ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAX KAROUBI

La périodicité de Bott en K-théorie générale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 4, nº 1 (1971), p. 63-95
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_1_63_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 4, 1971, p. 63 à 95.

LA PÉRIODICITÉ DE BOTT EN K-THÉORIE GÉNÉRALE

PAR MAX KAROUBI.

Le but de cet article est d'étudier de manière assez exhaustive les possibilités d'étendre les théorèmes de périodicité de Bott usuels à la K-théorie axiomatique développée dans [5]. En fait, Bass a montré dans [2] que la « bonne » généralisation de la périodicité s'exprime par une formule du type $LK^n \approx K^{n+1}$, $n \geqq 0$, où LK^n est le foncteur de l'anneau discret A défini par la formule

$$(LK^n)(A) \approx \mathrm{Coker}\,[K^n(A[t]) \oplus K^n(A[t^{-1}]) \to K^n(A[t, t^{-1}]).$$

Nous montrons ici que, pour une classe assez générale d'anneaux discrets A (plus généralement d'anneaux de Banach), la formule $(LK^n)(A) \approx K^{n+1}(A)$ est vraie pour tout entier n, positif ou négatif (*cf.* théorèmes 3.2 et 3.11) avec la définition de K^n proposée dans [5]. La démonstration est nouvelle dans le sens qu'elle utilise de manière intensive les notions de « cône » et de « suspension » d'un anneau ou d'une catégorie. Ces notions, associées à celle de catégorie filtrée [4], fournissent, semble-t-il, le bon cadre pour la généralisation des opérateurs de Fredholm dans un espace de Hilbert. Dans cet esprit, cette démonstration peut être rapprochée de celle d'Atiyah [1].

Ce qui précède est démontré dans les trois premiers paragraphes de cet article en même temps que des théorèmes et des propositions de nature plus technique. Dans le quatrième paragraphe on introduit les structures multiplicatives nécessaires pour pouvoir interpréter la périodicité de Bott grâce à un cup-produit comme il est d'usage. Enfin, dans le cinquième paragraphe, on calcule $K_2(A[t, t^{-1}])$, K_2 étant le foncteur introduit récemment par Milnor et A étant un anneau discret. On démontre notamment que $K_2(A[t, t^{-1}])$ peut s'écrire $K_2(A) \oplus K_1(A) \oplus X$ où X est un groupe en général inconnu ([1]). On notera qu'en appliquant le théorème 3.11, on a un isomorphisme $K^{-2}(A[t, t^{-1}]) \approx K^{-2}(A) \oplus K^{-1}(A)$ si A est un anneau noethérien régulier par exemple. A ce stade du moins, le calcul du groupe K^{-2} semble donc plus simple que celui du groupe K_2.

TABLE DES MATIÈRES.

I. — Projecteurs et automorphismes dans un anneau de Banach.

Soit A un anneau de Banach [5] et soit $DA = A\langle t, t^{-1}\rangle$ (²) l'anneau des séries formelles $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n$ telles que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|a_n\| < +\infty$. Soit $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t$ un élément de $GL(DA, n)$ tel que $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$. Si $\alpha^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n t^n$ est la matrice inverse de α, on a donc les relations

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_{-1} = \beta_0\alpha_0 + \beta_{-1}\alpha_1 = 1,$$
$$\alpha_0\beta_i + \alpha_1\beta_{i-1} = \beta_i\alpha_0 + \beta_{i-1}\alpha_1 = 0 \qquad (i \neq 0).$$

LEMME 1.1. — *La relation*

$$\beta_i\alpha_0\beta_j = 0$$

est vraie dans l'un des deux cas suivants :

(*a*) $i < 0$ *et* $j \geq 0$;

(*b*) $i \geq 0$ *et* $j < 0$.

Démonstration. — Dans le premier cas, on a

$$\beta_i\alpha_0\beta_j = \beta_{i-1}\alpha_0\beta_{j+1} = \beta_{i-r}\alpha_0\beta_{j+r}.$$

Quand r tend vers l'infini, la dernière expression tend vers zéro. Donc

(¹) Ce résultat a été trouvé indépendamment par Farrell et Wagoner et par S. M. Gersten (si A est noethérien régulier).

(²) Contrairement aux conventions adoptées dans d'autres articles [5], on notera $A\langle t, t^{-1}\rangle$, $A\langle t\rangle$, etc. — au lieu de $A\{t, t^{-1}\{$, $A\{t\{$, etc.

$\beta_i\alpha_0\beta_j = \beta_{i-r}\alpha\beta_{j+r} = 0$. Dans le deuxième cas, on peut conclure de même grâce à la relation

$$\beta_i\alpha_0\beta_j = \beta_i\alpha_1\beta_{j-1} = \beta_{i+1}\alpha_0\beta_{j-1} = \beta_{i+r}\alpha_0\beta_{j-r}.$$

LEMME 1.2. — *La relation*

$$\beta_i\alpha_1\beta_j = 0$$

est vraie sous les hypothèses (*a*) *ou* (*b*) *du lemme précédent.*

Démonstration. — En effet, $\beta_i\alpha_1\beta_j = \beta_i\alpha_0\beta_{j+1}$ dans le premier cas et $\beta_i\alpha_1\beta_j = \beta_{i+1}\alpha_0\beta_j$ dans le second.

COROLLAIRE 1.3. — *Sous les hypothèses* (*a*) *ou* (*b*) *du lemme* 1.1 *on a la relation*

$$\beta_i\beta_j = \beta_j\beta_i = 0.$$

Démonstration. — En effet,

$$\beta_i\beta_j = \beta_i(\alpha_0 + \alpha_1)\beta_j = \beta_i\alpha_0\beta_j + \beta_i\alpha_1\beta_j = 0.$$

Le raisonnement est analogue pour $\beta_j\beta_i$.

