ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-M. DELORT

Deuxième microlocalisation simultanée et front d'onde de produits

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 2 (1990), p. 257-310

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_2_257_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 23, 1990, p. 257 à 310.

DEUXIÈME MICROLOCALISATION SIMULTANÉE ET FRONT D'ONDE DE PRODUITS

PAR J. M. DELORT

Introduction

Il est devenu clair depuis plusieurs années que les distributions conormales le long d'une variété lisse Σ (*i. e.* qui conservent une régularité fixée H^s_{loc} lorsqu'on leur applique un nombre quelconque de champs de vecteurs à coefficients C^∞ tangents à Σ) jouent un rôle essentiel dans l'étude des singularités des équations aux dérivées partielles hyperboliques semi-linéaires ([3], [4], [16], [1]). Il apparaît donc utile de connaître les singularités microlocales d'un produit $u_1 \ldots u_p$ de telles distributions lorsque les u_j ont une régularité locale suffisante (par exemple $H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$ avec $s>n/2$) pour que cette opération ait un sens. Lorsque les u_j sont conormales le long d'une même sous-variété Σ, la réponse est triviale : le produit $u_1 \ldots u_p$ est lui aussi conormal le long de Σ et son front d'onde est donc contenu dans $T^*_\Sigma \mathbb{R}^n$. Nous allons ici étudier ce problème lorsque les u_j sont conormales le long de variétés Σ_j en position quelconque les unes par rapport aux autres. Rappelons que Lebeau a récemment montré [14] que le front d'onde d'une fonction C^∞ des u_j $F(u_1, \ldots, u_p)$ s'estime par la réunion des fronts d'onde de tous les polynômes de $u_1, \ldots, u_p$. Les majorations que nous projetons d'obtenir fournissent donc également une borne supérieure à $WF(F(u_1, \ldots, u_p))$.

Lorsque $p=2$, le problème est aisé : écrivons en effet $u_j = Q_j \delta_{\Sigma_j}$ où Q_j est un opérateur pseudo-différentiel C^∞ et δ_{Σ_j} le courant d'intégration sur la sous-variété Σ_j, et $u_1 u_2 = u_1(x) \otimes u_2(y)|_{x=y}$. D'après [11], $WF(u_1 u_2)$ s'estime par une expression faisant intervenir $WF(u_1 \otimes u_2)$ et le deuxième front d'onde à croissance le long du conormal à la diagonale $\Delta = \{x=y\}$ de $u_1 \otimes u_2$:

$$WF^{2,1}_{T^*_\Delta}(u_1 \otimes u_2) = WF^{2,1}_{T^*_\Delta}((Q_1 \delta_{\Sigma_1}) \otimes (Q_2 \delta_{\Sigma_2})).$$

Près de $T^*_\Delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus 0$, $Q_1(x, D_x) \otimes Q_2(y, D_y)$ est un opérateur pseudo-différentiel ce qui entraîne que l'ensemble précédent est contenu dans

$$WF^{2,1}_{T^*_\Delta}(\delta_{\Sigma_1} \otimes \delta_{\Sigma_2}).$$

Il nous suffit donc d'estimer ce dernier à partir de Σ_1 et Σ_2 pour savoir majorer géométriquement $WF(u_1 u_2)$. On ne sait pas obtenir une telle estimation lorsque Σ_1 et

Σ_2 sont C^∞. Par contre, s'il s'agit de variétés analytiques réelles, il découle de [5] (*cf.* également [10]) que

$$WF^{2,1}_{T^*_\Delta}(\delta_{\Sigma_1} \otimes \delta_{\Sigma_2}) \subset CT^*_{\Delta^{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)(T^*_{\Sigma_1^{\mathbb{C}}}\mathbb{C}^n \times T^*_{\Sigma_2^{\mathbb{C}}}\mathbb{C}^n)$$

où $\Delta^{\mathbb{C}}$, $\Sigma_j^{\mathbb{C}}$ sont complexifiées de Δ, Σ_j et où le membre de droite est le cône normal de Whitney. Il en résulte alors que

$$WF(u_1 u_2) \subset [(T^*_{\Sigma_1^{\mathbb{C}}}\mathbb{C}^n \cup T^*_{\mathbb{C}^n}\mathbb{C}^n) \hat{+} (T^*_{\Sigma_2^{\mathbb{C}}}\mathbb{C}^n \cup T^*_{\mathbb{C}^n}\mathbb{C}^n)] \cap T^*\mathbb{R}^n$$

où $\hat{+}$ est l'opération introduite par Kashiwara et Schapira dans [8]. La méthode précédente ne s'étend pas au cas d'un produit d'au moins trois termes $u_1 . u_2 . u_3$ chaque u_j étant conormal le long de la variété analytique réelle Σ_j. En effet, si l'on écrit

$$u_1 u_2 u_3 = (Q_1 \delta_{\Sigma_1}) \otimes (Q_2 \delta_{\Sigma_2}) \otimes (Q_3 \delta_{\Sigma_3})|_{x_1 = x_2 = x_3}$$

et si l'on applique la formule de trace [11], on est ramené à étudier

$$WF^{2,1}_{T^*_{\{x_1 = x_2 = x_3\}}}((Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3)(\delta_{\Sigma_1} \otimes \delta_{\Sigma_2} \otimes \delta_{\Sigma_3})).$$

Or ici, $Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3$ n'est pas un opérateur pseudo-différentiel près de $T^*_{\{x_1 = x_2 = x_3\}} \setminus 0$. En fait, ce n'est même pas un opérateur 2-microlocal *i. e.* on ne peut pas majorer le deuxième front d'onde précédent par

$$WF^{2,1}_{T^*_{\{x_1 = x_2 = x_3\}}}(\delta_{\Sigma_1} \otimes \delta_{\Sigma_2} \otimes \delta_{\Sigma_3}).$$

Autrement dit, la réduction à l'étude d'un objet analytique $\delta_{\Sigma_1} \otimes \delta_{\Sigma_2} \otimes \delta_{\Sigma_3}$ ne peut plus se faire comme pour un produit de deux distributions.

Pour traiter malgré tout le problème, on pourrait faire intervenir dans la méthode des microlocalisations d'ordre supérieur à 2. On a préféré ici une technique moins lourde consistant d'abord à écrire le produit étudié

$$u_1 \dots u_p(x) = \int \delta(x - x^1) \dots \delta(x - x^p) u_1(x^1) \dots u_p(x^p) \, dx^1 \dots dx^p$$

où $\delta(.)$ est la masse de Dirac en 0. On est donc ramené à l'étude du front d'onde de

$$(*) \qquad \delta(x - x^1) \dots \delta(x - x^p) u_1(x^1) \dots u_p(x^p)$$

que l'on écrit comme une trace

$$U|_{\{x^1 = y^1, \dots, x^p = y^p\}} \qquad \text{avec} \qquad U = \delta(x - x^1) \dots \delta(x - x^p) \otimes u_1(y^1) \dots u_p(y^p).$$

Le but de la section 1 de ce travail est alors d'obtenir une formule de trace, généralisant celle de [11] et permettant de majorer le front d'onde de (*) à partir d'un deuxième front d'onde simultané

$$(**) \qquad WF^{2,1}_{(T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{R}^n,\, T^*_{\{x^1 = y^1\}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \dots, T^*_{\{x^p = y^p\}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))}(U).$$

Cet objet est défini au paragraphe 1.1 et la formule de trace associée prouvée au paragraphe 1.2, par une méthode directement inspirée de celle indiquée par Lebeau dans [11]. L'intérêt de cette nouvelle majoration apparaît au paragraphe 3.1 où on prouve que si $u_j = \mathrm{Q}_j \delta_{\Sigma_j}$ avec Q_j opérateur pseudo-différentiel C^∞, le produit tensoriel $Q_1(y^1, \mathrm{D}_{y^1}) \otimes \ldots \otimes \mathrm{Q}_p(y^p, \mathrm{D}_{y^p})$ est simultanément 2-microlocal près des points où il est nécessaire de connaître (*) (de manière analogue à ce qui se passait pour un produit de deux distributions, on n'a besoin d'étudier (*) qu'au voisinage des points de la forme $((x, \xi), (x^1, x^1;\ \xi^1, -\xi^1), \ldots, (x^p, x^p; \xi^p, -\xi^p))$ avec $\xi^j \neq 0$ *pour tout j* ce qui assure que chaque $\mathrm{Q}_j(y^j, \mathrm{D}_{y^j})$ est un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^n_{x^j} \times \mathbb{R}^n_{y^j}$). Pour majorer géométriquement $\mathrm{WF}(u_1 \ldots u_p)$, on doit donc majorer géométriquement des objets de la forme

$$(***) \quad \mathrm{WF}^{2,1}_{(\mathrm{T}^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{R}^n,\ \mathrm{T}^*_{\{x^1=y^1\}}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n),\ \ldots,\ \mathrm{T}^*_{\{x^p=y^p\}}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n))}(\delta(x-x^1)\ldots\delta(x-x^p) \otimes \delta_{\Sigma_1}(y^1)\ldots\delta_{\Sigma_p}(y^p))).$$

C'est ce qui est fait au paragraphe 2.2, par les mêmes méthodes que dans [5] et [13], en utilisant un « cône normal simultané » défini au paragraphe 2.1 et qui remplace le cône normal de Whitney intervenant dans les majorations de deuxième microssupport classique. Cela permet ensuite au paragraphe 3.2 d'obtenir une majoration

$$\mathrm{WF}(u_1 \ldots u_p) \subset \left[\ \hat{+}_1^p\, (\mathrm{T}^*_{\Sigma_j^{\mathbb{C}}}\mathbb{C}^n \cup \mathrm{T}^*_{\mathbb{C}^n}\mathbb{C}^n)\right] \cap \mathrm{T}^*\mathbb{R}^n$$

où les $\Sigma_j^{\mathbb{C}}$ sont les complexifiées des Σ_j et $\hat{+}_1^p$ est une opération définie au paragraphe 2.1 et généralisant le $\hat{+}$ de Kashiwara-Schapira.

D'après [7], si Λ_j, $j=1, 2$ sont des sous-analytiques coniques isotropes d'un cotangent $\mathrm{T}^*\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $\Lambda_1 \hat{+} \Lambda_2$ l'est également : cette assertion résulte du fait que le cône normal de Whitney à un sous-analytique isotrope le long d'une variété lagrangienne est isotrope. L'analogue de cette dernière propriété pour le cône normal simultané est fausse : on donne au paragraphe 2.1 un contre-exemple immédiat. Toutefois, on montre directement en appendice que si Λ_j, $j=1, \ldots, p$ sont des sous-analytiques coniques isotropes de $\mathrm{T}^*\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, alors $\hat{+}_1^p \Lambda_j$ l'est également. En particulier, on voit que le front d'onde d'un produit de distributions conormales C^∞ le long de sous-variétés analytiques est contenu dans un ensemble isotrope donc petit.

Le dernier paragraphe montre que la méthode développée ici permet également d'étendre les résultats de Lebeau [13] sur les caustiques semi-linéaires au problème de Cauchy pour l'équation des ondes semi-linéaire à données initiales conormales non nécessairement classiques le long d'une hypersurface analytique. En effet, la méthode de [13] repose sur l'analyse d'intégrales du type

$$\int e_+(x-x^1)\ldots e_+(x-x^p)\, u_1(x^1)\ldots u_p(x^p)\, dx^1 \ldots dx^p$$

où $e_+(.)$ est la solution élémentaire de l'équation des ondes à support dans l'avenir. Lorsque les u_j sont conormales classiques, Lebeau étudie ces intégrales en utilisant la deuxième microlocalisation usuelle. Lorsqu'elles sont non classiques, cette méthode n'est plus viable mais l'utilisation du deuxième front d'onde simultané permet comme pour les produits de tourner la difficulté et d'obtenir les mêmes résultats géométriques que dans [13].

Remarquons pour terminer que le deuxième front d'onde simultané permet de majorer non seulement le front d'onde mais également le deuxième front d'onde (usuel ou simultané) d'une trace (*cf.* paragraphe 1.2) et cela sans faire intervenir de microlocalisation d'ordre supérieur à 2.

Signalons enfin que dans un contexte tout à fait différent C. Sabbah a indiqué dans [18] une définition de deuxième microlocalisation simultanée dans le cadre des $\mathscr{D}$*-modules*.

Je remercie G. Lebeau pour plusieurs discussions sur l'ensemble de ce travail, D. Trotman qui s'est intéressé à la partie géométrique et K. Kurdyka qui m'a signalé le résultat de Pawlucki [17] utilisé en appendice.

0. Rappels

Nous allons, dans cette section, rappeler les définitions et propriétés de base des transformations de F.B.I. et de la deuxième microlocalisation le long d'une lagrangienne, telles qu'elles sont exposées dans [19] et [12].

0.1. Transformation de F.B.I. — Soient M une variété analytique réelle de dimension n et X une variété complexifiée de M. On notera t le point générique de M et x celui de X.

Si $\varphi : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et U un ouvert de X, on note $\mathrm{H}_\varphi(\mathrm{U})$ l'espace de Sjöstrand des fonctions

$$(0.1.1)\qquad \begin{cases} v: & \mathrm{U}\times[1,+\infty[\to\mathbb{C} \\ & (x,\lambda)\to v(x,\lambda) \end{cases}$$

holomorphes en x, continues en λ, telles qu'il existe $\mathrm{M}\in\mathbb{R}$ avec

$$(0.1.2)\qquad \sup_{\mathrm{U}\times[1,+\infty[} |\lambda^{-\mathrm{M}} e^{-\lambda\varphi(x)} v(x,\lambda)| < +\infty.$$

Si x_0 est un point de x, on pose $\mathrm{H}_{\varphi,x_0} = \varinjlim_{\mathrm{U}\ni x_0} \mathrm{H}_\varphi(\mathrm{U})$, U décrivant le filtre des voisinages ouverts de x_0.

On désigne par $\mathrm{N}_\varphi(\mathrm{U})$ l'espace des fonctions de la forme (0.1.1) telles qu'il existe $\varepsilon>0$ avec

$$(0.1.3)\qquad \sup_{\mathrm{U}\times[1,+\infty[} |e^{-\lambda(\varphi(x)-\varepsilon)} v(x,\lambda)| < +\infty$$

et on pose $N_{\varphi, x_0} = \varinjlim_{U \ni x_0} N_\varphi(U)$.

On note $X^{\mathbb{R}}$ la variété analytique réelle sous-jacente à X, $TX^{\mathbb{R}} \simeq TX$ sont fibré tangent, $T^*X^{\mathbb{R}}$ le fibré cotangent réel à $X^{\mathbb{R}}$, T^*X le fibré cotangent holomorphe à X. On identifie T^*X à $T^*X^{\mathbb{R}}$ en associant à la forme $\mathbb{C}$-linéaire $\zeta \in T_x^*X$ la forme $\mathbb{R}$-linéaire $u \to -\operatorname{Im} \zeta(u)$ (identification de Sjöstrand). En composant l'identification naturelle de T^*M à $T_M^*X^{\mathbb{R}} \subset T^*X^{\mathbb{R}}$ et l'identification précédente, on obtient une injection $T^*M \subsetneq T^*X$ donnée dans un ouvert de carte par $(t, \tau) \to (t, -\tau)$ $(t, \tau \in \mathbb{R}^n)$. Rappelons enfin que si ψ est une fonction de classe C^1 sur X, la variété

$$(0.1.4) \qquad \Lambda_\psi = \{(x, d\psi(x))\,;\, x \in X\} \subset T^*X^{\mathbb{R}}$$

s'identifie à la sous-variété de T^*X, également notée Λ_ψ, donnée par

$$(0.1.5) \qquad \Lambda_\psi = \left\{\left(x, \frac{2}{i}\frac{\partial \psi}{\partial x}(x)\right)\,;\, x \in X\right\} \subset T^*X,$$

$\partial/\partial x$ désignant la dérivée holomorphe.

Rappelons la définition des transformations de F.B.I. [19] : soit $(x_0, t_0) \in X \times M$ et Φ une fonction holomorphe au voisinage de (x_0, t_0) dans $X \times X$ vérifiant

$$(0.1.6) \qquad \begin{aligned} &\text{(i)} && \left(t_0, \frac{-\partial \Phi}{\partial t}(x_0, t_0)\right) = q_0 \in T^*M \subset T^*X \\ &\text{(ii)} && \operatorname{Im} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x_0, t_0) \gg 0 \\ &\text{(iii)} && \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial t}(x_0, t_0) \text{ inversible.} \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, on sait [19] que pour x voisin de x_0, l'application définie au voisinage de t_0 dans M par

$$(0.1.7) \qquad t \to -\operatorname{Im} \Phi(x, t)$$

admet un unique point critique $t(x)$ voisin de t_0 et que l'application

$$(0.1.8) \qquad \kappa : \quad x \to \left(t(x),\ -\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t(x))\right)$$

est un difféomorphisme d'un voisinage de x_0 dans X sur un voisinage de q_0 dans T^*M. L'ensemble

$$(0.1.9) \qquad \left\{\left(t, -\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t)\,;\, x, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)\right); (x, t) \in X \times X, \text{voisin de } (x_0, t_0)\right\}$$

est le graphe d'une transformation canonique complexe χ d'un voisinage de q_0 dans T^*X sur un voisinage de $(x_0, (\partial\Phi/\partial x)(x_0, t_0))$ dans T^*X. La fonction

$$\varphi(x) = -\operatorname{Im}\Phi(x, t(x)) \tag{0.1.10}$$

est une fonction analytique strictement pluri-sous-harmonique au voisinage de x_0 et on a

$$\chi(T^*M) = \Lambda_\varphi = \left\{\left(x, \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\right); x \text{ proche de } x_0\right\}. \tag{0.1.11}$$

Soient $a(x, t, \lambda)$ un symbole classique au voisinage de (x_0, t_0), elliptique en (x_0, t_0) (*cf.* [19]), u une distribution au voisinage de t_0 dans M, θ une fonction C^∞ à support dans un voisinage assez petit de t_0, $\theta \equiv 1$ près de t_0. On pose

$$\delta(a, \theta)\, u(x, \lambda) \overset{\text{def}}{=} \int e^{i\lambda\Phi(x, t)}\, a(x, t, \lambda)\, \theta(t)\, u(t)\, dt \tag{0.1.12}$$

pour x voisin de x_0. On a $\delta(a, \theta)\, u \in H_{\varphi, x_0}$ et on dit que $\delta(a, \theta)$ est une transformation de F.B.I. (associée à Φ, a, θ).

Le spectre singulier analytique de u est alors d'après [19] caractérisé par

$$p_0 \notin SS(u) \iff \delta(a, \theta)\, u \in N_{\varphi, x_0} \tag{0.1.13}$$

[le point $x_0 \in X$ étant l'image réciproque de p_0 par (0.1.8)].

0.2. Deuxième microlocalisation. — Nous allons rappeler la définition des transformations de F.B.I. de deuxième espèce et des espaces de Sjöstrand associés en suivant [12].

Conservons les notations du paragraphe 0.1 et supposons données une fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ analytique réelle strictement pluri-sous-harmonique et une sous-variété analytique réelle L de X, lagrangienne par la 2-forme symplectique sur X $(2/i)\, \bar\partial\, \partial\varphi$. Soient Y une copie de X, (y_0, x_0) un point de $Y \times X$,

$$\left\{\begin{array}{l} g: \quad Y \times X \times [0, 1[\to \mathbb{C} \\ (y, x, \mu) \to g(y, x, \mu) \end{array}\right. \tag{0.2.1}$$

une fonction holomorphe en (y, x) analytique réelle en μ telle que si l'on pose

$$f(y, x, \mu) \overset{\text{def}}{=} -\operatorname{Im} g(y, x, \mu) + \varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(y, x)\, \mu^k \tag{0.2.2}$$

les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) $f_0|_{Y \times L} = 0, \qquad (df_0)|_{Y \times L} = 0$
$x \to f_0(y_0, x)$ est transversalement non dégénéré le long de L de signature $(n, 0)$.

(ii) $f_1(y, x) \equiv 0.$

(iii) L'application : $x \to f_2(y_0, x)$ de L dans $\mathbb{R}$ a un point critique non dégénéré de signature $(0, n)$ en x_0.

Alors, pour (y, μ) voisin de $(y_0, 0)$, $x \to f(y, x, \mu)$ a un unique point critique voisin de x_0, $x(y, \mu)$ qui de plus est un col. Posons

$$(0.2.3) \qquad \begin{aligned} \Psi(y, \mu) &= \frac{1}{\mu^2} f(y, x(y, \mu), \mu) \\ \psi(y) &= \Psi(y, 0) \end{aligned}$$

et supposons :

(iv) ψ est strictement pluri-sous-harmonique.

D'après [12] on a alors un isomorphisme (local au voisinage de y_0)

$$(0.2.4) \qquad \Delta : \quad Y \to T^* L$$

défini en associant à $y \in Y$ la classe dans $T_L X$ du vecteur tangent $(x(y, 0), x_2(y))$ où $x_2(y)$ est le coefficient de μ^2 dans le développement de $x(y, \mu)$ en $\mu = 0$ puis en identifiant $T_L X$ à $T^* L$ par l'isomorphisme hamiltonien associé à la structure symplectique donnée sur X par $(2/i)\bar{\partial}\partial\varphi$.

Si $\Psi : Y \times]0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et U un ouvert de Y, on note $H^2_\Psi(U)$ l'espace des fonctions (*cf.* [12])

$$(0.2.5) \qquad \begin{cases} w : & U \times [1, +\infty[\times]0, 1] \to \mathbb{C} \\ & (y, \lambda, \mu) \to w(y, \lambda, \mu) \end{cases}$$

holomorphes en y, continues en (λ, μ) telles qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0, 1]$ avec

$$(0.2.6) \qquad \sup_{\substack{(y, \lambda, \mu) \in U \times [1, +\infty[\times]0, \alpha] \\ \lambda\mu^2 \geqq 1}} |\lambda^{-M} e^{-\lambda\mu^2 \Psi(y, \mu)} w(y, \lambda, \mu)| < +\infty.$$

On note $N^2_\Psi(U)$ le sous-espace des éléments w de $H^2_\Psi(U)$ tels qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec $w \in H^2_{\Psi - \varepsilon}$.

Si $y_0 \in Y$ est donné, les espaces H^2_{Ψ, y_0} et N^2_{Ψ, y_0} sont définis par limite inductive.

Soient $g(y, x, \mu)$ une phase définie près de $(y_0, x_0) \in Y \times X$ vérifiant les conditions (i) à (iv), $b(y, x, \lambda, \mu)$ un symbole analytique classique elliptique en (y_0, x_0) (*cf.* [12]), Σ un bon contour pour $f(y_0, .)$ [12], § IV-3 (Σ dépend de μ), v un élément de H_{φ, x_0}, B un voisinage assez petit de x_0. Posons

$$(0.2.7) \qquad \delta^2(b, \Sigma \cap B) v(y, \lambda, \mu) = \int_{\Sigma \cap B} e^{i\lambda g(y, x, \mu)} b(y, x, \lambda, \mu) v(x, \lambda) \, dx$$

Alors (0.2.7) induit une application indépendante de Σ et B

$$(0.2.8) \qquad \delta^2(b) : \quad H_{\varphi, x_0}/N_{\varphi, x_0} \to H^2_{\Psi, y_0}/N^2_{\Psi, y_0}$$

qu'on appelle la F.B.I. de deuxième espèce associée à b et g.

1. Deuxième microlocalisation simultanée et théorèmes de trace

Il s'agit de définir dans cette section une deuxième microlocalisation simultanée le long d'une famille de lagrangienne $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p$ qui nous permettra d'obtenir une généralisation du théorème de trace de Lebeau [11].

1.1. Deuxième microlocalisation simultanée. — Soient $M_0, \ldots, M_p$, $p+1$ variétés analytiques réelles de dimensions $n_0, \ldots, n_p$ et $X_0, \ldots, X_p$, $p+1$ variétés analytiques complexes, complexifiées de $M_0, \ldots, M_p$ respectivement. Si $\varphi_j : X_j \to \mathbb{R}$, $j=0, \ldots, p$ est une fonction continue donnée et $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$ on note pour U ouvert de $X_0 \times \ldots \times X_p$, $H_\varphi(U)$ l'espace des fonctions

$$(1.1.1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} v: \quad U \times [1, +\infty[^{p+1} \to \mathbb{C} \\ (x, \lambda_0, \ldots, \lambda_p) \to v(x; \lambda_0, \ldots, \lambda_p) \end{array} \right.$$

holomorphes en x, continues en $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ telles qu'il existe $M = (M_0, \ldots, M_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec

$$(1.1.2) \qquad \sup_{U \times [1, +\infty[^{p+1}} \left| \lambda^{-M} e^{-\sum_0^p \lambda_j \varphi_j(x^j)} v(x; \lambda) \right| < +\infty$$

où $x = (x^0, \ldots, x^p)$, $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$, $\lambda^{-M} = \prod_0^p \lambda_j^{-M_j}$.

On note $N_\varphi(U)$ l'espace des éléments de $H_\varphi(U)$ tels qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec

$$(1.1.3) \qquad \sup_{U \times [1, +\infty[^{p+1}} \left| \lambda^{-M} e^{-\sum_0^p \lambda_j \varphi_j(x^j) - \varepsilon \inf(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)} v(x, \lambda) \right| < +\infty.$$

On définit comme au paragraphe 0.1 des espaces de germes H_{φ, x_0}, N_{φ, x_0}.

Donnons-nous pour tout $j=0, \ldots, p$ un point $(x_0^j, t_0^j) \in X_j \times M_j$, une phase $\Phi_j(x^j, t^j)$ définie près de (x_0^j, t_0^j) dans $X_j \times X_j$ vérifiant les conditions (0.1.6) et un symbole $a(x, t, \lambda) = \prod_0^p a_j(x^j, t^j, \lambda_j)$ où, pour tout j, a_j est un symbole analytique classique elliptique en (x_0^j, t_0^j). Notons $\varphi_j(x^j)$ la fonction définie à partir de Φ_j par (0.1.10).

Soient u une distribution au voisinage de $t_0 = (t_0^0, \ldots, t_0^p)$ dans $M = M_0 \times \ldots \times M_p$ et $\theta \in C_0^\infty(M)$, $\theta \equiv 1$ au voisinage de t_0. On définit alors une transformation de F.B.I. généralisée en posant

$$(1.1.4) \qquad \delta(a, \theta) u(x; \lambda) = \int e^{i \sum_0^p \lambda_j \Phi_j(x^j, t^j)} a(x, t, \lambda) u(t) \theta(t) \, dt$$

On a $\delta(a, \theta) u \in H_{\varphi, x_0}$ [si $x_0 = (x_0^0, \ldots, x_0^p)$] et l'image de $\delta(a, \theta) u$ dans $H_{\varphi, x_0}/N_{\varphi, x_0}$ est indépendante du choix de θ : on la note $\delta(a) u$.

Soient pour tout $j=0, \ldots, p$, $\Psi_j : X_j \times]0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\Psi=(\Psi_0, \ldots, \Psi_p)$. Si U est un ouvert de $X_0 \times \ldots \times X_p$, on note $\tilde{H}^2_\Psi(U)$ l'espace des fonctions

$$(1.1.5) \qquad \begin{cases} U \times [1, +\infty[^{p+1} \times]0, 1]^{p+1} \to \mathbb{C} \\ (x, \lambda, \mu) \to w(x, \lambda, \mu) \end{cases}$$

holomorphes en x, continues en (λ, μ) telles qu'il existe $M=(M_0, \ldots, M_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $\alpha \in]0, 1]$ avec

$$(1.1.6) \qquad \sup_{\substack{(x, \lambda, \mu) \in U \times [1, +\infty[^{p+1} \times]0, \alpha]^{p+1} \\ \lambda_j \mu_j^2 \geqq 1}} \left| \lambda^{-M} e^{-\sum_0^p \lambda_j \mu_j^2 \Psi_j (x^j, \mu_j)} w(x, \lambda, \mu) \right| < +\infty.$$

On définit $\tilde{N}^2_\Psi(U)$ comme le sous-espace des éléments $w(x, \lambda, \mu)$ de $\tilde{H}^2_\Psi(U)$ tels qu'il existe $M \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\alpha \in]0, 1]$ et $\varepsilon > 0$ avec

$$(1.1.7) \qquad \sup_{\substack{(x, \lambda, \mu) \in U \times [1, +\infty[^{p+1} \times]0, \alpha]^{p+1} \\ \lambda_j \mu_j^2 \geqq 1}} \left| \lambda^{-M} e^{-\sum_0^p \lambda_j \mu_j^2 \Psi_j (x^j, \mu_j) - \varepsilon \inf_j (\lambda_j \mu_j^2)} w(x, \lambda, \mu) \right| < +\infty$$

et les espaces de germes en un point comme précédemment.

