 les fonctions $|a_m(x, \operatorname{grad} s(x)|^{-1}$, les difféomorphismes (et leurs inverses)

$$x \to \left(x^1, x^0+\frac{x^1}{\lambda}, x''\right) \quad (|\lambda|>\mathrm{C}), \qquad x \mapsto (x^0, \lambda x^0+x^1, x'') \quad (|\lambda| \leqq \mathrm{C})$$

sont uniformément bornées.

Quitte à faire un changement de variables nous pouvons raisonner dans le cas de l'hypersurface $\mathscr{S}$ d'équation $s(x)=x^1=0$. Après avoir divisé l'opérateur $a(x, \mathrm{D})$ par $a_m(x, \operatorname{grad} s(x))$ on se ramène à une équation de la forme :

$$\mathrm{P}u=(\mathrm{D}_{x^1}^m+c(x, \mathrm{D}_x^\alpha))\,u=v$$

où $|\alpha| \leqq m$ et $\alpha \neq (0, m, \ldots, 0)$.

Notons U'_1 le polydisque (pour les nouvelles coordonnées) ouvert de centre l'origine de rayon R' tel que $R'(1+C)$ soit égal au rayon de U_1.

Considérons un voisinage effilé W de l'hypersurface $x^1=0$ ne rencontrant pas les hypersurfaces caractéristiques et de la forme :

$$W = \{ x = (x^0, x^1, x'') \in U'_1 / |x^1| < r |x^0| \} \qquad \text{où} \quad 0 < r < 1.$$

Nous noterons $\Delta(m, R)$ le polydisque ouvert de centre $m \in \mathbb{C}^{n+1}$ et de rayon R. Soit $R>0$ un réel inférieur à la moitié du rayon du polydisque U'_1. A l'aide du théorème de Cauchy-Kowaleski on obtient aisément le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe* $\varepsilon > 0$ *indépendant du choix de* $\mathscr{S}$ *et de* W *tel que si* $m = (x^0, 0, x'')$ *appartient à* $\Delta(0, R) \setminus \{0\}$, *si* m' *est un point de* $\Delta(m, \varepsilon r |x^0|)$ *et si on note encore* v *la fonction holomorphe sur* $\Delta(m, \varepsilon r |x^0|)$ *définie par un germe de* v *au point* m' *alors il existe une fonction holomorphe* u *sur* $\Delta(m, \varepsilon r |x^0|)$ *vérifiant :*

$$\left| \begin{array}{l} P u = v \\ D^j_{x^1} u |_{\mathscr{S}} = 0, \qquad 0 \leqq j \leqq m-1. \end{array} \right.$$

NOTE. – Comme $0 < r < 1$ $\Delta(m, r/2 |x^0|)$ est inclus dans W. Un germe de v en m' définit une fonction holomorphe sur $\Delta(m, r/2 |x^0|)$. Le théorème de Cauchy-Kowaleski définit une solution u holomorphe sur $\Delta(m, \varepsilon r |x^0|)$.

Maintenant nous pouvons terminer la preuve du théorème 3.1. Posons

$$W' = \{ x \in \Delta(0, R) / |x^1| < \varepsilon r |x^0| \}.$$

Fixons un point base $m_0 \in W'$. Considérons un chemin continu Γ d'origine m_0, paramétré par $t \in [0, 1]$ et tracé dans W'. Un argument de compacité montre qu'il existe un nombre fini de polydisques $\Delta_i = \Delta(m_i, \varepsilon r |x^0_i|)$, $1 \leqq i \leqq k$ où $m_i = (x^0_i, 0, x''_i) \in W'$ et une subdivision de $[0, 1]$: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ telle que pour tout i de $\{1, 2, \ldots, k\}$ $\Gamma([t_{i-1}, t_i])$ est inclus dans Δ_i. Notons v_i le germe au point $\Gamma(t_i)$ obtenu en prolongeant v suivant la restriction du chemin Γ à $[0, t_i]$. Le théorème précédent fournit pour chaque $1 \leqq i \leqq k$ une fonction u_i holomorphe sur Δ_i vérifiant $P u_i = v_i$. L'ouvert convexe $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ rencontre $\mathscr{S}$, comme les m premières traces des u_i suivant $\mathscr{S}$ sont nulles on constate que u_i et u_{i+1} coïncident sur $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$. En revenant aux anciennes coordonnées on obtient facilement le théorème 3.1.

