

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI SKODA

**$d''$ -cohomologie à croissance lente dans  $C^n$**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 4, n° 1 (1971), p. 97-120

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1971\\_4\\_4\\_1\\_97\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_1_97_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## $d''$ -COHOMOLOGIE A CROISSANCE LENTE DANS $\mathbf{C}^n$

PAR HENRI SKODA.



### Introduction.

Soit  $f$  une forme différentielle dans  $\mathbf{C}^n$ ,  $d''$ -fermée, et dont les coefficients sont soit des mesures à croissance lente, soit des fonctions dans  $L^p_{loc}$  à croissance lente ( $1 \leq p \leq +\infty$ ). On construit une forme  $U$  telle que

$$d''U = f$$

et qui vérifie des conditions de croissance très précises. Lorsque  $f$  s'annule au voisinage de  $o$ , la construction de  $U$  est entièrement explicite, on a une représentation intégrale des coefficients de la forme  $U$  en fonction des coefficients de  $f$ , à l'aide de noyaux.

On reprend une méthode qui avait servi à démontrer la trivialité locale de la  $d''$ -cohomologie (*cf.* Dolbeault [1]) et qui consiste à résoudre d'abord l'équation  $\Delta U = 2\delta''f$ , la forme  $\omega = f - d''U$  est alors  $d''$ -fermée et harmonique et dans le cas présent, on montre que ses coefficients sont des polynômes; on est alors ramené au cas où  $f$  est polynomiale. La technique utilisée suit de très près celle employée par P. Lelong (*cf.* [3]) pour la résolution de  $id'd''V = \theta$  (lorsque  $\theta$  est à croissance lente), en particulier dans la construction des noyaux intégraux et dans la majoration de la forme  $\omega$ .

On retrouve d'ailleurs les résultats de P. Lelong relatifs à l'opérateur  $d'd''$ .

La même méthode s'applique pour l'opérateur  $d$  dans  $\mathbf{R}^n$  et donne des résultats tout à fait semblables.

Une méthode semblable, mais techniquement encore plus pénible, permettrait, dans le cas d'un ouvert de  $\mathbf{C}^n$  régulier, borné, pseudoconvexe, de ramener la  $d''$ -cohomologie des formes à coefficients  $L^p_{loc}$  (ou mesures) et à croissance lente, à la  $d''$ -cohomologie à croissance d'Hörmander. Mais il me paraît difficile d'obtenir alors les résultats *optimaux* sur la croissance.

Dans le cas où  $f$  est une forme à coefficients dans  $L^2_{\text{loc}}$ , nous avons comparé nos résultats à ceux de Hörmander, ce qui nous a conduit à une petite amélioration technique du résultat d'Hörmander; le théorème d'Hörmander, amélioré, redonne alors très sensiblement nos résultats (dans le cas  $L^2$ ).

La première partie de ce travail, très technique, est consacrée à la construction et à l'estimation d'une bonne solution de l'équation  $\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_i}$  (où  $U$  est une fonction et  $\mu$  une mesure). On en déduit alors aussitôt une forme  $U$  solution de  $\Delta U = \delta'' f$ . La deuxième partie est consacrée à la résolution du problème initialement posé.

### I. — Solution de l'équation $\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_i}$ .

Soit  $\sigma_n$  l'aire de la sphère euclidienne de  $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$ , soit  $E(z)$  la solution élémentaire du laplacien  $\Delta$ , définie par

$$E(z) = - \frac{1}{(2n-2)\sigma_n |z|^{2n-2}}$$

[on pose  $|z| = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ ].

Si  $\mu$  désigne une mesure sur  $\mathbf{C}^n$  à support compact, on a une solution de l'équation

$$\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_i}$$

donnée par

$$U = E \star \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\partial E}{\partial \bar{z}_i} \star \mu.$$

On a  $\frac{\partial E}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\bar{z}_i}{2\sigma_n |z|^{2n}}$  (la dérivée étant calculée au sens des distributions),  $\frac{\partial E}{\partial \bar{z}_i}$  étant localement sommable,  $U(z)$  est donné par l'intégrale

$$U(z) = \frac{1}{2\sigma_n} \int_{\mathbf{C}^n} (\bar{z}_i - \bar{x}_i) |z - x|^{-2n} d\mu(x),$$

intégrale qui converge absolument pour presque tout  $z$ .

Si  $\mu$  est maintenant une mesure à croissance lente dans  $\mathbf{C}^n$ , nulle au voisinage de  $o$ , on va construire une solution  $U$  en modifiant convenablement le noyau  $(\bar{z}_i - \bar{x}_i) |z - x|^{-2n}$ .

On remarque que, pour  $x$  fixé,  $x \neq o$ ,  $(\bar{z}_i - \bar{x}_i) |z - x|^{-2n}$  est une fonction harmonique de  $z$  au voisinage de  $o$  (dérivée d'une fonction harmo-

nique), on peut donc développer  $(\bar{z}_i - \bar{x}_i) |z - x|^{-2n}$ , au voisinage de  $o$  en série de polynômes *homogènes* et *harmoniques* en  $z$  :

$$\frac{1}{2\sigma_n} (\bar{z}_i - \bar{x}_i) |z - x|^{-2n} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s,i}(z, x),$$

$P_{s,i}(z, x)$  désignant un polynôme homogène, de degré  $s$ , des variables  $z_j$  et  $\bar{z}_k$ , dont les coefficients sont des fonctions de  $x$ , définies pour  $x \neq o$ .

DÉFINITION. — On définit les noyaux suivants :

$$k_i(z, x) = \frac{1}{2\sigma_n} (\bar{z}_i - \bar{x}_i) |z - x|^{-2n},$$

$$k_i(q, z, x) = k_i(z, x) - \sum_{s=0}^q P_{s,i}(z, x)$$

pour  $q$  entier  $\geq 0$ .

Les noyaux  $k_i(q, z, x)$  sont donc définis pour  $x \neq o$  et  $z \neq x$ .

1. MAJORATIONS DES NOYAUX  $k_i(q, z, x)$ . — On a besoin du lemme suivant qui décrit le comportement des noyaux  $k_i(q, z, x)$ .

LEMME 1. — On pose  $u = |z| \cdot |x|^{-1}$ . Soit  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < 1$ . Il existe des constantes  $C_1(\varepsilon, q)$ ,  $C_2(\varepsilon, q)$ ,  $C_3(\varepsilon, q, p)$  telles que :

- (a)  $|x|^{2n-1} |k_i(q, z, x)| \leq C_1(\varepsilon, q) u^{q+1}$  pour  $u < 1 - \varepsilon$  ;
- (b)  $|x|^{2n-1} |k_i(q, z, x)| \leq C_2(\varepsilon, q) u^q$  pour  $u > 1 + \varepsilon$  ;
- (c)  $\int_{1-\varepsilon \leq |\zeta| \leq 1+\varepsilon} | |x|^{2n-1} k_i(q, |x|\zeta, x) |^p d\zeta \leq C_3(\varepsilon, q, p)$  pour  $1 \leq p < \frac{2n}{2n-1}$ .

Posons  $u = |z| \cdot |x|^{-1}$  et  $\cos \varphi = \operatorname{Re} \frac{\langle \bar{z}, x \rangle}{|\bar{z}| \cdot |x|}$  (avec  $\langle z, x \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{x}_j$ ).

On a, lorsque  $u < 1$  :

$$\begin{aligned} |z - x|^{-2n} &= |x|^{-2n} (1 - 2u \cos \varphi + u^2)^{-n}, \\ |z - x|^{-2n} &= |x|^{-2n} [(1 - u e^{i\varphi})(1 - u e^{-i\varphi})]^{-n}, \\ |z - x|^{-2n} &= |x|^{-2n} \left[ \left( \sum_{p=0}^{\infty} u^p e^{ip\varphi} \right) \left( \sum_{q=0}^{\infty} u^q e^{-iq\varphi} \right) \right]^n, \\ |z - x|^{-2n} &= |x|^{-2n} \left[ \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} \cos(p - q)\varphi u^{p+q} \right]^n, \\ |z - x|^{-2n} &= |x|^{-2n} \sum_{s=0}^{\infty} B_s(\cos \varphi) u^s, \end{aligned}$$

$B_s(\cos \varphi)$  désignant un polynôme en  $\cos \varphi$  de degré  $s$ .