Soient pour tout $j=0, \ldots, p$, $\varphi_j : X_j \to \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle strictement pluri-sous-harmonique et L_j une sous-variété analytique réelle de X_j pour la 2-forme $(2/i)\,\bar{\partial}\,\partial\varphi_j$.

Soient pour tout $j=0, \ldots, p$, Y_j une copie de X_j, $g_j(y^j, x^j, \mu_j)$ une phase définie près de $(y_0^j, x_0^j) \in Y_j \times X_j$ vérifiant les conditions (i) à (iv) du paragraphe 0.2, $b(y, x, \lambda, \mu) = \prod_0^p b_j(y^j, x^j, \lambda_j, \mu_j)$ un produit de symboles analytiques classiques elliptiques en (y_0^j, x_0^j), Σ_j un bon contour pour $f^j(y_0^j, x^j, \mu_j)$ [f^j étant définie par (0.2.2) appliqué à (g_j, φ_j)], $\Sigma = \Sigma_0 \times \ldots \times \Sigma_p$, $v(x; \lambda)$ un élément de H_{φ, x_0} [où $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$], B un voisinage assez petit de x_0. Posons

$$(1.1.8) \qquad \mathfrak{F}^2(b, \Sigma \cap B)\, v(y, \lambda, \mu) = \int_{\Sigma \cap B} e^{i \sum_0^p \lambda_j g_j(y^j, x^j, \mu_j)}\, b(y, x, \lambda, \mu)\, v(x, \lambda)\, dx.$$

Si pour $j=0, \ldots, p$, $\Psi_j(y^j, \mu_j)$ désigne la valeur critique de la phase $(-\operatorname{Im} g_j + \varphi_j)/\mu_j^2$ définie par (0.2.3), (1.1.8) induit une application indépendante des choix de Σ et B

$$(1.1.9) \qquad \mathfrak{F}^2(b) : \quad H_{\varphi, x_0}/N_{\varphi, x_0} \to \tilde{H}^2_{\Psi, y_0}/\tilde{N}^2_{\Psi, y_0}.$$

La deuxième microlocalisation simultanée va être définie en liant les $2(p+1)$ paramètres ci-dessus $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p; \mu_0, \ldots, \mu_p)$ par les p relations

$$(1.1.10) \qquad \lambda_0 \mu_0^2 = \lambda_1 \mu_1^2 = \ldots = \lambda_p \mu_p^2$$

de manière à ne conserver que $p+2$ paramètres indépendants $(\lambda', \mu_0, \ldots, \mu_p)$ si λ' désigne la valeur commune aux expressions (1.1.10).

Définissions d'abord les espaces de Sjöstrand associés :

DÉFINITION 1.1.1. — Soient pour $j=0, \ldots, p$ une fonction $\Psi_j : X_j \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, Ψ la famille $(\Psi_0, \ldots, \Psi_p)$ et U un ouvert de $X_0 \times \ldots \times X_p$.

On note $H^2_\Psi(U)$ [resp. $N^2_\Psi(U)$] l'espace des fonctions

$$(1.1.11) \qquad \begin{cases} w: & U \times [1, +\infty[\times]0, 1]^{p+1} \to \mathbb{C} \\ & (y, \lambda', \mu) \to w(y, \lambda', \mu) \end{cases}$$

holomorphes en y, continues en (λ', μ) telles qu'il existe $M' \in \mathbb{R}$, $M=(M_0, \ldots, M_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $\alpha \in]0, 1]$ (resp. et $\varepsilon > 0$) tels que

$$(1.1.12) \qquad \sup_{(y, \lambda', \mu) \in U \times [1, +\infty[\times]0, \alpha]^{p+1}} |\lambda'^{-M'} \mu^M e^{-\lambda' \sum_0^p \Psi_j(y^j, \mu_j)} w(y, \lambda', \mu)| < +\infty$$

(resp.

$$(1.1.13) \qquad \sup_{(y, \lambda', \mu) \in U \times [1, +\infty[\times]0, \alpha]^{p+1}} |\mu^M e^{-\lambda' (\sum_0^p \Psi_j(y_j, \mu_j) - \varepsilon)} w(y, \lambda', \mu)| < +\infty)$$

avec la notation $\mu^M = \prod_0^p \mu_j^{M_j}$.

On définit comme précédemment les espaces de germes en $x_0 \in X_0 \times \ldots \times X_p$, H^2_{Ψ, x_0} et N^2_{Ψ, x_0}. On notera R l'application de restriction de $\mathbb{R}^{2(p+1)} = \{(\lambda_0, \ldots, \lambda_p; \mu_0, \ldots, \mu_p)\}$ à la sous-variété d'équation $\lambda_0 \mu_0^2 = \ldots = \lambda_p \mu_p^2$ munie des coordonnées $(\lambda', \mu_0, \ldots, \mu_p)$. Il résulte des définitions précédentes que R opère de $\tilde{H}^2_{\Psi, x_0}$ (resp. $\tilde{N}^2_{\Psi, x_0}$) dans H^2_{Ψ, x_0} (resp. N^2_{Ψ, x_0}).

En reprenant les notations introduites avant la définition pour φ_j, L_j, g_j, Ψ_j, b, on peut poser :

DÉFINITION 1.1.2. — On appelle transformation de F.B.I. de deuxième espèce simultanée associée à (b, g) l'application

$$(1.1.14) \qquad \mathcal{T}^2(b) \overset{\text{def}}{=} R \circ \tilde{\mathcal{T}}^2(b) : H_{\varphi, x_0}/N_{\varphi, x_0} \to H^2_{\Psi, y_0}/N^2_{\Psi, y_0}$$

Deuxième micro-support simultané. — Notons toujours $M_0, \ldots, M_p$, $p+1$ variétés analytiques réelles de complexifiées $X_0, \ldots, X_p$. Soient pour tout $j=0, \ldots, p$, q_j un point de $T^* M_j$ et Λ_j un germe en q_j de lagrangienne analytique réelle de $T^* M_j$. On notera $\Lambda_j^{\mathbb{C}}$ la variété complexifiée de Λ_j dans $T^* X_j$. On note

$$t_0 = (t_0^0, \ldots, t_0^p) \in M = M_0 \times \ldots \times M_p$$

la projection de

$$q = (q_0, \ldots, q_p) \in T^* M = T^* M_0 \times \ldots \times T^* M_p.$$

Considérons une distribution u définie près de t_0 et choisissons une famille de phases $\Phi=(\Phi_0, \ldots, \Phi_p)$, un symbole $a(x, t, \lambda)$ et une troncature θ permettant de définir la F.B.I. généralisée $\delta(a)$ donnée par (1.1.4).

On note $\varphi_j(x^j)$ la fonction associée à Φ_j par (0.1.10), $\kappa_j:(X_j, x_0^j) \to (T^* M_j, q_j)$ le difféomorphisme local donné par (0.1.8), $\chi_j:(T^* X_j, q_j) \to (T^* X_j, \chi_j(q_j))$ la transformation canonique (0.1.9) et $\varphi=(\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$. Les variétés $L_j=\kappa_j^{-1}(\Lambda_j) \subset X_j$ sont lagrangiennes pour la 2-forme $(2/i)\bar\partial\partial\varphi_j$. Soient pour tout $j=0, \ldots, p$ des points $q_j^* \in T_{q_j}^* \Lambda_j$ et $(\tilde q_j, \tilde q_j^*) \in T^* L_j$ l'image réciproque de (q_j, q_j^*) par l'application $\tilde\kappa_j: T^* L_j \to T^* \Lambda_j$ naturellement déduite de κ_j. Choisissons pour tout j un point $y_0^j \in Y_j$ copie de X_j, une phase $g_j(y^j, x^j, \mu_j)$ et un symbole b permettant de définir par les formules (1.1.8), (1.1.9) une application $\tilde\delta^2(b)$ et par (1.1.14) une F.B.I. de deuxième espèce simultanée $\delta^2(b)$.

Notons $\Delta_j:(Y_j, y_0^j) \to (T^* L_j, (\tilde q_j, \tilde q_j^*))$ le difféomorphisme local défini par (0.2.4). On posera $\Delta=\Delta_0 \times \ldots \times \Delta_p$, $\kappa=\kappa_0 \times \ldots \times \kappa_p$, $\tilde\kappa=\tilde\kappa_0 \times \ldots \times \tilde\kappa_p$.

Donnons alors la définition suivante :

DÉFINITION 1.1.3. — On dit que le point $((q_0, q_0^*), \ldots, (q_p, q_p^*)) \in T^* \Lambda_0 \times \ldots \times T^* \Lambda_p$ n'est pas dans le deuxième micro-support simultané de u le long de $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$: $SS^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$ si et seulement si $\delta^2(b)\delta(a)u$ est nul dans $H^2_{\Psi, y_0}/N^2_{\Psi, y_0}$ [avec $y_0=\Delta^{-1}(\tilde\kappa^{-1}((q_0, q_0^*), \ldots, (q_p, q_p^*)))$].

On peut également définir une notion analogue dans le cadre C^∞.

DÉFINITION 1.1.4. — On dit que le point

$$((q_0, q_0^*), \ldots, (q_p, q_p^*)) \in T^* \Lambda_0 \times \ldots \times T^* \Lambda_p$$

n'est pas dans le deuxième front d'onde simultané de u le long de $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$: $WF^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$ si et seulement si il existe W voisinage de y_0 dans $Y=Y_0 \times \ldots \times Y_p$, $\alpha \in]0, 1]$, $M \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que pour chaque entier $N \in \mathbb{N}$

$$\sup_{(y, \lambda', \mu) \in W \times [1, +\infty[\times]0, \alpha]^{p+1}} \left|\lambda'^N \mu^M e^{-\lambda' \left(\sum_0^p \Psi_j(y^j, \mu_j)\right)} \delta^2(b)\, \delta(a) u\right| < +\infty. \tag{1.1.15}$$

Les ensembles précédents sont des fermés de $T^* \Lambda_0 \times \ldots \times T^* \Lambda_p$ vérifiant $WF^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u) \subset SS^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$. Lorsque $p=0$, $SS^{2,1}_{\Lambda_0}(u)$ est le deuxième micro-support à croissance de u le long de Λ_0 tel qu'il a été défini par Lebeau dans [11] (où il est noté $WF^{2,1}_{\Lambda_0}$).

Les ensembles $SS^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$ et $WF^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$ ne dépendent que des données géométriques $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$ et pas des choix arbitraires de phases ou de symboles utilisés pour les définir. Cela résulte immédiatement des résultats analogues pour la deuxième micro-localisation le long d'une seule lagrangienne de [12] étant donné que les transformations $\delta(a)$, $\tilde\delta^2(b)$ sont définies comme produits tensoriels de F.B.I. ou de F.B.I. de deuxième espèce le long d'une seule lagrangienne.

Précisons le caractère conique des ensembles qui viennent d'être définis. Si $r \in \mathbb{R}_+^*$, on notera M_r l'homothétie de rapport r sur les fibres de $T^* \Lambda_0 \times \ldots \times T^* \Lambda_p$:

$$M_r: \quad ((q_0, q_0^*), \ldots, (q_p, q_p^*)) \to ((q_0, r q_0^*), \ldots, (q_p, r q_p^*)), \tag{1.1.16}$$

m_j^r l'homothétie de rapport r sur les fibres de $T^* M_j$, $j=0, \ldots, p$ et lorsque $\Lambda_j \subset T^* M_j$ est conique pour les $(m_r^j)_{r>0}$ on désignera par

$$\tilde{m}_j^r : T^* \Lambda_0 \times \ldots \times T^* \Lambda_p \to T^* \Lambda_0 \times \ldots \times T^* \Lambda_p$$

l'application égale à l'identité sur les facteurs $T^* \Lambda_k$, $k \neq j$ et à l'application naturellement déduite de $m_j^r|_{\Lambda_j}$ sur $T^* \Lambda_j$. On a alors :

PROPOSITION 1.1.5. — (i) *L'ensemble* $SS^{2, 1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$ [*resp.* $WF^{2, 1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$] *est invariant sous l'action de* M_r *pour tout* $r>0$.

(ii) *Supposons que pour un certain indice* j Λ_j *soit conique dans* $T^* M_j$. *Alors* $SS^{2, 1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$ [*resp.* $WF^{2, 1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$] *est invariant sous l'action de* $\tilde{m}_j^r$ *pour tout* $r>0$.

Démonstration. — (i) se prouve comme le résultat analogue de [12] dans le cas $p=0$: les transformations $\delta(a)$ et $\tilde{\delta}^2(b)$ étant choisies, on pose

$$(1.1.17) \qquad \begin{cases} \tilde{\delta}_r^2(b)\, v(y, \lambda, \mu) = \tilde{\delta}^2(b)\, v(y, \lambda, \mu\sqrt{r}) \\ \delta_r^2(b)\, v(y, \lambda', \mu) = R \circ \tilde{\delta}_r^2(b)\, v(y, \lambda', \mu) = \delta^2(b)\, v(y, \lambda' r, \mu\sqrt{r}) \end{cases}$$

et on utilise que $\delta_r^2(b) \circ \delta(a) u$ caractérise le $SS^{2, 1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}$ (resp. $WF^{2, 1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}$) en des points convenables.

(ii) Posons ici

$$(1.1.18) \qquad \delta_r(a)\, u(x, \lambda) = \delta(a)\, u(x, \lambda_0, \ldots, \lambda_{j-1}, r\lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_p).$$

L'identification $\kappa^r : X_0 \times \ldots \times X_p \to T^* M_0 \times \ldots \times T^* M_p$ est alors composée de $\kappa = \kappa^1$ et de l'homothétie m_j^r et $\delta_r(a) u \in H_{\varphi r}$ où $\varphi^r = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{j-1}, r\varphi_j, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_p)$. Si $(g_0, \ldots, g_p)$ sont les phases permettant de définir $\tilde{\delta}^2(b)$, notons $\tilde{\delta}_r^2(b)$ la transformation associée aux phases $((g_0, \ldots, g_{j-1}, r g_j(y^j, x^j, \mu_j/\sqrt{r}), g_{j+1}, \ldots, g_p)$ et $\delta_r^2(b) = R \circ \tilde{\delta}_r^2(b)$. L'identification $Y_0 \times \ldots \times Y_p \to T^* L_0 \times \ldots \times T^* L_p$ associée est la même que pour $r=1$ (sur le j-ième facteur, elle est en effet la composée de deux flèches : $Y_j \to T_{L_j} X_j \to T^* L_j$, la première étant modifiée par un facteur $1/r$ sur les fibres et la seconde par un facteur r puisque la forme symplectique à considérer sur X_j est $r\, 2/i\, \bar{\partial} \partial \varphi_j$). On a

$$(1.1.19) \quad \delta_r^2(b)\, \delta_r(a)\, u(y, \lambda', \mu) = \delta^2(b)\, \delta(a)\, u(y, \lambda', \mu_0, \ldots, \mu_{j-1}, \mu_j/\sqrt{r}, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_p).$$

Le deuxième point de la proposition en résulte.

Terminons ce paragraphe par un exemple : supposons que pour tout $j=0, \ldots, p$, M_j est un ouvert de $\mathbb{R}^{n_j}$ muni des coordonnées t^j. Soit N_j sous-variété de M_j de dimension n'_j d'équations $t''^j = 0$ si $t^j = (t'^j, t''^j)$. On pose $\Lambda_j = T^*_{N_j} M_j$. On munit $T^* M_j$ des coordonnées (t^j, τ^j), Λ_j des coordonnées (t'^j, τ''^j), $T^* \Lambda_j$ des coordonnées $(t'^j \tau''^j; t'^{j*}, \tau''^{j*})$. Soit u une distribution au voisinage de $t_0 \in M$, $\theta \in C_0^\infty(M)$ à support près de t_0, $\theta \equiv 1$ au voisinage de t_0. On utilisera la F.B.I. généralisée.

$$(1.1.20) \qquad T u(x, \lambda) = \int e^{-\sum_0^p j (x^j - t^j)^2/2}\, \theta(t)\, u(t)\, dt.$$

On a $\mathrm{T}u \in \mathrm{H}_\varphi$ où $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_p)$ avec $\varphi_j(x^j) = (\operatorname{Im} x^j)^2/2, j = 0, \ldots, p$. L'isomorphisme $\kappa_j^{-1} : \mathrm{T}^* \mathrm{M}_j \to \mathrm{X}_j = \mathbb{C}^{n_j}$ est donné par $(t^j, \tau^j) \to t^j - i\tau^j$.

Donnons-nous pour tout j une fonction $h_j : [0, 1[\to \mathbb{R}_+$ analytique réelle avec $h_j(0) = 1$. Si l'on pose pour x^j, y^j dans $\mathbb{C}^{n_j}$

$$(1.1.21) \qquad g_j(y^i, x^j, \mu_j) = \frac{i\mu_j^2}{2}\left[\frac{(y'^j - x'^j)^2}{1-\mu_j^2} + \frac{(y''^j + ix''^j)^2}{h_j(\mu_j^2)}\right] - \frac{i(x''^j)^2}{2}$$

la F.B.I. de deuxième espèce généralisée associée s'écrit (après changement de variables en x''^j ramenant le contour d'intégration au réel) :

$$(1.1.22) \quad \tilde{\delta}^2(1)\, v(y, \lambda, \mu)$$
$$= \int_\Sigma e^{\sum_0^p - (\lambda_j \mu_j^2/2\,(1-\mu_j^2))\,(y'^j - x'^j)^2 - (\lambda_j \mu_j^2/2\, h_j(\mu_j^2))\,(y''^j - x''^j)^2 - (\lambda_j/2)\,(x''^j)^2}\, v(x', ix'', \lambda)\, dx$$

où Σ est voisinage de $\operatorname{Re} y_0$ dans $\mathbb{R}^{n_0} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_p}$, y_0 étant le point de $\mathbb{C}^{n_0} \times \ldots \times \mathbb{C}^{n_p}$ correspondant par l'isomorphisme

$$(1.1.23) \quad \begin{cases} \Delta^{-1} \circ \tilde{\kappa}^{-1} : \quad \mathrm{T}^*\Lambda_0 \times \ldots \times \mathrm{T}^*\Lambda_p \to \mathbb{C}^{n_0} \times \ldots \times \mathbb{C}^{n_p} \\ ((t'^j, \tau''^j; t'^{j*}, \tau''^{j*})_{j=0, \ldots, p}) \to ((t'^j - it'^{j*}, \; -\tau''^j + i\tau''^{j*})_{j=0, \ldots, p}) \end{cases}$$

au point de $\mathrm{T}^*\Lambda_0 \times \ldots \times \mathrm{T}^*\Lambda_p$ près duquel on veut étudier le deuxième micro-support.

La F.B.I. de deuxième espèce simultanée associée δ^2 est à valeurs dans H^2_Ψ où $\Psi = (\Psi_0, \ldots, \Psi_p)$ avec pour tout $j = 0, \ldots, p$,

$$\Psi_j(y^i, \mu_j) = (\operatorname{Im} y'^j)^2/2 + (\operatorname{Im} y''^j)^2/2\,(h_j(\mu_j^2) + \mu_j^2).$$

La composée $\delta^2(1).\, \mathrm{T}u(y, \lambda', \mu)$ est alors égale dans $\mathrm{H}^2_{\Psi, y_0}/\mathrm{N}^2_{\Psi, y_0}$ à

$$(1.1.24) \quad (2\pi)^{\sum_0^p n_j/2} \prod_0^p \left(\frac{\mu_j^2(1-\mu_j^2)}{\lambda'}\right)^{n'_j/2} \prod_0^p \left(\frac{h_j(\mu_j^2)}{\lambda'}\right)^{(n_j - n'_j)/2}$$
$$\times \int e^{-(\lambda'/2) \sum_0^p (y'^j - t'^j)^2 - (\lambda'/2) \sum_0^p ((h_j(\mu_j^2) + \mu_j^2)/\mu_j^4)\,(t''^j)^2} \times e^{i\lambda' \sum_0^p y''^j \,.\, t''^j/\mu_j^2}\, \theta(t)\, u(t)\, dt.$$

1.2. Théorèmes de trace. — Il s'agit d'établir dans ce paragraphe des théorèmes de trace généralisant au deuxième micro-support simultané la formule de trace obtenue par Lebeau dans [11].

On note toujours $\mathrm{M}_0, \ldots, \mathrm{M}_p$, $p+1$ variétés analytiques réelles de complexifiées respectives $\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_p$, de dimension $n_0, \ldots, n_p$. Pour tout $j = 0, \ldots, l$ on se donne un point $q_j \in \mathrm{T}^*\mathrm{M}_j$ un germe Λ_j de lagrangienne analytique réelle de $\mathrm{T}^*\mathrm{M}_j$ en q_j et un point $(q_j, q_j^*) \in T^*\Lambda_j$ se projetant sur q_j par $\mathrm{T}^*\Lambda_j \to \Lambda_j$. Pour tout $j = l+1, \ldots, p$ soit N_j une sous-variété analytique réelle de M_j de dimension n'_j et notons $\mathrm{N} = \mathrm{M}_0 \times \ldots \times \mathrm{M}_p \times \mathrm{N}_{p+1} \times \ldots \times \mathrm{N}_p \subset \mathrm{M} = \mathrm{M}_0 \times \ldots \times \mathrm{M}_p$. Si u est une distribution assez régulière sur M, on se propose de majorer $\mathrm{WF}^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)}(u|_\mathrm{N})$ et $\mathrm{SS}^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)}(u|_\mathrm{N})$ à partir de deuxièmes micro-supports simultanés de u le long de familles de lagrangiennes convenables [on a noté $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)$ la famille de lagrangiennes constituée par les Λ_j, $j=0, \ldots, l$ et les sections nulles $T^*_{N_j} N_j$, $j=l+1, \ldots, p$ qui seront toujours sous-entendues dans les notations].

Supposons choisi un système de coordonnées locales t^j sur M_j au voisinage d'un point $t_0^j \in M_j$ tel que pour $j=l+1, \ldots, p$, $t_0^j \in N_j$, $t^j=(t'^j, t''^j)$ avec $N_j=\{t''^j=0\}$. Si u est une distribution définie au voisinage de $t_0=(t_0^0, \ldots, t_0^p)$ on utilisera la F.B.I., $Tu(x, \lambda)$ définie par (1.1.20).

Pour tout $j=0, \ldots, l$ on choisit une phase $g_j(y^j, x^j, \mu_j)$ telle que $(g_j, \varphi_j=1/2\,(\operatorname{Im} x^j)^2)$ vérifie les conditions (i) à (iv) du paragraphe 0.2 le long de la lagrangienne L_j naturellement associée à Λ_j (*cf.* § 1.1), y^j décrivant un voisinage ouvert du point y_0^j de $\mathbb{C}^{n_j}$ correspondant par identification à (q^j, q^{j*}) (cf. définition 1.1.3).

On notera $Y^l=(y^0, \ldots, y^l)$, $Y_0^l=(y_0^0, \ldots, y_0^l)$, $X^l=(x^0, \ldots, x^l)$, $X_0^l=(x_0^0, \ldots, x_0^l)$, $\mu^l=(\mu_0, \ldots, \mu_l)$ et

$$(1.2.1) \qquad G(Y^l, X^l, \mu^l, \lambda')=\sum_{j=0}^{l} i\lambda_j g_j(y^j, x^j, \mu^j)\Big|_{\substack{\lambda_j \mu_j^2=\lambda' \\ j=0, \ldots, l}}$$

Soient s_j, $j=l+1, \ldots, p$ des éléments de $\mathbb{R}^*_+$, $y=(y^0, \ldots, y^p) \in \mathbb{C}^{n_0} \times \ldots \times \mathbb{C}^{n_p}$ et f une distribution à support compact sur M. Soient pour $j=0, \ldots, l$, Σ_j un bon contour pour la phase $-\operatorname{Im} g_j(y^j, x^j, \mu_j)+(1/2)(\operatorname{Im} x^j)^2$ [12]. Posons, suivant [11]

$$(1.2.2) \quad S^2 f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p)=\int e^{\sum_{l+1}^{p} (-(\tau'^j)^2/2\lambda' + i\tau'^j . y'^j) - (\lambda'/2) \sum_{l+1}^{p} ((\tau''^j/\lambda' s_j) + y''^j)^2}$$

$$\times e^{G(Y^l, X^l, \lambda', \mu^l) + \sum_0^l (-\mu_j^2 (\tau^j)^2/2\lambda' + i x^j . \tau^j)}$$

$$\times \prod_{l+1}^{p} \left(-\frac{\tau''^j . y''^j}{\lambda' s_j^2}\right) \hat{f}(\tau^0, \ldots, \tau^p)\, d\tau^0 \ldots d\tau^p\, dx^0 \ldots dx^l$$

l'intégrale en $dx^0 \ldots dx^l$ étant prise sur $\Sigma_0 \times \ldots \times \Sigma_l$ et l'intégrale en $d\tau^0 \ldots d\tau^p$ étant prise sur $\mathbb{R}^{n_0} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_p}$.

On supposera désormais que f vérifie l'hypothèse de régularité suivante : il existe $\nu \in \mathbb{R}$, $\delta>0$ et $C>0$ tels que

$$(1.2.3) \quad \int |\hat{f}(\tau^0, \ldots, \tau^p)| \prod_{l+1}^{p} (1+|\tau''^j|)^\delta\, d\tau''^{l+1} \ldots d\tau''^p \leqq C \left(1+\sum_0^l |\tau^j| + \sum_{l+1}^{p} |\tau'^j|\right)^\nu$$

On peut alors calculer $f|_N$. Posons

$$(1.2.4) \quad T^2_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)}(f|_N)(y^0, \ldots, y^l, y'^{l+1}, \ldots, y'^p, \lambda', \mu^l)$$

$$= \int e^{G(Y^l, X^l, \lambda', \mu^l)}\, T(f|_N)\left(X^l, y'^{l+1}, \ldots, y'^p; \frac{\lambda'}{\mu_0^2}, \ldots, \frac{\lambda'}{\mu_l^2}, \lambda', \ldots, \lambda'\right) dX^l$$

avec

$$(1.2.5)\quad T(f|_N)\left(x^0, \ldots, x^l, x'^{\,l+1}, \ldots, x'^{\,p}; \lambda_0, \ldots, \lambda_p\right)$$
$$= \int e^{-\sum_0^l (\lambda_j/2)(x^j-t^j)^2 - \sum_{l+1}^p (\lambda_j/2)(x'^{\,j}-t'^{\,j})^2}$$
$$\times (f|_N)(t^0, \ldots, t^l, t'^{\,l+1}, \ldots, t'^{\,p})\, dt^0 \ldots dt^l\, dt'^{\,l+1} \ldots dt'^{\,p}$$

($T^2_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)}$ est donc associée à la deuxième microlocalisation simultanée le long de $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l, T^*_{N_{l+1}} N_{l+1}, \ldots, T^*_{N_p} N_p)$: on l'obtient en prenant pour $j=l+1, \ldots, p$ les phases (1.1.21) par rapport aux seules variables (y', x')).