LEMME 1.4. — *Quel que soit le couple* (i, j) *on a la relation de commutation*

$$\beta_i\beta_j = \beta_j\beta_i.$$

Démonstration. — D'après le corollaire précédent, il suffit de considérer le cas $i > 0$, $j > 0$, $i < j$ et le cas $i < 0$, $j < 0$, $i < j$. Dans les deux cas on a les relations

$$\beta_i\alpha_0\beta_j = \beta_i\alpha_1\beta_{j-1} = \beta_{i+1}\alpha_0\beta_{j-1} = \ldots = \beta_j\alpha_0\beta_i$$

et

$$\beta_i\alpha_1\beta_j = \beta_{i+1}\alpha_0\beta_j = \beta_{i+1}\alpha_1\beta_{j-1} = \ldots = \beta_j\alpha_1\beta_i.$$

On a donc

$$\beta_i\beta_j = \beta_i\alpha_0\beta_j + \beta_i\alpha_1\beta_j = \beta_j\alpha_0\beta_i + \beta_j\alpha_1\beta_i = \beta_j\beta_i.$$

LEMME 1.5. — *Pour tout entier i on a les relations de commutation*

$$\alpha_0\beta_i = \beta_i\alpha_0 \qquad \textit{et} \qquad \alpha_1\beta_i = \beta_i\alpha_1 = \beta_i\alpha_1.$$

Démonstration. — Pour $i < 0$, on a

$$\alpha_0\beta_i - \beta_i\alpha_0 = \alpha_1\beta_{i-1} - \beta_{i-1}\alpha_1 = \beta_{i-1}\alpha_0 - \alpha_0\beta_{i-1}$$

$$(\text{car } \alpha_1 = 1 - \alpha_0) = (-1)^r(\alpha_0\beta_{i-r} - \beta_{i-r}\alpha_0) = \lim_{r \to \infty}(-1)^r(\alpha_0\beta_{i-r} - \beta_{i-r}\alpha_0) = 0.$$

De même, pour $i > 0$, on a

$$\alpha_0\beta_i - \beta_i\alpha_0 = \beta_i\alpha_1 - \alpha_1\beta_i = \beta_{i+1}\alpha_0 - \alpha_0\beta_{i+1} = \beta_{i+r}\alpha_0 - \alpha_0\beta_{i+r} = 0.$$

Enfin, pour i quelconque,

$$\alpha_1\beta_i - \beta_i\alpha_1 = (1-\alpha_0)\beta_i - \beta_i(1-\alpha_0) = \beta_i\alpha_0 - \alpha_0\beta_i = 0.$$

LEMME 1.6. — *Le morphisme $p = \alpha_0\beta_0$ est un projecteur.*

Démonstration. — En effet

$$p^2 = \alpha_0\beta_0\alpha_0\beta_0 = \alpha_0\beta_0(1-\alpha_1\beta_{-1}) = \alpha_0\beta_0 - \alpha_0(\beta_0\alpha_1\beta_{-1}) = \alpha_0\beta_0.$$

LEMME 1.7. — *Soit $q = 1-p$. Le morphisme α peut alors s'écrire*

$$\alpha = \alpha^+(t)\,\alpha^-(t^{-1})\,r(t),$$

où

$$\alpha^+(t) \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}\langle t\rangle) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{A}\langle t, t^{-1}\rangle), \qquad \alpha^-(t) \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}\langle t^{-1}\rangle) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{A}\langle t, t^{-1}\rangle)$$

et

$$r(t) = p + qt.$$

De manière plus explicite :

$$\alpha^+(t) = q + \alpha p,$$
$$\alpha^-(t) = p + \alpha q t^{-1}.$$

Démonstration. — On a les relations

$$(q+\alpha p)(p+\alpha q t^{-1})(p+qt) = (\alpha p + \alpha q t^{-1})(p+qt) = \alpha p + \alpha q = \alpha.$$

D'autre part, l'inverse de $q+\alpha p$ (resp. $p+\alpha q t^{-1}$) est $q+\beta p$ (resp. $p+\beta q t$). Le lemme 1.1 implique que $q+\beta p$ (resp. $p+\beta q t^{-1}$) ne contient que des puissances de t positives (resp. négatives).

II. — Calcul de $\mathrm{K}_1(\mathrm{A}\langle t, t^{-1}\rangle)$.

THÉORÈME 2.1 (Bass [2]). — *Soit* A *un anneau discret quelconque. On a alors la suite exacte scindée*

$$\mathrm{K}_1(\mathrm{A}[t]) \oplus \mathrm{K}_1(\mathrm{A}[t^{-1}]) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{K}_1(\mathrm{A}[t, t^{-1}]) \underset{\beta}{\overset{\Delta}{\rightleftarrows}} \mathrm{K}(\mathrm{A}) \to 0.$$

La généralisation de ce théorème aux anneaux de Banach s'exprime de la manière suivante :

THÉORÈME 2.2. — *Soit* A *un anneau de Banach. On a alors la « suite exacte » scindée*

$$\mathrm{K}_1(\mathrm{A}\langle t\rangle) \oplus \mathrm{K}_1(\mathrm{A}\langle t^{-1}\rangle) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{K}_1(\mathrm{A}\langle t, t^{-1}\rangle) \underset{\beta}{\overset{\Delta}{\rightleftarrows}} \mathrm{K}(\mathrm{A}) \to 0.$$

De manière plus précise : $\Delta\gamma = 0$, $\Delta\beta = \mathrm{Id}$, $\mathrm{Im}\gamma$ *est dense dans* $\mathrm{Ker}\Delta$ *pour la topologie quotient de* $K_1(\mathrm{DA}) = \mathrm{GL}(\mathrm{DA})/[\mathrm{GL}(\mathrm{DA}), \mathrm{GL}(\mathrm{DA})]$, $\mathrm{DA} = A\langle t, t^{-1}\rangle$.