Les deux dernières égalités montrent qu'on a

$$|B_s(\cos \nu)| \leq B_s(1).$$

Posons  $b_s = B_s(1)$ , on a

$$(1-u)^{-2n} = \sum_{s=0}^{\infty} b_s u^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+2n-1)!}{s!(2n-1)!} u^s.$$

Calculons maintenant le développement de  $k_i(z, x)$ :

$$k_i(z, x) = \frac{1}{2\sigma_n} (\bar{z}_i - \bar{x}_i) |x|^{-2n} \sum_{s=0}^{\infty} B_s(\cos \nu) u^s,$$

$$k_i(z, x) = -\frac{\bar{x}_i}{2\sigma_n} |x|^{-2n} + \frac{|x|^{-2n}}{2\sigma_n} \sum_{s=1}^{\infty} [\bar{z}_i B_{s-1}(\cos \nu) u^{s-1} - \bar{x}_i B_s(\cos \nu) u^s].$$

On a donc

$$P_{0,i}(z, x) = -\frac{\bar{x}_i}{2\sigma_n} |x|^{-2n},$$

$$P_{s,i}(z, x) = \frac{|x|^{-2n}}{2\sigma_n} [\bar{z}_i B_{s-1}(\cos \nu) u^{s-1} - \bar{x}_i B_s(\cos \nu) u^s].$$

Il en résulte les majorations suivantes :

$$|x|^{2n-1} |P_{0,i}(z, x)| \leq \frac{1}{2\sigma_n},$$

$$|x|^{2n-1} |P_{s,i}(z, x)| \leq \frac{b_s + b_{s-1}}{2\sigma_n} u^s.$$

Posons

$$c_s = \frac{b_s + b_{s-1}}{2\sigma_n} \quad \text{pour } s \geq 1 \quad \text{et} \quad c_0 = 1.$$

On a donc

$$|x|^{2n-1} |P_{s,i}(z, x)| \leq c_s u^s,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s u^s \leq \frac{1}{\sigma_n} (1-u)^{-2n}$$

pour  $u < 1$ , le noyau  $k_i(q, z, x)$  se développe en série :

$$k_i(q, z, x) = \sum_{s=q+1}^{\infty} P_{s,i}(z, x),$$

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, z, x)| \leq \sum_{s=q+1}^{\infty} c_s u^s.$$

Comme cette dernière série converge pour  $u < 1$ , il existe une constante  $C_1(\varepsilon, q)$  telle que

$$\sum_{s=q+1}^{\infty} c_s u^s \leq C_1(\varepsilon, q) u^{q+1} \quad \text{pour } u < 1 - \varepsilon,$$

ce qui donne la majoration (a) du lemme 1.

Supposons maintenant  $u > 1 + \varepsilon$ , c'est-à-dire  $|z| > (1 + \varepsilon) |x|$ . On a

$$|k_i(z, x)| \leq \frac{1}{2\sigma_n} |z - x|^{-2n+1} \leq \frac{1}{2\sigma_n} \varepsilon^{-2n+1} |x|^{-2n+1},$$

$$k_i(q, z, x) = k_i(z, x) - \sum_{s=0}^q P_{s,i}(z, x),$$

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, z, x)| \leq \frac{\varepsilon^{-2n+1}}{2\sigma_n} + \sum_{s=1}^q c_s u^s \leq C_2(\varepsilon, q) u^q,$$

ce qui est la majoration (b) du lemme 1.

Supposons  $1 + \varepsilon \geq u \geq 1 - \varepsilon$ , on a

$$|k_i(q, z, x)| \leq \frac{1}{2\sigma_n} |z - x|^{-2n+1} + \sum_{s=0}^q |P_{s,i}(z, x)|,$$

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, z, x)| \leq \frac{1}{2\sigma_n} |x|^{2n-1} |z - x|^{-2n+1} + \sum_{s=0}^q c_s (1 + \varepsilon)^s.$$

Posons  $z = |x| \zeta$ ,  $x = |x| \xi$ , on obtient

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, |x| \zeta, |x| \xi)| \leq \frac{1}{2\sigma_n} |\zeta - \xi|^{-2n+1} + C(\varepsilon, q).$$

L'intégrale

$$\int_{1-\varepsilon \leq |\zeta| \leq 1+\varepsilon} |\zeta - \xi|^{-p(2n-1)} d\zeta$$

converge pour  $1 \leq p < \frac{2n}{2n-1}$  et est indépendante de  $\xi$  qui appartient à la sphère unité de  $\mathbf{C}^n$ . Il en résulte la majoration (c) du lemme 1.

2. THÉORÈME D'EXISTENCE POUR LES MESURES. — Soit  $\mu$  une mesure à croissance lente, nulle dans l'ouvert  $|x| < a$ ; on pose

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) d\mu(x)$$

et on va choisir  $q$  de sorte que l'intégrale converge pour presque tout  $z$ . On désigne par  $|\mu|$  la mesure valeur absolue de la mesure  $\mu$ .

Soit  $\varphi$  une fonction continue sur  $\mathbf{C}^n$ , telle que  $\varphi(z) \leq 1$ , soient  $p \geq 1$  et  $r$  un nombre réel. Considérons la norme

$$\|f\|_{p,r,\varphi} = \left( \int_{\mathbf{C}^n} |f(z)| |z|^{-r} |^\nu \varphi(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Considérons alors  $k_i(q, z, x)$  comme une fonction de  $x$  à valeur dans l'espace normé des fonctions  $f$  telles que  $\|f\|_{p,r,\varphi} < +\infty$  et considérons l'intégrale définissant  $U$  comme une intégrale vectorielle; on a

$$\|U\|_{p,r,\varphi} \leq \int_{\mathbf{C}^n} \|k_i(q, \dots, x)\|_{p,r,\varphi} d|\mu|(x)$$

sous réserve de la convergence de l'intégrale de droite,

$$\|k_i(q, \dots, x)\|_{p,r,\varphi}^p = \int_{\mathbf{C}^n} |k_i(q, z, x)|^p |z|^{-pr} \varphi(z) dz.$$

Posons  $z = |x|\zeta$ , on a  $u = |\zeta|$  et

$$\|k_i(q, \dots, x)\|_{p,r,\varphi}^p = |x|^{-\alpha} \int_{\mathbf{C}^n} |x|^{2n-1} |k_i(q, |x|\zeta, x)|^p |\zeta|^{-pr} \varphi(|x|\zeta) d\zeta,$$

avec  $\alpha = p(2n-1) + pr - 2n$ .