LEMME 1.2.1. — *Avec les notations précédentes*

$$(1.2.6)\quad \int_0^{+\infty} ds_{l+1} \ldots \int_0^{+\infty} ds_p \int_{|y''^{\,l+1}|=1} dy''^{\,l+1} \ldots \int_{|y''^{\,p}|=1} dy''^{\,p}\, S^2 f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p)$$
$$= \prod_{l+1}^p H_j(\lambda')(2\pi)^{n_j-(n'_j/2)} \lambda'^{\,n'_j/2} \prod_0^l \left(\frac{2\pi\lambda'}{\mu_j^2}\right)^{n_j/2}$$
$$\times T^2_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)}(f|_N)(y^0, \ldots, y^l, y'^{\,l+1}, \ldots, y'^{\,p}, \lambda', \mu^l).$$

où pour $j=l+1, \ldots, p$, $H_j(\lambda')$ est une fonction continue vérifiant

$$\lim_{\lambda' \to +\infty} H_j(\lambda')\, \lambda'^{\,(n_j-n'_j)/2} = (2\pi)^{(n_j-n'_j)/2}.$$

Démonstration. — Il suffit de poser

$$(1.2.7)\qquad H_j(\lambda') = \int_0^{+\infty} \int_{|y''^{\,j}|=1} e^{-(\lambda'/2)(\tau''^{\,j}/\lambda' s_j + y''^{\,j})^2} \left(\frac{-\tau''^{\,j} . y''^{\,j}}{\lambda' s_j^2}\right) dy''^{\,j}\, ds_j.$$

On va maintenant déduire de (1.2.6) en suivant [11] le théorème de majoration du deuxième micro-support simultané d'une trace.

Pour tout $j=l+1, \ldots, p$, notons $V_j = T^* M_j|_{N_j}$, $\rho_j : V_j \to T^* N_j$ la projection naturelle,

$$\Lambda_j = T^*_{N_j} M_j, \qquad \iota_j :\ \Lambda_j \underset{N_j}{\times} T^* N_j \hookrightarrow T^* \Lambda_j$$

l'injection naturelle

$$\check{V}_j = \iota_j(\Lambda_j \underset{N_j}{\times} T^* N_j) \cap (T^* \Lambda_j|_{\Lambda_j - N_j})$$

(où $\Lambda_j - N_j$ désigne Λ_j privé de sa section nulle) et $\check{\rho}_j : \check{V}_j \to T^* N_j$ la projection naturelle.

Si Λ_j est muni des coordonnées locales (t'^j, τ''^j) et $T^*\Lambda_j$ des coordonnées $(t'^j, \pi''^j; t'^{j*}, \tau''^{j*})$ on a donc

$$(1.2.8)\qquad \begin{aligned} \rho_j:\quad & V_j=\{(t'^j, 0; \tau'^j, \tau''^j)\} \to T^* N_j \\ & (t'^j, 0; \tau'^j, \tau''^j) \to (t'^j, \tau'^j) \\ \check{\rho}_j:\quad & \check{V}_j=\{(t'^j, \tau''^j; t'^{j*}, 0); \tau''^j \neq 0\} \to T^* N_j \\ & (t'^j, \tau''^j; t'^{j*}, 0) \to (t'^j, t'^{j*}). \end{aligned}$$

Si I est une partie de $\{l+1, \ldots, p\}$ on note Λ_I la famille de lagrangiennes de $T^*M_0, \ldots, T^*M_p$ définie par $\Lambda_I=(\tilde{\Lambda}_0, \ldots, \tilde{\Lambda}_p)$ où $\tilde{\Lambda}_j=\Lambda_j$ si $j\in\{0, \ldots, l\}\cup I$, $\tilde{\Lambda}_j=T^*_{M_j}M_j$ sinon. De même on pose $V_I=T^*\Lambda_0\times\ldots\times T^*\Lambda_l\times\tilde{V}_{l+1}\times\ldots\times\tilde{V}_p$ où $\tilde{V}_j=V_j$ si $j\notin I$ et $\tilde{V}_j=\check{V}_j$ si $j\in I$. Enfin $\rho_I: V_I\to T^*\Lambda_0\times\ldots\times T^*\Lambda_l\times T^*N_{l+1}\times\ldots\times T^*N_p$ désigne l'application égale à l'identité sur les $l+1$ premiers facteurs et à ρ_j (resp. $\check{\rho}_j$) sur le j-ième lorsque $j\in\{l+1, \ldots, p\}\setminus I$ (resp. $j\in I$).

Le théorème de majoration s'énonce alors :

THÉORÈME 1.2.2. — *Soit u une distribution vérifiant localement l'hypothèse de régularité* (1.2.3). *On a*

$$(1.2.9)\qquad \begin{aligned} S\,S^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)}(u|_N) &\subset \bigcup_{I\subset\{l+1, \ldots, p\}} \rho_I(S\,S^{2,1}_{\Lambda_I}(u)\cap V_I) \\ W\,F^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)}(u|_N) &\subset \bigcup_{I\subset\{l+1, \ldots, p\}} \rho_I(W\,F^{2,1}_{\Lambda_I}(u)\cap V_I). \end{aligned}$$

Remarque. — Lorsque $l=0$ (resp. et $\Lambda_0=T^*_{M_0}M_0$) on obtient une majoration du deuxième micro-support à croissance (resp. du micro-support) de $u|_N$ le long de Λ_0.

Démonstration. — Prouvons la deuxième inclusion (1.2.9). Soit

$$((q_0, q_0^*), \ldots, (q_l, q_l^*), (t_0'^{l+1}, t_0'^{l+1*}), \ldots, (t_0'^p, t_0'^{p*}))$$

un point de

$$T^*\Lambda_0\times\ldots\times T^*\Lambda_l\times T^*N_{l+1}\times\ldots\times T^*N_p$$

qui n'est pas dans le membre de droite de (1.2.9). Pour toute partie $I\subset\{l+1, \ldots, p\}$ et tous τ_j'' avec $|\tau_j''|=1$ si $j\in I$ [*cf.* proposition 1.1.5 (ii)] le point :

$$((q_0, q_0^*), \ldots, (q_l, q_l^*), (t_0'^j, 0; t_0'^{j*}, \tau''^j)_{j\notin I}, (t_0'^j, \tau''^j; t_0'^{j*}, 0)_{j\in I})$$

n'est pas dans $W\,F^{2,1}_{\Lambda_I}(u)$. Posons :

$$(1.2.10)\qquad T^2_{\Lambda_I}u(y, \lambda', \mu^l, (\mu_j)_{j\in I})=$$
$$=\int e^{\sum_0^l i(\lambda'/\mu_j^2)\,g_j(y^i, x^j, \mu_j)-\sum_0^l \lambda'(x^j-t^j)^2/2\mu_j^2-\sum_{\substack{j\geq l+1\\ j\notin I}}(\lambda'/2)(y^j-t^j)^2-\sum_{j\in I}(\lambda'/2)(y'^j-t'^j)^2}$$
$$\times e^{-(\lambda'/2)\sum_{j\in I}(1+\mu_j^4)/\mu_j^4\,(t''^j)^2+i\lambda'\sum_{j\in I}y''^j\,.\,t''^j/\mu_j^2}\,\theta(t)\,u(t)\,dt\,dx^0\ldots dx^l.$$

l'intégration en $x^0, \ldots, x^l$ se faisant sur un produit de bons contours $\Sigma_0 \times \ldots \times \Sigma_l$.

C'est une F.B.I. simultanée de deuxième espèce le long de Λ_{I} [*cf.* (1.1.23) avec $h_j = 1 - \mu_j^2 + \mu_j^4$, $j \in \mathrm{I}$]. Définissons une suite $\alpha_{p-l} > \ldots > \alpha_0$ d'éléments de $]0, 1]$ par la récurrence descendante suivante : supposons $\alpha_{p-l} > \ldots > \alpha_{k+1}$ déjà définis. Par hypothèse il existe alors pour tout $\mathrm{I} \subset \{l+1, \ldots, p\}$ avec $|\mathrm{I}| = k$ un voisinage borné W_{I} de

$$(1.2.11) \quad \{(\mathrm{Y}_0^l, (t'_0 - i t_0'^{j*}, \tau''_j)_{j \in \mathrm{I}}, (t_0'^j - i t_0'^{j*}, i \tau''_j)_{j \notin \mathrm{I}}); \tau''_j \in \mathbb{R}^{n_j - n'_j},$$
$$|\tau''_j| = 1 \text{ si } j \in \mathrm{I}, |\tau''_j| \leqq 2 \alpha_{k+1}^{-2} \text{ si } j \notin \mathrm{I}\}$$

un réel $\alpha_k \in]0, \alpha_{k+1}[$ et $\mathrm{M}_{\mathrm{I}} \in \mathbb{R}^k$ tels que $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\exists \mathrm{C}_{\mathrm{N}} > 0$ avec

$$(1.2.12) \quad |\mathrm{T}^2_{\Lambda_{\mathrm{I}}} u(y, \lambda', \mu^l, (\mu_j)_{j \in \mathrm{I}})| + \sum_{m=l+1}^{p} |\mathrm{T}^2_{\Lambda_{\mathrm{I}}}(t^m u)(y, \lambda', \mu^l, (\mu_j)_{j \in \mathrm{I}})|$$
$$\leqq \mathrm{C}_{\mathrm{N}} \mu^{-\mathrm{M}_{\mathrm{I}}} \lambda'^{-\mathrm{N}} e^{\sum_0^l \Psi_j(y^j, \mu_j) + (\lambda'/2) \sum_{j \in \mathrm{I}} [(\mathrm{Im}\, y^j)^2 + (\mathrm{Im}\, y''^j)^2/(1+\mu_j^4)] + (\lambda'/2) \sum_{j \notin \mathrm{I}} (\mathrm{Im}\, y^j)^2}$$

pour tous $y \in \mathrm{W}_{\mathrm{I}}$, $\lambda' \geqq 1$, $\mu_j \in]0, \alpha_k]$, $j \in \{0, \ldots, l\} \cup \mathrm{I}$ (les Ψ_j désignant comme au paragraphe précédent les valeurs critiques de $-\mathrm{Im}\, g_j(y^j, x^j, \mu_j) + 1/2 (\mathrm{Im}\, x^j)^2$ divisées par μ_j^2). On pose $\beta_k = 1/\alpha_k^2$, $\mathrm{k} = 1, \ldots, p-l$ et

$$(1.2.13) \qquad f(t) = e^{-(\lambda'/2) \sum_{l+1}^{p} (t''^j)^2} \theta(t) u(t).$$

On remarquera que si u vérifie localement l'hypothèse (1.2.3), il en est de même pour f avec

$$(1.2.14) \quad \left\| |\hat{f}(\tau)| \left(1 + \sum_0^l |\tau^j| + \sum_{l+1}^{p} |\tau'^j|\right)^{-\nu} \prod_{l+1}^{p} (1 + |\tau''^j|)^{\delta} \right\|_{\mathrm{L}^1(d\tau''^{l+1} \ldots d\tau''^p)} \leqq \mathrm{C} \lambda'^{(p-l)\delta/2}$$

(C indépendante de λ'). On a en outre $f|_{\mathrm{N}} = \theta u|_{\mathrm{N}}$.

Pour prouver le théorème, il nous faut donc déduire des conditions (1.2.12) que $T^2_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)}(f|_{\mathrm{N}})(\mathrm{Y}^l, y'^{l+1}, \ldots, y'^p, \lambda', \mu^l)$ est à décroissance rapide pour Y^l voisin de Y_0^l et y'^j voisin de $t_0'^j - i t_0'^{j*}$ $j = l+1, \ldots, p$. D'après (1.2.6) il nous suffit donc de montrer que sous les hypothèses précédentes chacun des termes de la somme

$$(1.2.15) \quad \sum_{\mathrm{I} \subset \{l+1, \ldots, p\}} \int_{\mathrm{C}_{\mathrm{I}}} ds_{l+1} \ldots ds_p \int_{|y''^{l+1}|=1} dy''^{l+1} \ldots \int_{|y''^p|=1} dy''^p$$
$$\times |\mathrm{S}^2 f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p)|$$

où pour tout I

$$(1.2.16) \qquad \mathrm{C}_{\mathrm{I}} = \{(s_{l+1}, \ldots, s_p); s_j \in]\beta_{|\mathrm{I}|}, +\infty[\text{ si } j \in \mathrm{I} \text{ et } s_j \in]0, \beta_{|\mathrm{I}|+1}[\text{ si } j \notin \mathrm{I}\}$$

est à décroissance rapide par rapport au poids

$$\Psi = (\Psi_0, \ldots, \Psi_l, 1/2 (\mathrm{Im}\, y'^{l+1})^2, \ldots, 1/2 (\mathrm{Im}\, y'^p)^2).$$

LEMME 1.2.3. — *Soit* $\gamma \in \mathbb{R}_+$ *et posons* $M=\sum_{l+1}^{p} n'_j/2+\sum_{0}^{l}(n_j/2)+\nu+(p-l)(\delta/2)-\delta$. *Il existe* V *voisinage de* $(Y_0^l, t_0'^{l+1}-i t_0'^{l+1*}, \ldots, t_0'^p-i t_0'^{p*})$ *et* $\alpha \in]0, 1]$ *tels que pour tout entier* $N \geqq 1$, *il existe* $C_N>0$ *avec*

$$(1.2.17)\quad \int_0^{+\infty} ds_{l+1} \ldots \int_0^{+\infty} ds_{p-1} \int_{\lambda'^{\gamma N}}^{+\infty} ds_p \int_{|y''^{l+1}|=1} dy''^{l+1} \ldots$$

$$\ldots \int_{|y''^p|=1} dy''^p \,|S^2 f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p)|$$

$$\leqq C_N \lambda'^{M-\delta\gamma N} \prod_0^l \mu_j^{-n_j-2\nu} e^{\lambda' \sum_0^l \Psi_j(y^j, \mu_j)+(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p (\mathrm{Im}\, y'^j)^2}$$

pour $(y^0, \ldots, y^l, y'^{l+1}, \ldots, y'^p) \in V$ *et* $\mu_j \in]0, \alpha[$ $j=0, \ldots, l$.

Démonstration. — L'intégrant de (1.2.1) se majore en module par

$$(1.2.18)\quad e^{\lambda' \sum_0^l \Psi_j(y^j, \mu_j)+(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p (\mathrm{Im}\, y'^j/2)-(\lambda'/2)\sum_0^l (\tau^j \mu_j^2/\lambda'+\mathrm{Im}\, x^j)^2/\mu_j^2}$$

$$e^{-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p (\tau'^j/\lambda'+\mathrm{Im}\, y'^j)^2-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p (1-|\tau''^j|/\lambda' s_j)^2}$$

$$\times \prod_{l+1}^p \frac{|\tau''^j|\,.\,|y''^j|}{\lambda' s_j^2} |\hat f(\tau_0, \ldots, \tau_p)|$$

On a

$$l+1 \leqq j<p \quad \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda'/2)(1-|\tau''^j|/\lambda' s_j)^2} \frac{|\tau''^j|}{\lambda' s_j^2} ds_j \leqq C$$

(uniformément en τ''^j, λ')

$$j=p \quad \int_{\lambda'^{\gamma N}}^{+\infty} e^{-(\lambda'/2)(1-|\tau''^p|/\lambda' s_p)^2} \frac{|\tau''^p|}{\lambda' s_p^2} ds_p$$

$$\leqq \lambda'^{-(\gamma N+1)\delta} |\tau''^p|^\delta \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda'/2)(1-1/s_p)^2} \frac{ds_p}{s_p^{2-\delta}} \leqq C \lambda'^{-\delta(\gamma N+1)} |\tau''^p|^\delta.$$

Compte tenu de ces expressions, de (1.2.14) et de (1.2.16) le membre de gauche de (1.2.17) se majore par

$$(1.2.19)\quad C\lambda'^{\sum_0^l (n_j/2)+\sum_{l+1}^p (n'_j/2)+\nu+(p-l)(\delta/2)-\delta(\gamma N+1)} \prod_0^l \mu^{-n_j-2\nu} \times e^{\lambda' \sum_0^l \Psi_j(y^j, \mu_j)+(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p (\mathrm{Im}\, y'^j)^2}$$

d'où le lemme.

On fixe désormais γ tel que

$$\gamma\left(|I|+\frac{1}{2}|M_I|+\sum_{j\in I}(n_j-n'_j)\right)<\frac{1}{2}$$

pour tout $I\subset\{l+1, \ldots, p\}$ [*cf.* (1.2.12)]. D'après le lemme, il suffit pour prouver le théorème de majorer les intégrales obtenues en remplaçant dans (1.2.15) le domaine C_I par

$$(1.2.20)\quad C'_I=\{(s_{l+1}, \ldots, s_p);\ s_j\in]\beta_{|I|}, \lambda'^{\gamma N}[\text{ si } j\in I \text{ et } s_j\in]0, \beta_{|I|+1}] \text{ si } j\notin I\}.$$

Pour ce faire, on va exprimer chacune d'entre elles à l'aide d'un opérateur agissant sur $T^2_{\Lambda_I}u(y, \lambda', \mu^l, (\mu_j)_{j\in I})$, où les μ_j sont reliés aux s_j par $s_j=\mu_j^{-2}$, $j\in I$, puis utiliser (1.2.12). Exprimons d'abord S^2f en fonction de f :

$$(1.2.21)\quad S^2f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p)=(2\pi\lambda')^{\sum_0^p (n_j/2)}\prod_0^l \mu_j^{-n_j}\times\prod_{l+1}^p s_j^{n_j-n'_j}$$
$$\times\prod_{l+1}^p e^{-(\lambda'/2)(y''^j)^2}\left(\frac{y''^j}{\lambda' s_j}\cdot\frac{\partial}{\partial y''^j}\right)e^{(\lambda'/2)(y''^j)^2}\tilde{S}^2f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p),$$

avec

$$(1.2.22)\quad \tilde{S}^2f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p)=\int e^{G(Y^l, X^l, \lambda', \mu^l)-\sum_0^l(\lambda'/2)\mu_j^2(x^j-t^j)^2-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p(y'^j-t'^j)^2}$$
$$\times e^{(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p s_j^2(t''^j)^2+i\sum_{l+1}^p\lambda' s_j t''^j\cdot y''^j}f(t_0, \ldots, t_p)\,dt\,dx_0\ldots dx_l$$

D'après (1.2.13), on a

$$(1.2.23)\quad \tilde{S}^2f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p)$$
$$=\tilde{S}^2u\left(y^0, \ldots, y^l, \left(y'^{l+1}, \frac{s_{l+1}}{\sqrt{1+s_{l+1}^2}}y''^{l+1}\right), \ldots, \left(y'^p, \frac{s_p}{\sqrt{1+s_p^2}}y''^p\right);\right.$$
$$\left.\lambda', \mu^l, \sqrt{1+s_{l+1}^2}, \ldots, \sqrt{1+s_p^2}\right).$$

On fixe $I\subset\{l+1, \ldots, p\}$ et on veut estimer $S^2f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p)$ pour $(y^0, \ldots, y^l)$ voisin de Y_0^l, y'^j voisin de $t_0'^{j*}$, $j=l+1, \ldots, p$, y''^j dans la sphère réelle et $(s_{l+1}, \ldots, s_p)$ dans C'_I. On peut supposer $I=\{h+1, \ldots, p\}$.

Montrons alors :

Lemme 1.2.4. — *Soit* $\tilde{s}=(s_{l+1}, \ldots, s_h)\in\mathbb{R}_+^{h-l}$. *Si* $v(z''^{l+1}, \ldots, z''^h, \lambda')$ *est fonction holomorphe de* $(z''^{l+1}, \ldots, z''^h)$ *telle qu'il existe* $D\in\mathbb{R}$ *avec*

$$\sup_{\lambda'\geqq 1,\, z''\in K}\lambda'^{-D}\left|v(z''^{l+1}, \ldots, z''^h, \lambda')e^{-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^h(\operatorname{Im} z''^j)^2}\right|<+\infty$$

pour tout compact K, *posons pour* y''^j *réel*, $|y''^j|=1$:

$$(1.2.24)\quad (\mathrm{A}_{\tilde{s}} v)(y''^{l+1}, \ldots, y''^h, \lambda')$$
$$=\left(\frac{\lambda'}{2\pi}\right)^{\sum_{l+1}^{h} n''_j} \int_{\Sigma} e^{-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^{h} s_j^2 (x''^j)^2 + i\lambda' \sum_{l+1}^{h} x''^j (s_j y''^j - z''^j)} v(z''^{l+1}, \ldots, z''^h, \lambda')\, dx''\, dz''$$

où n''_j *est le nombre de variables* y''^j *et où* Σ *est le contour :*

$$(1.2.25)\quad \begin{aligned} x''^j &= \sigma''^j \\ z''^j &= s_j y''^j - \frac{1+s_j^2}{2} \operatorname{Im} \sigma''^j - i \operatorname{Re} \sigma''^j \end{aligned}$$

avec $\sigma''^j \in \mathbb{C}^{n''_j}$, $|\sigma''^j| \leqq c$, $1+1 \leqq j \leqq h$.

Il existe alors une fonction $\mathrm{C}(\tilde{s})$ *continue sur* $\mathbb{R}_+^{h-l}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *telle que :*

$$(1.2.26)\quad \mathrm{A}_{\tilde{s}} \tilde{\mathrm{S}}^2 u\Big(y^0, \ldots, y^l, (y'^{l+1}, .), \ldots, (y'^h, .), \Big(y'^{h+1}, \frac{s_{h+1}}{\sqrt{1+s_{h+1}^2}} y''^{h+1}\Big), \ldots,$$
$$\Big(y'^p, \frac{s_p}{\sqrt{1+s_p^2}} y''^p\Big), \lambda', \mu^l, 1, \ldots, 1, \sqrt{1+s_{h+1}^2}, \ldots, \sqrt{1+s_p^2}\Big)(y''^{l+1}, \ldots, y''^h, \lambda)$$
$$= \mathrm{C}(\tilde{s})\, \tilde{\mathrm{S}}^2 f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p).$$

modulo un reste à décroissance exponentielle en λ' *uniformément en* $\tilde{s}$.

Démonstration. — Le lemme est essentiellement une version du théorème de changement de F.B.I. Pour l'obtenir, il suffit d'exprimer dans (1.2.24) $v=\tilde{\mathrm{S}}^2 u$ à partir de u et de réaliser la déformation de contour :

$$(1.2.27)\quad \begin{aligned} x''^j &= \nu t''^j + \sigma''^j \\ z''^j &= s_j y''^j - \frac{1+s_j^2}{2} \operatorname{Im} \sigma''^j - i \operatorname{Re} \sigma''^j + i \nu s_j^2 t''^j \end{aligned}$$

avec $|\sigma''^j| \leqq c$ pour $\nu \in [0, 1]$. La contribution du bord du contour d'intégration est à décroissance exponentielle par rapport à λ', uniformément en le paramètre $\tilde{s}$. Lorsque $\nu=1$ on obtient la phase donnant l'expression (1.2.22), (1.2.23) de $\tilde{\mathrm{S}}^2 f$.

Remarque. — La contribution du bord de la déformation (1.2.27) est négligeable uniformément en $\tilde{s}$ grâce à la présence des $\sqrt{1+s_j^2}$ dans le membre de droite de (1.2.23). C'est pour obtenir cette uniformité que l'on a appliqué le lemme 1.2.1 à (1.2.13) plutôt qu'à $f=u$.

Fin de la preuve du théorème. — On a d'après (1.2.10) et (1.2.22) :

$$(1.2.28)\quad \tilde{S}^2 u\left(y^0, \ldots, y^l, (y'^{l+1}, z''^{l+1}), \ldots, (y'^h, z''^h), \left(y'^{h+1}, \frac{s_h}{\sqrt{1+s_h^2}} y''^h\right), \ldots,\right.$$
$$\left.\left(y'^p, \frac{s_p}{\sqrt{1+s_p^2}} y''^p\right), \lambda', \mu^l, 1, \ldots, 1, \sqrt{1+s_{h+1}^2}, \ldots, \sqrt{1+s_p^2}\right)$$
$$= e^{-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^{h}(z''^j)^2}\, T^2_{\Lambda_I} u(y^0, \ldots, y^l, (y'^{l+1}, i z''^{l+1}), \ldots, (y'^h, i z''^h), y^{h+1}, \ldots,$$
$$y^p, \lambda', \mu^l, \mu_{h+1}, \ldots, \mu_p)$$

quitte à poser $\mu_j^2 = s_j^{-1}$ pour $j = h+1, \ldots, p$.

Considérons l'intégrale

$$(1.2.29)\quad \int_{C'_I} ds_{l+1} \ldots ds_p \int_{|y''^{l+1}|=1} dy''^{l+1} \times \ldots$$
$$\times \int_{|y''^p|=1} dy''^p \,|\, S^2 f(y, \lambda', \mu^l, s_{l+1}, \ldots, s_p)\,|.$$

Comme l'intégrant s'estime à partir de $\tilde{S}^2 f$ et des $\tilde{S}^2(t^j f)$, $j = l+1, \ldots, p$, il suffit pour obtenir la décroissance rapide de (1.2.29) d'estimer le membre de gauche de (1.2.26). Comme $(s_{l+1}, \ldots, s_p) \in C'_I$, l'argument de $T^2_{\Lambda_I} u$ dans (1.2.28) reste dans le domaine sur lequel (1.2.12) est valide lorsque z''^j décrit le contour (1.2.25) avec c assez petit, que $(y^0, \ldots, y^l)$ est assez voisin de Y_0^l, et y'^{j+1} est assez voisin de $(t_0'^j - i t_0'^{j*})$, $j = l+1, \ldots, p$ (*cf.* définition des α_k). Alors, par choix de γ, (1.2.26) est à décroissance rapide, en $\lambda'^{-N/2}$ donc (1.2.29) également.

Compte tenu de (1.2.15), du lemme 1.2.3 et de (1.2.20) cela achève la preuve du théorème.

Dans le cas du $SS^{2,1}$ la preuve est la même quitte à couper les intégrales à $e^{\gamma\lambda'}$ au lieu de $\lambda' \gamma^N$ (*cf.* [11]).

2. Majorations géométriques de deuxième micro-supports

2.1. Cônes normaux simultanés. — Nous présentons dans ce paragraphe une définition de « cône normal simultané » qui généralise les cônes normaux de Whitney ([7], [8]) et qui nous permettra au paragraphe suivant d'écrire des résultats de majoration géométrique de deuxième micro-supports simultanés, analogues à ceux de [5] pour le deuxième micro-support usuel.

Soient $M_0, \ldots, M_p$, $p+1$ variétés analytiques réelles (C^2 suffit en fait) et donnons-nous un fermé conique S de $T^* M_0 \times \ldots \times T^* M_p$ et pour tout $j = 0, \ldots, p$ un fermé Λ_j de $T^* M_j$. Posons $M = M_0 \times \ldots \times M_p$, $T^* M = T^* M_0 \times \ldots \times T^* M_p$. Soit pour $j = 0, \ldots, p$, x^j un système de coordonnées locales sur M_j au voisinage d'un point

$x_0^j \in M_j$ et (x^j, ξ^j) les coordonnées associées sur $T^* M_j$. On notera $x=(x^0, \ldots, x^p)$, $\xi=(\xi^0, \ldots, \xi^p)$ et $(x, \xi; X, \Xi)$ les coordonnées associées sur $T(T^* M)$.