Le théorème 2.2 va être lui-même conséquence d'un théorème un peu plus général sur les catégories en groupes de Banach [4]. Si $\mathcal{C}$ est une telle catégorie on désigne par $\mathcal{C}\langle t\rangle$ (resp. $\mathcal{C}\langle t^{-1}\rangle$, resp. $\mathcal{C}\langle t, t^{-1}\rangle$) la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes de source E et de but F sont les combinaisons linéaires formelles $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \left(\text{resp. } \sum_{n=-\infty}^{0} a_n t^n,\right.$ resp. $\left.\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n\right)$ avec $a_n \in \mathcal{C}(E, F)$ et $\sum \| a_n \| < +\infty$. La composition des morphismes est immédiate. Par abus d'écriture, on notera encore $\mathcal{C}\langle t\rangle$ (resp. $\mathcal{C}\langle t^{-1}\rangle$, $\mathcal{C}\langle t, t^{-1}\rangle$) les catégories pseudo-abéliennes associées; ceci n'affecte pas la définition du groupe K_1 de ces catégories. Si $\mathcal{C} = \mathcal{P}(A)$ ou $\mathcal{L}(A)$ (catégorie des A-modules projectifs ou libres de type fini), on a évidemment

$$K_1(\mathcal{C}\langle t\rangle) \approx K_1(A\langle t\rangle), \qquad K_1(\mathcal{C}\langle t^{-1}\rangle) \approx K_1(A\langle t^{-1}\rangle),$$
$$K_1(\mathcal{C}\langle t, t^{-1}\rangle) \approx K_1(A\langle t, t^{-1}\rangle).$$

Si $\mathcal{D}$ est une catégorie additive quelconque, il est bien connu que $K_1(\mathcal{D})$ s'exprime comme limite inductive de groupes K_1 d'anneaux convenables; soit $K_1(\mathcal{D}) = \varinjlim_{E} K_1(A_E)$, $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $A_E = \mathrm{End}\,E$. Si $\mathcal{D}$ est une catégorie en groupes de Banach, on mettra sur $K_1(\mathcal{D})$ la topologie limite inductive. Dans le cas où $\mathcal{D} = \mathcal{P}(B)$ ou $\mathcal{L}(B)$, B anneau de Banach, cette topologie coïncide avec celle de $K_1(B) \approx K_1(\mathcal{D})$.

THÉORÈME 2.3. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie en groupes de Banach pseudo-abélienne. On a alors la « suite exacte » scindée*

$$K_1(\mathcal{C})\langle t\rangle) \oplus K_1(\mathcal{C}\langle t^{-1}\rangle) \xrightarrow{\gamma} K_1(\mathcal{C}\langle t, t^{-1}\rangle) \underset{\beta}{\overset{\Delta}{\rightleftarrows}} K(\mathcal{C}) \to 0.$$

De manière plus précise : $\Delta\beta = \mathrm{Id}$, $\Delta\gamma = 0$, $\mathrm{Im}\,\gamma$ *est dense dans* $\mathrm{Ker}\Delta$.

La démonstration de ce théorème va nous occuper quelques pages. Il convient tout d'abord de définir Δ et β.

Soit E un objet de $\mathcal{C}$. Alors le morphisme « $1.t$ » $= t$ est un automorphisme de E vu comme objet de la catégorie $\mathcal{C}\langle t, t^{-1}\rangle$. La correspondance $E \to (E, t)$ induit l'homomorphisme β. Soit maintenant $C\mathcal{C}$ (resp. $S\mathcal{C}$) le cône (resp. la suspension) de la catégorie $\mathcal{C}$. On va définir un foncteur

$$\theta : \ \mathcal{C}\langle t, t^{-1}\rangle \to S\mathcal{C}$$

de la manière suivante : à l'objet E de $\mathcal{C}$ on associe l'objet (E, E, ..., E, ...) de $S\mathcal{C}$. A un morphisme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n$ on associe la classe de la matrice

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Il est facile de voir que θ est bien défini. En outre des formules analogues permettent de définir des foncteurs

$$\theta^+ : \mathcal{C}\langle t \rangle \to C\mathcal{C},$$
$$\theta^- : \mathcal{C}\langle t^{-1} \rangle \to C\mathcal{C},$$

de sorte que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}\langle t \rangle \arrow[r, "\theta^+"] \arrow[d] & C\mathcal{C} \arrow[d] \\ \mathcal{C}\langle t, t^{-1} \rangle \arrow[r, "\theta"] & S\mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}\langle t^{-1} \rangle \arrow[r] \arrow[d] & C\mathcal{C} \arrow[d] \\ \mathcal{C}\langle t, t^{-1} \rangle \arrow[r] & S\mathcal{C} \end{tikzcd}$$

commutent. Rappelons d'autre part (*cf.* [4]) l'isomorphisme canonique $s : K(\mathcal{C}) \to K_1(S\mathcal{C})$ défini par $s(E) = (\tau(E), J)$, où $\tau(E) = (E, E, \dots)$ et où J est l'automorphisme de $\tau(E)$ dans la catégorie $S\mathcal{C}$ défini par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

L'homomorphisme Δ est alors défini en composant l'homomorphisme $K_1(\mathcal{C}\langle t, t^{-1} \rangle) \to K_1(S\mathcal{C})$ et l'isomorphisme inverse $s^{-1} : K_1(S\mathcal{C}) \to K(\mathcal{C})$ de s.

LEMME 2.4. — *Les homomorphispes composés $\Delta\beta$ et $\Delta\gamma$ sont respectivement égaux à l'identité et à zéro.*

Démonstration. — En effet $\beta(E) = (E, t)$ et $\theta(E, t) = s(E)$. D'autre part l'homomorphisme $\Delta\gamma$ se factorise à travers $K_1(C\mathcal{C})$ grâce aux foncteurs θ^+ et θ^-. Donc $\Delta\gamma = 0$.

Soit maintenant $x = (E, \sigma(t))$ un élément de $K_1(\mathcal{C}\langle t, t^{-1} \rangle)$. On va montrer que, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un automorphisme $\sigma'(t)$, ε-approximation de σ, tel que $x' = (E, \sigma'(t))$ s'écrive sous la forme $\beta(F) + \gamma(G)$. Ceci achèvera la démonstration du théorème 2.3 donc aussi des théorèmes 2.1 et 2.2. En effet, soit $\sigma(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n$. Si N est suffisamment grand, $\sigma'(t) = \sum_{n=-N}^{+N} a_n t^n$. est une ε-approximation de $\sigma(t)$. On peut aussi écrire

$$\sigma'(t) = t^{-N}(a_{-N} + a_{-N+1}t + \dots a_N t^{2N}) = t^{-N}\sigma''(t).$$