10. Appendice C

Cette section est consacrée à la preuve du théorème suivant :

THÉORÈME 10.1. — *Soit* Y *un voisinage ouvert de* T *dans* S. *Il existe* $\omega > 0$ *et un voisinage ouvert* Ω *de* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ *tel que pour toutes données de Cauchy* w'_h, $0 \leqq h < m$ *holomorphes sur le revêtement universel de* $Y \setminus T$ *et de détermination finie* [*resp. et en plus à monodromie* *unipotente*], *pour tout point* x_0 *de* $S \cap \Omega$ *et pour chaque choix de déterminations des fonctions* w'_h $(0 \leqq h < m)$ *au point* x_0 *il existe des fonctions* $u^i(t, x)$, $1 \leqq i \leqq d$ *holomorphes sur* $\mathscr{R}_\omega \times \Omega$ *de détermination finie* [*resp. et en plus à monodromie unipotente*] *telles que le prolongement ramifié le long des chemins de* $\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{d} K_j$ *du germe* u *en* x_0 *de solution du problème de Cauchy*

$$
\text{(10.1)} \qquad \begin{aligned} a(x, D)\, u &= 0 \\ D_{x^0}^{h} u \,|_S &= w'_h(x'), \qquad 0 \leqq h < m \end{aligned}
$$

coïncide avec $\sum_{i=1}^{d} u^i(\log k^i(x), x)$.

Nous suivrons de près la démonstration de [5] avec les simplifications dues au fait que nous travaillons avec une seule équation au lieu d'un système. Chaque fonction $u^i(t, x)$ sera écrite comme somme d'une série $\sum_{k \geqq 0} u_k^i(t, x)$, en regardant la structure des $u_k^i(t, x)$ et en utilisant le résultat de convergence de [5] nous montrerons que $u^i(t, x)$ est de détermination finie.

Rappelons que pour $\omega > 0$, $\mathscr{R}_\omega = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z < \log \omega \}$ est le revêtement universel du disque pointé $\dot{D}_\omega$ de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon $\omega > 0$. D'après un résultat de [1] chaque donnée de Cauchy $\omega'_h(x')$, $0 \leqq h < m$ s'écrit sous la forme $\omega_h(\log x^1, x'')$ $(x'' = (x^2, \ldots, x^n))$ où $(t, x'') \mapsto \omega_h(t, x'')$ est holomorphe sur un ouvert du type $\mathscr{R}_\omega \times U$ et est somme finie de termes du type

$$
(*) \qquad e^{\alpha t}\, t^{n_1}\, a(e^t, x'')
$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, $n_1 \in \mathbb{N}$, $(z, x'') \mapsto a(z, x'')$ est holomorphe sur un ouvert du type $\dot{D}_\omega \times U$. Si tous les ω'_h sont à monodromie unipotente alors on vérifie aisément qu'on peut supposer que dans les expressions $(*)$ α vaut 0. Le lemme 3.9 montre que la réciproque est vraie.