DÉFINITION 2.1.1. — On appelle cône normal simultané à S le long de $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$ l'ensemble

$$C(S; \Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)=\{(x^0, \ldots, x^p, \xi^0, \ldots, \xi^p; X^0, \ldots, X^p, \Xi^0, \ldots, \Xi^p)\in T(T^* M)$$

tels qu'il existe des suites

$$\left.\begin{array}{r}(x_m^j, \xi_m^j)\in T^* M_j,\ j=0, \ldots, p\\ (x_m'^j, \xi_m'^j)\in \Lambda_j,\ j=0, \ldots, p\end{array}\right\}\text{convergeant vers}\,(x^j, \xi^j)$$
$$c_m^j \in \mathbb{R}_+^*, j=0, \ldots, p, c_m^j \to +\infty, j=0, \ldots, p$$

vérifiant :

$$(x_m^0, \ldots, x_m^p; c_m^0 \xi_m^0, \ldots, c_m^p \xi_m^p)\in S$$
$$c_m^j(x_m^j - x_m'^j)\to X^j, c_m^j(\xi_m^j - \xi_m'^j)\to \Xi^j, j=0, \ldots, p\}.$$

L'ensemble $C(S; \Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$ est un cône intrinsèquement défini comme partie de $T(T^* M_0 \times \ldots \times T^* M_p)$ (*i.e.* est invariant par les changements de coordonnées sur cet ensemble issus d'un produit de changements de coordonnées sur $M_0, M_1, \ldots, M_p$).

Le cône $C(S; \Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$ est égal au produit des cônes normaux de Whitney $C(S_0, \Lambda_0)\times \ldots \times C(S_p, \Lambda_p)$ lorsque S est un produit $S=S_0 \times \ldots \times S_p$ avec S_j conique pour tout j. Dans tous les cas, le cône normal de Whitney $C(S; \Lambda_0 \times \ldots \times \Lambda_p)$ est inclus dans $C(S; \Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$ avec une inclusion en général stricte.

On supposera désormais que les Λ_j sont des sous-variétés lisses de $T^* M_j, j=0, \ldots, p$. Le cône $C(S; \Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$ est alors invariant par $T(\Lambda_0 \times \ldots \times \Lambda_p)$ et on désignera par $C_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(S)$ son image dans le fibré normal $T_{\Lambda_0}(T^* M_0)\times \ldots \times T_{\Lambda_p}(T^* M_p)$.

Lorsque les Λ_j sont lagrangiennes dans $T^* M$, on notera également $C_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(S)$ l'image de l'ensemble précédent par l'isomorphisme hamiltonien du fibré normal sur le fibré cotangent $T^* \Lambda_0 \times \ldots \times T^* \Lambda_p$.

Choisissons pour tout $j=0, \ldots, p$ une transformation canonique $\chi_j : T^* M_j \to T^* M_j$ telle que $\chi_j(\Lambda_j)=M_j$ section nulle de $T^* M_j$. Notons $\tilde{\chi}_j : T^* \Lambda_j \to T^* M$ l'application induite par χ_j et $\tilde{\chi}=\tilde{\chi}_0 \times \ldots \times \tilde{\chi}_p : T^* \Lambda_0 \times \ldots \times T^* \Lambda_p \to T^* M_0 \times \ldots \times T^* M_p$. Il résulte de la définition :

LEMME 2.1.2.

$$\tilde{\chi}\, C_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(S)=\{(y^0, \ldots, y^p; \eta^0, \ldots, \eta^p)\in T^* M_0 \times \ldots \times T^* M_p;$$

il existe des suites

$$(z_m^0, \ldots, z_m^p; \zeta_m^0, \ldots, \zeta_m^p)\in S;$$
$$u_m^j \in \mathbb{R}_+^*, u_m^j \to 0, j=0, \ldots, p$$

telles que si on pose $(y_m^j, \eta_m^j)=\chi_j(z_m^j, u_m^j\zeta_m^j)$ *on ait :*

$$y_m^j \to y^j, \qquad \eta_m^j/u_m^j \to \eta^j, j=0, \ldots, p\}.$$

Remarque. — Si $p=0$ le cône $C_{\Lambda_0}(S)$ de la définition est le cône normal de Whitney [8]. En particulier, d'après [8], th. 10.5.2 si S est lagrangien sous-analytique dans T^*M_0, $C_{\Lambda_0}(S)$ est isotrope. Lorsque $p>0$ cette propriété ne subsiste pas comme le montre l'exemple suivant :

Exemple

$$\Lambda_0=\Lambda_1=T^*_{\{0\}}\mathbb{R}, \qquad S=T^*_{\{x_0=x_1\}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}).$$

On a :

$$C_{(\Lambda_0, \Lambda_1)}(S)=\{(\xi_0, \xi_1; \xi_0^*, \xi_1^*); \xi_0\xi_0^*+\xi_1\xi_1^*=0\}.$$

Dans la section suivante, on obtiendra des majorations géométriques de deuxièmes micro-supports simultanés le long de familles de lagrangiennes $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$ par des ensembles de la forme $C_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(S)$. Lorsqu'on appliquera ces résultats pour majorer le spectre singulier ou le deuxième micro-support le long d'une seule lagrangienne de la trace d'une distribution sur une sous-variété, on ne fera intervenir d'après le théorème 1.2.2 que l'image de $C_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(S)$ par une projection convenable. On verra que bien que $C_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(S)$ ne soit pas isotrope, lorsque S l'est, cette projection elle le sera.

Soit pour $j=1, \ldots, p$, N_j une sous-variété lisse de M_j qui dans un système de coordonnées locales (x'^j, x''^j) sur M_j est d'équation $x''^j=0$. Soient Λ_0 lagrangienne conique de T^*M_0 et pour $j=1, \ldots, p$, $\Lambda_j=T^*_{N_j}M_j$ muni des coordonnées (x'^j, ξ''^j). On munit $T^*\Lambda_j$ des coordonnées naturelles $(x'^j, \xi''^j; x'^{j*}, \xi''^{j*})$. Soit $\chi : T^*M_0 \to T^*M_0$ une transformation canonique telle que $\chi(\Lambda_0)=M_0$ section nulle de T^*M_0 (microlocalement près de $q_0 \in T^*M_0 \setminus M_0$). On note $\tilde{\chi} : T^*\Lambda_0 \to T^*M_0$ l'application induite. Soient $V \subset T^*\Lambda_1 \times \ldots \times T^*\Lambda_p$:

$$(2.1.1) \quad V=\{(x'^1, \ldots, x'^p, \xi''^1, \ldots, \xi''^p; x'^{1*}, \ldots, x'^{p*}, \xi''^{1*}, \ldots, \xi''^{p*}); \\ \xi''^{j*}=0, |\xi''^j|=1, j=1, \ldots, p\}.$$

$$\rho : \quad T^*\Lambda_0 \times V \to T^*\Lambda_0 \times T^*N_1 \times \ldots \times T^*N_p$$

$$(2.1.2) \qquad ((q, q^*), (x'^1, \ldots, x'^p, \xi''^1, \ldots, \xi''^p; x'^{1*}, \ldots, x'^{p*}, 0, \ldots, 0)) \\ \to ((q, q^*), (x'^1, x'^{1*}), \ldots, (x'^p, x'^{p*})).$$

On a alors :

PROPOSITION 2.1.3. — *Soit* S *un fermé conique de* $T^*M_0 \times \ldots \times T^*M_p$. *On a :*

$$(\tilde{\chi}\times \mathrm{Id})(\rho(C_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(S) \cap T^*\Lambda_0 \times V)) \\ =\{((q, q^*), (x'^1, \ldots, x'^p; \xi'^1, \ldots, \xi'^p)) \in T^*\Lambda_0 \times T^*N_1 \times \ldots \times T^*N_p;$$

il existe des suites $(z_m^0, x_m^1, \dots, x_m^p; \zeta_m^0, \xi_m^1, \dots, \xi_m^p) \in \mathrm{S}$, $u_m \in \mathbb{R}_+^*$, $u_m \to 0$ *telles que si on pose* $(x_m^0, \xi_m^0) = \chi(z_m^0, u_m \zeta_m^0)$ *on ait :*

$$(x_m^0, \xi_m^0/u_m) \to (q, q^*)$$
$$(x_m'^j, \xi_m'^j) \to (x'^j, \xi'^j), j=1, \dots, p$$
$$|x_m''^j|\,|\xi_m''^j| \to 0, |\xi_m''^j| \to +\infty, j=1, \dots, p\}.$$

Démonstration. — Soit pour $j=1, \dots, p$, χ_j la transformation canonique

$$\chi_j(x'^j, x''^j; \xi'^j, \xi''^j) = (x'^j, \xi''^j; \xi'^j, -x''^j).$$

Si $((q, q^*), (x'^1, \dots, x'^p; \xi'^1, \dots, \xi'^p)) \in \tilde{\chi} \times \mathrm{Id}(\rho(\mathrm{C}_{(\Lambda_0, \dots, \Lambda_p)}(\mathrm{S}) \cap \mathrm{T}^* \Lambda_0 \times \mathrm{V}))$ il existe d'après le lemme 2.1.2 $\xi''^1, \dots, \xi''^p$ de norme 1, une suite $(z_m^0, x_m^1, \dots, x_m^p; \zeta_m^0, \xi_m^1, \dots, \xi_m^p) \in \mathrm{S}$ et des suites $u_m^j \in \mathbb{R}_+^*$, $u_m^j \to 0$, $j=0, \dots, p$ avec si $(y_m^0, \eta_m^0) = \chi(z_m^0, u_m^0 \zeta_m^0)$:

$$(2.1.3) \qquad \begin{cases} y_m^0 \to q, \qquad \eta_m^0/u_m^0 \to q^* \\ (x_m'^j, \xi_m''^j u_m^j; \xi_m'^j, -x_m''^j/u_m^j) \to (x'^j, \xi''^j; \xi'^j, 0) \end{cases}$$

d'où $|x_m''^j|\,|\xi_m''^j| \to 0$, $|\xi_m''^j| \to +\infty$ pour $j=1, \dots, p$.

Réciproquement ces conditions entraînent celles du lemme 2.1.2.

Supposons $\Lambda_0 = \mathrm{T}_{\mathrm{M}_0}^* \mathrm{M}_0$ et pour $\mathrm{I} \subset \{1, \dots, p\}$ soient Λ_I et V_I les variétés définies avant l'énoncé du théorème 1.2.2 (avec $l=0$). Soit S un fermé sous-analytique conique de $\mathrm{T}^* \mathrm{M}_0 \times \dots \times \mathrm{T}^* \mathrm{M}_p$. On a (*cf.* appendice corollaire A.5) :

PROPOSITION 2.1.4. — *L'ensemble* $\bigcup_{\mathrm{I}} \rho_\mathrm{I}(\mathrm{C}_{\Lambda_\mathrm{I}}(\mathrm{S}) \cap \mathrm{V}_\mathrm{I})$ *est un fermé sous-analytique isotrope de* $\mathrm{T}^* \mathrm{M}_0 \times \mathrm{T}^* \mathrm{N}_1 \times \dots \times \mathrm{T}^* \mathrm{N}_p$ *égal à*

$$\{(x^0, x'^1, \dots, x'^p; \xi^0, \xi'^1, \dots, \xi'^p) \in \mathrm{T}^* \mathrm{M}_0 \times \mathrm{T}^* \mathrm{N}_1 \times \dots \times \mathrm{T}^* \mathrm{N}_p$$

tels qu'il existe une suite

$$(2.1.4) \quad (x_m^0, x_m^1, \dots, x_m^p; \xi_m^0, \xi_m^1, \dots, \xi_m^p) \in \mathrm{S}$$

avec :

$$(x_m^0, \xi_m^0) \to (x^0, \xi^0), (x_m'^j, \xi_m'^j) \to (x'^j, \xi'^j), j=1, \dots, p$$
$$x_m''^j \to 0, |x_m''^j|\,|\xi_m''^j| \to 0 \text{ si } j=1, \dots, p\}.$$

Concluons ce paragraphe par deux exemples qui nous seront utiles dans la partie 3. Prenons $\mathrm{M}_0 = \mathbb{C}^n$, $\mathrm{M}_1 = \dots = \mathrm{M}_p = \mathbb{C}^{2n}$, $\mathrm{N}_1 = \dots = \mathrm{N}_p = \mathbb{C}^n$ sous-variété d'équation $x''=0$ de $\mathbb{C}^{2n}$ muni des coordonnées (x', x''). Soient $\mathrm{F}_j \subset \mathrm{T}^* \mathrm{M}_j$, $j=1, \dots, p$ des parties coniques données et posons :

$$(2.1.5) \quad \mathrm{S} = \{(x', (x', x''^1), \dots, (x', x''^p);$$
$$\theta'^1 + \dots + \theta'^p, (-\theta'^1 + \theta''^1, \theta''^1), \dots, (-\theta'^p + \theta''^p, \theta''^p))$$
$$\in \mathrm{T}^* \mathrm{M}_0 \times \dots \times \mathrm{T}^* \mathrm{M}_p \text{ avec } (x' + x''^j, \theta''^j) \in \mathrm{F}_j, j=1, \dots, p\}.$$

Il résulte alors de la proposition 2.1.4 que l'ensemble

$$(2.1.6)\qquad \{(x', \xi')\in T^* M_0;\ (x', \ldots, x'; \xi', 0, \ldots, 0)\in \cup\, \rho_I(C_{\Lambda_I}(S)\cap V_I)\}$$

est égal à l'ensemble

$$\hat{+}_1^p\, F_j = \{(x', \xi')\in T^* M_0;\ \text{il existe des suites}$$

$$(x'^j_m, \xi'^j_m)\in F_j,\ j=1, \ldots, p,$$

une suite $x'^0_m \in M_0 = \mathbb{C}^n$ avec

$$x'^j_m \to x',\ j=0, \ldots, p,\ \xi'^1_m + \ldots + \xi'^p_m \to \xi',\ |x'^j_m - x'^0_m|\,|\xi'^j_m| \to 0,\ j=1, \ldots, p\}.$$

généralisation naturelle du $F_1 \hat{+} F_2$ défini par Kashiwara-Schapira dans [8].

Prenons maintenant pour N_j la diagonale de $M_j = \mathbb{C}^{n_j}\times\mathbb{C}^{n_j}$ d'équation $x'_j = x''_j$ et soient $S_1 \subset T^* M_0 \times T^*\mathbb{C}^{n_1}\times \ldots \times T^*\mathbb{C}^{n_p}$, $S_2 \subset T^*\mathbb{C}^{n_1}\times \ldots \times T^*\mathbb{C}^{n_p}$ deux fermés coniques donnés et

$$(2.1.8)\qquad S=\{(x'^0, (x'^1, x''^1), \ldots, (x'^p, x''^p); \xi'^0, (\xi'^1, \xi''^1), \ldots, (\xi'^p, \xi''^p));$$
$$(x'^0, \ldots, x'^p; \xi'^0, \ldots, \xi'^p)\in S_1 \text{ et } (x''^1, \ldots, x''^p; \xi''^1, \ldots, \xi''^p)\in S_2\}.$$

Alors $\cup\, \rho_I(C_{\Lambda_I}(S)\cap V_I)$ est égal à

$$\{(x'^0, x'^1, \ldots, x'^p; \xi'^0, \xi'^1, \ldots, \xi'^p)\in T^* M_0 \times T^* N_1 \times \ldots \times T^* N_p;$$
$$\exists \text{ des suites } (x'^0_m, \ldots, x'^p_m; \xi'^0_m, \ldots, \xi'^p_m)\in S_1$$

avec

$$(2.1.9)\qquad (x''^1_m, \ldots, x''^p_m; \xi''^1_m, \ldots, \xi''^p_m)\in S_2$$
$$(x'^0_m, \xi'^0_m)\to(x'^0, \xi'^0)$$
$$\xi'^j_m + \xi''^j_m \to \xi'^j,\ x'^j_m \to x'^j,\ x''^j_m \to x'^j,\ j=1, \ldots, p$$
$$|x'^j_m - x''^j_m|\,|\xi'^j_m| \to 0,\ j=1, \ldots, p\}.$$

2.2. Majoration géométrique du deuxième micro-support simultané. — On se propose dans cette section de montrer que le cône normal simultané du chapitre 2.1 est l'objet géométrique qui majore le deuxième micro-support simultané d'une distribution valeur au bord d'une fonction ramifiée, en généralisant les résultats de [5] et [13]. On utilisera les propriétés de base des fonctions et des ensembles sous-analytiques pour lesquelles on renvoie à [2] ou au paragraphe de rappels de [5] ainsi qu'à la bibliographie qui y est donnée.

Soient M_j, $j=0, \ldots, p$, un ouvert de $\mathbb{R}^{n_j}$, X_j un voisinage de M_j dans $\mathbb{C}^{n_j}$,q_j un point de $T^* M_j$, Λ_j un germe en q_j de sous-variété analytique réelle lagrangienne de $T^* M_j$ et (q_j, q_j^*) un point de $T^* \Lambda_j$ se projetant sur q_j par la projection naturelle.

On choisit un système de coordonnées analytiques réelles t^j sur M_j au voisinage du point $t_0^j=0$ image de q_j par la projection $T^* M_j \to M_j$. On note $t_0=(t_0^0, \ldots, t_0^p)=0$ et on se donne Z sous-variété analytique réelle de $M=M_0 \times \ldots \times M_p$ contenant t_0 et $Z^{\mathbb{C}}$ complexifiée de Z dans $X=X_0 \times \ldots \times X_p$.

Soit $h : Z^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe au voisinage de 0, réelle sur le réel, vérifiant $h(0)=0$. On notera :

$$(2.2.1) \quad T^*_{h^{-1}(0)} Z^{\mathbb{C}} = \{ (z, \zeta) \in T^* Z^{\mathbb{C}};\ \exists z_m \in Z^{\mathbb{C}},\ z_m \to z\ \exists \sigma_m \in \mathbb{C} \\ \text{avec } \sigma_m h(z_m) \to 0 \text{ et } \sigma_m \partial h(z_m) \to \zeta \}.$$

Pour $r>0$, on note $B_r=\{ t \in X;\ |t| \leqq r \}$ et $B_r^{\mathbb{R}}=B_r \cap M$. On suppose qu'il existe une composante connexe A de $(Z-h^{-1}(0)) \cap B_r^{\mathbb{R}}$ telle que $h|_A>0$ et $t_0 \in \bar{A}$.

On notera $\Omega_r=B_r \cap Z^{\mathbb{C}}-h^{-1}(0)$ et $\tilde{\Omega}_r$ le revêtement de Ω_r associé au groupe $\pi_1(A)$ (*i.e.* $\tilde{\Omega}_r$ est le quotient du revêtement universel de Ω_r par la relation d'équivalence consistant à identifier deux chemins γ_1, γ_2 de même origine et extrémité chaque fois que $\gamma_1 \gamma_2^{-1}$ est homotope à un lacet de A).

Si $\pi : \tilde{\Omega}_r \to \Omega_r$ est la projection naturelle, $\pi^{-1}(A)$ est alors réunion de composantes connexes isomorphes à A par π.

Soit $a : A \to \mathbb{C}$ une fonction analytique réelle vérifiant les deux conditions suivantes :

$$. \exists C>0, \quad \alpha>0 \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon>0 \text{ assez petit}$$

$$(2.2.2) \qquad \int_{A \cap \{t;\ |h(t)| \leqq \varepsilon\}} |a(t)|\, dt \leqq C \varepsilon^{\alpha}$$

(dt désignant la mesure sur Z déduite de la structure riemanienne usuelle sur $\mathbb{R}^{\sum_0^p n_j}$).

Il existe $\tilde{a} : \tilde{\Omega}_r \to \mathbb{C}$ fonction holomorphe et $\tilde{A}$ composante connexe de $\pi^{-1}(A)$ telles que :

– $\tilde{a}|_{\tilde{A}}=a \circ \pi|_{\tilde{A}}$

– $\exists N \in \mathbb{N}$ et pour tout ouvert V de $\tilde{\Omega}_r$ tel que $\sup_{\tilde{t} \in V} \mathscr{C}\mathrm{ard}(V \cap \pi^{-1}(\pi(\tilde{t})))<+\infty$ il existe $C_V>0$ avec

$$(2.2.3) \qquad |\tilde{a}(\tilde{t})| \leqq C_V |h(\pi(\tilde{t}))|^{-N}, \qquad \forall \tilde{t} \in V.$$

Notons δ_Z le courant d'intégration sur Z et pour $\beta \in \mathbb{N}^l$ où $l=\mathrm{codim}_M Z$, $\delta_Z^{(\beta)}$ la dérivée d'ordre β de δ_Z dans la direction d'un (codim Z)-uple de champs de vecteurs transverses à Z donnés. On pose :

$$(2.2.4) \qquad u(t)=a\, 1_A\, \delta_Z^{(\beta)}.$$

Si $\rho : T^* X \underset{X}{\times} Z^{\mathbb{C}} \to T^* Z^{\mathbb{C}}$ est l'application naturelle, il s'agit de prouver :

THÉORÈME 2.2.1. — *Sous les hypothèses précédentes*

$$SS^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u) \subset C_{(\Lambda_0^{\mathbb{C}}, \ldots, \Lambda_p^{\mathbb{C}})}(\rho^{-1}(T^*_{h^{-1}(0)} Z^{\mathbb{C}})) \cap T^* \Lambda_0 \times \ldots \times T^* \Lambda_p \tag{2.2.5}$$

les $\Lambda_j^{\mathbb{C}}$ *étant complexifiées de* Λ_j *pour* $j = 0, \ldots, p$.

Démonstration. — On peut toujours supposer $\beta = 0$.

La preuve est semblable à celle de la proposition 1, § III 2 de [13]. Nous allons en rappeller le principe en renvoyant à [13] pour la plupart des démonstrations. On utilisera la transformation de F.B.I. généralisée standard

$$T u(x, \lambda) = \int_{|t| \leqq r} e^{-\sum_0^p \lambda_j (x^j - t^j)^2/2} u(t)\, dt \tag{2.2.6}$$

à laquelle est associée l'identification de $T^* M_j$ à $\mathbb{C}^{n_j}$ donnée par : $(t^j; \tau^j) \to t^j - i\tau^j$. On notera χ_j^0 la transformation canonique $T^* \mathbb{C}^{n_j} \to T^* \mathbb{C}^{n_j}$ donnée par : $\chi_j^0 (t^j; \tau^j) = (t^j - i\tau^j, \tau^j)$.

Si $L_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$ (resp. $x_0^j \in \mathbb{C}^{n_j}$) est l'image de Λ_j (resp. q_j) par l'identification précédente, il existe d'après [12] une unique fonction pluri-harmonique φ_{L_j} définie au voisinage de x_0^j dans $\mathbb{C}^{n_j}$, à valeurs réelles vérifiant $\varphi_{L_j}(x^j) \leqq 1/2 (\operatorname{Im} x^j)^2$ avec égalité exactement sur L_j et un difféomorphisme holomorphe $\Gamma_j : (\mathbb{C}^{n_j}, x_0^j) \to (\mathbb{C}^{n_j}, 0)$ tel que $\Gamma_j(L_j) = \mathbb{R}^{n_j}$. Soient pour tout j, $g_j(x^j)$ une fonction holomorphe près de x_0^j vérifiant $-\operatorname{Im} g_j(x^j) = \varphi_{L_j}$, Y_j une copie de $\mathbb{C}^{n_j}$ et pour tous $y = (y^0, \ldots, y^p) \in Y_0 \times \ldots \times Y_p$, $z = (z^0, \ldots, z^p) \in \mathbb{C}^{n_0} \times \ldots \times \mathbb{C}^{n_p}$ et $t = (t^0, \ldots, t^p) \in M_0 \times \ldots \times M_p$, posons

$$G(y, z, t, \mu) = \sum_0^p \left[\frac{i}{2} (y^j - z^j)^2 - \frac{1}{\mu_j^2} g_j (\Gamma_j^{-1}(z^j)) + \frac{i}{2\mu_j^2} (\Gamma_j^{-1}(z^j) - t^j)^2 \right] \tag{2.2.7}$$

$$T^2 u(y, \lambda', \mu) = \int_{\Sigma_{0,z}} \int_{|t| \leqq r} e^{i\lambda' G(y, z, t, \mu)} u(t)\, dt\, dz \tag{2.2.8}$$

avec

$$\Sigma_{0,z} = D_R \cap \mathbb{R}^{\sum_0^p n_j}, \quad D_R = \{ z \in X ; |z| \leqq R \}. \tag{2.2.9}$$

D'après [12] et les définitions du paragraphe 1, (2.2.8) est une transformation de F.B.I. de deuxième espèce simultanée le long de $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$. Si l'on note χ_{L_j} la transformation canonique complexe

$$\begin{aligned} \chi_{L_j} : \quad & T^* \mathbb{C}^{n_j} \to T^* \mathbb{C}^{n_j} \\ & (x^j; \xi^j) \to \left(x^j; \xi^j - \frac{\partial g}{\partial x^j}(x^j) \right) \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

$\chi_{L_j} \circ \chi_j^0 (\Lambda_j) = L_j \subset X_j$ et l'identification $\tilde{\kappa}_j \circ \Delta_j : Y_j \to T^* \Lambda_j$ définie au paragraphe 1.1 est la composée :

$$(2.2.11) \qquad \begin{cases} Y_j \to T^* \mathbb{R}^{n_j} \to T^* \Lambda_j \\ y^i \to (\operatorname{Re} y^j, -\operatorname{Im} y^j) \to (\Gamma_j \circ \chi_{L_j} \circ \chi_j^0)^{-1} [(\operatorname{Re} y^j, -\operatorname{Im} y^j)] \end{cases}$$

où $\Gamma_j \circ \chi_{L_j} \circ \chi_j^0$ désigne l'application induite par $\Gamma_j \circ \chi_{L_j} \circ \chi_j^0 : \Lambda_j \to \mathbb{R}^{n_j}$ sur les fibrés cotangents (*cf.* [12], [5]). On note y_0^j l'image réciproque de (q_j, q_j^*) par (2.2.11) et $y_0 = (y_0^0, \ldots, y_0^p)$ (on a $\operatorname{Re} y_0 = 0$).

En outre $T^2 u(y, \lambda', \mu) \in H_\Psi^2$ avec $\Psi = (\Psi_0, \ldots, \Psi_p)$ et $\Psi_j(y^j, \mu_j = 0) = 1/2 (\operatorname{Im} y^j)^2$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on notera

$$(2.2.12) \qquad \begin{gathered} \Omega_{r,\varepsilon} = \left\{ t \in \Omega_r ;\ |h(t)| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ \tilde{\Omega}_{r,\varepsilon} = \pi^{-1} (\Omega_{r,\varepsilon}) \\ A_\varepsilon = \{ t \in A;\ h(t) \geqq \varepsilon \}, \qquad \tilde{A}_\varepsilon = \tilde{A} \cap \pi^{-1}(A_\varepsilon) \\ \Sigma_{0,\varepsilon} = \Sigma_{0,z} \times A_\varepsilon \subset D_R \times \Omega_{r,\varepsilon}, \qquad \tilde{\Sigma}_{0,\varepsilon} = \Sigma_{0,z} \times \tilde{A}_\varepsilon \subset D_R \times \tilde{\Omega}_{r,\varepsilon} \end{gathered}$$

et suivant [13] on écrit $T^2 u(y, \lambda', \mu) = T^2 (1_{A_\varepsilon} u)(y, \lambda', \mu) + T^2 (1_{A - A_\varepsilon} u)(y, \lambda', \mu)$.

On a

$$(2.2.13) \qquad |T^2 (1_{A - A_\varepsilon} u)(y, \lambda', \mu)| \leqq \mathrm{Cte}\, \varepsilon^\alpha e^{\lambda' \sum_0^p \Psi_j (y^j, \mu_j)}.$$

On pose

$$(2.2.14) \qquad \tilde{\Theta}(y, \mu, \varepsilon) = \inf_{\Sigma_{1,\varepsilon}} \sup_{(z,t) \in \Sigma_{1,\varepsilon}} [-\operatorname{Im} G(y, z, t, \mu)]$$

la borne inférieure étant prise sur l'extrémité $\Sigma_{1,\varepsilon}$ des homotopies C^1 $H : \Sigma_{0,\varepsilon} \times [0, 1] \to D_R \times \Omega_{r,\varepsilon}$ vérifiant

$$(2.2.15) \qquad \begin{gathered} H|_{|z| = R} = \mathrm{Id}, \qquad H|_{|t| = r} = \mathrm{Id} \\ H(z, t, \sigma) \in D_R \times h^{-1}(\varepsilon) \quad \text{si} \quad h(t) = \varepsilon \\ H(z, t, \sigma) \notin D_R \times h^{-1}(\varepsilon) \quad \text{si} \quad h(t) \neq \varepsilon \end{gathered}$$

On note $\tilde{\Sigma}_{1,\varepsilon}$ l'extrémité de l'homotopie $\tilde{H} : \Sigma_{0,\varepsilon} \times [0, 1] \to D_R \times \tilde{\Omega}_{r,\varepsilon}$ définie par les conditions : $\pi \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}|_{\sigma = 0} = \pi^{-1}|_{\Sigma_{0,\varepsilon}} : \Sigma_{0,\varepsilon} \to \tilde{\Sigma}_{0,\varepsilon}$.