Puisque $(E, t^{-N}\sigma''(t)) = (E, t^{-N}) + (E, \sigma''(t))$ dans le groupe $K_1(\mathcal{C}\langle t, t^{-1}\rangle)$ et que $(E, t^{-N}) = -\beta(E^N)$, il suffit de démontrer la propriété pour σ''. Si on écrit $\sigma''(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$, $n > 1$, il est clair que la matrice

$$\begin{pmatrix} \sigma''(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se déduit de la matrice

$$\begin{bmatrix} b_0 + b_1 t + \dots + b_{n-1} t^{n-1} & -b_n t^{n-1} \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

par deux opérations élémentaires. On peut donc supposer en outre que $n = 1$, soit $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t$. Dans ce cas, d'après le paragraphe précédent (lemme 1.7), on a

$$(E, \alpha) = (E, \alpha^+(t)\,\alpha^-(t)\,r(t)) = (E, \alpha^+(t)) + (E, \alpha^-(t)) + (E, r(t)).$$

Les deux premiers termes de la somme proviennent de manière évidente de $K_1(A\langle t\rangle) \oplus K_1(A\langle t^{-1}\rangle)$ et $(E, r(t)) = (E, p + qt)$ s'écrit aussi $(E', 1) + (E'', t)$ où $E' = \operatorname{Im} p$, $E'' = \operatorname{Im} q$; soit

$$(E, p + qt) = (E'', t) = \beta(E'').$$

C. Q. F. D.

Revenons maintenant au théorème 2.2 et examinons tout d'abord le cas discret. Dans ce cas, Bass a montré que le noyau de γ est isomorphe à $K_1(A)$. Pour le démontrer posons

$$K'_1(A[t]) = \operatorname{Ker}[K_1(A[t]) \to K_1(A)] = \operatorname{Coker}[K_1(A) \to K_1(A[t])]$$

et de même

$$K'_1(A[t^{-1}]) = \operatorname{Ker}[K_1(A[t^{-1}]) \to K_1(A)] = \operatorname{Coker}[K_1(A) \to K_1(A[t^{-1}])].$$

L'idée essentielle va consister à construire deux homomorphismes

$$\gamma'^{+}:\ K_1(A[t, t^{-1}]) \to K'_1(A[t]),$$
$$\gamma'^{-}:\ K_1(A[t, t^{-1}]) \to K'_1(A[t^{-1}]),$$

inverses à gauche des homomorphismes naturels

$$\gamma^+ : \quad K'_1(A[t]) \to K_1(A[t, t^{-1}]),$$
$$\gamma^- : \quad K'_1(A[t^{-1}]) \to K_1(A[t, t^{-1}]).$$

Pour fixer les idées on va se borner à décrire γ^-. Soit α une matrice $r \times r$ inversible à coefficients dans $A[t, t^{-1}]$. Pour n suffisamment grand $t^n\alpha$ est une matrice $r \times r$ à coefficients dans $A[t]$. Considérons la suite exacte

$$0 \to (A[t])^r \xrightarrow{\alpha_{(n)}} (A[t])^r \to M \to 0,$$

où $\alpha_{(n)}$ désigne l'endomorphisme associé à la matrice $t^n\alpha$. Si n est suffisamment grand, la multiplication par t induit un endomorphisme nilpotent ν de M. Le couple $\gamma'^-(n, \alpha) = (\overline{M}, 1 + \nu t^{-1})$ avec $\overline{M} = M \otimes_A A[t^{-1}]$ définit un élément de $K'_1(A\langle t^{-1}\rangle)$ On pose alors

$$\gamma^-(\alpha) = \gamma'^-(n, \alpha) - \gamma'^-(n, 1) = \gamma'^-(n, \alpha),$$

définition indépendante du choix de n. L'application γ'^- induit bien un homomorphisme de $K_1(A[t, t^{-1}])$ dans $K'_1(A[t^{-1}])$ qu'on notera encore γ'^- On remarquera que $\gamma'^-(\alpha) = 0$ si $\alpha \in GL(A[t]) \subset GL(A[t, t^{-1}])$.

Lemme 2.5. — *L'homomorphisme γ'^- est inverse à gauche de l'homomorphisme γ^-.*

Démonstration. — Si α est une matrice définissant un élément de $K'_1(A[t^{-1}])$, on peut par un procédé éprouvé réduire α à la forme $1 + \nu t^{-1}$, ν étant une matrice nilpotente (*cf.* la démonstration du lemme 2.4). Dans ce cas, $\mathrm{Coker}\,\alpha_{(1)} \approx A^r$,la multiplication par t correspondant à l'endomorphisme ν. On démontre un lemme analogue avec γ'^+ et γ^+.

Corollaire 2.6 (Bass). — *Soit* A *un anneau discret. On a alors la suite exacte scindée*

$$0 \to K_1(A) \to K_1(A[t]) \oplus K_1(A[t^{-1}]) \to K_1(A[t, t^{-1}]) \to K(A) \to 0.$$

Dans le cas d'un anneau de Banach quelconque il convient d'apporter plusieurs modifications techniques à l'argument précédent. On posera tout d'abord

$$\overline{K}_1(A) = GL(A)/\overline{[GL(A), GL(A)]}$$

de sorte que $\overline{K}_1(A)$ devient un groupe topologique séparé. La suite

$$\overline{K}_1(A\langle t\rangle) \oplus \overline{K}_1(A\langle t^{-1}\rangle) \xrightarrow{\overline{\gamma}} \overline{K}_1(A\langle t, t^{-1}\rangle) \xrightarrow{\overline{\Delta}} K(A) \to 0$$

est clairement exacte [car la topologie de $K(A) \approx K_1(SA) \approx \overline{K}'_1(SA)$ est discrète : *cf.* lemme 3.1] sauf peut-être en $\overline{K}_1(A\langle t, t^{-1}\rangle)$. On va voir que le noyau de $\overline{\gamma}$ est isomorphe à $\overline{K}_1(A)$. On peut définir des groupes $\overline{K}'_1(A\langle t\rangle)$ et $\overline{K}'_1(A\langle t^{-1}\rangle)$ comme dans le cas discret ainsi que deux homomorphismes

$$\gamma'^{\pm}:\quad \overline{K}_1(A\langle t, t^{-1}\rangle) \to \overline{K}'_1(A\langle t^{\pm 1}\rangle).$$