Montrons que l'intégrale converge et est majorée uniformément en  $x$  (avec un choix convenable de  $p, q, r, \varphi$ ), on découpe l'intégrale en trois morceaux :

— Pour  $u = |\zeta| < 1 - \varepsilon$ , on a d'après le lemme 1 :

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, |x|\zeta, x)| \leq C_1(\varepsilon, q) |\zeta|^{q+1}$$

comme  $\varphi \leq 1$ , l'intégrale converge, uniformément en  $x$ , au voisinage de 0 pourvu que

$$p(q+1-r) > -2n.$$

— Pour  $1 - \varepsilon \leq |\zeta| \leq 1 + \varepsilon$ , on majore l'intégrale en utilisant le (c) du lemme 1, pourvu que

$$1 \leq p < \frac{2n}{2n-1}.$$

— Pour  $|\zeta| \geq 1 + \varepsilon$ , on a d'après le (b) du lemme 1 :

$$|x|^{2n-1} |k_i(q, |x|\zeta, x)| \leq C_2(\varepsilon, q) |\zeta|^q,$$

l'intégrale converge, uniformément en  $x$ , au voisinage de l'infini pourvu que  $p(q-r) < -2n$ . Si on a seulement  $p(q-r) = -2n$ ; on choisit  $\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$  de sorte que l'intégrale est majorée par

$$I = C_2'(\varepsilon, q) \int_{|\zeta| \geq 1+\varepsilon} |\zeta|^{-2n} [1 + \text{Log}^2(1 + |x||\zeta|)]^{-1} d\zeta,$$

$$I = \sigma_n C_2'(\varepsilon, q) \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} t^{-1} [1 + \text{Log}^2(1 + |x|t)]^{-1} dt,$$

$$I = \sigma_n C_2'(\varepsilon, q) \int_{(1+\varepsilon)|x|}^{+\infty} t^{-1} [1 + \text{Log}^2(1 + t)]^{-1} dt,$$

comme  $\mu = 0$  lorsque  $|x| < a$ , seuls importent les  $x$  tels que  $|x| > a$ , on a alors

$$I \leq \sigma_n C_2^p(\varepsilon, q) \int_{(1+\varepsilon)a}^{+\infty} t^{-1} [1 + \log^2(1+t)]^{-1} dt,$$

intégrale qui est convergente et indépendante de  $x$ .

En définitive, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|k_i(q, \dots, x)\|_{\rho, r, \varphi}^p \leq C |x|^{-\alpha} \quad \text{pour } |x| \geq a,$$

sous les hypothèses

$$p(q+1-r) > -2n, \quad p(q-r) < -2n, \quad \varphi = 1$$

ou

$$p(q-r) = -2n, \quad \varphi = 1 + \log^2(1+|z|).$$

On a alors

$$\|u\|_{\rho, r, \varphi} \leq C \int_{|x| \geq a} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} d|\mu|(x),$$

où  $\frac{\alpha}{p} = r + 2n - 1 - \frac{2n}{p}$ .

Posons  $\rho = r - \frac{2n}{p} - 1$ . Les majorations qui précèdent s'écrivent alors

$$\left( \int_{\mathbf{C}^n} |U(z)|^p |z|^{-\rho p - p - 2n} \varphi(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \int_{|x| \geq a} |x|^{-\rho - 2n} d|\mu|(x).$$

Sous les hypothèses

$$\begin{aligned} q-1 \leq \rho < q, \quad \varphi(z) = 1 & \quad \text{si } q-1 < \rho; \\ \varphi(z) = [1 + \log^2(1+|z|)]^{-1} & \quad \text{si } q-1 = \rho. \end{aligned}$$

Il nous reste à envisager le cas où

$$\int_{|x| \geq a} |x|^{-\rho} d|\mu|(x) < +\infty \quad \text{avec } \rho < 2n - 1.$$

On prend alors  $U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) d\mu(x)$ . On a

$$\begin{aligned} \|U\|_{\rho, r, \varphi} &\leq \int_{|x| \geq a} \|k_i(z, x)\|_{\rho, r, \varphi} d|\mu|(x), \\ |x|^{\rho p} \|k_i(z, x)\|_{\rho, r, \varphi}^p &= |x|^{\rho p} \int_{\mathbf{C}^n} |k_i(z, x)|^p |z|^{-\rho p} \varphi(z) dz. \end{aligned}$$



Il s'agit de majorer le second membre par une constante pour  $|x| > a$ . Dans toute la suite de l'exposé, on désigne par  $C(\varepsilon)$  une constante dépendant de  $\varepsilon$ , qui peut varier d'une formule à l'autre.

— Pour  $u < 1 - \varepsilon$ ,  $|z| < (1 - \varepsilon)|x|$ , on a

$$|k_i(z, x)| \leq C(\varepsilon) |x|^{-2n+1}.$$

On pose

$$I_1 = |x|^{p\rho} \int_{|z| < (1-\varepsilon)|x|} |k_i(z, x)|^p |z|^{-pr} \varphi(z) dz,$$

$$I_1 \leq C(\varepsilon) |x|^{p\rho - p(2n-1)} \int_{|z| < (1-\varepsilon)|x|} |z|^{-pr} dz,$$

$$I_1 \leq C(\varepsilon) |x|^{p(\rho - 2n + 1)} \int_0^{(1-\varepsilon)|x|} t^{2n-1-pr} dt,$$

$$I_1 \leq C(\varepsilon) |x|^{p(\rho - 2n + 1)} [(1 - \varepsilon)|x|]^{2n-pr},$$

$$I_1 \leq C(\varepsilon) |x|^{p(\rho - 2n + 1) - pr + 2n} \leq C(\varepsilon, a)$$

si les conditions suivantes sont réalisées :

$$2n - pr > 0,$$

$$p(\rho - r - 2n + 1) + 2n \leq 0.$$

— Pour  $1 - \varepsilon \leq u \leq 1 + \varepsilon$ , on pose  $z = |x|\zeta$  et  $x = |x|\xi$ ,

$$I_2 = |x|^{p\rho} \int_{1-\varepsilon \leq u \leq 1+\varepsilon} |k_i(z, x)|^p |z|^{-pr} \varphi(z) dz,$$

$$I_2 \leq C(\varepsilon) |x|^{p(\rho - 2n + 1 - r) + 2n} \int_{1-\varepsilon \leq |\zeta| \leq 1+\varepsilon} |\zeta - \xi|^{-p(2n-1)} d\zeta,$$

Soit  $I_2 \leq C(\varepsilon, a)$  sous les hypothèses

$$p(\rho - r - 2n + 1) + 2n \leq 0,$$

$$1 \leq p < \frac{2n}{2n-1}.$$

— Pour  $u > 1 + \varepsilon$ ,  $|z| > (1 + \varepsilon)|x|$ , on pose

$$I_3 = |x|^{p\rho} \int_{u > 1+\varepsilon} |k_i(z, x)|^p |z|^{-pr} \varphi(z) dz$$

$$\leq C(\varepsilon) |x|^{p\rho} \int_{u > 1+\varepsilon} |z|^{-p(2n-1)-pr} \varphi(z) dz$$

$$\leq C(\varepsilon) |x|^{p\rho} \int_{(1+\varepsilon)|x|}^{+\infty} t^{-p(r+2n-1)+2n-1} dt$$

$$\leq C(\varepsilon) |x|^{p(\rho - r - 2n + 1) + 2n} \leq C(\varepsilon, a).$$

Si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\begin{cases} -p(r + 2n - 1) + 2n - 1 < -1, \\ p(\rho - r - 2n + 1) + 2n \leq 0; \\ \begin{cases} r + 2n - 1 > \frac{2n}{p}, \\ r + 2n - 1 \geq \frac{2n}{p} + \rho. \end{cases} \end{cases}$$

La deuxième condition entraîne la première sauf si  $\rho = 0$ , dans ce cas, on peut choisir :

$$\begin{aligned} r + 2n - 1 &= \frac{2n}{p}, \\ \varphi(z) &= 1 + \text{Log}^2(1 + |z|), \end{aligned}$$

comme on le vérifie immédiatement.

En définitive, on a

$$\|U\|_{p,r,\varphi} \leq C(\varepsilon, a) \int_{|x| \geq a} |x|^{-p} d|\mu|(x)$$

avec les choix suivants :

$$\begin{aligned} r &= \rho + \frac{2n}{p} - 2n + 1, \\ \rho &< 2n - 1, \\ \varphi(z) &= 1 \quad \text{si } \rho \neq 0, \\ \varphi(z) &= 1 + \text{Log}^2(1 + |z|) \quad \text{si } \rho = 0. \end{aligned}$$

Pour toute mesure  $\mu$  telle que  $\int_{|x| \geq a} |x|^{-p} d|\mu|(x) < +\infty$  et nulle pour  $|x| < a$ , on a donc construit un noyau tel que

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) d\mu(x)$$

converge pour presque tout  $z$  et tel que

$$\|U\|_{p,r,\varphi} < C \int_{|x| \geq a} |x|^{-p} d|\mu|(x)$$

pour un choix convenable de  $p, r, \varphi$ .