On a alors

$$(2.2.16) \qquad T^2 (1_{A_\varepsilon} u)(y, \lambda', \mu) = \int_{\tilde{\Sigma}_{1,\varepsilon}} e^{i\lambda' G(y, z, \pi(\tilde{t}), \mu)} \tilde{a}(\tilde{t}) \delta_Z(\pi(\tilde{t}))\, d\pi(\tilde{t})\, dz.$$

Considérons les fonctions

$$\Theta_1(y, \mu) = \sup_{\substack{|z|=R \\ (z,t)\text{ réels}}} (-\operatorname{Im} G(y, z, t, \mu))$$

$$(2.2.17) \qquad \Theta_2(y, \mu) = \sup_{\substack{|t|=r \\ (z,t)\text{ réels}}} (-\operatorname{Im} G(y, z, t, \mu))$$

$$\Theta(y, \mu, \varepsilon) = \sup(\tilde{\Theta}, \Theta_1, \Theta_2).$$

D'après [13], § III-2 la fonction $\prod_0^p \mu_j^2 \Theta(y, \mu, \varepsilon)$ se prolonge jusqu'à $\varepsilon=0$ en une fonction localement lipschitzienne sous-analytique sur $Y \times [0, \mu_0[^{p+1} \times [0, \varepsilon_0]$. Si l'on note $\prod_0^p \mu_j^2 \Theta_0(y, \mu)$ sa valeur pour $\varepsilon=0$, $\mu_j>0$, Θ_0 est localement lipschitzienne en y uniformément en μ et vérifie au voisinage de $(y_0, 0)$ une estimation de la forme

$$(2.2.18) \qquad \frac{1}{2}((\operatorname{Im} y)^2 - c) \leqq \Theta_0(y, \mu) \leqq \frac{1}{2}(\operatorname{Im} y)^2.$$

En outre, si l'on pose

$$(2.2.19) \qquad \Theta_0(y) = \varlimsup_{\substack{\mu \to 0 \\ \mu_j>0,\ \forall j}} \Theta_0(y, \mu)$$

il résulte de la proposition A.1 prouvée en appendice que $\Theta_0(y)$ est localement lipschitzienne sous-analytique et qu'il existe $\beta>0$ avec

$$(2.2.20) \qquad \Theta(y, \mu, \varepsilon) \leqq \Theta_0(y, \mu) + \frac{\mathrm{Cte}\,\varepsilon^\beta}{\prod_0^p \mu_j^2} \leqq \Theta_0(y) + \mathrm{Cte} \sum_0^p \mu_j^\beta + \frac{\mathrm{Cte}\,\varepsilon^\beta}{\prod_0^p \mu_j^2}$$

au voisinage de $(y_0, 0, 0)$.

En procédant comme dans [13] on en déduit que si $((q_0, q_0^*), \ldots, (q_p, q_p^*))$ est dans $SS^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)}(u)$, on a nécessairement Θ_0 dérivable en y_0 et $\Theta_0(y_0) = (1/2)(\operatorname{Im} y_0)^2$.

Pour $r>0$ *et* $\varepsilon>0$ assez petits, notons $(S_{\alpha,\varepsilon})_{\alpha \in \{1, \ldots, 12\}}$ les sous-variétés lisses de $D_R \times \Omega_{r,\varepsilon}$ définies par les équations de la forme $\{f_i=0, f_j \neq 0;\ i \in I,\ j \in J\}$ où (I, J) décrit l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, 4\}$ et $f_1, \ldots, f_4$ désignant les fonctions :

$$(2.2.21) \qquad |z| - R, \qquad |t| - r, \qquad |h(t)| - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad h(t) - \varepsilon.$$

Comme le lemme 4, § III-2 de [13] s'étend au cas de plusieurs paramètres (*cf.* proposition A.1 en appendice), il résulte de [13] (*cf.* également [5], § 3.2) qu'il existe :

– une suite $(y_m, \mu_0^m, \ldots, \mu_p^m) \in Y \times]0, \mu_0]^{p+1}$ convergeant vers $(y_0, 0)$ telle que Θ_0 soit analytique au voisinage de (y_m, μ^m) pour tout m et que $d_y \Theta_0(y_m, \mu^m) \to -\operatorname{Im} y_0$;

— pour tout $m\in\mathbb{N}$ une suite $(y_{m,k}, \mu^{m,k}, \varepsilon^{m,k})\in Y\times]0, \mu_0]^{p+1}\times]0, \varepsilon_0]$ convergeant vers $(y_m, \mu^m, 0)$ telle que Θ soit analytique au voisinage de $(y_{m,k}, \mu^{m,k}, \varepsilon^{m,k})$ et que $\eta_{m,k}=(2/i)(\partial\Theta/\partial y)(y_{m,k}, \mu^{m,k}, \varepsilon^{m,k})$ converge vers $(2/i)(\partial\Theta_0/\partial y)(y_m, \mu^m)$

— une suite $(z_{m,k}, t_{m,k}; \zeta_{m,k}, \tau_{m,k})\in \bigcup_\alpha T^*_{S_\alpha, \varepsilon^{m,k}}$ telle que

$$(y_{m,k}, z_{m,k}, t_{m,k}; \eta_{m,k}, \zeta_{m,k}, \tau_{m,k})\in\left\{\left(y, z, t; \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}, \frac{\partial G}{\partial t}\right)\right\}$$

i.e. que l'on ait pour tout $j=0, \ldots, p$:

$$\eta^j_{m,k}=i(y^j_{m,k}-z^j_{m,k})$$

$$\tag{2.2.22}\begin{aligned}\zeta^j_{m,k}= &-i(y^j_{m,k}-z^j_{m,k})\\ &+\left[\frac{-1}{(\mu_j^{m,k})^2}g'_j(\Gamma_j^{-1}(z^j_{m,k}))+\frac{i}{(\mu_j^{m,k})^2}(\Gamma_j^{-1}(z^j_{m,k})-t^j_{m,k})\right]\frac{\partial\Gamma_j^{-1}(z^j_{m,k})}{\partial z^j}\end{aligned}$$

$$\tau^j_{m,k}=\frac{-i}{(\mu_j^{m,k})^2}(\Gamma_j^{-1}(z^j_{m,k})-t^j_{m,k}).$$

Comme $(y_{m,k}, \eta_{m,k})\to(y_0, -\operatorname{Im} y_0)$ il résulte de la première des relations précédentes que pour $m\geqq m_0$ assez grand et $k\geqq k_0(m)$ assez grand $|z_{m,k}|\ll R$ et donc $\zeta_{m,k}=0$. Passant à la limite lorsque $k\to+\infty$, on trouve les relations analogues à (2.2.22) obtenues en supprimant l'indice k avec la condition

$$\tag{2.2.23} (t_m, \tau_m)\in\rho^{-1}(T^*_{h^{-1}(0)}Z^{\mathbb{C}})\cup\{(t, \tau), t\in Z, |t|=r\}.$$

Il en résulte que si $m\to+\infty$, $t_m\to t_0=0$ et donc seul est à prendre en compte le premier terme de la réunion (2.2.23). On obtient alors pour tout j

$$\tag{2.2.24} (Re\, y^j_0, -\operatorname{Im} y^j_0)=\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{(\mu^m_j)^2}\cdot{}^t d\Gamma_j^{-1}\circ\chi_{L_j}\circ\chi^j_0((t^j_m, -(\mu^m_j)^2\tau^j_m))$$

le point . désignant l'homogénéité sur les fibres. D'après le lemme 2.1.2 cela signifie [puisque $\chi_{L_j}\circ\chi^j_0(\Lambda^{\mathbb{C}}_j)$ n'est autre que la section nulle]

$$\tag{2.2.25} (\operatorname{Re} y_0, -\operatorname{Im} y_0)\in\tilde\chi\, C_{(\Lambda^{\mathbb{C}}_0, \ldots, \Lambda^{\mathbb{C}}_p)}(\rho^{-1}(T^*_{h^{-1}(0)}Z^{\mathbb{C}})),$$

$\tilde\chi$ désignant l'application $\widetilde{\Gamma_0\circ\chi_{L_0}\circ\chi^0_0}\times\ldots\times\widetilde{\Gamma_p\circ\chi_{L_p}\circ\chi^0_p}$ d'où le résultat grâce à (2.2.11).

3. Applications

On va, dans cette section montrer comment les résultats précédents permettent d'obtenir des majorations géométriques du front d'onde C^∞ de distributions obtenues par application à des distributions du type de celles étudiées dans la section 2 d'opérateurs pseudo-différentiels C^∞ et d'opérations non linéaires. Les majorations cherchées doivent évidemment être indépendantes des opérateurs précédents et ne prendre en compte que les données géométriques du problème.

3.1. DEUXIÈME FRONT D'ONDE SIMULTANÉ ET OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS. — Soient $M_0, \ldots, M_l$, $l+1$ variétés analytiques réelles de dimensions $n_0, \ldots, n_l$ et $N_{l+1}, \ldots, N_p$, $p-l$ variétés analytiques réelles de dimensions $n'_{l+1}, \ldots, n'_p$. Pour tout $j=0, \ldots, l$, soient Λ_j un germe en $q_j \in T^* M_j$ de lagrangienne analytique réelle lisse de $T^* M_j$ et (q_j, q_j^*) un point de $T^* \Lambda_j$. Pour $j=l+1, \ldots, p$ on pose $M_j = N_j \times N_j$, $n_j = 2n'_j$ et on plonge N_j dans M_j par l'application diagonale. On choisit pour $j=0, \ldots, p$ un système de coordonnées locales t^j au voisinage de la projection t_0^j de q_j sur M_j si $0 \leqq j \leqq l$ et au voisinage d'un point t_0^j de N_j pour $l+1 \leqq j \leqq p$, tel en outre que pour $j=l+1, \ldots, p$, $t^j = (t'^j, t''^j)$ avec N_j d'équation $t''^j = 0$.

Soient $\mathrm{u}(t^0, \ldots, t^l, t'^{l+1}, \ldots, t'^p)$ une distribution au voisinage de $(t_0^0, \ldots, t_0^l, t_0'^{l+1}, \ldots, t_0'^p)$ dans $M_0 \times \ldots \times M_l \times N_{l+1} \times \ldots \times N_p$ et pour $j=l+1, \ldots, p$, u_j une distribution au voisinage de $t_0'^j$ dans N_j et Q_j un opérateur pseudo-différentiel C^∞ au voisinage de $t_0'^j$ dans N_j. On pose :

$$
(3.1.1)\qquad
\begin{aligned}
u(t^0, \ldots, t^p) &= \mathrm{u}(t^0, \ldots, t^l, t'^{l+1}, \ldots, t'^p) \prod_{l+1}^{p} u_j(t'_j + t''_j)\\
\mathrm{U}(t^0, \ldots, t^p) &= \mathrm{u}(t^0, \ldots, t^l, t'^{l+1}, \ldots, t'^p) \prod_{l+1}^{p} (Q_j u_j)(t'_j + t''_j)
\end{aligned}
$$

(les produits précédents ayant un sens comme produits tensoriels).

Soit $N = M_0 \times \ldots \times M_l \times N_{l+1} \times \ldots \times N_p \subset M_0 \times \ldots \times M_p$. Si U vérifie localement la condition de régularité (1.2.3), on a d'après le théorème 1.2.2 :

$$
(3.1.2)\qquad \mathrm{WF}^{2,1}_{(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l)}(\mathrm{U}|_{\mathrm{N}}) \subset \bigcup_{\mathrm{I} \subset \{l+1, \ldots, p\}} \rho_{\mathrm{I}}(\mathrm{WF}^{2,1}_{\Lambda_{\mathrm{I}}}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{V}_{\mathrm{I}}).
$$

Notons (t'^j, s'^j) un système de coordonnées produit sur $N_j \times N_j$. On se propose de prouver ici (indépendamment de toute hypothèse de régularité sur U) :

THÉORÈME 3.1.1. — *Pour tout* $\mathrm{I} \subset \{l+1, \ldots, p\}$, *on a* (*en identifiant pour* $j \in \{l+1, \ldots, p\} - \mathrm{I}$ $T^* M_j$ *à* $T^* N_j \times T^* N_j$ *et* $T^*_{N_j} N_j$ *à* N_j):

$$
(3.1.3)\qquad \rho_{\mathrm{I}}(\mathrm{WF}^{2,1}_{\Lambda_{\mathrm{I}}}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{V}_{\mathrm{I}}) \subset \rho_{\mathrm{I}}\Big(\Big[\prod_{\substack{l+1 \leqq j \leqq p\\ j \notin \mathrm{I}}} (\mathrm{WF}(u_j(s'^j)) \cup T^*_{N_j} N_j)
\times \mathrm{WF}^{2,1}_{\Lambda_{\mathrm{I}}}\Big(\mathrm{u}(t^0, \ldots, t^l, t'^{l+1}, \ldots, t'^p) \prod_{j \in \mathrm{I}} u_j(s'^j)\Big)\Big] \cap \mathrm{V}_{\mathrm{I}}\Big)
$$

où Λ'_{I} *est la famille de lagrangiennes de* $(\mathrm{T}^* \mathrm{M}_0, \ldots, \mathrm{T}^* \mathrm{M}_l, (\mathrm{T}^* \mathrm{N}_j)_{j \notin \mathrm{I},\, l+1 \leq j \leq p}, (\mathrm{T}^* \mathrm{M}_j)_{j \in \mathrm{I}})$ *donnée par* $\Lambda'_{\mathrm{I}} = (\Lambda_0, \ldots, \Lambda_l, (\mathrm{T}^*_{\mathrm{N}_j} \mathrm{N}_j)_{j \notin \mathrm{I},\, l+1 \leq j \leq p}, (\mathrm{T}^*_{\mathrm{N}_j} \mathrm{M}_j)_{j \in \mathrm{I}})$.

Démonstration. — Il résulte de la définition même du deuxième front d'onde simultané que l'on a

$$(3.1.4) \qquad \mathrm{WF}^{2,1}_{\Lambda_{\mathrm{I}}}(\mathrm{U}) \subset \mathrm{WF}\Big(\prod_{\substack{j \notin \mathrm{I} \\ l+1 \leq j \leq p}} \mathrm{Q}_j u_j\Big) \times \mathrm{WF}^{2,1}_{\Lambda'_{\mathrm{I}}}\Big(u \otimes \prod_{j \in \mathrm{I}} \mathrm{Q}_j u_j\Big)$$

et il suffit de majorer le deuxième terme du membre de droite de (3.1.4) par $WF^{2,1}_{\Lambda'_{\mathrm{I}}}(u \otimes \prod_{j \in \mathrm{I}} u_j)$ au voisinage des points de V_{I}. On peut, sans perte de généralité supposer $\mathrm{I} = \{l+1, \ldots, p\}$. On notera alors $\Lambda_{\mathrm{I}} = \Lambda$, $\mathrm{V}_{\mathrm{I}} = \mathrm{V}$. Pour tout $j = l+1, \ldots, p$, $\Lambda_j = \mathrm{T}^*_{\mathrm{N}_j} \mathrm{M}_j$ est muni des coordonnées (t'^j, τ''^j) et $\mathrm{T}^* \Lambda_j$ des coordonnées $(t'^j, \tau''^j; t'^{j*}, \tau''^{j*})$. D'après la proposition 1.1.5, il nous faut voir:

LEMME 3.1.2. — *On a*

$$(3.1.5) \qquad \mathrm{WF}^{2,1}_{\Lambda}(\mathrm{U}) \cap \{\tau''^{j*} = 0, |\tau''^j| = 1, j = l+1, \ldots, p\} \subset \mathrm{WF}^{2,1}_{\Lambda}(u).$$

Dans le cas où les opérateurs Q_j, $j = l+1, \ldots, p$ sont classiques, le lemme peut probablement s'obtenir par une méthode de phase stationnaire, comme la proposition 1 de [9]. On va plutôt ici exprimer une F.B.I. de deuxième espèce simultanée convenable de U à partir d'une F.B.I. analogue agissant sur u et prouver directement que l'opérateur $\bigotimes_{j \in \mathrm{I}} \mathrm{Q}_j$ est « simultanément 2-microlocal ». Nous utiliserons le lemme suivant ([6], proposition 9.6.2) :

LEMME 3.1.3. — *Soient u une distribution à support compact sur* $\mathrm{M}_{l+1} \times \ldots \times \mathrm{M}_p$, W *un voisinage de* Supp u, *borné. Posons*

$$(3.16) \quad \mathrm{T}u(x^{l+1}, \ldots, x^p; \sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_p) = \int e^{-\sum_{l+1}^{p} (\sigma_j/2)(x^j - t^j)^2} u(t^{l+1}, \ldots, t^p)\, dt^{l+1} \ldots dt^p.$$

Si $\Phi \in \mathrm{C}^{\mathrm{M}}(\mathrm{W})$ *avec* M *assez grand* (*devant l'ordre de* u) *on a*

$$(3.1.7) \quad \langle u, \Phi \rangle = \lim_{r \to 1-} 2^{-p+l} (2\pi)^{-\sum_{l+1}^{p} n_j} \int_{\mathrm{W}} \Phi(t)\, dt \int_0^{+\infty} \times \ldots$$
$$\times \int_0^{+\infty} e^{\sum_{l+1}^{p} (\sigma_j/2)} \prod_{l+1}^{p} \sigma_j^{n_j - 1}\, d\sigma_{l+1} \ldots d\sigma_p \int_{|\omega^{l+1}|=1} \ldots \int_{|\omega^p|=1} \prod_{l+1}^{p} \Big(1 - \Big\langle \omega^j, \frac{D_j}{\sigma_j} \Big\rangle\Big)$$
$$\times \mathrm{T}u(t^{l+1} + ir\omega^{l+1}, \ldots, t^p + ir\omega^p; \sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_p)\, d\omega^{l+1} \ldots d\omega^p$$

On peut toujours supposer u à support compact près de $(t_0^0, \ldots, t_0^l, t_0'^{l+1}, \ldots, t_0'^p)$ et le symbole de Q_j à support compact près de $t_0'^j$.

Pour $j=0, \ldots, l$ soient $g_j(y^j, x^j, \mu_j)$ une phase associée à la deuxième microlocalisation le long de Λ_j près de (q_j, q_j^*) (cf. début du paragraphe 1.2), y_0^j le point de X_j (complexifiée de M_j) associé à (q_j, q_j^*) par les identifications naturelles, $Y^l=(y^0, \ldots, y^l)$, $Y_0^l=(y_0^0, \ldots, y_0^l)$. Posons

$$(3.1.8) \quad T_\Lambda^2 U(y, \lambda', \mu_0, \ldots, \mu_p) = \int e^{\sum_0^l (\lambda'/\mu_j^2)\, g_j(y^j, x^j, \mu_j) - \sum_0^l (\lambda'/2)(x^j-t^j)^2/\mu_j^2 - \sum_{l+1}^p (\lambda'/2)(y'^j-t'^j)^2} \times e^{-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p (t''^j)^2/\mu_j^4 + i\lambda' \sum_{l+1}^p y''^j . t''^j/\mu_j^2}\, U(t)\, dt\, dx^0 \ldots dx^l.$$

C'est une F.B.I. de deuxième espèce simultanée le long de $\Lambda=(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_p)$ (*cf.* (1.1.23) avec $h_j(\mu_j^2)=1-\mu_j^2$), l'intégration en $x^0, \ldots, x^l$ étant faite sur un produit de bons contours $\Sigma_0 \times \ldots \times \Sigma_l$. On notera

$$(3.1.9) \quad \tilde{U}(Y^l, t^{l+1}, \ldots, t^p, \lambda', \mu^l) = \int e^{\sum_0^l (\lambda'/\mu_j^2)\, g_j(y^j, x^j, \mu_j) - \sum_0^l (\lambda'/2)(x^j-t^j)^2/\mu_j^2}\, U(t)\, dt^0 \ldots dt^l\, dx^0 \ldots dx^l$$

de manière à avoir

$$(3.1.10) \quad T_\Lambda^2 U(y, \lambda', \mu_0, \ldots, \mu_p) = \int e^{-\sum_{l+1}^p (\lambda'/2)(y'^j-t'^j)^2 - (\lambda'/2)\sum_0^l (t''^j)^2/\mu_j^4 + i\lambda' \sum_0^l y''^j\, t''^j/\mu_j^2}\, U(Y^l, t^{l+1}, \ldots, t^p, \lambda', \mu^l)\, dt^{l+1} \ldots dt^p.$$

On définit de même $\tilde{u}$ en remplaçant U par u dans (3.1.9).

Soient pour $j=l+1, \ldots, p$, $B_j(D_{t^j})$ un opérateur différentiel à coefficients constants elliptique. Comme il suffit de prouver l'analogue de (3.1.5) obtenu en remplaçant le membre de droite par

$$WF_\Lambda^{2,1}\left(\prod_{l+1}^p B_j . u\right),$$

on peut supposer U donné par

$$(3.1.11) \quad U(t^0, \ldots, t^p) = \int e^{\sum_{l+1}^p (t^j+t''^j-\tilde{t}'^j-\tilde{t}''^j) . \zeta''^j + i \sum_{l+1}^p (t'^j-\tilde{t}'^j) . \zeta'^j} \times \theta(t'^{l+1}, \ldots, t'^p) \prod_{l+1}^p Q_j(t'^j+t''^j, \zeta''^j)\, B_j^{-1}(\zeta'^j, \zeta''^j)\, u(t^0, \ldots, t^l, \tilde{t}^{l+1}, \ldots, \tilde{t}^p)\, d\tilde{t}\, d\zeta,$$

θ étant une troncature près de $(t_0'^{l+1}, \ldots, t_0'^p)$.

On choisira bien sûr B_j d'ordre assez grand pour que l'intégrale précédente en ζ soit absolument convergente. Une formule analogue donne $\tilde{U}$ en fonction de $\tilde{u}$.

Considérons la fonction

$$(3.1.12)\quad \Phi(\tilde{t}^{l+1}, \ldots, \tilde{t}^{p}; y^{l+1}, \ldots, y^{p}, \lambda', \mu_{l+1}, \ldots, \mu_{\mathrm{p}})$$

$$= \prod_{j=l+1}^{p} \int e^{-(\lambda'/2)(y'^j - t'^j)^2 - (\lambda'/2\,\mu_j^4)(t''^j)^2 + i\lambda'\, t''^j . y''^j/\mu_j^2}$$

$$\times e^{i(\lambda'/\mu_j^2)(t'^j + t''^j - \tilde{t}'^j - \mu_j^2 \tilde{t}''^j).\zeta''^j + i(\lambda'/\mu_j^2)(t'^j - \tilde{t}'^j).\zeta'^j}$$

$$\times \theta(t'^{l+1}, \ldots, t'^{p})\, \mathrm{Q}_j\left(t'^j + t''^j, \frac{\lambda'\zeta''^j}{\mu_j^2}\right) \mathrm{B}_j^{-1}\left(\frac{\lambda'\zeta^j}{\mu_j^2}\right)\left(\frac{\lambda'}{\mu_j^2}\right)^{n_j} dt^j\, d\zeta^j.$$

C'est une fonction de classe C^{M} en $\tilde{t}$ si les B_j sont d'ordre assez grand.

Notons $\tilde{\mu} = (\mu_{l+1}, \ldots, \mu_p)$ et

$$(3.1.13)\quad \tilde{u}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{Y}^l, \tilde{t}^{l+1}, \ldots, \tilde{t}^{p}; \lambda', \mu^l)$$

$$= \tilde{u}(\mathrm{Y}^l, (\tilde{t}'^{l+1}, \mu_{l+1}^2 \tilde{t}''^{l+1}), \ldots, (\tilde{t}'^{p}, \mu_p^2 \tilde{t}''^{p}); \lambda', \mu^l).$$

On a alors, d'après (3.1.10), (3.1.11) :

$$(3.1.14)\quad \mathrm{T}_\Lambda^2 \mathrm{U}(y, \lambda', \mu_0, \ldots, \mu_p)$$

$$= \prod_{l+1}^{p} \mu_j^{n_j} \int \tilde{u}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{Y}^l, \tilde{t}; \lambda', \mu^l)\, \Phi(\tilde{t}, y^{l+1}, \ldots, y^p, \lambda', \mu_{l+1}, \ldots, \mu_p)\, d\tilde{t}$$

Posons

$$\mathrm{T}_{\Lambda,\sigma}^2 u(y^0, \ldots, y^l, \tilde{y}^{l+1}, \ldots, \tilde{y}^p; \lambda', \mu)$$

$$= \prod_{l+1}^{p} \mu_j^{n_j} e^{-(\lambda'/2) \sum_{l+1}^{p} \sigma_j (\tilde{y}''^j)^2} \int e^{-(\lambda'/2) \sum_{l+1}^{p} \sigma_j [(\tilde{y}'^j - \tilde{t}'^j)^2 + (i\tilde{y}''^j - \tilde{t}''^j)^2]}\, \tilde{u}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{Y}^l, \tilde{t}, \lambda', \mu^l)\, d\tilde{t}$$

de telle manière que $\mathrm{T}_{\Lambda,\sigma}^2 u = \mathrm{T}_\Lambda^2 u$ lorsque $\sigma_j = 1$, $\forall j = l+1, \ldots, p$. On a en outre

$$(3.1.16)\quad \mathrm{T}_{\Lambda,\sigma}^2 u(y^0, \ldots, y^l, \tilde{y}^{l+1}, \ldots, \tilde{y}^p; \lambda', \mu)$$

$$= \prod_{l+1}^{p} \mu_j^{n_j} e^{-(\lambda'/2) \sum_{l+1}^{p} \sigma_j (y''^j)^2}\, \mathrm{T}(\tilde{u}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{Y}^l, \ldots, \lambda', \mu^l))$$

$$((\tilde{y}'^{l+1}, i\tilde{y}''^{l+1}), \ldots, (\tilde{y}'^{p}, i\tilde{y}''^{p}), \lambda'\sigma_{l+1}, \ldots, \lambda'\sigma_p)$$

d'après (3.1.6).