De manière précise, soit $\alpha \in GL(A\langle t, t^{-1}\rangle)$ une matrice s'exprimant comme un polynôme en t^{-1} et série en t. Alors, pour n suffisamment grand, $t^n\alpha$ induit un endomorphisme $\alpha_{(n)}$ de $(A\langle t\rangle)^r$, l'endomorphisme ν de Coker $\alpha_{(n)}$ qui se définit comme plus haut est topologiquement nilpotent et le couple $(M, 1+\nu t^{-1})$ définit bien, comme dans le cas discret, un élément $\gamma'^{-}(\alpha)$ de $K_1(\tilde{A}\langle t^{-1}\rangle)$ (3). Si α est une matrice quelconque dans $GL(A\langle t, t^{-1}\rangle)$, elle s'exprime comme limite de matrices $\alpha^{(i)}$ où $\alpha^{(i)}$ est un polynôme en t^{-1} et une série en t. On pose alors $\gamma'^{-}(\alpha) = \lim\limits_{i\to\infty}\gamma'^{-}(\alpha^{(i)})$. Pour voir que γ'^{-} est bien défini, il nous suffira d'exhiber une formule explicite dépendant continûment de α. Soit donc $\alpha = \sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} a_s t^s$ et soit $\beta = \sum\limits_{r=-\infty}^{+\infty} \beta_r t^r$ la matrice inverse de α. On peut approcher α et β par les sommes partielles

$$\alpha^{(n)} = \sum_{s=-n}^{+\infty} \alpha_s t^s, \qquad \beta^{(n)} = \sum_{s=-n}^{+\infty} \beta_s t^s.$$

Si on écrit $(A\langle t\rangle)^r = \bigoplus\limits_{\alpha}(t^\alpha A^r)$, l'endomorphisme $t^n\alpha^{(n)}$ est représenté par la matrice

$$t^n\alpha^{(n)} = \begin{bmatrix} \alpha_{-n} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_{-n+1} & \alpha_{-n} & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_{-n+2} & \alpha_{-n+1} & \alpha_{-n} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Une approximation (pour la norme L^1) d'un inverse à gauche de $t^n\alpha^{(n)}$ peut s'écrire

$$\sigma^{(n)} = \begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \dots \\ 0 & \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \dots \\ 0 & 0 & \beta_n & \beta_{n-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

---

(3) $\tilde{A}$ désigne ici l'anneau stabilisé de A (*cf.* [5]). Dans le cas discret on a

$$K_1(A\langle t^{-1}\rangle) \approx K_1(\tilde{A}\langle t^{-1}\rangle).$$

En effet, si on note $\alpha_i^- \beta_j^+$(resp. $\beta_i^- \alpha_j^+$) l'expression $\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_{i-r} \beta_{j+r}$(resp. $\sum_{r=0}^{\infty} \beta_{i-r} \alpha_{j+r}$), le produit $\sigma^{(n)} t^n \alpha^{(n)}$ est la matrice

$$\begin{bmatrix} \beta_n^- \alpha_{-n}^+ & \beta_{n+1}^- \alpha_{-n}^+ & \beta_{n+2}^- \alpha_{-n}^+ & \cdots \\ \beta_n^- \alpha_{-n+1}^+ & \beta_{n+1}^+ \alpha_{-n+1}^+ & \beta_{n+2}^- \alpha_{-n}^+ & \cdots \\ \beta_n^- \alpha_{-n+2}^+ & \beta_{n+1}^- \alpha_{-n+2}^+ & \beta_{n+2}^- \alpha_{-n+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

D'autre part, le produit $t^n \alpha^{(n)} \sigma^{(n)}$ est égal à

$$\begin{bmatrix} \alpha_{-n}^- \beta_n^+ & \alpha_{-n}^- \beta_{n-1}^+ & \alpha_{-n}^- \beta_{n-2}^+ & \cdots \\ \alpha_{-n+1}^- \beta_n^+ & \alpha_{-n+1}^- \beta_{n-1}^+ & \alpha_{-n+1}^- \beta_{n-2}^+ & \cdots \\ \alpha_{-n+2}^- \beta_n^+ & \alpha_{-n+2}^- \beta_{n-1}^+ & \alpha_{-n+2}^- \beta_{n-2}^+ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Considérons maintenant la matrice infinie $p = a_{ij}$, $-\infty < j < +\infty$, $-\infty < j < +\infty$, définie par la formule $a_{ij} = \alpha_i^- \beta_{-j}^+$. Il résulte des calculs précédents que p est un projecteur. En outre, si J est l'endomorphisme défini par la matrice $J_{r,s} = \delta_{r,s+1}$, l'endomorphisme t sur Ker$p$ est représenté par la matrice $J' = (1-p)\, J(1-p)$. Il est clair que $1 - p + J' t^{-1}$ est la limite dans $\overline{K}'_1(\tilde{A}\langle t^{-1}\rangle)$ de $\gamma'^{+}(\alpha_{(n)})$. En outre, γ'^{+} est un homomorphisme de $\overline{K}_1(\tilde{A}\langle t, t^{-1}\rangle)$ dans $\overline{K}'_1(A\langle t^{-1}\rangle)$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{K}'_1(A\langle t^{-1}\rangle) \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{K}_1(A\langle t, t^{-1}\rangle) \arrow[d, dashed, "\gamma'"] \\ & \overline{K}_1(A\langle t^{-1}\rangle) \end{tikzcd}$$

est commutatif. Il reste à montrer que l'application naturelle $\overline{K}_1(A\langle t^{-1}\rangle) \to \overline{K}_1(A\langle t^{-1}\rangle)$ est injective. Soit donc α un élément de $GL(A\langle t^{-1}\rangle)$ dont l'image dans $K'_1(\tilde{A}\langle t^{-1}\rangle)$ est triviale. Alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha' \in GL(A\langle t^{-1}\rangle)$ tel que $\|\alpha - \alpha'\| < \varepsilon$, α' élémentaire. Donc α' appartient à l'adhérence de $[GL(A\langle t^{-1}\rangle, GL(A\langle t^{-1}\rangle)]$, donc définit la classe nulle dans le groupe $\overline{K}'_1(A\langle t^{-1}\rangle)$. Ceci achève la démonstration du théorème dont l'énoncé est le suivant :

THÉORÈME 2.7. — *Soit* A *un anneau de Banach quelconque. On a alors la suite exacte*

$$0 \to \overline{K}_1(A) \to \overline{K}_1(A\langle t\rangle) \oplus \overline{K}_1(A\langle t^{-1}\rangle) \xrightarrow{\gamma} \overline{K}_1(A\langle t, t^{-1}\rangle) \xrightarrow{\Delta} K(A) \to 0$$

sauf peut-être en $\overline{K}_1(A\langle t, t^{-1}\rangle)$. *En ce point on a* $\Delta\gamma = 0$ *et* Imγ *dense dans* KerΔ [4].