Comme dans [5] nous nous ramenons à un problème où les données de Cauchy sont nulles. Rappelons (*voir* 1) que pour $x^0 = 0$ on a $k^1(x) = x^1$. Par récurrence sur m on obtient aisément le lemme suivant :

LEMME 10.2 (avec les notations précédentes). — *Il existe des opérateurs différentiels dont les coefficients sont des fonctions de* x *holomorphes sur un voisinage de* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, $a_{l,h}(x, e^{-t} \partial_t)$, $0 \leqq l \leqq h-1$, $0 \leqq h \leqq m-1$ *tels que si on pose :*

$$
w(t, x) = \sum_{h=0}^{m-1} \frac{x^{0h}}{h!} \left(w_h(t, x'') + \sum_{l=0}^{h-1} a_{l,h}(x, e^{-t} \partial_t)\, w_l(t, x'') \right)
$$

alors on a, pour $0 \leqq h \leqq m-1$ *:*

$$
D_{x^0}^{h} (x \to w(\log k^1(x), x)) \,|_S = w_h(\log x^1, x'').
$$

En effectuant le changement d'inconnue $u(x)-w(\log k^1(x), x)$ nous ramenons l'étude du problème (10.1) à l'étude du problème :

$$\begin{aligned} a(x, \mathrm{D})\, u &= v(\log k^1(x), x) = -a(x, \mathrm{D})(w(\log k^1(x), x)) \\ \mathrm{D}_{x^0}^h u|_{\mathrm{S}} &= 0, \qquad 0 \leqq h < m \end{aligned} \tag{10.2}$$

et on vérifie aisément en utilisant les formules $(*)$ que $w(t, x)$ et $v(t, x)$ sont somme finie de termes du type :

$$e^{\alpha t}\, t^{n_1}\, a(e^t, x) \tag{10.3}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, $n_1 \in \mathbb{N}$, $(z, x) \mapsto a(z, x)$ est holomorphe sur un ouvert du type $\dot{\mathrm{D}}_\omega \times \mathrm{U}$. Si les données de Cauchy du problème (10.1) sont à monodromie unipotente alors on peut supposer que les nombres α sont nuls.

Désignons par m_0 la plus grande des multiplicités des hypersurfaces caractéristiques de $a(x, \mathrm{D})$. Reprenons les notations de 1 et considérons un opérateur différentiel homogène $\hat{g}(x, \mathrm{D})$ ayant pour symbole

$$\prod_{\mathrm{S}} a_{m,s}^{m_0 - m_s}(x, \xi)$$

Considérons alors le problème de Cauchy (noté (2.7) dans [5])

$$\begin{aligned} a(x, \mathrm{D}) \circ \hat{g}(x, \mathrm{D})\, \hat{u} &= v(\log k^1(x), x) \\ \mathrm{D}_{x^0}^h \hat{u}|_{\mathrm{S}} &= 0, \qquad 0 \leqq h < m_1 = m_0 d. \end{aligned} \tag{10.4}$$

L'opérateur $a(x, \mathrm{D}) \circ \hat{g}(x, \mathrm{D})$ a pour symbole principal $b^{m_0}(x, \xi)$, toutes ses hypersurfaces caractéristiques ont la même multiplicité, à savoir m_0. Comme $\hat{g}(x, \mathrm{D})$ est d'ordre $m_0 d - m$ on vérifie aisément que si $\hat{u}$ est solution du problème (10.4) alors $\hat{g}(x, \mathrm{D})(\hat{u})$ est solution du problème (10.2). Il suffit donc de vérifier que $\hat{u}$ vérifie les conclusions du théorème 10.1. Dans la suite nous supposerons que toutes les hypersurfaces caractéristiques ont la même multiplicité m_0 et nous écrirons $a(x, \mathrm{D})$ à la place de $a(x, \mathrm{D}) \circ \hat{g}(x, \mathrm{D})$.