Soit  $\chi$  une fonction de  $\mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$  égale à 1 au voisinage de 0, soient

$$\chi_m(z) = \chi\left(\frac{z}{m}\right), \quad \mu_m = \chi_m \mu, \quad U_m = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) d\mu_m(x),$$

$\mu_m$  est à support compact, on a donc

$$U_m = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) d\mu_m(x) - \sum_{s=0}^q \int_{\mathbf{C}^n} P_{s,i}(z, x) d\mu_m(x)$$

comme  $P_{s,i}(z, x)$  est harmonique en  $z$ , on a

$$\Delta U_m = \frac{\partial \mu_m}{\partial z_i}$$

or  $\mu_m \rightarrow \mu$  dans  $\mathcal{O}'(\mathbf{C}^n)$  et  $U_m \rightarrow U$  dans  $\mathcal{O}'(\mathbf{C}^n)$ , on a donc

$$\Delta U = \lim \Delta U_m = \lim \frac{\partial \mu_m}{\partial z_i} = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}.$$

On regroupe tous les résultats en un même énoncé.

THÉORÈME 1. — Soit  $\mu$  une mesure sur  $\mathbf{C}^n$  nulle pour  $|x| < a$ , telle que

$$\int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n} d|\mu|(z) < +\infty \quad \text{pour un } \rho \geq -2n.$$

On pose  $U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) d\mu(x)$ , où  $q$  est l'entier  $\geq 0$  tel que  $q-1 \leq \rho < q$ . Si  $-1 > \rho \geq -2n$ , on prend

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) d\mu(x).$$

Alors  $U(z)$  est solution de  $\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}$  [dans  $\mathcal{O}'(\mathbf{C}^n)$ ] et vérifie les majorations

$$\left( \int_{\mathbf{C}^n} |U(z)| |z|^{-\rho-1} |\varphi(z)|^{-2n} \varphi(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(a, p, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n} d|\mu|(z),$$

$C(a, p, \rho)$  désigne une constante indépendante de  $\mu$ , avec

$$\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$$

si  $\rho = -2n$  ou si  $\rho$  est un entier  $\geq -1$ ,  $\varphi(z) = 1$  dans tous les autres cas; pour tout  $p$  tel que  $1 \leq p < \frac{2n}{2n-1}$ .

Si maintenant  $\mu$  n'est plus nulle au voisinage de 0, soit  $\chi$  une fonction de  $\mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$ , égale à 1 pour  $|x| < a$  et telle que  $0 \leq \chi(x) \leq 1$ . On a  $\mu = \chi\mu + (1-\chi)\mu$ . Il suffit de prendre

$$U(z) = \frac{\partial E}{\partial z_i} \star (\chi\mu) + \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) [1-\chi(x)] d\mu(x),$$

on en déduit aussitôt le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — Soit  $\mu$  une mesure telle que

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1 + |z|)^{-\rho-2n} d|\mu|(z) < +\infty$$

pour un  $\rho \geq -2n$ . Alors il existe une fonction localement sommable  $U$ , solution de l'équation

$$\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_i}$$

qui vérifient les estimations

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)| (1 + |z|)^{-\rho-1} |^\rho (1 + |z|)^{-2n} \varphi(z) dz < +\infty$$

pour tout  $p$  tel que  $1 \leq p < \frac{2n}{2n-1}$  avec  $\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$  si  $\rho = -2n$  ou si  $\rho$  est un entier  $\geq -1$ ,  $\varphi(z) = 1$  dans tous les autres cas.

Le théorème 1 et le corollaire 1 s'appliquent en particulier au cas où la mesure  $\mu$  est une fonction localement sommable  $f$ . On énonce le résultat correspondant avec  $p = 1$ .

COROLLAIRE 2. — Soit  $f$  une fonction mesurable sur  $\mathbf{C}^n$ , nulle pour  $|x| < a$  telle que

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)| \cdot |z|^{-\rho-2n} dz < +\infty, \quad \rho \geq -2n.$$

Il existe une fonction localement sommable  $U$ , solution de l'équation  $\Delta U = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}$  vérifiant l'estimation

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)| \cdot |z|^{-\rho-1-2n} \varphi(z) dz \leq C(a, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |f(z)| \cdot |z|^{-\rho-2n} dz,$$

$C(a, \rho)$  désignant une constante indépendante de  $f$ , avec

$$\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$$

si  $\rho = -2n$  ou si  $\rho$  est un entier  $\geq -1$ ,  $\varphi(z) = 1$  dans tous les autres cas. On a

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) f(x) dx \quad \text{si } q-1 \leq \rho < q,$$

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) f(x) dx \quad \text{si } \rho < -1.$$

On a un énoncé analogue lorsque  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $o$ , en remplaçant  $|z|$  par  $1 + |z|$ .

3. THÉORÈME D'EXISTENCE POUR LES FONCTIONS LOCALEMENT DANS  $L^\infty$ .  
 — Soit  $f$  une fonction, nulle pour  $|x| < a$ , telle que  $f(x)|x|^{-\rho}$  soit une fonction dans  $L^\infty$ . Soit

$$\begin{aligned} U(z) &= \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) f(x) dx, \\ |U(z)| &\leq \int_{|x| \geq a} |k_i(q, z, x)| \cdot |f(x)| dx, \\ |U(z)| &\leq \|f(x)|x|^{-\rho}\|_\infty \int_{|x| \geq a} |k_i(q, z, x)| \cdot |x|^\rho dx. \end{aligned}$$

On décompose l'intégrale en trois parties :

$$- \quad I_1 = \int_{u < 1-\varepsilon} |k_i(q, z, x)| \cdot |x|^\rho dx$$

d'après le lemme 1 (a),

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C(\varepsilon) \int_{|z| < (1-\varepsilon)|x|} |z|^{q+1} |x|^{-2n-q+\rho} dx, \\ I_1 &\leq C(\varepsilon) |z|^{q+1} \int_{(1-\varepsilon)^{-1}|z|}^\infty t^{-q+\rho-1} dt, \\ I_1 &\leq C(\varepsilon) |z|^{\rho+1} \quad \text{si } -q + \rho < 0. \end{aligned}$$

$$- \quad I_2 = \int_{1-\varepsilon \leq u \leq 1+\varepsilon} |k_i(q, z, x)| \cdot |x|^\rho dx,$$

en posant  $z = |z| \zeta$ ,  $x = |z| \xi$ , on a

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{1-\varepsilon \leq u \leq 1+\varepsilon} [|\zeta - \xi|^{-2n+1} + C(\varepsilon)] |z|^{-2n+1+\rho} dx, \\ I_2 &\leq C(\varepsilon) |z|^{\rho+1} \int_{(1-\varepsilon)^{-1} \leq |\xi| \leq (1+\varepsilon)^{-1}} [|\zeta - \xi|^{-2n+1} + C(\varepsilon)] d\xi \end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que sur le domaine d'intégration  $|z|$  et  $|x|$  sont équivalents), on obtient

$$I_2 \leq C(\varepsilon) |z|^{\rho+1}.$$

$$- \quad I_3 = \int_{u > 1+\varepsilon} |k_i(q, z, x)| \cdot |x|^\rho dx,$$

on utilise le lemme 1 (b),

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C(\varepsilon) \int_{|z| > (1+\varepsilon)|x|} |x|^{-2n+1-q+\rho} |z|^q dx, \\ I_3 &\leq C(\varepsilon) |z|^q \int_a^{(1-\varepsilon)^{-1}|z|} t^{-q+\rho} dt, \\ I_3 &\leq C(\varepsilon) |z|^{\rho+1} \quad \text{si } -q + \rho + 1 > 0, \\ I_3 &\leq C(\varepsilon, a) |z|^{\rho+1} [1 + \text{Log}(1 + |z|)] \quad \text{si } -q + \rho + 1 = 0. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\|U(z) |z|^{-\rho-1} \varphi(z)\|_{\infty} \leq C(\varepsilon, a, \rho) \|f |z|^{-\rho}\|_{\infty}$$

pourvu que  $q - 1 \leq \rho < \dot{q}$ , avec

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 1 & \text{si } q - 1 < \rho; \\ \varphi(z) &= [1 + \text{Log}(1 + |z|)]^{-1} & \text{si } q - 1 = \rho. \end{aligned}$$