Il résulte alors de (3.1.14) et du lemme 3.1.3 que $T^2_\Lambda U(y;\lambda',\mu_0,\ldots,\mu_p)$ s'écrit (à un facteur multiplicatif polynomial en λ', $\mu_0,\ldots,\mu_p$ près) :

$$(3.1.17)\quad \lim_{r\to 1-}\int_{W_{\tilde\mu}} d\tilde t\int_0^{+\infty} d\sigma_{l+1}\ldots\int_0^{+\infty} d\sigma_p\int_{|\omega^{l+1}|=1} d\omega^{l+1}\times\ldots$$

$$\times\int_{|\omega^p|=1} d\omega^p\int dt\int d\zeta\prod_{l+1}^p \sigma_j^{n_j-1}\, e^{-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p (y'^j-t'^j)^2-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p (t''^j)^2/\mu_j^4+i\lambda'\sum_{l+1}^p t''^j.y''^j/\mu_j^2}$$

$$\times e^{i\lambda'\sum_{l+1}^p (t'^j+t''^j-\tilde t'^j-\mu_j^2\tilde t''^j).\zeta''^j/\mu_j^2+i\lambda'\sum_{l+1}^p (t'^j-\tilde t'^j).\zeta'^j/\mu_j^2}$$

$$\times\theta(t'^{l+1},\ldots,t'^p)\prod_{l+1}^p Q_j\left(t'^j+t''^j,\frac{\lambda'\zeta''^j}{\mu_j^2}\right)B_j^{-1}\left(\frac{\lambda'}{\mu_j^2}\zeta^j\right)$$

$$\times\left[\prod_{l+1}^p\left(1-<\omega^j,\frac{D_j}{\lambda'\sigma_j}>\right)e^{-(\lambda'/2)\sum_{l+1}^p\sigma_j[1+(\tilde t''^j+ir\omega''^j)^2]}T^2_{\Lambda,\sigma}u\right](y^0,\ldots,y^l,$$

$$(\tilde t'^{l+1}+ir\omega'^{l+1},-i\tilde t''^{l+1}+r\omega''^{l+1}),\ldots,(\tilde t'^p+ir\omega'^p,$$

$$-i\tilde t''^p+r\omega''^p),\lambda',\mu_0,\ldots,\mu_p)$$

où $W_{\tilde\mu}=\{(\tilde t^{l+1},\ldots,\tilde t^p);((\tilde t'^{l+1},\mu_{l+1}^2\tilde t''^{l+1}),\ldots,(\tilde t'^p,\mu_p^2\tilde t''^p))\in W\}$ avec W voisinage borné du support de $\tilde u$ par rapport aux variables $(\tilde t^{l+1},\ldots,\tilde t^p)$.

Si $Q(z'',\zeta'')$ est l'un des symboles Q_j, on sait d'après [15], §-1 que Q admet un prolongement presque analytique $\tilde Q(z'',\zeta'')$: c'est par définition une fonction C^∞ de $(z'',\zeta'')\in\mathbb{C}^{n'}\times\mathbb{C}^{n'}$, à support dans $|\operatorname{Im} z''|+|\operatorname{Im}\zeta''|/(1+|\zeta''|)\leqq 1$, telle que $\tilde Q|_{\mathbb{R}^{n'}\times\mathbb{R}^{n'}}=Q$ et que :

$$(3.1.18)\quad \begin{aligned}&|\bar\partial_{z''}\tilde Q(z'',\zeta'')|+|\zeta''|.|\bar\partial_{\zeta''}\tilde Q(z'',\zeta'')|\leqq C_N|\zeta''|^{\deg Q}\left(|\operatorname{Im} z''|+\frac{|\operatorname{Im}\zeta''|}{|\operatorname{Re}\zeta''|}\right)^N\\ &\text{si } |\zeta''|\geqq\frac{1}{4}\\ &|\bar\partial_{z''}\tilde Q(z'',\zeta'')|+|\bar\partial_{\zeta''}\tilde Q(z'',\zeta'')|\leqq C_N(|\operatorname{Im} z''|+|\operatorname{Im}\zeta''|)^N\quad\text{si}\quad|\zeta''|\leqq\frac{1}{4}\end{aligned}$$

pour tout entier N. De même la troncature θ admet une prolongement presque analytique à support compact vérifiant des estimations analogues.

Utilisant ce prolongement, on peut donc calculer l'intégrale de l'intégrant I_r de (3.1.17) sur des contours complexes. Prouvons alors :

LEMME 3.1.4. — *Supposons que pour $j=l+1,\ldots,p$, $||\operatorname{Re} y''^j|-1|\leqq(1/2)$ et que y^j reste dans un compact. Alors il existe $0<C_1<C_2$ tels que pour tout $\varepsilon>0$ assez petit, $T^2_\Lambda U(y,\lambda',\mu)$ soit égal, modulo un reste à décroissance rapide en λ', à des intégrales de I_1, $\bar\partial_t I_1$, $\bar\partial_\zeta I_1$, calculées sur des contours complexes en $(t,\tilde t,\zeta)$ bornés, contenus dans*

$$(3.1.19)\quad \Omega=\Big\{(\sigma_{l+1},\ldots,\sigma_p,\omega^{l+1},\ldots,\omega^p,t^{l+1},\ldots,t^p,\tilde t^{l+1},\ldots,\tilde t^p,\zeta^{l+1},\ldots,\zeta^p);$$

$$C_1 \leqq \sigma_j \leqq C_2,\, j=l+1,\, \ldots,\, p$$

$$\sum_{l+1}^{p} \left| \tilde{t}'^j + i\,\omega'^j - \operatorname{Re} y'^j - i\frac{\operatorname{Im} y'^j}{\sigma_j} \right| + \left| -i\tilde{t}''^j + \omega''^j - \frac{\operatorname{Re} y''^j}{\sigma_j} - i \operatorname{Im} y''^j \right| < \varepsilon \Bigg\}.$$

Démonstration. — La preuve étant la même pour chacun des indices $j=l+1, \ldots, p$, on fixe celui-ci et on l'oublie dans les notations. Considérons les fonctions :

$$\mathrm{H}^0(\tilde{t}, \mu) = \tilde{t}'^2 + \mu^4 \tilde{t}''^2$$

$$\mathrm{H}^1(y, t, \mu) = (\operatorname{Re} y' - t')^2 + \left(\frac{t''}{\mu^2} + \operatorname{Im} y''\right)^2$$

(3.1.20)
$$\mathrm{H}^2(y, \zeta, \mu) = \left(\operatorname{Im} y' + \frac{\zeta' + \zeta''}{\mu^2}\right)^2 + (\operatorname{Re} y'' + \zeta'')^2$$

$$\mathrm{H}^3(t, \tilde{t}, \mu) = (t' - \tilde{t}')^2 + \left(\frac{t''}{\mu^2} - \tilde{t}''\right)^2$$

$$\mathrm{H}^4(\sigma r \omega, \zeta, \mu) = \left(\frac{\zeta' + \zeta''}{\mu^2} + \sigma r \omega'\right)^2 + (\zeta'' + \sigma r \omega'')^2.$$

Soit $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(]-1, 1[)$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de $[-(1/2), (1/2)]$. Soit $\mathrm{C}>0$ assez grand pour que $\chi(\mathrm{H}^0(\tilde{t}_j, \mu)/\mathrm{C}^2)$ soit identiquement égale à 1 au voisinage du support par rapport à $\tilde{t}_j$ de $\tilde{u}_{\tilde{\mu}}(\mathrm{Y}^l, \tilde{t}^{l+1}, \ldots, \tilde{t}^p; \lambda', \mu^l)$. Soit $c>0$ à choisir assez petit.

Considérons le contour complexe :

(3.1.21)
$$\begin{aligned}
\Sigma = \Bigg\{ &\left(\sigma, \omega, t' + is\chi(\mathrm{H}^1/c^2)\left(\operatorname{Im} y' + \frac{\zeta'+\zeta''}{\mu^2}\right), t'' + is\chi(\mathrm{H}^1/c^2)\mu^2(\operatorname{Re} y'' + \zeta''),\right. \\
&\tilde{t}' - i\frac{s}{1+\sigma}\chi(\mathrm{H}^0/2\,\mathrm{C}^2)\left(\frac{\zeta'+\zeta''}{\mu^2} + \sigma r \omega'\right), \tilde{t}'' - i\frac{s}{1+\sigma}\chi(\mathrm{H}^0/2\,\mathrm{C}^2)(\zeta'' + \sigma r \omega''), \\
&\left.\zeta' + is\chi(\mathrm{H}^2/c^2)\left(\mu^2(t' - \tilde{t}') - \left(\frac{t''}{\mu^2} - \tilde{t}''\right)\right), \zeta'' + is\chi(\mathrm{H}^2/c^2)\left(\frac{t''}{\mu^2} - \tilde{t}''\right)\right); \\
&\qquad (t, \tilde{t}, \zeta) \text{ réels}, \tilde{t} \in \mathrm{W}_\mu, \sigma \in \mathbb{R}_+^*, \omega \in \mathrm{S}^{n-1}, s \in [0, 1] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Le bord $s=0$ de Σ est le contour d'intégration réel de (3.1.17). On notera Σ_1 le bord $s=1$. En tout point de Σ, l'intégrant de (3.1.17) se majore en module par l'exponentielle de :

$$\begin{aligned}(3.1.22)\quad & \frac{\lambda'}{2}(\operatorname{Im} y)^2-\frac{\lambda'}{2}(\operatorname{Re} y'-t')^2-\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{t''}{\mu^2}+\operatorname{Im} y''\right)^2\\ & -\lambda' s\chi(\mathrm{H}^1/c^2)\left(1-\frac{s\chi(\mathrm{H}^1/c^2)}{2}\right)\left[\left(\operatorname{Im} y'+\frac{\zeta'+\zeta''}{\mu^2}\right)^2+(\operatorname{Re} y''+\zeta'')^2\right]\\ & \frac{-\lambda' s\chi(\mathrm{H}^0/2\,\mathrm{C}^2)}{1+\sigma}\left(1-\frac{\sigma}{\sigma+1}\;\frac{s\chi(\mathrm{H}^0/2\,\mathrm{C}^2)}{2}\right)\left[\left(\frac{\zeta'+\zeta''}{\mu^2}+\sigma\,\mathrm{r}\,\omega'\right)^2+(\zeta''+\sigma\,\mathrm{r}\,\omega'')^2\right]\\ & -\lambda' s\chi(\mathrm{H}^2/c^2)\left[(t'-\tilde{t}')^2+\left(\frac{t''}{\mu^2}-\tilde{t}''\right)^2\right]\\ & -\frac{\lambda'}{2}(1-r^2)\,\sigma-Cte\,\lambda'\sigma(1-\chi(\mathrm{H}^0/\mathrm{C}^2))\end{aligned}$$

le dernier terme provenant du choix de C relativement au support de $\tilde{u}_{\tilde{\mu}}$. On a d'après la formule de Stokes

$$\int_{\Sigma_1}\mathrm{I}_r=\int_{\Sigma_0}\mathrm{I}_r+\int_{\Sigma}(\bar\partial_t\,\mathrm{I}_r+\bar\partial_\zeta\,\mathrm{I}_r)$$

et la preuve du lemme consiste à montrer que

$$\lim_{r\to 1-}\int_{\Sigma_1}\mathrm{I}_r\qquad\text{et}\qquad\lim_{r\to 1-}\int_{\Sigma}(\bar\partial_t\,\mathrm{I}_r+\bar\partial_\zeta\,\mathrm{I}_r)$$

existent et ne diffèrent des intégrales de I_1 et $\bar\partial\,\mathrm{I}_1$ respectivement sur des contours contenus dans Ω que par un reste à décroissante rapide.

Pour cela, on va utiliser les majorations (3.1.18) appliquées à $\tilde{\mathrm{Q}}(t'+t'',\lambda'\zeta''/\mu^2)$ de la manière suivante : si $|\zeta''|\leqq 1/4$, l'hypothèse $1/2\leqq|\operatorname{Re} y''|\leqq 1$ entraîne que $\chi(\mathrm{H}^2/c^2)$ est nul (pour c assez petit) et donc le contour Σ reste réel par rapport aux variables (ζ',ζ''); les inégalités (3.1.18) appliquées avec $\operatorname{Im}\zeta''=0$ entraînent alors

$$\begin{aligned}(3.1.23)\quad |\bar\partial_t\,\mathrm{I}_r|\leqq\; & \mathrm{C_N}(s\chi(\mathrm{H}^1/c^2)\,\mathrm{H}^2(y,\zeta,\mu)^{1/2})^{\mathrm{N}}\left(\frac{\lambda'}{\mu^2}\right)^{\deg \mathrm{Q}}\mathrm{B}\left(\frac{\lambda'}{\mu^2}\zeta\right)^{-1}\\ & \times e^{(\lambda'/2)(\operatorname{Im} y)^2-(\lambda'/2)\,\mathrm{H}^1(y,t,\mu)-(\lambda' s/2)\chi(\mathrm{H}^1/c^2)\,\mathrm{H}^2(y,\zeta,\mu)}\\ & \times e^{-\lambda'(s\chi(\mathrm{H}^0/2\,c^2)/2\,(1+\sigma))\,\mathrm{H}^4(\sigma r\omega,\zeta,\lambda)-\lambda' s\chi(\mathrm{H}^2/c^2)\,\mathrm{H}^3(t,\tilde{t},\mu)}\\ & \times e^{-(\lambda'/2)(1-r^2)\,\sigma-\mathrm{Cte}\;\lambda'\sigma(1-\chi(\mathrm{H}^0/\mathrm{C}^2))}\end{aligned}$$

Si $|\zeta''|\geqq 1/4$, on peut appliquer la première des inégalités (3.1.18) et on a alors

$$\begin{aligned}(3.1.24)\quad |\bar\partial_t\,\mathrm{I}_r|+|\bar\partial_\zeta\,\mathrm{I}_r|\leqq\; & \mathrm{C_N}s^{\mathrm{N}}(\chi(\mathrm{H}^1/c^2)\,\mathrm{H}^2(y,\zeta,\mu)^{1/2}+\chi(\mathrm{H}^2/c^2)\,\mathrm{H}^3(t,\tilde{t},\mu)^{1/2})^{\mathrm{N}}\\ & \times\left(1+\frac{\lambda'}{\mu^2}|\zeta''|\right)^{\deg \mathrm{Q}}\mathrm{B}\left(\frac{\lambda'}{\mu^2}\zeta\right)^{-1}\end{aligned}$$

$$\times e^{(\lambda'/2)(\operatorname{Im} y)^2 - (\lambda'/2) H^1(y,t,\mu) - \lambda' s/2\, \chi(H^1/c^2) H^2(y,\zeta,\mu)}$$

$$\times e^{-(\lambda' s \chi(H^0/2C^2)/2(1+\sigma)) H^4(\sigma r \omega, \zeta, \mu) - \lambda' s \chi(H^2/c^2) H^3(t,\tilde{t},\mu) - (\lambda'/2)(1-r^2)\sigma - \mathrm{Cte}\, \lambda' \sigma(1-\chi(H^0/C^2))}.$$

Commençons par montrer que les intégrales étudiées convergent lorsque $\sigma \to +\infty$, uniformément en $r \to 1-$. Sur le domaine où $H^0 \geqq C^2$ c'est clair d'après les inégalités précédentes prises pour $N=0$. Si $H^0 \leqq C^2$, $\chi(H^0/2C^2) \equiv 1$. Si de plus $((\zeta'+\zeta'')^2/\mu^4+\zeta''^2)^{1/2} \leqq \sigma/2$ on a $H^4(\sigma r \omega, \zeta, \mu)^{1/2} \geqq \sigma/4$ (pour r près de 1) d'où une estimation de (3.1.28), (3.1.24) par

$$C_N s^N ((H^2)^{1/2} + \chi(H^2/c^2)(H^3)^{1/2})^N \left(1+\frac{\lambda'}{\mu^2}|\zeta''|\right)^{\deg Q} B(\lambda'\zeta/\mu^2)^{-1}$$
$$\times e^{\lambda/2 (\operatorname{Im} y)^2 - \mathrm{Cte}\, \lambda' s \sigma^2/(1+\sigma)}.$$

Si on choisit $N=2$, on obtient lorsque $\sigma \to +\infty$ un facteur de convergence en σ^{-2}. Dans le cas où $((\zeta'+\zeta'')^2/\mu^4+\zeta''^2)^{1/2} \geqq \sigma/2$, il suffit d'appliquer les inégalités (3.1.23), (3.1.24) avec $N=0$ puisque les $B(\lambda'\zeta/\mu^2)^{-1}$ fournissent d'emblée le facteur de convergence. On peut donc passer à la limite lorsque $r \to 1-$.

Sur la partie de Σ sur laquelle $H^1 \geqq c^2/2$, $|\bar{\partial}_t I_1| + |\bar{\partial}_\zeta I_1|$ est décroissance exponentielle en λ' d'après (3.1.24). Il suffit donc de considérer la partie de Σ sur laquelle $H^1 \leqq c^2/2$ donc $\chi(H^1/c^2) \equiv 1$. On majore alors $|\bar{\partial}_t I_1| + |\bar{\partial}_\zeta I_1|$ par

$$\left(1+\frac{\lambda'}{\mu^2}|\zeta|\right)^{\deg Q - \deg B} C_N s^N (H^2(y,\zeta,\mu)^{1/2} + \chi(H^2/c^2)\, H^3(t,\tilde{t},\mu)^{1/2})^N$$
$$\times e^{(\lambda'/2)(\operatorname{Im} y)^2 - (\lambda'/2) s (H^2(y,\zeta,\mu) + \chi(H^2/c^2) H^3(t,\tilde{t},\mu))}.$$

Cette expression s'estime par $(1+\lambda'|\zeta|/\mu^2)^{\deg Q - \deg B}\, C_N \lambda'^{-N}$ dès que $H^2 \geqq c^2/2$ ou $H^3 \geqq c^2/2$. On est donc réduit à $H^1 \leqq c^2/2$, $H^2 \leqq c^2/2$, $H^3 \leqq c^2/2$. Si c est assez petit, et C assez grand cela entraîne en particulier que $\chi(H^0/2C^2) \equiv 1$.

Alors $|\bar{\partial}_t I_1| + |\bar{\partial}_\zeta I_1|$ s'estime par $(1+\lambda'|\zeta|/\mu^2)^{\deg Q - \deg B}$ fois

$$C_N s^N e^{\lambda' (\operatorname{Im} y)^2/2 - \lambda' s H^4/2(1+\sigma)} \leqq C_N \lambda'^{-N}$$

si $H^4 \geqq c^2/2$. On peut donc également se restreindre à $H^4 \leqq c^2/2$. Ces conditions, combinées avec l'hypothèse $1/2 \leqq |\operatorname{Re} y''| \leqq 1$ entraînent que la portion de contour restante est contenue dans Ω si c est pris asez petit. Cela achève la preuve du lemme.

Fin de la preuve du théorème 3.1.1. — Il résulte du lemme 3.1.4 que dans l'expression (3.1.17) de $T_\Lambda^2 U(y, \lambda', \mu)$ en fonction de $T_{\Lambda,\sigma}^2 u$ la seule contribution *a priori* non négligeable est fournie lorsque $(\tilde{t}'^j + i\omega'^j, -i\tilde{t}''^j + \omega''^j)$ est dans un voisinage arbitrairement petit de $(\operatorname{Re} y'^j + i \operatorname{Im} y'^j/\sigma_j, \operatorname{Re} y''^j/\sigma_j + i \operatorname{Im} y''^j)$. Or pour tout $\sigma \in [C_1, C_2]$ fixé, $T_{\Lambda,\sigma}^2 u(Y^l, \tilde{y}^{l+1}, \ldots, \tilde{y}^p, \lambda', \mu)$ caractérise $WF_\Lambda^{2,1}(u)$ près du point $((q_0, q_0^*), \ldots, (q_l, q_l^*), (\operatorname{Re} \tilde{y}'^{l+1}, -\operatorname{Re} \tilde{y}''^{l+1}, -\sigma_{l+1} \operatorname{Im} \tilde{y}'^{l+1}, \sigma_{l+1} \operatorname{Im} \tilde{y}''^{l+1}), \ldots, (\operatorname{Re} \tilde{y}'^p, -\operatorname{Re} \tilde{y}''^p; -\sigma_p \operatorname{Im} \tilde{y}'^p, \sigma_p \operatorname{Re} \tilde{y}''^p))$. Donc $T_\Lambda^2 U(y, \lambda', \mu)$ est à décroissance rapide dès que le point

$$((q_0, q_0^*), \ldots, (q_l, q_l^*), (\operatorname{Re} y'^{\,l+1}, -\operatorname{Re} y''^{\,l+1}/\sigma_{l+1}; -\operatorname{Im} y'^{\,l+1}, \sigma_{l+1} \operatorname{Im} y''^{\,l+1}), \ldots, (\operatorname{Re} y'^{\,p}, -\operatorname{Re} y''^{\,p}/\sigma_p; -\operatorname{Im} y'^{\,p}, \sigma_p \operatorname{Im} y''^{\,p}))$$

n'est pas dans $\mathrm{WF}_\Lambda^{2,\,1}(u)$. Compte tenu de la proposition 1.1.5 cela revient à dire que :

$$((q_0, q_0^*), \ldots, (q_l, q_l^*), (\operatorname{Re} y'^{\,l+1}, -\operatorname{Re} y''^{\,l+1}; -\operatorname{Im} y'^{\,l+1}, \operatorname{Im} y''^{\,l+1}), \ldots, (\operatorname{Re} y'^{\,p}, -\operatorname{Re} y''^{\,p}; -\operatorname{Im} y'^{\,p}, \operatorname{Im} y''^{\,p}))$$

n'est pas dans $\mathrm{WF}_\Lambda^{2,\,1}(u)$. Le lemme 3.1.2 (et donc le théorème 3.1.1) en résultent.

Remarque. — Le point essentiel, dans la preuve précédente, est de pouvoir montrer que sur le domaine fournissant une contribution non négligeable à (3.1.17) on a pour $j=l+1, \ldots, p$

$$0<C_1 \leqq |\zeta''^{\,j}| \leqq C_2 \tag{3.1.25}$$

(ce qui entraîne que $\zeta''^{\,j} \to Q_j(t'^{\,j}+t''^{\,j}, \lambda' \zeta''^{\,j}/\mu_j^2)$ est un symbole). Cela est vrai parce que pour tout j $|\operatorname{Re} y''^{\,j}|$ est proche de 1, hypothèse qui résulte de la structure même de la formule de trace du paragraphe 1.2. C'est uniquement pour avoir cette condition que l'on a été amené à introduire le deuxième micro-support simultané et à prouver la formule de trace associée.

3.2. Singularités de produits. — On se propose dans ce paragraphe d'appliquer les résultats précédents à des théorèmes de majoration de fronts d'onde de distributions obtenues par l'application d'opérations non linéaires et d'opérateurs pseudo-différentiels à des distributions « connues ».

On appellera « arbre » un ensemble ordonné I tel que l'ensemble des minorants stricts d'un élément quelconque de I ait un unique élément maximal (lorqu'il n'est pas vide). On supposera I connexe *i. e.* il existe un seul élément de I, noté 0, qui n'a pas de minorant strict. On note alors $f: \mathrm{I}-\{0\} \to \mathrm{I}$ l'application qui à tout élément associe l'unique élément maximal de l'ensemble de ses minorants stricts et $\mathrm{I}^\infty = \{ i \in \mathrm{I}; f^{-1}(i) = \varnothing \}$.

Soient M un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et I un arbre (connexe). Pour tout $j \in \mathrm{I}$, on se donne :

- un opérateur pseudo-différentiel C^∞ sur M, Q_j d'ordre m_j, et pour tout $j \in \mathrm{I}^\infty$;
- une sous-variété analytique réelle Z_j de M.

On note δ_{Z_j} le courant d'intégration sur Z_j. On a $\delta_{Z_j} \in H^{s_j}_{\mathrm{loc}}(M)$ si $s_j < -(1/2) \operatorname{codim}_M Z_j$.

Définissons par récurrence

$$\sigma_j = \inf_{k \in f^{-1}(j)} (\sigma_k - m_k) \quad \text{si} \quad j \in \mathrm{I}-\mathrm{I}^\infty \quad \sigma_j = s_j \quad \text{si} \quad j \in \mathrm{I}^\infty \tag{3.2.1}$$

et supposons que pour tout $j \in \mathrm{I}-\mathrm{I}^\infty$ $\sigma_j > n/2$.

Notons X un voisinage complexe de M et pour tout $j \in \mathrm{I}^\infty$ soit $Z_j^{\mathbb{C}}$ complexifiée de Z_j dans X.

On définit par récurrence

$$
\text{(3.2.2)} \qquad \begin{array}{ll} U_j=\delta_{Z_j} & \text{si } \ j\in I^\infty \\ U_j=\displaystyle\prod_{k\in f^{-1}(j)} Q_k U_k & \text{si } \ j\in I-I^\infty. \end{array}
$$

On a alors :

THÉORÈME 3.2.1. — *Sous les hypothèses précédentes,*

$$
\text{(3.2.3)} \quad \mathrm{WF}(U_0)\subset\{(t,\tau)\in T^*M;\ \forall j\in I \text{ il existe une suite } t_m^j\in X,\ t_m^j\to t,\ \forall j\in I^\infty \text{ il existe une suite } \tau_m^j\in\mathbb{C}^n \text{ avec } (t_m^j,\tau_m^j)\in T^*_{Z_j^{\mathbb{C}}}X\cup T^*_X X
$$

vérifiant :

$$
\sum_{j\in I^\infty}\tau_m^j\to\tau,\ \text{et } \forall j\in I-\{0\}\ |t_m^j-t_m^{f(j)}|\ |\sum_{k\in I(j)\cap I^\infty}\tau_m^k|\to 0\}
$$

où pour $j\in I$, $I(j)=\{k\in I;\ \exists l\in\mathbb{N} \text{ avec } f^l(k)=j\}$.

COROLLAIRE 3.2.2. — *Soient pour* $j=1,\ldots,p$, $v_j\in H^s_{\mathrm{loc}}(M)$ *avec* $s>n/2$ *une distribution conormale* C^∞ *le long d'une sous-variété analytique réelle lisse* Z_j *de* M. *Alors, avec la notation* (2.1.7), *on a :*

$$
\text{(3.2.4)} \qquad \mathrm{WF}\left(\prod_1^p v_j\right)\subset\left(\hat{+}_1^p\,(T^*_{Z_j^{\mathbb{C}}}X\cup T^*_X X)\right)\cap T^*M.
$$

Démonstration. — Chaque v_j s'écrit $Q_j\delta_{Z_j}$ où Q_j est un opérateur pseudo-différentiel C^∞. Il suffit alors d'appliquer le théorème.

La preuve du théorème utilisera le lemme suivant :

LEMME 3.2.3. — *Soient* $M_0,\ldots,M_p$, $p+1$ *variétés analytiques réelles lisses,* $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p$ *des lagrangiennes analytiques réelles lisses de* $T^*M_1,\ldots,T^*M_p$ *et* $\pi: M_0\times\ldots\times M_p\to M_1\times\ldots\times M_p$ *la projection. Soit u une distribution sur* $M_0\times\ldots\times M_p$ *telle que* $\pi|_{\mathrm{supp}\,(u)}$ *soit propre. Soit*

$$
p: T^*_{M_0}M_0\times T^*\Lambda_1\times\ldots\times T^*\Lambda_p\to T^*\Lambda_1\times\ldots\times T^*\Lambda_p
$$

la projection naturelle. On a alors :

$$
\text{(3.2.5)} \quad \mathrm{WF}^{2,1}_{(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p)}\left(\int u(t^0,\ldots,t^p)\,dt^0\right) \subset p\,[\mathrm{WF}^{2,1}_{(T^*_{M_0}M_0,\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p)}(u)\cap T^*_{M_0}M_0\times T^*\Lambda_1\times\ldots\times T^*\Lambda_p].
$$

Démonstration. — Considérons une F.B.I. de deuxième espèce simultanée le long de $(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p)$ donnée par :

$$
\text{(3.2.6)} \quad T^2_{(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p)}(v)=\int_\Sigma e^{i\lambda' G(y^1,\ldots,y^p,x^1,\ldots,x^p,t^1,\ldots,t^p,\mu)}\,\theta(t^1,\ldots,t^p)\,v(t^1,\ldots,t^p)\,dt\,dx
$$

(θ troncature convenable). Le lemme résulte de la formule

$$(3.2.7)\quad T^2_{(\Lambda_1,\dots,\Lambda_p)}\, v(y, \lambda', \mu) = (\lambda'/2\pi)^{1/2\,\dim M_0}$$
$$\times \int dy^0 \left[\int_\Sigma e^{i\lambda' G(y,\,x,\,t,\,\mu) - (\lambda'/2)(y^0 - t^0)^2}\, \theta(t^1,\dots, t^p)\, u(t^0, t^1,\dots, t^p)\, dt_0 \dots dt_p\, dx \right]$$

lorsque $v = \int u\, dt^0$.