Soit $\omega > 0$. Considérons un point $\tilde{a}$ de $\mathbb{R}_\omega$. On définit alors l'opérateur d'intégration :

$$\mathscr{D}^{-1} u(t) = \int_{\tilde{a}}^{t} e^{\mathcal{O}}\, u(\mathcal{O})\, d\mathcal{O},$$

$u(t)$ étant holomorphe sur $\mathscr{R}_\omega$. On pose $\mathscr{D} = e^{-t}\,\partial_t$. Si $p \in \mathbb{Z}$ on définit de manière évidente $\mathscr{D}^p$ et si ($j \geqq 0$ ou $-k \geqq 0$) alors $\mathscr{D}^j \circ \mathscr{D}^k = \mathscr{D}^{j+k}$. Le point $\tilde{a}$ est choisi dans [5] à la fin de la preuve.

REMARQUE 10.3. — Nous réécrivons la preuve de [5] en utilisant une expression *explicite* du revêtement universel de $\dot{\mathrm{D}}_\omega$. Ceci nous permettra d'utiliser le lemme 7.6 qui fournit une formule explicite pour les primitives itérées $\mathscr{D}^{-p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Dans le cas du problème (10.4) on peut supposer que les entiers s_μ figurant dans l'inégalité notée (3.5) dans [5] sont nuls. On recherche la solution du problème (10.4) sous la forme notée (3.6) dans [5]

$$\sum_{i=1}^{d} \mathscr{D}^{s_0} u^i(\log k^i(x), x)$$

où $s_0 \geqq m_0 - 1$ et chaque fonction $u^i(t, x)$ est holomorphe sur un ouvert de la forme $\mathscr{R}_\omega \times \Omega$. Dans [5] les auteurs considèrent un second membre du type (*cf.* formule (3.4) de [5]) :

$$\sum_{i=1}^{d} v^i(\log k^i(x), x)$$

dans la situation que nous étudions ici nous avons $v^j(t, x) \equiv 0$ pour $j \geqq 2$ et $v^1(t, x) = v(t, x)$ [avec la notation relative au problème (10.4)]. Dans [5] les auteurs montrent alors que le vecteur $u(t, x) = (u^1(t, x), \ldots, u^d(t, x))$ est solution du problème suivant noté (3.17) dans [5]

$$(10.5)\quad \begin{aligned} & D_x^{m_0} u(t, x) = \sum_{l=m}^{n_0} A_l^m(x, D)\, \mathscr{D}^{m-l} u(t, x) \\ & \qquad + \sum_{l=n_1}^{m-1} B_{l-n_2}^m(x, D)\, \mathscr{D}^{m-l} u(t, x) + w_m(t, x) \\ & D_x^{h_0} u(t, x) - \sum_{l=h}^{n_0} A_l^h(x, D)\, \mathscr{D}^{h-l} u(t, x) \\ & - \sum_{l=l(h)}^{h-1} B_{l-n_2}^h(x, D)\, \mathscr{D}^{h-l} u(t, x) - w_h(t, x) = O(x^0), \qquad 0 \leqq h < m \end{aligned}$$

où $w_m(t, x) = (c(x)\, \mathscr{D}^{-(s_0+m_1-m_0)} v(t, x), 0, \ldots, 0)$, où les w_h sont nuls pour $h < m$, $c(x)$ étant une certaine fonction holomorphe sur un voisinage de l'origine. Les indices n_0, n_1, n_2, $l(h)$ sont précisés dans [5].

LEMME 10.4. — $c(x)\, \mathscr{D}^{-(s_0+m_1-m_0)} v(t, x)$ est somme finie de termes du type :

$$e^{\alpha t} t^{n_2} b(e^t, x)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, $n_2 \in \mathbb{N}$, $(z, x) \to b(z, x)$ *est holomorphe sur un ouvert du type* $\dot{D}_\omega \times U$. *En outre si les données de Cauchy du problème* (10.1) *sont à monodromie unipotente alors on peut supposer que les nombres* α *sont nuls.*

PREUVE (esquisse). — Rappelons que $v(t, x)$ est somme finie de termes du type (10.3) $e^{\alpha t} t^{n_1} a(e^t, x)$. Le développement de Laurent de $a(z, x)$ permet d'écrire :

$$e^{\alpha t} t^{n_1} a(e^t, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\alpha t} t^{n_1} e^{kt} a_k(x).$$