On aura également besoin dans la suite des valeurs négatives de  $\rho$ ;  $-1 > \rho \geq -2n$ , on prend alors

$$\begin{aligned} U(z) &= \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) f(x) dx, \\ |U(z)| &\leq \|f(x) |x|^{-\rho}\|_{\infty} \int_{|x| \geq a} |z - x|^{-2n-1} |x|^{\rho} dx. \end{aligned}$$

On procède au même découpage de l'intégrale :

$$\begin{aligned} - \quad I_1 &= \int_{|z| < (1-\varepsilon)|x|} |z - x|^{-2n+1} |x|^{\rho} dx, & |z| < (1-\varepsilon)|x|, \\ I_1 &\leq C(\varepsilon) \int_{|z| < (1-\varepsilon)|x|} |x|^{-2n+1+\rho} dx \leq C(\varepsilon, \rho) |z|^{\rho+1}. \\ - \quad I_2 &= \int_{1-\varepsilon \leq |x| \leq 1+\varepsilon} |z - x|^{-2n+1} |x|^{\rho} dx, & z = |z|\zeta, \quad x = |z|\xi, \\ I_2 &\leq C(\varepsilon) |z|^{\rho+1} \int_{(1-\varepsilon)^{-1} \leq |\xi| \leq (1+\varepsilon)^{-1}} |\zeta - \xi|^{-2n+1} d\xi, \\ I_2 &\leq C(\varepsilon) |z|^{\rho+1}. \\ - \quad I_3 &= \int_{|z| > (1+\varepsilon)|x|} |z - x|^{-2n+1} |x|^{\rho} dx, & |z| > (1+\varepsilon)|x|, \\ I_3 &\leq C(\varepsilon) |z|^{-2n+1} \int_{|x| < (1+\varepsilon)^{-1}|z|} |x|^{\rho} dx, \\ I_3 &\leq C(\varepsilon, \rho) |z|^{\rho+1} & \text{si } \rho > -2n, \\ I_3 &\leq C(\varepsilon, \rho, a) |z|^{\rho+1} [1 + \text{Log}(1 + |z|)] & \text{si } \rho = -2n. \end{aligned}$$

Finalement, on a encore

$$\|U(z) |z|^{-\rho-1} \varphi(z)\|_{\infty} \leq C(a, \rho) \|f(x) |x|^{-\rho}\|_{\infty}$$

pour  $-1 > \rho \geq -2n$ , avec  $\varphi(z) = 1$  sauf si  $\rho = -2n$ , auquel cas on a

$$\varphi(z) = 1 + \text{Log}(1 + |z|).$$

**THÉORÈME 2.** — Soit  $f$  une fonction mesurable, nulle pour  $|x| < a$ , telle que  $f(x) |x|^{-\rho}$  soit essentiellement bornée,  $\rho \geq -2n$ . Il existe une fonction  $U$

localement dans  $L^\infty$ , solution de l'équation

$$\Delta U = \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

vérifiant l'estimation

$$\|U(z) |z|^{-\rho-1} \varphi(z)\|_\infty \leq C(a, \rho) \|f(z) |z|^{-\rho}\|_\infty,$$

$C(a, \rho)$  désignant une constante indépendante de  $f$  :

$$\varphi(z) = [1 + \text{Log}(1 + |z|)]^{-1} \quad \text{si } \rho = -2n$$

ou si  $\rho$  est un entier  $\geq -1$ ,  $\varphi(z) = 1$  dans tous les autres cas. On peut prendre

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) f(x) dx$$

lorsque  $q - 1 \leq \rho < q$ ;

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) f(x) dx$$

lorsque  $\rho < -1$ .

4. THÉORÈME D'EXISTENCE POUR LES FONCTIONS DANS  $L^p$ . — On va déduire ce théorème des résultats précédents par interpolation. Soient  $\Omega$  l'ouvert  $|x| > a$ ,  $\rho$  un nombre réel  $\rho \geq -2n$ ,  $g$  une fonction de  $\mathcal{O}(\Omega)$ . On définit un opérateur linéaire  $K$  de  $\mathcal{O}(\Omega)$  dans  $L^1_{loc}(\mathbf{C}^n)$  par la formule

$$(Kg)(z) = |z|^{-\rho-1} \varphi(z) \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) |x|^\rho g(x) dx \quad \text{si } q - 1 \leq \rho < q;$$

$$(Kg)(z) = |z|^{-\rho-1} \varphi(z) \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) |x|^\rho g(x) dx \quad \text{si } -1 > \rho \geq -2n.$$

$$\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1 + |z|)]^{-1} \quad \text{si } \rho \text{ est entier } \geq -1 \text{ ou si } \rho = -2n,$$

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{dans tous les autres cas.}$$

Soit  $\nu$  la mesure  $|x|^{-2n} dx$ . D'après le théorème 2, il existe une constante  $C(a, \rho)$  telle que

$$\|Kg\|_{L^2(\mathbf{C}^n, \nu)} \leq C(a, \rho) \|g\|_{L^2(\Omega, \nu)}.$$

D'après le corollaire 2 du théorème 1, on a

$$\|Kg\|_{L^1(\mathbf{C}^n, \nu)} \leq C'(a, \rho) \|g\|_{L^1(\Omega, \nu)}.$$

D'après le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin (cf. [4]), il existe une constante  $C'(a, \rho, p)$  telle que

$$\|Kg\|_{L^p(\mathbf{C}^n, \nu)} \leq C'(a, \rho, p) \|g\|_{L^p(\Omega, \nu)} \quad \text{pour tout } p, \quad 1 \leq p < +\infty;$$

en revenant aux fonctions  $U$  et  $f$ , on a donc

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)| |z|^{-\rho-1} \varphi(z) |z|^\rho \frac{dz}{|z|^{2n}} \leq C^{(p)}(a, \rho, p) \int_{|x|>a} |f(x)| |x|^{-\rho} |z|^\rho \frac{dx}{|x|^{2n}}.$$

**THÉORÈME 3.** — Soit  $f$  une fonction mesurable, nulle pour  $|x| < a$ , telle que

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)| |z|^{-\rho} |z|^{-2n} dz < +\infty.$$

Il existe une fonction  $U$  localement dans  $L^p$ , solution de l'équation  $\Delta U = \frac{\partial f}{\partial z_i}$ , vérifiant l'estimation

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)| |z|^{-\rho-1} \varphi(z) |z|^\rho |z|^{-2n} dz \leq C(a, p, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |f(z)| |z|^{-\rho} |z|^{-2n} dz$$

$C(a, p, \rho)$  désignant une constante indépendante de  $f$ ;

$$\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1 + |z|)]^{-1} \quad \text{si } \rho \text{ est entier } \geq -1 \text{ ou si } \rho = -2n.$$

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{dans tous les autres cas.}$$

On a

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) f(x) dx \quad \text{si } q-1 \leq \rho < q,$$

$$U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} k_i(z, x) f(x) dx \quad \text{si } -1 > \rho \geq -2n.$$

*Remarque.* — En prenant comme dans le corollaire 1 du théorème 1 :

$$U = \frac{\partial E}{\partial z_i} * \chi f + \int_{\mathbf{C}^n} k_i(q, z, x) (1 - \chi(x)) f(x) dx,$$

on a un théorème analogue au théorème 3, lorsque  $f$  n'est plus nulle au voisinage de 0. Il suffit de remplacer alors  $|z|$  par  $1 + |z|$ .