---

[4] En fait, nous ne donnons ce théorème que pour être complet; le théorème 2.2 sera amplement suffisant pour la suite.

III. — Le calcul de $K^i(A\langle t, t^{-1}\rangle)$.

On va appliquer les résultats du paragraphe précédent au cas où A est la suspension SB d'un anneau de Banach B. On aura besoin du lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Soit* $A = SB$ *et soit* C *l'algèbre* $A, A\langle t\rangle$, $A\langle t^{-1}\rangle$ *ou* $A\langle t, t^{-1}\rangle$. *Alors le sous-groupe* $[GL(C), GL(C)]$ *est ouvert* (donc fermé) *dans* $GL(C)$. *En particulier* $K_1(C) \approx \overline{K}_1(C)$ *est un groupe discret.*

Démonstration. — Soit A' l'anneau de Banach CB. Alors les anneaux $C' = A'$, $A'\langle t\rangle$, $A'\langle t^{-1}\rangle$ et $A'\langle t, t^{-1}\rangle$ sont flasques et on a des épimorphismes $C' \to C$. Il en résulte qu'un élément de $GL(C)$ suffisamment proche de l'identité se relève en un élément de $GL(C') = [GL(C'), GL(C')]$. Donc tout élément de $GL(C)$ suffisamment voisin d'un produit de commutateurs est un produit de commutateurs.

C. Q. F. D.

Il résulte maintenant de la théorie des catégories filtrées développée dans [4] que

$$K_1(SB) \approx \overline{K}_1(SB) \approx K(B); \qquad K_1(SB\langle t\rangle) \approx \overline{K}_1(SB\langle t\rangle) \approx K(B\langle t\rangle);$$
$$K_1(SB\langle t^{-1}\rangle) \approx K_1(SB\langle t^{-1}\rangle) = K(B\langle t^{-1}\rangle);$$
$$K_1(SB\langle t, t^{-1}\rangle) \approx \overline{K}_1(SB\langle t, t^{-1}\rangle) \approx K(Bt, t^{-1}).$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Soit un anneau de Banach quelconque et soit* i *un nombre entier positif. On a alors la suite exacte*

$$0 \to K^i(A) \to K^i(A\langle t\rangle) \oplus K^i(A\langle t^{-1}\rangle) \xrightarrow{\gamma^i} K^i(A\langle t, t^{-1}\rangle) \to K^{i+1}(A) \to 0.$$

En particulier $K^1(A) \approx \operatorname{Coker} \gamma^0$.

Remarque. — Soit F un foncteur de la catégorie des anneaux de Banach dans celle des groupes abéliens. En suivant Bass [2], on en déduit un nouveau foncteur LF grâce à la formule

$$(LF)(A) = \operatorname{Coker} F(A\langle t\rangle) \oplus F(A\langle t^{-1}\rangle) \to F(A\langle t, t^{-1}\rangle).$$

D'après le théorème précédent, on a donc la formule condensée

$$LK^i \approx K^{i+1}$$

pour $i \geqq 0$. Nous allons voir dans quelle mesure cette formule reste vraie pour les valeurs négative de i.

THÉORÈME 3.3. — *La suite*

$$0 \to K^{-1}(A) \to K^{-1}(A\langle t, t^{-1}\rangle) \xrightarrow{\bar{s}} K^{-1}(SA) \to 0$$

est exacte quel que soit l'anneau de Banach A.

Démonstration. — La surjectivité de $\bar{s}$ résulte de la surjectivité de $s : K_1(A\langle t, t^{-1}\rangle) \to K_1(SA)$. Soit α un élément de $GL(A\langle t, t^{-1}\rangle)$ dont la classe dans $K^{-1}(A\langle t, t^{-1}\rangle)$ sera encore désignée par α. Supposons que $\bar{s}(\alpha) = 0$. Il existe alors un élément $\alpha'(x)$ de $K_1(SA\langle x\rangle)$ tel que $\alpha'(0) = 0$ et $\alpha'(1) = s(\alpha)$. Puisque l'application s' est surjective, il existe un élément

$$\begin{tikzcd}
K_1(A\langle x, t\rangle) \otimes K_1(A\langle x, t^{-1}\rangle) \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & K_1(A\langle x, t, t^{-1}\rangle) \arrow[r, "s'"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & K_1(SA\langle x\rangle) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & 0 \\
K_1(A\langle t\rangle) \oplus K_1(A\langle t^{-1}\rangle) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & K_1(A\langle t, t^{-1}\rangle) \arrow[r, "s"] \arrow[d] & K_1(SA) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
K^{-1}(A) \oplus K^{-1}(A) \arrow[r, "\bar{\gamma}"] & K^{-1}(A\langle t, t^{-1}\rangle) \arrow[r, "\bar{s}"] & K^{-1}(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\sigma = \sigma(x, t)$ de $K_1(A\langle x, t, t^{-1}\rangle)$ tel que $s'(\sigma) = \alpha'$, $\sigma(0, t) = 1$. Dans le groupe $K^{-1}(A\langle t, t^{-1}\rangle)$ la classe de α coïncide avec celle de $\alpha'' = \alpha[\sigma(1, t)]^{-1}$. Puisque $s(\alpha'') = 0$ et qu'une approximation suffisamment fine α'' de α' ne modifie pas la classe de α' dans $K_1(SA)$ et $K^{-1}(A\langle t, t^{-1}\rangle)$, que α'' peut donc s'écrire $\gamma(u)$ où $u \in K_1(A\langle t\rangle) \oplus K_1(A\langle t^{-1}\rangle)$, on a clairement $\mathrm{Ker}\,\bar{s} \supset \mathrm{Im}\,\bar{\gamma}$. L'inclusion $\mathrm{Ker}\,\bar{s} \supset \mathrm{Im}\,\bar{\gamma}$ et l'injectivité de l'application

$$K^{-1}(A) \to K^{-1}(A\langle t, t^{-1}\rangle)$$

sont évidentes.