Rappelons la formule fournie par le lemme 7.6 pour $p \in \mathbb{N}$:

$$(10.6) \qquad \mathscr{D}^{-p} u(t) = \sum_{b=1}^{p} \frac{1}{(b-1)!} \frac{(-1)^{b+1}}{(p-b)!} e^{(p-b)t} \int_{\tilde{a}}^{t} u(\mathcal{O}) e^{b\mathcal{O}} d\mathcal{O}.$$

En utilisant cette formule et en intégrant terme à terme on obtient aisément le lemme 10.4.

Revenons au problème (10.5). Pour démontrer le théorème 10.1 il suffit de vérifier que si les $w_h(t, x)$, $0 \leqq h \leqq m$ sont de détermination finie [resp. et en plus à monodromie unipotente] alors il en est de même de la solution $u(\mathrm{t}, \mathrm{x})$ du problème (10.5) dont l'existence est établie dans [5]. Nous supposerons alors que pour $0 \leqq h \leqq m$:

$$(10.7) \qquad w_h(t, x) = \sum_{j=1}^{r} e^{\alpha_j t} \sum_{l=0}^{\mathrm{M}} t^l a_{h, l, j}(e^t, x)$$

où $\alpha_1 = 0$, $\alpha_p - \alpha_j \notin \mathbb{Z}$ pour $p \neq j$, et où les fonctions $(z, x) \to a_{h, l, j}(z, x)$ sont holomorphes sur un ouvert $\dot{\mathrm{D}}_\omega \times \mathrm{U}$. Si les fonctions $w_h(t, x)$ sont à monodromie unipotente alors on peut supposer que $a_{h, l, j}(z, x) \equiv 0$ pour $j \geqq 2$.

Pour résoudre le problème (10.5) les auteurs utilisent dans [5] la méthode des approximations successives. Reprenons les notations du problème (10.5), le problème suivant est numéroté (5.1) dans [5] :

$$(10.8) \qquad \begin{cases} \mathrm{D}_{x^0}^m u(t, x) = \mathrm{A}_m^m(x, \mathrm{D}) u(t, x) + w_m(t, x) \\ \mathrm{D}_{x^0}^h u(t, x) - \mathrm{A}_h^h(x, \mathrm{D}) u(t, x) + w_h(t, x) = O(x^0), \qquad 0 \leqq h < m. \end{cases}$$

Le lemme suivant est prouvé et numéroté 5.1 dans [5] :

LEMME 10.5. — *Il existe un système fondamental $\mathscr{S}$ de voisinages ouverts de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que, quel que soit $\mathcal{O}' \in \mathscr{S}$* et

$$w_h \in \mathscr{H}(\mathcal{O}' \times \mathscr{R}_\omega; \mathbb{C}^d), \qquad 0 \leqq h \leqq m$$

le problème de Cauchy (10.8) *admet une unique solution* $u \in \mathscr{H}(\mathcal{O}' \times \mathscr{R}_\omega; \mathbb{C}^d)$.

Nous suivons de près [5]. Posons $w = (w_h)_{0 \leqq h \leqq m}$ et notons $\mathrm{P} : w \to u$ l'application linéaire définie par la résolution du problème de Cauchy (10.8). Notons d'autre part $\mathrm{Q} : u \to w$ l'application linéaire définie par les équations

$$(10.9) \qquad w_h(t, x) = \sum_{l=h+1}^{n_0} \mathrm{A}_l^h(x, \mathrm{D}) \mathscr{D}^{h-l} u(t, x) + \sum_{l=l(h)}^{h-1} \mathrm{B}_{l-n_2}^h(x, \mathrm{D}) \mathscr{D}^{h-l} u(t, x), \qquad 0 \leqq h \leqq m.$$