## II. — Solution de l'équation, $d''u = f$ dans $\mathbf{C}^n$ .

Comme dans le paragraphe I, toutes les dérivées sont calculées au sens des distributions. On adopte les notations d'Hörmander, pour tout ce qui concerne les multi-indices (cf. [2]).

Soit  $f$  une forme (ou courant)  $d''$ -fermée ( $d''f = 0$ ), de type  $(\alpha, \beta)$  dont les coefficients sont des mesures à croissance lente.  $f$  s'écrit en écriture canonique :

$$f = \sum_{I, J} f_{I, J} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad |I| = \alpha, \quad |J| = \beta$$



( $\sum'_{I,J}$  signifie qu'on somme seulement pour les multi-indices croissants).

On pose  $|f| = \sum'_{I,J} |f_{I,J}|$ ;  $|f|$  est donc une mesure positive.

Soit  $\rho \geq -2n$  tel que

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1 + |z|)^{-\rho-2n} d|f|(x) < +\infty.$$

On cherche à construire une solution de l'équation

$$d''u = f.$$

On va se ramener à une équation de Laplace du type  $\Delta U = \frac{\partial \mu}{\partial z_i}$ . Dans ce but, on introduit l'opérateur  $\delta''$  adjoint de  $d''$  pour la structure hermitienne habituelle sur  $\mathbf{C}^n$ . Si  $g$  est une forme de type  $(\alpha, \beta)$ ,  $\delta''g$  est une forme de type  $(\alpha, \beta - 1)$  définie par

$$\delta''g = (-1)^{\alpha-1} \sum_{\substack{|I|=\alpha \\ |K|=\beta-1}} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} (g_{I,jK}) \right] dz_I \wedge d\bar{z}_K.$$

Un calcul (cf. [5], [7]) montre qu'on a alors

$$(d''\delta'' + \delta''d'')g = -2 \sum'_{I,J} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g_{I,J}}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

soit encore

$$(d''\delta'' + \delta''d'')g = -\frac{1}{2} \sum'_{I,J} \Delta g_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Soit  $U$  une forme de type  $(\alpha, \beta - 1)$ , solution de l'équation

$$(d''\delta'' + \delta''d'')U = \delta''f.$$

On a alors  $\delta''(f - d''U) = d''\delta''U$ , d'où  $d''\delta''(f - d''U) = 0$ ; comme  $d''f = 0$ , on a aussi  $\delta''d''(f - d''U) = 0$ , soit

$$(d''\delta'' + \delta''d'')(f - d''U) = 0,$$

c'est-à-dire  $f - d''U$  est une forme à coefficients harmoniques.

L'équation  $(d''\delta'' + \delta''d'')U = \delta''f$  équivaut au système d'équations

$$-\frac{1}{4} \Delta U_{I,K} = (-1)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} (f_{I,jK}), \quad |I| = \alpha, \quad |K| = \beta - 1.$$

D'après la première partie, on sait trouver des  $U_{I,K}$  solution des équations précédentes, avec des majorations très complètes.  $U_{I,K}$  est en particulier une distribution tempérée, il en résulte que  $f - d''U$  est une forme à coefficients tempérés et harmoniques, c'est-à-dire à coefficients polynômes harmoniques. Il en résulte :

LEMME 2. — Si  $U$  est une solution tempérée de  $(d''\delta'' + \delta''d'')U = \delta''f$ , la forme  $\omega = f - d''U$  est à coefficients polynômes harmoniques.

On a besoin maintenant de majorer  $\omega$ ; soit  $\psi \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$  une fonction positive ne dépendant que de  $|z|$ , à support dans la boule de rayon 1, d'intégrale égale à 1, on pose

$$\psi_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \psi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right).$$

Comme  $\omega$  est harmonique, on a

$$\begin{aligned} \omega &= \omega \star \psi_\varepsilon = f \star \psi_\varepsilon - d''U \star \psi_\varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0; \\ \omega &= \sum'_{I,J} f_{I,J} \star \psi_\varepsilon d\bar{z}_I \wedge d\bar{z}_J - \sum'_{I,K} \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_{IK}}{\partial \bar{z}_j} \star \psi_\varepsilon d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_I \wedge d\bar{z}_K, \\ \omega &= \sum'_{I,J} f_{I,J} \star \psi_\varepsilon d\bar{z}_I \wedge d\bar{z}_J - \sum'_{I,K} \sum_{j=1}^n U_{I,K} \star \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_I \wedge d\bar{z}_K. \end{aligned}$$

Considérons d'abord le cas où les  $f_{I,J}$  sont des mesures. D'après la première partie, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}^n} (1 + |z|)^{-\rho-2n} d|f|(z) &< -\infty \quad (\rho \geq -2n), \\ \int_{\mathbf{C}^n} (1 + |z|)^{-\rho-2n-1} \varphi(z) |U(z)| dz &< +\infty. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f_{I,J} \star \psi_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{\mathbf{C}^n} \psi\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) df_{I,J}(x), \\ |f_{I,J} \star \psi_\varepsilon(z)| &\leq \frac{\|\psi\|_\infty}{\varepsilon^{2n}} \int_{|z-x| \leq \varepsilon} d|f|(x), \\ \int_{\mathbf{C}^n} (1 + |x|)^{-\rho-2n} d|f|(x) &\geq (1 + |z| + \varepsilon)^{-\rho-2n} \int_{|z-x| \leq \varepsilon} d|f|(x), \\ |f_{I,J} \star \psi_\varepsilon(z)| &\leq C \varepsilon^{-2n} (1 + |z| + \varepsilon)^{\rho+2n}, \end{aligned}$$

où  $C$  est indépendant de  $z$  et de  $\varepsilon$ , en choisissant  $\varepsilon = |z|$ , on obtient

$$|f_{I,J} \star \psi_\varepsilon(z)| \leq C |z|^\rho \quad \text{pour } |z| \geq 1.$$

On a de même

$$\begin{aligned} \left| U_{i,k} \star \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \bar{z}_j} \right| &\leq C \varepsilon^{-2n-1} \int_{|z-x| \leq \varepsilon} |U(x)| dx, \\ \int_{\mathbf{C}^n} (1+|x|)^{-\rho-2n-1} \varphi(x) |U(x)| dx &\geq (1+|z|+\varepsilon)^{-\rho-2n-1} \varphi(|z|+\varepsilon) \int_{|z-x| \leq \varepsilon} |U(x)| dx, \\ \left| U_{i,k} \star \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \bar{z}_j} \right| &\leq C \varepsilon^{-2n-1} (1+|z|+\varepsilon)^{\rho+2n+1} [1 + \text{Log}^2(1+|z|+\varepsilon)], \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon = |z|$ , on a

$$\left| U_{i,k} \star \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \bar{z}_j} \right| \leq C |z|^\rho \text{Log}^2 |z| \quad \text{pour } |z| > 2.$$

On a donc

$$|\omega(z)| \leq C |z|^\rho \text{Log}^2 |z| \quad \text{pour } |z| > 2.$$

Considérons maintenant le cas où les  $f_{i,j}$  sont des fonctions localement dans  $L^p$ ; d'après la première partie (cf. remarque du théorème 3), on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}^n} |f(x) (1+|x|)^{-\rho/p} (1+|x|)^{-2n} dx &< +\infty, \\ \int_{\mathbf{C}^n} |U(x) (1+|x|)^{-\rho-1} \varphi(x)|^p (1+|x|)^{-2n} dx &< +\infty. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à la mesure  $(1+|x|)^{-2n-\gamma} dx$  avec  $\gamma > 0$  assez petit, mesure qui est bornée, on obtient les estimations

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}^n} |f(x)| (1+|x|)^{-\rho'-2n} dx &< +\infty, \\ \int_{\mathbf{C}^n} |U(x)| (1+|x|)^{-\rho'-1-2n} \varphi(x) dx &< +\infty, \end{aligned}$$

avec  $\rho' = \rho - \frac{\gamma}{p} + \gamma$ , on est ramené au cas précédent lorsque  $\rho > -2n$ .