Introduisons quelques notations : on appellera sous-arbre de I toute partie $J \subset I$ qui, munie de l'ordre induit est un arbre connexe d'élément minimal 0. Pour tout $j \in I$ notons M_j une copie de M. Pour tout sous-arbre J de I on notera Λ_J la famille de lagrangiennes $\Lambda_J = (\Lambda_{J,\,j})_{j \in I}$ où

$$(3.2.8)\qquad \begin{cases} \Lambda_{J,\,j} = T^*_{\{t^j = s^j\}}(M_j \times M_j) & \text{si } j \in J - \{0\} \\ \Lambda_{J,\,j} = T^*_{M_j \times M_j}(M_j \times M_j) & \text{si } j \in I - J. \end{cases}$$

Pour tout $j \in I - \{0\}$, identifions M_j à la diagonale N_j de $M_j \times M_j$ et posons :

$$V_j = T^*(M_j \times M_j)|_{N_j}, \qquad \rho_j : \ V_j \to T^* M_j \quad \text{projection naturelle}$$
$$(3.2.9)\quad \iota_j : \ T^*_{N_j}(M_j \times M_j) \underset{M_j}{\times} T^* M_j \to T^*(T^*_{N_j}(M_j \times M_j)) \quad \text{injection naturelle}$$
$$\check{V}_j = \iota_j(T^*_{N_j}(M_j \times M_j) \underset{M_j}{\times} T^* M_j) \cap (T^*(T^*_{N_j}(M_j \times M_j))|_{T^*_{N_j}(M_j \times M_j) - N_j})$$
$$\check{\rho}_j : \ \check{V}_j \to T^* M_j \quad \text{projection naturelle.}$$

On posera en outre $\Lambda_{j,\,0} = T^*_{M_0} M_0$, $V_0 = T^* M_0$, $\rho_0 : V_0 \to T^* M_0$ égale à l'identité. Si $T^* \Lambda_J$ désigne le produit $\prod_{j \in I} T^* \Lambda_{J,\,j}$

$$V_J = \prod_{j \in J - \{0\}} \check{V}_j \times \prod_{j \in (I - J) \cup \{0\}} V_j$$

est une sous-variété de $T^* \Lambda_J$ et les applications ρ_j et $\check{\rho}_j$ précédentes permettent de définir :

$$(3.2.10)\qquad \rho_J : \ V_J \to \prod_{j \in I} T^* M_j.$$

Si $\tilde{I}$ est un sous-arbre de I avec $J \subset \tilde{I}$, on utilisera les mêmes notations Λ_J, ρ_J pour désigner les objets obtenus en remplaçant dans (3.2.9), (3.2.10) I par $\tilde{I}$, la signification à leur donner étant toujours claire par le contexte.

Pour tout $j \in I$, posons $d(j) = \inf\{d;\, f^d(j) = 0\}$ et pour J sous-arbre de I et $l \in \mathbb{N}$:

$$(3.2.11)\qquad \begin{cases} J_l = \{j \in J;\ d(j) \leq l\} \\ J^l = \{j \in J;\ d(j) = l\}. \end{cases}$$

On notera

$$J^{\infty}=J\cap I^{\infty},\qquad A_J=T^*M_0\times\prod_{j\in f^{-1}(J)}T^*_{M_j}M_j$$

sous-variété de

$$T^*M_0\times\prod_{j\in f^{-1}(J)}T^*M_j\qquad\text{et}\qquad p_J:\ A_J\to T^*M_0$$

la projection naturelle. Si $l\in\mathbb{N}$, on définit A_J^l et p_J^l comme A_J et p_J mais en remplaçant $f^{-1}(J)$ par $f^{-1}(J)-f^{-1}(J^l)$. On va prouver :

LEMME 3.2.4. — *Pour tout entier l on a :*

$$\text{(3.2.12)}\qquad WF(U_0)\subset\bigcup_{\substack{J\subset I_l\\ J\ \text{sous-arbre}}}p_J^l[A_J^l\cap p_J(V_J\cap F_J)]$$

avec

$$\text{(3.2.13)}\qquad F_J=\Big[\prod_{j\in f^{-1}(J)-f^{-1}(J^l)-J}(WF(U_j(s^j))\cup T^*_{M_j}M_j)\Big]$$
$$\times WF^{2,1}_{A_J}\Big(\prod_{j\in f^{-1}(J)-f^{-1}(J^l)}\delta(s^{f(j)}-t^j)\prod_{j\in J^l\cup J^{\infty}}U_j(s^j)\Big)$$

avec la convention de notation $s^0=t^0$.

Démonstration. — Supposons le résultat prouvé jusqu'à l'ordre l et montrons-le à l'ordre $l+1$. Dans le terme 2-microlocal de (3.2.13), on peut poser pour $j\in J^l\setminus J^{\infty}$:

$$U_j(s^j)=\int\prod_{h\in f^{-1}(j)}\delta(s^j-t^h)\,Q_h\,U_h(t^h)\,dt^h$$

D'après le lemme 3.2.3, on a alors

$$\text{(3.2.14)}\qquad WF^{2,1}_{A_J}\Big(\prod_{j\in f^{-1}(J)-f^{-1}(J^l)}\delta(s^{f(j)}-t^j)\prod_{j\in J^l\cup J^{\infty}}U_j(s^j)\Big)$$
$$\subset\tilde p_J\Big[\Big(\prod_{j\in f^{-1}(J^l)}T^*_{M_j}M_j\Big)\cap WF^{2,1}_{A_J}\Big(\prod_{j\in f^{-1}(J)}\delta(s^{f(j)}-t^j)\prod_{j\in f^{-1}(J^l)}Q_jU_j(t^j)\prod_{j\in J^{\infty}}U_j(s^j)\Big)\Big]$$

$\tilde p_J$ désignant la projection naturelle de

$$\prod_{j\in f^{-1}(J^l)}T^*_{M_j}M_j\times\prod_{j\in f^{-1}(J)-f^{-1}(J^l)}T^*M_j\times\prod_{j\in J}T^*M_j$$

sur

$$\prod_{j\in f^{-1}(J)-f^{-1}(J^l)}T^*M_j\times\prod_{j\in J}T^*M_j.$$

En écrivant pour $j \in f^{-1}(\mathrm{J}^l)$, $\delta(s^{f(j)}-t^j)\,\mathrm{Q}_j\,\mathrm{U}_j(t^j)=\delta(s^{f(j)}-t^j)\,\mathrm{Q}_j\,\mathrm{U}_j(s^j)\,|_{t^j=s^j}$ et en utilisant le théorème 1.2.2, on majore le terme en $\mathrm{WF}^{2,\,1}_{\Lambda_\mathrm{J}}(\ldots)$ du membre de droite de (3.2.14) par

$$(3.2.15)\qquad \bigcup_{\substack{\mathrm{J}\subset\tilde{\mathrm{J}}\subset \mathrm{J}\cup f^{-1}(\mathrm{J}^l)\\ \tilde{\mathrm{J}}\ \text{sous}-\text{arbre}}} \rho_{\mathrm{J},\,\tilde{\mathrm{J}}}[\mathrm{V}_{\mathrm{J},\,\tilde{\mathrm{J}}}\cap \mathrm{WF}^{2,\,1}_{\Lambda_{\tilde{\mathrm{J}}}}(\prod_{j\in f^{-1}(\mathrm{J})}\delta(s^{f(j)}-t^j)$$

$$\times \prod_{j\in f^{-1}(\mathrm{J}^l)}\mathrm{Q}_j\,\mathrm{U}_j(s^j)\prod_{j\in \mathrm{J}^\infty}\mathrm{U}_j(s^j))]$$

où

$$\mathrm{V}_{\mathrm{J},\,\tilde{\mathrm{J}}}=\prod_{j\in\tilde{\mathrm{J}}-\mathrm{J}}\check{\mathrm{V}}_j\times\prod_{j\in \mathrm{J}\cup f^{-1}(\mathrm{J}^l)-\tilde{\mathrm{J}}}\mathrm{V}_j$$

et $\rho_{\mathrm{J},\,\tilde{\mathrm{J}}}$ est la projection naturellement associée.

D'après le théorème 3.1.1 chacun des termes de la réunion (3.2.15) se majore par

$$\rho_{\mathrm{J},\,\tilde{\mathrm{J}}}[\mathrm{V}_{\mathrm{J},\,\tilde{\mathrm{J}}}\cap(\prod_{j\in f^{-1}(\mathrm{J}^l)-(\tilde{\mathrm{J}}-\mathrm{J})}(\mathrm{WF}(\mathrm{U}_j(s^j))\cup \mathrm{T}^*_{\mathrm{M}_j}\mathrm{M}_j)$$

$$\times\,\mathrm{WF}^{2,\,1}_{\Lambda_{\tilde{\mathrm{J}}}}(\prod_{j\in f^{-1}(\mathrm{J})}\delta(s^{f(j)}-t^j)\prod_{j\in \mathrm{J}^\infty\cup(\tilde{\mathrm{J}}-\mathrm{J})}\mathrm{U}_j(s^j)))].$$

En outre $f^{-1}(\mathrm{J})=f^{-1}(\tilde{\mathrm{J}})-f^{-1}(\tilde{\mathrm{J}}^{l+1})$ et $\mathrm{J}^\infty\cup(\tilde{\mathrm{J}}-\mathrm{J})=\tilde{\mathrm{J}}^{l+1}\cup\tilde{\mathrm{J}}^\infty$. En reportant (3.2.14), (3.2.15) et la formule précédente dans (3.2.12), (3.2.13) au cran l, on obtient (3.2.12), (3.2.13) au cran $l+1$, compte tenu des égalités précédentes et de $(f^{-1}(\mathrm{J})-f^{-1}(\mathrm{J}^l)-\mathrm{J})\cup(f^{-1}(\mathrm{J}^l)-(\tilde{\mathrm{J}}-\mathrm{J}))=f^{-1}(\mathrm{J})-f^{-1}(\tilde{\mathrm{J}}^{l+1})-\tilde{\mathrm{J}}$.

Démonstration du théorème 3.2.1. — Démontrons le théorème par récurrence sur la longueur $l(\mathrm{I})$ de l'arbre I

$$(3.2.16)\qquad l(\mathrm{I})=\sup\{d(j),\ j\in \mathrm{I}\}.$$

Supposons le résultat déjà prouvé pour tout arbre de longueur $<l(\mathrm{I})$. Appliquons le lemme 3.2.4 en choisissant $l=l(\mathrm{I})$. On a alors $\mathrm{J}^l\subset \mathrm{J}^\infty$ d'où $f^{-1}(\mathrm{J}^l)=\varnothing$ et $\mathrm{U}_j=u_j$ pour $j\in \mathrm{J}^l\cup \mathrm{J}^\infty=\mathrm{J}^\infty$. D'après l'hypothèse sur les u_j, le théorème 2.2.1 entraîne :

$$(3.2.17)\qquad \mathrm{WF}^{2,\,1}_{\Lambda_\mathrm{J}}(\prod_{j\in f^{-1}(\mathrm{J})}\delta(s^{f(j)}-t^j)\prod_{j\in \mathrm{J}^\infty}u_j(s^j))\subset \mathrm{C}_{\Lambda^{\mathbb{C}}_\mathrm{J}}(\mathrm{S}^\mathrm{I}_\mathrm{J})\cap \mathrm{T}^*\Lambda_\mathrm{J}$$

où $\Lambda^{\mathbb{C}}_\mathrm{J}$ est complexifiée de Λ_J et $\mathrm{S}^\mathrm{I}_\mathrm{J}$ est l'ensemble des points complexes :

$$(3.2.18)\quad \mathrm{S}^\mathrm{I}_\mathrm{J}=\{(t^0,\ (t^j)_{j\in f^{-1}(\mathrm{J})},\ (s^j)_{j\in \mathrm{J}-(\mathrm{J}^\infty\cup\{0\})},\ (s^j)_{j\in \mathrm{J}^\infty};$$

$$\sum_{k\in f^{-1}(0)}\tau^k,\ (-\tau^j)_{j\in f^{-1}(\mathrm{J})},\ (\sum_{k\in f^{-1}(j)}\tau^k)_{j\in \mathrm{J}-(\mathrm{J}^\infty\cup\{0\})},\ (\sigma^j)_{j\in \mathrm{J}^\infty})$$

avec

$$t^j=s^{f(j)}\ \text{si}\ j\in f^{-1}(\mathrm{J})\ \text{et}\ (s^j,\ \sigma^j)\in \mathrm{T}^*_{\mathrm{Z}^{\mathbb{C}}_j}\mathrm{X}_j\cup \mathrm{T}^*_{\mathrm{X}_j}\mathrm{X}_j\ \text{si}\ j\in \mathrm{J}^\infty\}$$

(toujours avec la convention $s^0 = t^0$ et en notant X_j un voisinage complexe de M_j).

D'après le lemme 3.2.4 et la proposition 2.1.4, on a alors :

$$\mathrm{WF}(\mathrm{U}_0) \subset \bigcup_{\substack{\mathrm{J} \subset \mathrm{I} \\ \mathrm{J}\ \text{sous-arbre}}} \{(t^0, \tau^0);$$

il existe

– $\forall j \in f^{-1}(\mathrm{J}) - \mathrm{J}$, $\tau^j \in \mathbb{R}^n$ avec $(t^0, \tau^j) \in \mathrm{WF}(\mathrm{U}_j) \cup \mathrm{T}^*_{\mathrm{M}_j} \mathrm{M}_j$

– $\forall j \in f^{-1}(\mathrm{J}) \cup \{0\}$ une suite $t^j_m \in \mathbb{C}^n$, $t^j_m \to t^0$

– $\forall j \in \mathrm{J}^\infty$ une suite $\tau^j_m \in \mathbb{C}^n$ avec $(t^j_m, \tau^j_m) \in \mathrm{T}^*_{\mathrm{Z}^{\mathbb{C}}_j} \mathrm{X}_j \cup \mathrm{T}^*_{\mathrm{X}_j} \mathrm{X}_j$

(3.2.19) tels que :

$$\sum_{j \in \mathrm{J}^\infty} \tau^j_m + \sum_{j \in f^{-1}(\mathrm{J}) - \mathrm{J}} \tau^j \to \tau^0,$$

$$\forall j \in \mathrm{J} - \{0\},\ |t^j_m - t^{f(j)}_m| . \Big| \sum_{k \in \mathrm{J}^\infty \cap \mathrm{I}(j)} \tau^k_m + \sum_{k \in (f^{-1}(\mathrm{J}) - \mathrm{J}) \cap \mathrm{I}(j)} \tau^k \Big| \to 0 \}$$

où $\mathrm{I}(j)$ désigne l'ensemble défini dans l'énoncé du théorème. Or pour tout $j \in f^{-1}(\mathrm{J}) - \mathrm{J}$, U_j s'exprime à partir des u_k, $k \in \mathrm{I}^\infty$ par des formules analogues à (3.2.2) mais faisant intervenir un arbre de longueur $< l(\mathrm{I})$. Grâce à l'hypothèse de récurrence les $\mathrm{WF}(\mathrm{U}^j)$ de (3.2.19) se majorent par le théorème appliqué aux arbres de longueur $< l(\mathrm{I})$ ce qui donne (3.2.3).

3.3. Confinement des singularités de solutions d'équations semi-linéaires. — On se propose de montrer ici que l'utilisation des résultats précédents permet d'étendre les théorèmes de confinement des singularités de solutions de l'équation des ondes semi-linéaire avec données de Cauchy conormales classiques le long d'une hypersurface analytique prouvés par Lebeau dans [13] au cas de données de Cauchy conormales quelconques.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{1+d}$ muni des coordonnées (t, x), $\omega = \Omega \cap \{t = 0\}$ et supposons Ω domaine d'influence de ω pour l'opérateur des ondes

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_1^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Soient

$$p(u) = \sum_0^{\deg p} p_k(x) u^k$$

un polynôme à coefficients C^∞ dans Ω, u_0 (resp u_1) dans $H^s_{loc}(\omega)$ [resp $H^{s-1}_{loc}(\omega)$] $s>d/2$ et $u\in C^0_{loc}(\mathbb{R}, H^s_{loc}(\mathbb{R}^d))$ solution dans Ω de

$$\text{(3.3.1)}\qquad \begin{aligned} \square\, u &= p(u)\\ u|_{t=0} &= u_0\\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1. \end{aligned}$$

Soit V une hypersurface analytique réelle de ω de complexifiée $V^{\mathbb{C}}$ dans un voisinage $\omega^{\mathbb{C}}$ de ω dans $\mathbb{C}^d$. Notons $\mathscr{A}_V$ l'ensemble des suites $(z_m, \zeta_m)\in T^*\mathbb{C}^{1+d}$ vérifiant :

- z_m converge vers un point de Ω;
- $\exists\, \lambda_m\in\mathbb{C}^*$ telle que $\eta_m=\lambda_m^{-1}\zeta_m$ soit de norme 1 et convergente;
- $(z_m, \zeta_m)=(0, x_m; \tau_m, \xi_m)$ avec $(x_m, \xi_m)\in T^*_{V^{\mathbb{C}}}\mathbb{C}^d$ et $\xi_m^2=\tau_m^2$.

Le résultat de Lebeau s'énonce alors :

THÉORÈME 3.3.1 (Lebeau). — *Supposons u_0 et u_1 conormales classiques le long de* V. *Soient $\mathscr{E}$ un ensemble de suites de* $T^*\mathbb{C}^{1+d}$ *vérifiant les conditions* (3), (4), (5) *et les axiomes* A.1 *à* A.4 *de* [13], *contenant $\mathscr{A}_V$ et*

$$\text{(3.3.2)}\quad Z(\mathscr{E})=\mathrm{Adh}\{(z,\zeta)\in T^*\mathbb{C}^{1+d}|_\Omega;\ \exists\,(z^j_m, \zeta^j_m)_m\in\mathscr{E}, j=1,\dots,N \ \textit{avec}\ z=\lim z_m, \zeta=\lim(\zeta^1_m+\dots+\zeta^N_m)\}.$$

Si $u\in C^0_{loc}(\mathbb{R}, H^s_{loc}(\mathbb{R}^d))$ est solution de (3.3.1), *on a :*

$$\text{(3.3.3)}\qquad WF(u)\subset Z(\mathscr{E})\cap T^*\Omega.$$

On va prouver ici :

PROPOSITION 3.3.2. — *La conclusion du théorème subsiste sous la seule hypothèse : u_0 et u_1 sont conormales C^∞ quelconques le long de* V.

La preuve du théorème 3.3.1 de [13] consiste à montrer que pour tout entier k, $WF_{s+k}(u)$ est contenu dans la réunion des fronts d'ondes C^∞ d'un nombre fini de distributions explicites puis à estimer ceux-ci par le membre de droite de (3.3.3). Seule cette dernière étape fait intervenir le caractère classique de u_0, u_1 et il nous faut donc ici prouver que cette estimation subsiste pour u_0 et u_1 conormales quelconques.

Rappelons d'abord quelques notations de [13] :

Un diagramme D est un quadruplet $D=(I, J', J'', \varepsilon)$ où

- I est un arbre connexe;
- J' et J'' sont deux parties disjointes de I^∞ (on notera $J=J'\cup J''$);
- ε est une application $J\to\{0,1\}$.

On notera $(z=(z^j)_{j\in I},\ \tilde{z}=(\tilde{z}^j)_{j\in J'})$ la variable de $(\mathbb{R}^{1+d})^{|I|}\times(\mathbb{R}^{1+d})^{|J'|}$ avec $z^j=(t^j, x^j)$, $\tilde{z}^j=(\tilde{t}^j, \tilde{x}^j)$. On définit les distributions

$$[D](z,\tilde{z})=\prod_{j\in I-\{0\}} e_+(z^{f(j)}-z^j)\prod_{j\in J'}\delta(z^j-\tilde{z}^j)$$

(3.3.4) $$\{D\}(z,\tilde{z})=\prod_{j\in J'}\delta^{1-\varepsilon(j)}_{\{\tilde{t}_j=0\}}(\tilde{z}^j)\otimes\tilde{u}_{\varepsilon(j)}(z^j)\otimes\prod_{j\in J''}\delta^{\varepsilon(j)}_{\{t^j=0\}}(z^j)$$

$$|D|(z)=\int[D](z,\tilde{z})\,.\,\{D\}(z,\tilde{z})\,d\tilde{z}$$

$e_+(.)$ désignant la solution élémentaire de l'équation des ondes à support dans le cône d'avenir et $\tilde{u}_k(z)$ une distribution de $H^{s'-k}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $s'>(d+1)/2$ conormale C^∞ le long de $V\subset\Omega$ et vérifiant $\tilde{u}_{k\,|\,t=0}=u_k$, $\partial_t\tilde{u}_{k\,|\,t=0}=0$ (si $x=(x', x'')$ est un système de coordonnées sur ω avec $V=\{x''=0\}$, et si

$$u_k(x)=\int e^{ix''\cdot\xi''}a_k(x',\xi'')\,d\xi''$$

avec a_k symbole C^∞, il suffit de poser

$$\tilde{u}_k(x,t)=\int e^{ix''\cdot\xi''+it\tau}\,\tilde{a}_k(x',\xi'',\tau)\,d\xi''\,d\tau$$

avec

$$\tilde{a}_k(x',\xi'',\tau)=a_k(x',\xi'')\,\chi(\tau^2/(1+\xi''^2))\,(1+\xi''^2)^{-1/2}$$

où $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int\chi(\sigma^2)\,d\sigma=1$).

Le fait que le produit intervenant dans l'expression de $|D|$ ait un sens se prouve comme le lemme 2 de [13], § II.2.

D'après [13], § II.3 on sait que si un point $(z^0,\zeta^0)=(t^0, x^0;\tau^0,\xi^0)$ avec $t^0>0$ est dans $WF_{s+k}(u)\,(k\in\mathbb{N})$, il existe un diagramme D et des points $z^j\in\Omega$, $j\in I-\{0\}$, $\tilde{z}^j\in\Omega$, $j\in J'$ tels que

(3.3.5) $$\begin{cases}(z^0,(z^j)_{j\in I-\{0\}},(\tilde{z}^j)_{j\in J'};\zeta^0,0,0)\in WF([D]\,.\,\{D\})\\ (z,\tilde{z})\in \operatorname{Supp}([D]\,.\,\{D\}).\end{cases}$$

Écrivons

$$[D]\,.\,\{D\}=[D]((z^j)_{j\in I},(\tilde{z}_j)_{j\in J'})\otimes\{D\}((w^j)_{j\in J},(\tilde{w}^j)_{j\in J'})\big|_{(z^j=w^j)_{j\in J},\,(\tilde{z}^j=\tilde{w}^j)_{j\in J'}}.$$

D'après [13], § II.2, lemme 2 les hypothèses de régularité du théorème 1.2.2 sont satisfaites et on a

(3.3.6) $$WF([D]\,.\,\{D\})\subset\bigcup_{\substack{K\subset J\\ K'\subset J'}}\rho_{K,K'}(WF^{2,1}_{\Lambda_{K,K'}}([D]\otimes\{D\})\cap V_{K,K'})$$

où $\Lambda_{K,K'}$ désigne la famille de lagrangiennes $\Lambda_{K,K'}=(\Lambda_K^j)_{j\in I}\cup(\Lambda_{K'}^j)_{j\in J'}$ avec $\Lambda_K^j=$ section nulle de $T^*\mathbb{C}^{1+d}$ si $j\in I-J$, $\Lambda_K^j=$ section nulle de $T^*(\mathbb{C}^{1+d}\times\mathbb{C}^{1+d})$ si $j\in J-K$, $\Lambda_K^j=$ conormal à la diagonale $z^j=w^j$ de $\mathbb{C}^{1+d}\times\mathbb{C}^{1+d}$ si $j\in K$, $\Lambda_{K'}^j=$ section nulle de $T^*(\mathbb{C}^{1+d}\times\mathbb{C}^{1+d})$ si $j\in J'-K'$, $\Lambda_{K'}^j=$ conormal à la diagonale $\tilde{z}^j=\tilde{w}^j$ de $\mathbb{C}^{1+d}\times\mathbb{C}^{1+d}$ si $j\in K'$.

Écrivons pour $k=0, 1$, $\tilde{u}_k(z)=Q_k(\delta_V)$ où Q_k est un opérateur pseudo-différentiel C^∞ et δ_V le courant d'intégration sur la sous-variété V de Ω.

D'après le théorème 3.1.1, (3.3.6) se majore par

$$(3.3.7)\quad \bigcup_{\substack{K\subset J\\ K'\subset J'}} \rho_{K,K'}\Big[V_{K,K'}\cap\Big(\prod_{j\in J'-K}(\mathrm{WF}(\delta_V(w^j))\cup T^*_\Omega\Omega)\\ \times\prod_{j\in J''-K}(\mathrm{WF}(\delta^{\varepsilon(j)}_{\{t^j=0\}}(w^j))\cup T^*_\Omega\Omega)\prod_{j\in J'-K'}(\mathrm{WF}(\delta^{1-\varepsilon(j)}_{\{\tilde{t}^j=0\}}(\tilde{w}^j))\cup T^*_\Omega\Omega)\\ \times\mathrm{WF}^{2,1}_{\Lambda_{K,K'}}\Big([D]\otimes\prod_{j\in K\cap J'}\delta_V(w^j)\prod_{j\in K\cap J''}\delta^{\varepsilon(j)}_{\{t^j=0\}}(w^j)\prod_{j\in K'}\delta^{1-\varepsilon(j)}_{\{\tilde{t}^j=0\}}(\tilde{w}^j)\Big)\Big]$$

D'après le théorème 2.2.1, que l'on peut appliquer quitte à remarquer que $e_+(t,x)=\mathrm{Cte}\,\Box^k 1_{\{|x|\leqq t\}}$ si $d=2k+1$ et $e_+(t,x)=\mathrm{Cte}\,\Box^k 1_{\{|x|\leqq t\}}(t^2-|x|^2)^{1/2}$ si $d=2k$, le terme 2-microlocal de (3.3.7) se majore par

$$C_{\Lambda^{\mathbb{C}}_{K,K'}}(\Lambda_{[D]}\otimes\Lambda^{K,K'}_{\{D\}})\cap T^*\Lambda_{K,K'}$$

où

$$\Lambda_{[D]}=\{((z^j)_{j\in I},(\tilde{z}^j)_{j\in J'};(\zeta^j)_{j\in I},(\tilde{\zeta}^j)_{j\in J'});\ \text{il existe}\,(\Xi^j)_{j\in I-\{0\}}$$

avec :

$$(z^j-z^{f(j)},\Xi^j)\in\Lambda_\Box\qquad\text{si}\quad j\in I-\{0\}$$

$$z^j=\tilde{z}^j\qquad\text{si}\quad j\in J'$$

$$\zeta^0=\sum_{k\in f^{-1}(0)}\Xi^k$$

$$\zeta^j=-\Xi^j+\sum_{k\in f^{-1}(j)}\Xi^k,\ j\in I-(J'\cup\{0\})$$

$$\zeta^j=-\Xi^j-\tilde{\zeta}^j,\ j\in J'\}$$

où $\Lambda_\Box=T^*_{\Gamma^{\mathbb{C}}}\mathbb{C}^{1+d}\cup T^*_{\mathbb{C}^{1+d}}\mathbb{C}^{1+d}$, $T^*_{\Gamma^{\mathbb{C}}}\mathbb{C}^{1+d}$ désignant la réunion du conormal à la partie lisse du cône d'onde complexe et du conormal à 0,

$$\Lambda^{K,K'}_{\{D\}}=\{((z^j)_{j\in K},(\tilde{z}^j)_{j\in K'};(\zeta^j)_{j\in K},(\tilde{\zeta}^j)_{j\in K'});\ \tilde{t}^j=0,\tilde{\xi}^j=0\ \text{si}\ j\in K',\\ t^j=0,(0,x^j;\tau^j,\xi^j)\in T^*_{V^{\mathbb{C}}}\mathbb{C}^{1+d}\ \text{si}\ j\in K\cap J',\\ t^j=0,\xi^j=0\ \text{si}\ j\in K\cap J''\}.$$

D'après (2.1.9) on a donc

$$\mathrm{WF}([D]).\{D\})\subset\{(z,\tilde{z};\zeta,\tilde{\zeta});\ \exists((z^j_m)_{j\in I},(\tilde{z}^j_m)_{j\in J'};(\zeta^j_m)_{j\in I},(\tilde{\zeta}^j_m)_{j\in J'})\\ \text{dans}\ \Lambda_{[D]},\ \exists((w^j_m)_{j\in J},(\tilde{w}^j_m)_{j\in J'};(\omega^j_m)_{j\in J},(\tilde{\omega}^j_m)_{j\in J'})$$

dans $\Lambda_{\{D\}}$ tels que

$z_m^j \to z^j, j \in I, \tilde{z}_m^j \to \tilde{z}^j, j \in J'$

$$w_m^j \to z^j, j \in J, \tilde{w}_m^j \to \tilde{w}^j, j \in J'$$
$$\zeta_m^j \to \zeta^j, j \in I - J$$
$$\zeta_m^j + \omega_m^j \to \zeta^j, j \in J$$
$$\tilde{\zeta}_m^j + \tilde{\omega}_m^j \to \tilde{\zeta}^j, j \in J'$$
$$|z_m^j - w_m^j| \, . \, |\zeta_m^j| \to 0, j \in J$$
$$|\tilde{z}_m^j - \tilde{w}_m^j| \, . \, |\tilde{\zeta}_m^j| \to 0, j \in J' \}$$

avec

$$\Lambda_{\{D\}} = \{ ((z^j)_{j \in J}, (\tilde{z}^j)_{j \in J'}; (\zeta^j)_{j \in J}, (\tilde{\zeta}^j)_{j \in J'}); \tilde{t}^j = 0, \tilde{\xi}^j = 0 \text{ si } j \in J',$$
$$(t^j = 0 \text{ et } (0, x^j; \tau^j, \xi^j) \in T^*_{\mathbb{V}} \mathbb{C}^{1+d}) \text{ si } j \in J',$$
$$t^j = 0, \xi^j = 0 \text{ si } j \in J'' \}.$$

La proposition en résulte alors par la même preuve que dans [13], § II.4. La seule différence consiste à remplacer la condition (3) 6 de [13] par $|z_m^j - w_m^j| \, . \, |\zeta_m^j| \to 0$, $|\tilde{z}_m^j - \tilde{w}_m^j| \, . \, |\tilde{\zeta}_m^j| \to 0$ qui est plus faible mais qui suffit pour conclure.