Le problème de Cauchy (10.5) s'écrit alors :

$$u = \mathrm{PQ} u + \mathrm{P} w.$$

En posant $R=PQ$ et $u_0=Pw$ la solution de (10.5) est donc formellement donnée par la formule

$$(10.10)\qquad u(t, x)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t, x) \qquad \text{où} \quad u_k=R^k u_0 \quad \text{pour } k\in\mathbb{N}.$$

Rappelons que les données de Cauchy du problème (10.5) sont définies par les formules (10.7). Le lemme 10.5 permet de voir qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}'$ de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k\in\mathcal{H}(\mathcal{R}_\omega\times\mathcal{O}', \mathbb{C}^d)$. Le lemme suivant est prouvé et numéroté 5.2 dans [5].

LEMME 10.6. — *Il existe un nombre* $\omega_0>0$ *et un voisinage ouvert* $\mathcal{O}_1$ *de l'origine de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *tels que, pour* $0<\omega\leqq\omega_0$, *la série* (10.10) *converge uniformément sur les compacts de* $\mathcal{R}_\omega\times\mathcal{O}_1$.

LEMME 10.7. — $\forall k\in\mathbb{N}$, $R^k u_0=u_k(t, x)$ *est somme finie de termes du type* [*avec les notations des formules* (10.7)] :

$$(10.11)\qquad \mathcal{D}^{-p}\circ\mathcal{D}^q(e^{\alpha_j t}\, t^l\, a(e^t, x))$$

où p, $q\in\mathbb{N}$, $0\leqq l\leqq M$, $1\leqq j\leqq r$, *la fonction vectorielle* $(z, x)\mapsto a(z, x)$ *étant holomorphe sur* $\dot{D}_\omega\times\mathcal{O}'$.

Preuve. — On raisonne par récurrence sur $k\geqq 0$. Traitons le cas $k=0$. La clause relative à l'unicité dans l'énoncé du lemme 10.5 montre que si les données du problème (10.8) sont uniformes [*i.e.* de la forme $a_h(e^t, x)\, 0\leqq h\leqq m$] alors il en est de même de la solution. Rappelons que $w=(w_h)_{0\leqq h\leqq m}$ est donné par les formules (10.7). On obtient alors immédiatement le résultat du lemme dans le cas $Pw=u_0$. Soit maintenant $k\geqq 0$ et supposons le résultat démontré pour $u_k(t, x)$. Il est clair que Qu_k est somme finie de termes du type (10.11). En faisant commuter les opérateurs d'intégration ou de dérivation en t avec les opérateurs de dérivations en x on vérifie immédiatement que la solution $u_{k+1}=P(Qu_k)$ du problème (10.8) est somme finie de termes du type (10.11).

LEMME 10.8 [avec les notations des formules (10.7)]. — *Pour chaque* k *de* $\mathbb{N}$ *il existe des fonctions* $(z, x)\to a(k, l, j, z, x)$ *holomorphes sur* $\dot{D}_\omega\times\mathcal{O}'$, $0\leqq l\leqq M+1$, $1\leqq j\leqq r$ *telles que*

$$u_k(t, x)=\sum_{j=1}^{r} e^{\alpha_j t}\sum_{l=0}^{M+1} t^l\, a(k, l, j, e^t, x)$$

Rappelons que $\alpha_1=0$. *En outre si les* $w_h(t, x)$, $0\leqq h\leqq m$ *sont à monodromie unipotente alors on peut supposer que* $a(k, l, j, z, x)\equiv 0$ *dès que* $j\geqq 2$.

Preuve (esquisse). — Reprenons les notations du lemme 10.7. $\mathcal{D}^q(e^{\alpha_j t}\, t^l\, a(e^t, x))$ est une somme finie de termes du type $e^{\alpha_j t}\, t^l\, a(e^t, x)$. Pour calculer le terme :

$$\mathcal{D}^{-p}[e^{\alpha_j t}\, t^l\, a(e^t, x)]$$

on utilise la formule (10.6) et on procède exactement comme dans la preuve du lemme 10.4. On obtient alors aisément le lemme 10.8.