On a donc

$$|\omega(z)| \leq C(\gamma) |z|^{\rho'} \text{Log}^2 |z| \quad \text{pour } |z| > 2 \text{ et pour tout } \rho' > \rho,$$

il en résulte :

**LEMME 3.** — *Les coefficients de la forme  $\omega$  sont des polynômes harmoniques dont le degré est inférieur ou égal à  $\rho$ .*

On laisse au lecteur la vérification immédiate du lemme 3 lorsque  $\rho = -2n$  et  $p > 1$ , ou lorsque  $p = +\infty$  (utiliser le théorème 2).

Si  $\rho < 0$ , le lemme 3 entraîne  $\omega = 0$ ,  $d'' U = f$ .

Si  $\rho \geq 0$  et si la forme  $f$  est nulle pour  $|x| < a$ , les  $U_{l,k}$  sont donnés par la formule

$$U_{l,k}(z) = (-1)^{\alpha_4} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbf{C}^n} k_j(q, z, x) df_{l,jk}(x),$$

avec  $q - 1 \leq \rho < q$ . Il résulte aussitôt de l'expression des noyaux  $k_j(q, z, x)$  que toutes les dérivées de  $U_{l,k}$  au point 0 sont nulles jusqu'à l'ordre  $q$  compris. Les dérivées en 0 des coefficients de la forme  $\omega = f - d''U$  sont donc nulles jusqu'à l'ordre  $q - 1$  inclus. Comme  $q - 1 \leq \rho < q$ , on a forcément  $\omega = 0$ .

On peut énoncer le théorème principal de cet exposé. Pour plus de clarté, on préfère disjoindre le cas où  $f_{l,j}$  est une mesure et le cas où  $f_{l,j}$  est dans  $L^p_{loc}$ .

**THÉORÈME 4.** — *Si  $f$  est une forme de bidegré  $(\alpha, \beta)$ , nulle pour  $|x| < a$ , vérifiant  $d''f = 0$  et dont les coefficients sont des mesures à croissance lente tels que  $\int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n} d|f|(z) < +\infty$  pour un  $\rho \geq -2n$ .*

*Alors la forme  $U(z)$  de bidegré  $(\alpha, \beta - 1)$ , ayant pour coefficients :*

$$U_{l,k}(z) = (-1)^{\alpha_4} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbf{C}^n} k_j(q, z, x) df_{l,jk}(x), \quad q - 1 \leq \rho < q.$$

*[prendre  $k_j(q, z, x) = k_j(z, x)$  si  $\rho < -1$ ] est solution de l'équation*

$$d''U = f$$

*et vérifie les estimations*

$$\left( \int_{\mathbf{C}^n} |U(z)| |z|^{-\rho-1} |z|^{-2n} \varphi(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(a, p, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n} d|f|(z).$$

*Pour tout les  $p$  tels que  $1 \leq p < \frac{2n}{2n-1}$ , avec  $\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$  si  $\rho = -2n$  ou si  $\rho$  est un entier  $\geq -1$ ,  $\varphi(z) = 1$  dans tous les autres cas.  $C(a, p, \rho)$  désigne une constante indépendante de  $f$ .*

**THÉORÈME 4'.** — *On suppose toujours  $f = 0$  pour  $|x| < a$  et  $d''f = 0$ . Les coefficients de  $f$  sont des fonctions dans  $L^p_{loc}$  vérifiant la condition*

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)| |z|^{-\rho} |z|^{-2n} dz < +\infty \quad (p \geq 1, \rho \geq -2n),$$

*resp. (si  $f \in L^\infty_{loc}$ )  $\text{Supess}_{z \in \mathbf{C}^n} |f(z)| |z|^{-\rho} = \|f(z)|z|^{-\rho}\|_\infty < +\infty$  pour un  $\rho \geq -2n$ .*

Alors la forme  $U(z)$  ayant pour coefficients

$$U_{I,K}(z) = (-1)^2 4 \sum_{j=1}^n \int_{\mathbf{C}^n} k_j(q, z, x) f_{I,jK}(x) dx, \quad |I| = \alpha, \quad |K| = \beta - 1, \quad q - 1 \leq \rho < q$$

est solution de l'équation

$$d''U = f$$

et vérifie les estimations

$$\int_{\mathbf{C}^n} |U(z)| |z|^{-\rho-1} \varphi(z) |z|^{-2n} dz \leq C(a, p, \rho) \int_{\mathbf{C}^n} |f(z)| |z|^{-\rho} |z|^{-2n} dz,$$

resp.  $\|U(z)|z|^{-\rho-1} \varphi(z)\|_{\infty} \leq C(a, \rho) \|f(z)|z|^{-\rho}\|_{\infty}$ . Avec

$$\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1 + |z|)]^{-1}$$

si  $\rho = -2n$  ou si  $\rho$  est entier  $\geq -1$ ,  $\varphi(z) = 1$  dans tous les autres cas.

Remarque 1. — Dans le cas des  $\| \cdot \|_{\infty}$ , il suffit de prendre

$$\varphi(z) = [1 + \text{Log}(1 + |z|)]^{-1},$$

si  $\rho = -2n$  ou si  $\rho$  est entier  $\geq -1$ . On peut prendre, dans tous les cas, au lieu de  $\text{Log}^2(1 + |z|)$ ,  $\text{Log}^{\gamma}(1 + |z|)$  avec  $\gamma > 1$ .

Remarque 2. — Comme  $\delta''^2 = 0$ , l'équation  $(d''\delta'' + \delta''d'')U = \delta''f$  entraîne  $\delta''d''\delta''U = 0$  ou encore  $(\delta''d'' + d''\delta'')\delta''U = 0$ .  $\delta''U$  est une forme tempérée harmonique, c'est-à-dire à coefficients polynômes harmoniques, on voit facilement que  $\delta''U$  vérifie les mêmes majorations que la forme  $\omega$ , on a donc aussi

$$\delta''U = 0.$$

La forme  $U$  est entièrement déterminée par les conditions

$$d''U = f, \quad \delta''U = 0,$$

la condition de croissance à l'infini des théorèmes précédents et la nullité des dérivées en 0 jusqu'à l'ordre  $q-1$  inclus.

Si maintenant  $f$  n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0,  $\omega$  est une forme dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus  $\rho$ , on est ramené à la résolution d'une équation du type

$$d''v = \omega, \quad \text{avec } d''\omega = 0,$$

$\omega$  ayant pour coefficients des polynômes. On écrit  $\omega$  sous la forme

$$\omega = \sum_{|\gamma| \leq q-1} z^{\gamma} \omega_{\gamma} \quad (q-1 \leq \rho < q),$$

où les  $\omega_{\eta}$  sont des formes ayant pour coefficients des polynômes en  $\bar{z}$ , on a

$$d'' \omega = \sum_{|\eta| \leq q-1} \bar{z}^{\eta} d'' \omega_{\eta} = 0$$

soit  $d'' \omega_{\eta} = 0$  pour  $|\eta| \leq q-1$ .