APPENDICE

On va prouver ici quelques résultats géométriques utilisés dans les preuves de certains théorèmes de la section 2. On utilisera librement les propriétés de base des ensembles et des applications sous-analytiques pour lesquelles on renvoie à [2] ou au paragraphe de rappels de [5] et à la bibliographie qui y est donnée.

Prouvons d'abord :

PROPOSITION A.1. — *Soient* U *un ouvert sous-analytique de* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$f: \quad U \times]0, 1]^{p+1} \to \mathbb{R}$$
$$(x, \mu) \to f(x, \mu)$$

une fonction continue, localement lipschitzienne en x uniformément en μ, *bornée sur* $U \times]0, 1]^{p+1}$, *à graphe sous-analytique dans* $\bar{U} \times [0, 1]^{p+1}$.

Posons $f_0(x) = \overline{\lim}_{\mu \to 0} f(x, \mu)$.

Alors :

– f_0 *est sous-analytique localement lipschitzienne sur* U;

– *il existe un ouvert sous-analytique* $V \subset U \times]0, 1]^{p+1}$ *tel que*

$$U \times \{0\} \subset \bar{V} \text{ et que } \lim_{\substack{(x, \mu) \to (x_0, 0) \\ (x, \mu) \in V}} f(x, \mu) = f_0(x_0),$$

– *pour tout* $x_0 \in \mathrm{U}$ *tel que* f_0 *soit dérivable en* x_0 *il existe une suite* $(x_m, \mu_m) \in \mathrm{V}$ *convergeant vers* $(x_0, 0)$ *avec* f *analytique réelle près de* (x_m, μ_m) *et* $\partial f/\partial x\,(x_m, \mu_m) \to \partial f_0/\partial x\,(x_0)$.

Démonstration. – Soient $\mathrm{S} = \mathrm{gr}(f) \subset \mathrm{U} \times]0, 1]^{p+1} \times \mathbb{R}$ et $\Sigma = \{(x, t);\ t = \sup\{s;\ (x, s) \in \bar{\mathrm{S}} \cap \{\mu = 0\}\}\}$. On sait que Σ est sous-analytique (*cf.* par exemple [20]) et Σ n'est autre que le graphe de f_0 d'où la première assertion.

Soit $\mathrm{V} = \{(x, \mu) \in \mathrm{U} \times]0, 1]^{p+1};\ d((x, f(x, \mu), \mu), \Sigma \times \{0\}) < \mathrm{C}\,|\mu|^{\alpha}\}$. Montrons que si C est assez grand et $\alpha > 0$ assez petit, $\mathrm{U} \times \{0\}$ est contenu dans $\bar{\mathrm{V}}$. D'après le lemme de l'aile [21] on peut choisir une stratification $(\Sigma_j)_{j \in \mathrm{J}}$ de Σ et pour tout j une variété S_j analytique réelle contenue dans S, de dimension $\dim \Sigma_j + 1$, sous-analytique dans $\bar{\mathrm{U}} \times [0, 1]^{p+1} \times \mathbb{R}$ avec $\Sigma_j \subset \bar{\mathrm{S}}_j$ et $\bar{\mathrm{S}}_j \cap \{\mu = 0\} \subset \Sigma_j$. D'après les inégalités de Lojaciewicz il existe c et N tels que si $(x, f(x, \mu), \mu) \in \bigcup_j \mathrm{S}_j$ on ait $|\mu| \geqq c\,d((x, f(x, \mu), \mu), \Sigma)^{\mathrm{N}}$. Il suffit de choisir $\alpha < 1/\mathrm{N}$, $\mathrm{C} > c^{-1/\mathrm{N}}$. Pour prouver la dernière assertion, on peut toujours se restreindre au cas où f_0 est analytique au voisinage de x_0 ([5], lemme 1.3.8). Soit V′ un ouvert sous-analytique de V tel que $\{(x, 0);\ |x - x_0| \leqq \delta\}$ soit adhérent à V′ et que f soit analytique sur V′. On supposera δ assez petit pour que f_0 soit analytique au voisinage de $\{x;\ |x - x_0| \leqq \delta\}$. D'après le l'aile [21], il existe A variété analytique sous-analytique de V′ de dimension $n+1$ telle que $\{x;\ |x - x_0| \leqq \delta\} \times \{0\} \subset \bar{\mathrm{A}}$.

Pour $\rho \in [0, 1]$ posons

(A.1) $$\mathrm{A}_\rho = \{(x, \mu) \in \bar{\mathrm{A}};\ |\mu| = \rho\}.$$

Si ρ est assez petit non nul, A_ρ est une hypersurface lisse de A. Il résulte de [8] lemme 8.6.3 que si x est en dehors d'un sous-ensemble sous-analytique de codimension 1 de A_0, si $(x_m, \mu_m) \to (x, 0)$ et si $\mathrm{T}_{(x_m, \mu_m)} \mathrm{A}_{|\mu_m|}$ converge vers τ, τ contient $\mathrm{T}_x \mathrm{A}_0$ (en supposant x dans les points lisses de A_0), donc $\tau = \mathrm{T}_x \mathrm{A}_0$ pour des raisons de dimension. Donc quitte à remplacer x_0 par un point hors de l'ensemble exceptionnel, également noté x_0, à diminuer δ et à remplacer A par un voisinage assez petit de $\{x;\ |x - x_0| \leqq \delta\}$ dans A, également noté A, on peut supposer $\mathrm{T}_{(x, \mu)} \mathrm{A}_{|\mu|}$ arbitrairement voisin de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. La projection orthogonale $\Pi_{(x, \mu)} : \mathbb{R}^n \times \{0\} \to \mathrm{T}_{(x, \mu)} \mathrm{A}_{|\mu|}$ est alors un isomorphisme et si $\mathrm{X}_{(x, \mu)} = \Pi_{(x, \mu)}(\partial f/\partial x\,(x, \mu))$, $\mathrm{X}_{(x, \mu)}$ est un champ de vecteurs analytique sur A, tangent au feuilletage des A_ρ et tel qu'il existe $\gamma \in]0, 1[$ avec $|\mathrm{X}_{(x, \mu)}| \geqq \gamma\,|\partial f/\partial x\,(x, \mu)|$. Appliquons maintenant le raisonnement de [13], § III.2, lemme 4 : supposons que $\partial f_0/\partial x\,(x_0) = 0$ et qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $|\partial f/\partial x\,(x, \mu)| \geqq \mathrm{C}$ sur V′. Soit $\varphi(\,.\,, s)$ le flot du champ $\mathrm{X}/|\mathrm{X}|$. Supposons δ assez petit pour que $\varphi(\,.\,, s)$ soit défini sur $\{(x, \mu, s);\ |x - x_0| \leqq \delta,\ |\mu| \leqq \delta,\ |s| \leqq \delta\}$. Si (x_m, μ_m) est une suite de A convergeant vers $(x_0, 0)$, on a pour $|s| \leqq \delta$:

(A.2) $$\left\{\begin{array}{l} |\varphi((x_m, \mu_m), s) - (x_m, \mu_m)| \leqq |s| \\ |f((\varphi(x_m, \mu_m), s)) - f(x_m, \mu_m)| \geqq \gamma \mathrm{C}\,|s|. \end{array}\right.$$

Soit $(y_0, 0) = \lim \varphi((x_m, \mu_m), \delta)$. Comme $\mathrm{A} \subset \mathrm{V}$, $f_{|\mathrm{A}}$ est continue donc on a si $m \to +\infty$

(A.3) $$\left\{\begin{array}{l} |y_0 - x_0| \leqq \delta \\ |f_0(y_0) - f_0(x_0)| \geqq \gamma \mathrm{C}\,\delta. \end{array}\right.$$

Puisque par hypothèse $\partial f_0/\partial x(x_0)=0$ on a $|\partial f_0/\partial x(x)|\leqq\gamma C/2$ si $|x-x_0|\leqq\delta$ avec δ assez petit. Cela contredit les deux inégalités précédentes et achève la preuve de la proposition.

Dans cette deuxième partie de l'appendice nous allons prouver l'assertion d'isotropie figurant dans la proposition 2.1.4. Rappellons qu'un sous-analytique conique Λ de $T^*\mathbb{R}^n$ est dit isotrope si la forme de Liouville de $T^*\mathbb{R}^n$ s'annulle sur une sous-variété ouverte dense de Λ ([8], § 8.2). D'après [8], proposition 8.2.2 et 8.2.3, un sous-analytique conique Λ de $T^*\mathbb{R}^n$ est isotrope si et seulement si il existe une stratification sous-analytique $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que Λ soit contenu dans $\bigcup_{S\in\mathscr{S}} T^*_S\mathbb{R}^n$. Le résultat de base que nous allons prouver est alors :

THÉORÈME A.2. — *Soit $\mathscr{S}$ une stratification sous-analytique de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors $\tilde{\mathscr{S}}$ stratification sous-analytique de $\mathbb{R}^n$, compatible à $\mathscr{S}$ et telle que pour toute strate* S *de $\tilde{\mathscr{S}}$ et tout* p-uple$(S_1, \ldots, S_p)$ *de strates de $\tilde{\mathscr{S}}$ telles que $S\subset\bar{S}_j$, $j=1, \ldots, p$, on ait*

$$\left(\hat{+}_1^p T^*_{S_j}\mathbb{R}^n\right)\Big|_S \subset T^*_S\mathbb{R}^n. \tag{A.4}$$

COROLLAIRE A.3. — *Soient Λ_j, $j=1, \ldots, p$ des ensembles sous-analytiques coniques isotropes de* $T^*\mathbb{R}^n$. *Alors $\hat{+}_1^p\Lambda_j$ est isotrope (sous-analytique).*

Démonstration du corollaire. — Puisqu'il existe une stratification sous-analytique $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout j, $\Lambda_j\subset\bigcup_{S\in\mathscr{S}} T^*_S\mathbb{R}^n$ et que d'après le théorème $\mathscr{S}$ peut être raffinée en une stratification $\tilde{\mathscr{S}}$ vérifiant (A.4) on a $\hat{+}_1^p\Lambda_j\subset\bigcup_{S\in\tilde{\mathscr{S}}} T^*_S\mathbb{R}^n$ d'où le résultat.

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant :

LEMME A.2. — *Soit* S *une strate de $\mathscr{S}$. Il existe un fermé sous-analytique* Z *de* S *de codimension* 1 *dans* S *tel que pour toutes strates $S_1, \ldots, S_p$ de $\mathscr{S}$ adjacentes à* S *et tout* $x\in S-Z$

$$\left(\hat{+}_1^p T^*_{S_j}\mathbb{R}^n\right)_x \subset (T^*_S\mathbb{R}^n)_x. \tag{A.5}$$

Démonstration. — Si l'on suppose que $\mathscr{S}$ satisfait à la condition (*a*) de Whitney sur $S-Z$, ce qui est loisible, l'inclusion (A.5) résulte par récurrence sur p de

$$\left(\hat{\hat{+}}_1^p T^*_{S_j}\mathbb{R}^n\right)_x \subset (T^*_S\mathbb{R}^n)_x \tag{A.6}$$

pour $x\in S-Z$, avec la notation

$$\begin{aligned}\hat{\hat{+}}_1^p F_j=\{(x;\xi)\in T^*\mathbb{R}^n;\ &\exists \text{ des suites } (x^j_m, \xi^j_m)\in F_j, j=1, \ldots, p\\ &\exists \text{ une suite } x^0_m\in\mathbb{R}^n\\ &x^j_m\to x, j=0, \ldots, p, |\xi^j_m|\to+\infty, j=1, \ldots, p\\ &|x^j_m-x^0_m|\,.\,|\xi^j_m|\to 0, j=1, \ldots, p\\ &\xi^1_m+\ldots+\xi^p_m\to\xi\}.\end{aligned} \tag{A.7}$$

Supposons qu'il existe un ouvert sous-analytique U de S, au-dessus duquel (A.6) n'est jamais satisfait et tel que dans un système de coordonnées locales $x=(x', x'')$ au voisinage de $\bar{U}$, S soit donnée par $x''=0$. Considérons l'ensemble :

$$\text{(A.8)}\quad E=\Big\{((x^0,\xi^0),(x^1,\xi^1),\ldots,(x^p,\xi^p),u_1,\ldots,u_p,\sigma_1,\ldots,\sigma_p);\ (x^j,\xi^j)\in T^*_{S_j}\mathbb{R}^n,\ |\xi^j|=1,\ j=1,\ldots,p;\ u_j\in]0,1],\ \sigma_j\in]0,1],\ j=1,\ldots,p;\ u_1\ldots u_p\xi^0=\sum_{j=1}^{p}\prod_{k\neq j}u_k\xi^j;\ \sigma_j u_j=|x^0-x^j|\ j=1,\ldots,p\Big\}.$$

C'est un sous-analytique ainsi que $E_1=\bar{E}\cap\{x^0=x^1=\ldots=x^p,\ u_1=\ldots=u_p=\sigma_1=\ldots=\sigma_p=0\}$. Si $\tilde{\pi}$ désigne la projection $(x^0,\xi^0,\xi^1,\ldots,\xi^p)\to(x^0,\xi^0)$ on a

$$\text{(A.9)}\qquad \tilde{\pi}(E_1)=\hat{\hat{+}}_{1}^{p}\,T^*_{S_j}\mathbb{R}^n.$$

Par hypothèse, pour tout $x'\in U$, il existe $\xi=(\xi',\xi'')$ avec $\xi'\neq 0$ et $(x',0;\xi',\xi'')\in\tilde{\pi}(E_1)$. Soit π la projection de $T^*\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. Quitte à remplacer U par un sous-ouvert sous-analytique dense, également noté U, il existe donc une strate Γ de E_1 telle que $\pi\circ\tilde{\pi}_{|\Gamma}:\Gamma\hookrightarrow U$ soit un isomorphisme et que pour tout $(x',0;\xi',\xi'')\in\tilde{\pi}(\Gamma)$ on ait $\xi'\neq 0$.

Montrons alors qu'il existe un point y'_0 de U, un voisinage V de y'_0 dans U et une application analytique réelle

$$\text{(A.10)}\qquad g:\quad V\times[0,1]\to\bar{E}$$

telle que $g(y',0)=(\pi\circ\tilde{\pi}_{|\Gamma})^{-1}$ pour $y'\in V$ et $g(y',s)\in E$ pour tout $y'\in V$ et $s\in]0,1]$. Pour cela remarquons que d'après le lemme de l'aile de Whitney, il existe, quitte à remplacer Γ par le complémentaire d'un fermé sous-analytique de codimension 1 dans Γ, également noté Γ, une sous-variété analytique et sous-analytique Σ de E, de dimension égale à $\dim\Gamma+1$ *avec* $\Gamma\subset\bar{\Sigma}$. Considérons un ouvert de Γ au voisinage duquel Γ se redresse en un sous-espace vectoriel de $T^*\mathbb{R}^n\times\ldots\times T^*\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times\ldots\times\mathbb{R}^p$. Il existe H sous-espace vectoriel contenant Γ, de dimension $\dim\Gamma+1$ et F fermé sous-analytique de codimension 1 de Γ tels que pour tout point z_0 de $\Gamma-F$, Σ soit près de z_0 le graphe d'une application analytique bornée, définie sur l'intersection d'un voisinage de z_0 avec l'un des demi-espaces de H de bord Γ, à valeurs dans $H^\perp$. On en déduit l'existence d'un ouvert V' de U, voisinage sous-analytique de $\pi\circ\tilde{\pi}(z_0)$ et d'une application $(y',t)\to\tilde{g}(y',t)$, sous-analytique sur $V'\times[0,1]$ analytique sur $V'\times]0,1]$ vérifiant $\tilde{g}(.,0)=(\pi\circ\tilde{\pi}_{|\Gamma})^{-1}$ et $\tilde{g}(y',t)\in E$ si $t\in]0,1]$. D'après un résultat de Pawlucki ([17], proposition 2) il existe $k\in\mathbb{N}^*$ et V'' ouvert sous-analytique dense de V' tel que pour tout

$y'_0 \in V''$, $(y', s) \to g(y', s) = \tilde{g}(y', s^k)$ se prolonge analytiquement au voisinage de $(y'_0, 0)$ dans $V'' \times \mathbb{R}$.

Écrivons alors

$$\text{(A.11)} \quad g(y', s) = ((x^0(y', s), \xi^0(y', s)), \ldots, (x^p(y', s), \xi^p(y', s)), \\ u_1(y', s), \ldots, u_p(y', s), \sigma_1(y', s), \ldots, \sigma_p(y', s)).$$

Puisque $(x^j(y', s), \xi^j(y', s)) \in T^*_{S_j} \mathbb{R}^n$ on aura pour tout j

$$\text{(A.12)} \qquad \sum_{l=1}^{n} \xi_l^j(y', s)\, dx_l^j(y', s) = 0$$

Il en résulte si $y' = (y_1, \ldots, y_m)$ que

$$\text{(A.13)} \qquad \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \frac{\zeta_l^j(y', s)}{u_j(y', s)} \frac{\partial x_l^j}{\partial y_k}(y', s) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m, \quad y' \in V, \quad s \in]0, 1].$$

Puisque $x^j(y', 0) = x^0(y', 0)$ pour tout j, il existe des entiers M_l^j et des fonctions analytiques réelles $h_l^j(y', s)$ telles que $h_l^j(y', 0) \not\equiv 0$ et que

$$\text{(A.14)} \qquad x_l^j(y', s) - x_l^0(y', s) = s^{M_l^j} h_l^j(y', s).$$

Si K est un compact de $\{ y' ; \forall j, l\, h_l^j(y', 0) \neq 0 \}$, il existe $C > 0$ tel que

$$\text{(A.15)} \qquad \left| \frac{\partial}{\partial y_k}(x_l^j(y', s) - x_l^0(y', s)) \right| \leqq C \,|\, x_l^j(y', s) - x_l^0(y', s) \,|$$

si $y' \in K$ et s est proche de 0. Il résulte alors de (A.8), (A.13) et (A.15) que

$$\text{(A.16)} \qquad \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\xi_l^j(y', s)}{u_j(y', s)} \right) \frac{\partial x_l^0}{\partial y_k}(y', s) \to 0, \qquad k = 1, \ldots, m$$

si $y' \in K$ et $s \to 0+$.

Or

$$x_l^0(y', 0) = y_l \quad \text{si } l \leqq m, \qquad x_l^0(y', 0) = 0 \quad \text{si } m+1 \leqq l \leqq n$$

et

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\xi^j(y', s)}{u_j(y', s)} \to \xi^0(y', 0) \quad \text{si } s \to 0+.$$

Il résulte donc de (A.16) que $\xi_l^0(y', 0) = 0$ si $l \leqq m$ ce qui contredit l'hypothèse sur U.

Démonstration du théorème A.2. – Il suffit de procéder par récurrence sur la codimension des strates de $\mathscr{S}$ en utilisant à chaque pas le lemme A.4.

Pour terminer, nous allons déduire du corollaire A.3 l'isotropie de divers ensembles intervenant dans les paragraphes 2 et 3. Prouvons d'abord :

COROLLAIRE A.5. — *Reprenons les notations de la proposition* 2.1.4. *Soit* S *un fermé conique sous-analytique isotrope de* $T^* M_0 \times \ldots \times T^* M_p$. *Alors* $\bigcup_{I} \rho_I(C_{\Lambda_I}(S) \cap V_I)$ *est isotrope dans* $T^* M_0 \times T^* N_1 \times \ldots \times T^* N_p$.

Démonstration. — Posons $F_0 = S$,

$$F_j = T^*_{M_0} M_0 \times \ldots \times T^*_{M_{j-1}} M_{j-1} \times T^*_{N_j} M_j \times T^*_{M_{j+1}} M_{j+1} \times \ldots \times T^*_{M_p} M_p,$$

$j=1, \ldots, p$. Si

$$\pi: \quad T^* M_0 \times \ldots \times T^* M_p |_{N_1 \times \ldots \times N_p} \to T^* M_0 \times T^* N_1 \times \ldots \times T^* N_p$$

est la projection naturelle, il résulte de (2.1.4) que

$$\bigcup_{I} \rho_I(C_{\Lambda_I}(S) \cap V_I) = \pi\left(\left(\hat{+}_{0}^{p} F_j\right)\Big|_{N_1 \times \ldots \times N_p}\right).$$

Le résultat découle alors du corollaire A.3.

COROLLAIRE A.6. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.2.1 *le membre de droite de* (3.2.3) *est isotrope sous-analytique.*

Démonstration. — Soient X_j des copies de $X = \mathbb{C}^n$ pour $j \in I$ et soit S l'image de

$$\prod_{j \in I - I^\infty} T^*_{X_j} X_j \times \prod_{j \in I^\infty} (T^*_{Z_j^c} X_j \cup T^*_{X_j} X_j)$$

par le changement de variables

$$(t_0, (t_j)_{j \in I - \{0\}};\ \tau_0, (\tau_j)_{j \in I - \{0\}}) \to (s_0 = t_0, (s_j = t_j - t_{f(j)})_{j \in I - \{0\}};$$

$$\sigma_0 = \sum_{k \in I} \tau_k, (\sigma_j = \sum_{k \in I(j)} \tau_k)_{j \in I - \{0\}})$$

où $I(j) = \{k \in I; \exists l \in \mathbb{N} \text{ et } f^l(k) = j\}$. Si pour J partie de $I - \{0\}$, Λ_J désigne la famille de lagrangiennes $\Lambda_J = (\Lambda_{J,j})_{j \in I}$ donnée par $\Lambda_{J,0} = T^*_{X_0} X_0$, $\Lambda_{J,j} = T^*_{X_j} X_j$ si $j \notin J$, $\Lambda_{J,j} = T^*_{\{s_j = 0\}} X_j$ si $j \in J$, $\bigcup_{J} \rho_J(C_{\Lambda_J}(S) \cap V_J)$ n'est autre, d'après (2.1.4) que le membre de droite de (3.2.3). La conclusion résulte donc du corollaire A.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BEALS, *Vector fields Associated to the Nonlinear Interaction of Progressing Waves* (*Indiana Univ. Math. J.*, vol. 37, n° 3, 1988, p. 637-666).

[2] E. BIERSTONE et P. D. MILMAN, *Semi-analytic and subanalytic Sets* (*Inst. Htes Etudes Sci. Publ. Math.*, n° 67, 1988, p. 5-42).

[3] J. M. BONY, *Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires* (*Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz, exp. n°* 2, 1981-1982). *Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non linéaires* (*Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz, exp. n°* 10, 1983-1984).

[4] J. M. BONY, Second Microlocalization and Propagation of Singularities for Semi-linear Hyperbolic Equations (*Taniguchi symp. HERT*, Kotaka and Tokyo, 1984, 11-49).

[5] J. M. DELORT et G. LEBEAU, *Microfonctions I-lagrangiennes* (*J. Math. Pures et Appl.*, 67, 1988, p. 39-84).

[6] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* (*Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, 1983).

[7] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Micro-hyperbolic Systems* (*Acta Math.*, 142, 1979, p. 1-55).

[8] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Microlocal Study of Sheaves* (*Astérisque*, 128, 1985).

[9] B. LASCAR et J. SJÖSTRAND, *Equation de Schrödinger et propagation des singularités* (*Astérisque*, 95, 1982).

[10] Y. LAURENT, *Problème de Cauchy 2-microdifférentiel et cycles évanescents*, Prépublication de l'université Paris-Sud, 1988.

[11] G. LEBEAU, *Deuxième microlocalisation à croissance* (*Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz*, exp. n° 15, 1982-1983).

[12] G. LEBEAU, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 35, (2), 1985, p. 145-216).

[13] G. LEBEAU, *Equations des ondes semi-linaires II. Contrôle des singularités et caustiques non linéaires* (Invent. math. 95, 1989, p. 277-323).

[14] G. LEBEAU, *Front d'onde des fonctions non linéaires et polynômes* (*Séminaire E.D.P.*, exp. n° 10, Ecole Polytechnique, 1988-1989).

[15] A. MELIN et J. SJÖSTRAND, *Fourier Integral Operators with Complex Valued Phase Functions* (*Springer Lect. Notes Math.*, 459, p. 121-223).

[16] R. MELROSE et N. RITTER, *Interaction of nonlinear Progressing Waves* (*Ann. Math.*, 121, 1985, p. 187-213).

[17] W. PAWLUCKI, *Le théorème de Puiseux pour une application sous-analytique* (*Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, vol. 32, n° 9-10, 1984, p. 555-560).

[18] C. SABBAH, *Polynômes de Bernstein-Sato à plusieurs variables* (*Séminaire E.D.P.*, exp. n° 19, Ecole Polytechnique, 1986-1987).

[19] J. SJÖSTRAND, *Singularités analytiques microlocales* (Astérisque, 95, 1982).

[20] M. TAMM, *Subanalytic sets in the Calculus of Variations* (*Acta Math.*, vol. 146, 1981, p. 167-199).

[21] R. THOM, *Ensembles et morphismes stratifiés* (*Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 75, 1969, p. 240-284).

(Manuscrit reçu le 1er décembre 1988,
révisé le 21 juin 1989).

J. M. DELORT,
I.R.M.A.R.,
Université Rennes-I,
L. A. n° 305,
Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex,
France.

Adresse actuelle :
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud,
91405 Orsay Cedex, France.