Preuve du théorème 10.1. — Il suffit de vérifier que $\sum_{k \geqq 0} u_k(t, x)$ est de détermination finie [resp. et en plus à monodromie unipotente si les données w_h définies par (10.7) le sont]. Le lemme 10.6 assure que la série $\sum_{k \geqq 0} u_k(t, x)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathscr{R}_{\omega 0} \times \mathcal{O}_1$; le lemme 10.8 montre qu'il suffit de vérifier que pour chaque $(l, j) \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{M}+1\} \times \{1, \ldots, r\}$ il en est de même de la série $\sum_{k \geqq 0} a(k, l, j, e^t, x)$. Raisonnons par l'absurde, supposons pour fixer les idées que :

(*a*) la série $\sum_{k \geqq 0} a(k, l', 2, e^t, x)$ ne converge pas uniformément sur les compacts de $\mathscr{R}_{\omega 0} \times \mathcal{O}_1$;

(*b*) pour $l > l'$ la série $\sum_{k \geqq 0} a(k, l, 2, e^t, x)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathscr{R}_{\omega 0} \times \mathcal{O}_1$.

Rappelons que pour $p \neq j$, $\alpha_p - \alpha_j \notin \mathbb{Z}$. Désignons par T l'opérateur de translation : $(\mathrm{T}\, u)(t) = u(t + 2\, i\, \pi)$. La série de terme général :

$$h_k(t, x) = \prod_{p \neq 2} (\mathrm{T} - e^{2 i \pi \alpha_p} \mathrm{Id})^{\mathrm{M}+2} \circ (\mathrm{T} - e^{2 i \pi \alpha_2} \mathrm{Id})^{l'} u_k(t, x)$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathscr{R}_{\omega 0} \times \mathcal{O}_1$. Rappelons que dans l'énoncé du lemme 10.8 on a $l \leqq \mathrm{M}+1$. Il existe alors une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{C}^*$ et une série de fonction $\sum_{k \geqq 0} g_k(t, x)$ convergeant uniformément sur les compacts de $\mathscr{R}_{\omega 0} \times \mathcal{O}_1$ telles que $\forall\, k \in \mathbb{N}$ on a : $h_k(t, x) = g_k(t, x) + \mathrm{C}\, a(k, l', 2, e^t, x)$. Ceci contredit l'assertion (*a*). Enfin on traite aisément le cas de la monodromie unipotente en invoquant le lemme 3.8 et le rappel 3.7. Ceci prouve le théorème 10.1.

L'auteur remercie le Referee dont les nombreuses et judicieuses remarques ont permis d'améliorer ce texte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Björk, *Ring of Differential Operators*, North-Holland, Mathematical Library, 1979.

[2] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1981.

[3] M. Greenberg et J. Harper, *Algebraic Topology, a First Course*, Benjamin, (*Math. Lect. Notes Ser.*, 1981).

[4] P. Griffiths et J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience, 1978.

[5] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : Problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle* (*J. Math. pures et appl.*, t. 55, 1976, p. 297-352).

[6] M. Kashiwara et P. Schapira, *Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe* (*Inventiones Mathematicae*, t. 46, 1978, p. 17-38).

[7] C. WAGSCHAL, *Sur le problème de Cauchy ramifié* (*J. Math. pures et appl.*, t. 53, 1974, p. 147-164).
[8] C. WAGSCHAL, *Problème de Cauchy Analytique à données méromorphes* (*J. Math. pures et appl.*, t. 51, 1972, p. 375-397).

(Manuscrit reçu le 22 décembre 1988,
révisé le 27 juin 1989).

E. LEICHTNAM,
École Normale Supérieure,
D.M.I.,
45, rue d'Ulm,
75005 Paris.