On est donc ramené au cas où les coefficients de  $\omega$  sont des polynômes en  $\bar{z}$ , c'est-à-dire à un « théorème de Poincaré complexe ». Si  $\omega$  est de la forme

$$\omega = \sum_{\mathbf{J}, \mathbf{I}} \sum_{\eta} C_{\eta, \mathbf{I}, \mathbf{J}} \bar{z}^{\eta} dz_1 \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{\beta}}, \quad |\mathbf{I}| = \alpha, \quad |\mathbf{J}| = \beta, \quad |\eta| \leq q-1.$$

Un calcul montre qu'il suffit de prendre pour  $\varphi$  :

$$\varphi = \sum_{\mathbf{I}, \mathbf{J}} \sum_{\eta} C_{\eta, \mathbf{I}, \mathbf{J}} \left( \sum_{k=1}^{\beta} \frac{(-1)^{\alpha+k-1}}{\beta+|\eta|} \bar{z}_{j_k} \bar{z}^{\eta} dz_1 \wedge dz_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{z}_{j_k}} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{\beta}} \right),$$

on a donc une solution  $\varphi$  dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur ou égal à  $q$ .

Avec  $u = U + \varphi$ , on a  $d'' u = f$ .

On peut énoncer deux théorèmes semblables aux théorèmes 4 et 4'.

**THÉORÈME 5.** — Soit  $f$  une forme sur  $\mathbf{C}^n$ , dont les coefficients sont des mesures, telle que  $d'' f = 0$ ,

$$\int_{\mathbf{C}^n} (1+|z|)^{-\rho-2n} d|f|(z) < +\infty \quad (\rho \geq -2n).$$

Alors il existe une forme  $u$  à coefficients localement dans  $L^1$  telle que

$$d'' u = f$$

et vérifiant les estimations

$$\int_{\mathbf{C}^n} |u(z)| (1+|z|)^{-\rho-1} |^{\rho} (1+|z|)^{-2n} \varphi(z) dz < +\infty$$

pour tout  $p : 1 \leq p < \frac{2n}{2n-1}$ , avec  $\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1+|z|)]^{-1}$  si  $\rho = -2n$  ou si  $\rho$  est un entier  $\geq -1$ ,  $\varphi(z) = 1$  dans tous les autres cas.

**THÉORÈME 5'.** — Soit  $f$  une forme sur  $\mathbf{C}^n$ , dont les coefficients sont des fonctions dans  $L^p_{\text{loc}}$  telle que  $d'' f = 0$ ,

$$\int_{\mathbf{C}^n} |f(z)| (1+|z|)^{-\rho} |^{\rho} (1+|z|)^{-2n} dz < +\infty, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad \rho \geq -2n,$$

resp. (si  $f \in L_{loc}^\infty$ ),  $\|f(z)(1+|z|)^{-\rho}\|_\infty < +\infty$ . Il existe alors une forme  $u$  à coefficients dans  $L_{loc}^p$  telle que

$$d''u = f$$

et vérifiant les estimations

$$\int_{\mathbf{C}^n} |u(z)(1+|z|)^{-\rho-1} \varphi(z)|^p (1+|z|)^{-2n} dz < +\infty,$$

resp.  $\|u(z)(1+|z|)^{-\rho-1} \varphi(z)\|_\infty < +\infty$ . Avec

$$\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1+|z|)]^{-1} \quad \text{si } \rho = -2n$$

ou si  $\rho$  est un entier  $\geq 1$ ,  $\varphi(z) = 1$  dans tous les autres cas.

*Remarque 1.* — On peut prendre  $\varphi(z) = [1 + \text{Log}(1+|z|)]^{-1}$  dans le cas  $p = +\infty$ .

*Remarque 2.* — Lorsque  $p = 2$ , le résultat peut encore s'écrire de la façon suivante : si  $\int |f(z)|^2 (1+|z|^2)^{-\rho} dz < +\infty$  il existe  $u$  telle que  $d''u = f$  et  $\int |u(z)|^2 (1+|z|^2)^{-\rho-1} \varphi^2(z) dz < +\infty$  avec  $\varphi(z) = 1$  si  $\rho$  non entier,  $\varphi(z) = [1 + \text{Log}^2(1+|z|)]^{-1}$  si  $\rho$  est entier. Le théorème 4.4.2 du livre d'Hörmander (cf. [2]) donne seulement :

$$\int |u(z)|^2 (1+|z|^2)^{-\rho-2} < +\infty.$$

En fait, on démontre dans [6] une amélioration technique du théorème d'Hörmander, qui donne alors pour tout  $\gamma > 0$ ,

$$\int_{\mathbf{C}^n} |u(z)|^2 (1+|z|^2)^{-\rho-1-\gamma} < +\infty,$$

ce qui est pratiquement notre résultat. Pour y parvenir, on reprend la démonstration de 4.4.2 de [2] et on utilise, au lieu de la fonction  $2 + \text{Log}(1+|z|^2)$ , la fonction

$$(1+\gamma) \text{Log}(1+|z|^2) - \text{Log}[2 + \text{Log}(1+|z|^2)].$$

Pour les détails, voir [6].

*Remarque 3.* — Tout ce qui a été fait ici, dans  $\mathbf{C}^n$ , pour l'opérateur  $d''$  est transposable, dans  $\mathbf{R}^n$ , à l'opérateur  $d$ .

C'est sans grand intérêt pour des formes à coefficients dans  $L^p_{loc}$ . Car on peut alors prolonger par continuité l'opérateur d'homotopie habituel pour les formes de classe  $C^\infty$ , à des espaces de formes à coefficients  $L^p$  avec poids. La méthode peut néanmoins être intéressante pour des formes à coefficients mesures.

*Remarque 4.* — Supposons qu'en plus des hypothèses du théorème 4 (ou 4'),  $f$  vérifie la condition  $d'f = 0$ . Le théorème 4 (ou 4') nous fournit  $U$  telle que  $d'U = f$  et d'après la remarque 2 (du théorème 4') on a  $\delta''U = 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} d''d'U &= -d'd''U = -d'f = 0, \\ \delta''d'U &= -d'\delta''U = 0 \quad (\text{cf. [6]}), \\ (d''\delta'' + \delta''d'')d'U &= 0, \end{aligned}$$

$d'U$  est harmonique et comme pour la forme  $\omega$ , on peut montrer que  $d'U = 0$ . On peut alors appliquer le théorème 5' à l'opérateur  $d'$  et construire  $V$  telle que  $d'V = -U$ , soit  $d'd''V = f$ . Si

$$\int_{\mathbf{C}^n} |z|^{-\rho-2n} d|f|(z) < +\infty,$$

on a alors

$$\int_{\mathbf{C}^n} |V(z)|(1+|z|)^{-\rho-2n-2} d\bar{z} < +\infty,$$

en supposant  $\rho$  non entier pour simplifier.

En particulier, si  $\frac{1}{i}f$  est de type (1.1) et positive,  $V$  est plurisousharmonique et en utilisant les propriétés de moyenne de  $V$  on retrouve l'essentiel des résultats de Lelong [3].

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] P. DOLBEAULT, *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe* (*Annals of Math.*, t. 64, 1956, p. 83-330).
- [2] L. HÖRMANDER, *Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, New Jersey, 1966.
- [3] P. LELONG, *Fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans  $\mathbf{C}^n$* . (*J. Anal. Math. Jerusalem*, vol. 12, 1964, p. 365-407).



- [4] B. MALGRANGE, *Séminaire Schwartz*, 1959-1960, exposé n° 1, Faculté des Sciences de Paris, 1960.
- [5] J. B. POLY,  *$\bar{\partial}$ -cohomologie à croissance. Théorèmes de décomposition sur un ouvert pseudo-convexe*, Faculté des Sciences de Poitiers, 1968.
- [6] H. SKODA, *Croissance des fonctions entières s'annulant sur une hypersurface donnée de  $\mathbf{C}^n$* , Secrétariat du Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Nice.
- [7] A. WEIL, *Variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1958.

(Manuscrit reçu le 26 décembre 1970.)

Henri SKODA,  
Département de Mathématiques,  
Faculté des Sciences,  
Parc Valrose,  
06-Nice.