Remarque. — Le théorème précédent reste valable si les anneaux n'ont pas d'élément unité. Cette remarque vaut pour tous les théorèmes qui vont suivre.

COROLLAIRE 3.4. — *Soit* $\varepsilon : A\langle t, t^{-1}\rangle \to A$ *l'homomorphisme défini par* $\varepsilon(\alpha(t)) = \alpha(1)$ *et soit* $\Gamma A = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$. *Alors l'inclusion évidente de* ΓA *dans* SA *induit un isomorphisme* $K^{-1}(\Gamma A) \approx K^{-1}(SA)$.

COROLLAIRE 3.5. — *L'inclusion de* ΓA *dans* SA *induit un isomorphisme* $K^{-n}(\Gamma A) \approx K^{-n}(SA)$ *pour* $n \geqq 1$.

Démonstration. — On applique le corollaire précédent à $\Omega^{n-1}A$ en utilisant le fait que $K^{-1}(\Omega^{n-1}SA) \approx K^{-1}(S\Omega^{n-1}A)$.

Remarque. — Si on note $\pi_n(GL(B))$ le groupe $K^{-n-1}(B)$ pour tout anneau de Banach B (c'est le groupe d'homotopie classique si B est une algèbre de Banach), le corollaire précédent s'écrit aussi bien $\pi_i(GL(\Gamma A)) \approx \pi_i(GL(SA))$, $i \geqq 0$. Ceci implique que $GL(\Gamma A)$ et $GL(SA)$ ont le même type d'homotopie si A est une algèbre de Banach.

Définition 3.6. — *Pour tout anneau de Banach* A *posons*

$$A_{n,p} = A\langle x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p, t_1^{-1}, \ldots, t_p^{-1}\rangle).$$

On dit que A *est « K-régulier » si, quel que soit le couple (n, p), l'inclusion de $A_{0,p}$ dans $A_{n,p}$ induit un isomorphisme* $K^0(A_{0,p}) \approx K^0(A_{n,p})$.

Exemples. — Si A est un anneau noethérien régulier, un théorème de Bass, Heller et Swan implique que A est K-régulier [2], d'où la terminologie. De même, toute algèbre de Banach B est K-régulière car $B\langle x\rangle$ a le même type d'homotopie topologique que B et car tout B-fibré localement trivial sur le segment $[0, 1]$ est trivial.

Proposition 3.7. — *Soit une fibration*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0,$$

où A *et* A″ *sont K-réguliers. Alors* A′ *est K-régulier.*

Démonstration. — Nous allons d'abord démontrer que la suite

$$0 \to A'\langle t, t^{-1}\rangle \to A\langle t, t^{-1}\rangle \to A''\langle t, t^{-1}\rangle \to 0$$

est aussi une fibration.

Soit $\alpha(x_1, \ldots, x_n, t)$ un élément de GL $(A''_{n,1})$ tel que $\alpha(0, \ldots, 0, t) = 1$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'\langle t, t^{-1}\rangle \arrow[r] \arrow[d] & A\langle t, t^{-1}\rangle \arrow[r] \arrow[d] & A''\langle t, t^{-1}\rangle \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & SA' \arrow[r] & SA \arrow[r] & SA'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Appliquons les isomorphismes

$$K_1(SA''\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) \approx K(A''\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) \approx K(A'')$$

et le théorème 2.7. On voit alors, que, modulo un produit par des matrices élémentaires et modulo une approximation, α peut s'écrire

$$\alpha^+(x_1, \ldots, x_n, t)\,\alpha^-(x_1, \ldots, x_n, t^{-1}), \qquad \alpha^+ \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}''\langle x_1, \ldots, x_n, t\rangle),$$
$$\alpha^- \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}''\langle x_1, \ldots, x_n, t^{-1}\rangle) \qquad \text{où} \qquad \alpha^+(0, \ldots, 0, t) = \alpha^-(0, \ldots, 0, t) = 1.$$

Puisque $\mathrm{A} \to \mathrm{A}''$ est une fibration, α^+ et α^- se relèvent dans

$$\mathrm{GL}(\mathrm{A}\langle x_1, \ldots, x_n, t\rangle) \quad \text{et} \quad \mathrm{GL}(\mathrm{A}\langle x_1, \ldots, x_n, t^{-1}\rangle)$$

respectivement d'où la fibration annoncée. Par récurrence sur n, on en déduit que la suite

$$0 \to \mathrm{A}'_{n,p} \to \mathrm{A}_{n,p} \to \mathrm{A}''_{n,p} \to 0$$

est aussi une fibration. On a donc les suites exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}^{-1}(\mathrm{A}_{n,p}) \arrow[r] & \mathrm{K}^{-1}(\mathrm{A}''_{n,p}) \arrow[r] & \mathrm{K}(\mathrm{A}'_{n,p}) \arrow[r] & \mathrm{K}(\mathrm{A}_{n,p}) \arrow[r] & \mathrm{K}(\mathrm{A}''_{n,p}) \\
\mathrm{K}^{-1}(\mathrm{A}_{0,p}) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"'] & \mathrm{K}^{-1}(\mathrm{A}''_{n,p}) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"'] & \mathrm{K}(\mathrm{A}'_{0,p}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{K}(\mathrm{A}_{0,p}) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"'] & \mathrm{K}(\mathrm{A}''_{0,p}) \arrow[u, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

d'où la proposition grâce au lemme des cinq.

Corollaire 3.8. — *Si* A *est* K-*régulier, il en est de même de* EA *et* ΩA.

Proposition 3.9. — *Si* A *est* K-*régulier, il en est de même de* SA.

En effet,

$$\mathrm{K}((\mathrm{SA})_{n,p}) \approx \mathrm{K}^1(\mathrm{A}_{n,p}) \approx \mathrm{Coker}[\mathrm{K}(\mathrm{A}_{0,p}) \to \mathrm{K}(\mathrm{A}_{n,p+1})]$$
$$\approx \mathrm{Coker}[\mathrm{K}(\mathrm{A}_{0,p}) \to \mathrm{K}(\mathrm{A}_{0,p+1})] \approx \mathrm{K}^1(\mathrm{A}_{0,p}) \approx \mathrm{K}((\mathrm{SA})_{0,p}).$$

Proposition 3.10. — *Soit* A″ *un anneau de Banach* K-*régulier et soit*

$$0 \to \mathrm{A}' \to \mathrm{A} \to \mathrm{A}'' \to 0$$

une suite exacte d'anneaux de Banach. Alors la suite

$$0 \to \mathrm{SA}' \to \mathrm{SA} \to \mathrm{SA}'' \to 0$$

est une fibration.

Démonstration. — En effet,

$$\mathrm{K}_1(\mathrm{SA}''\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) \approx \mathrm{K}(\mathrm{A}''\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) \approx \mathrm{K}(\mathrm{A}'').$$

Théorème 3.11. — *Soit* A *un anneau* K-*régulier. Alors l'inclusion naturelle* $\Gamma\mathrm{A} \to \mathrm{SA}$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{K}^i(\Gamma\mathrm{A}) \approx \mathrm{K}^i(\mathrm{SA}) \approx \mathrm{K}^{i+1}(\mathrm{A})$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. — Si $i < 0$, on a déjà démontré (corollaire 3.5) que $K^i(\Gamma A) \approx K^i(SA)$. Puisque A est K-régulier, la suite exacte

$$0 \to \tilde{A} \to CA \to SA \to 0$$

est une fibration (prop. 3.10). Donc $K^i(SA) \approx K^{i+1}(A)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Si $i = 0$, on a

$$\begin{aligned} K(\Gamma A) &\approx \mathrm{Coker}[K(A) \to K(A\langle t, t^{-1}\rangle)] \\ &\approx \mathrm{Coker}[K(A\langle t\rangle) \oplus K(A\langle t^{-1}\rangle) \to K(A\langle t, t^{-1}\rangle)] \approx K(SA). \end{aligned}$$

Enfin, si $i > 0$, $K^i(\Gamma A) \approx K\ (S^i \Gamma A) \approx K\ (\Gamma S^i A) \approx K\ (S^{i+1} A)$ car $S^i A$ est K-régulier (proposition 3.9).

COROLLAIRE 3.12. — *Supposons* A K-*régulier et posons*

$$K^{p,q}(A) = K(S^p \Omega^q A).$$

Alors $K^{p,q}(A) \approx K^{p-q}(A)$.

Démonstration. — Il suffit de prouver que $K(S\Omega A) \approx K(\Gamma SA) \approx K(A)$. En effet, des fibrations

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \tilde{A} \longrightarrow CA \to SA \to 0 \\ 0 \to S\Omega A \to SEA \to SA \to 0, \end{gathered}$$

on déduit que $K^{-1}(SA) \approx K(S\Omega A)$ et $K^{-1}(SA) \approx K\ (\tilde{A}) \approx K(A)$.

IV. — **Structures multiplicatives.**

Soient A et B deux anneaux quelconques. Alors $A \otimes_{\mathbf{Z}} B$ est un anneau pour la multiplication définie par la formule $(a \otimes b).(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$. Si A et B sont unitaires, il en est de même de $A \otimes_{\mathbf{Z}} B$. Dans ce cas, le produit tensoriel des modules induit un foncteur bilinéaire

$$\mathfrak{L}(A) \times \mathfrak{L}(B) \to \mathfrak{L}\left(A \otimes_{\mathbf{Z}} B\right),$$

d'où un homomorphisme bilinéaire de $K(A) \times K(B)$ dans $K\left(A \otimes_{\mathbf{Z}} B\right)$. Supposons maintenant que A et B ne soient pas unitaires. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^+ \otimes_{\mathbf{Z}} B^+ & \longrightarrow & A^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^+ & \longrightarrow & \mathbf{Z} \end{array}$$

Si D désigne le produit fibré de A^+ et de B^+ au-dessus de $\mathbf{Z}$, on a la suite exacte d'anneaux

$$o \to A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} B \to A^+ \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} B^+ \to D \to o.$$

En identifiant K(A) [resp. K(B)] au noyau de l'homomorphisme $K(A^+) \to K(\mathbf{Z})$ [resp. $K(B^+) \to K(\mathbf{Z})$], on en déduit un homomorphisme bilinéaire

$$m: \quad K(A) \times K(B) \to K\left(A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} B\right),$$

où $K\left(A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} B\right) \approx \operatorname{Ker}\left(K\left(A^+ \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} B^+\right) \to K(D)\right)$.

Supposons maintenant que A et B soient deux anneaux de Banach et soit C un troisième anneau de Banach. Un *bimorphisme* de $A \times B$ dans C est une application $\mathbf{Z}$-bilinéaire.

$$\theta: \quad A \times B \to C$$

qui satisfait aux propriétés suivantes :

1° On a l'identité $\theta(a, b)\,\theta(a', b') = \theta(aa', bb')$.

2° Il existe une constante T telle que $\|\theta(a, b)\| \leq T\,\|\theta(a)\| \times \|\theta(b)\|$.

Il est clair que, sous la première hypothèse, θ induit un homomorphisme d'anneaux $A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} B \to C$ d'où un homomorphisme θ_1 de $K\left(A \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} B\right)$ dans K(C). En composant m et θ_1, on en déduit un homomorphisme

$$\overline{\theta}: \quad K(A) \times K(B) \to K(C).$$

Théorème 4.1. — *Soit* $\mathcal{K}$ *une catégorie négativement admissible d'anneaux de Banach* [5]. *A tout quadruple* (A, B, C, θ) *où* A, B *et* C *sont des objets de* $\mathcal{K}$ *et* $\theta : A \times B \to C$ *un bimorphisme, on peut associer de manière unique des applications bilinéaires naturelles*

$$\theta^{-n,-p}: \quad K^{-n}(A) \times K^{-p}(B) \to K^{-n-p}(C),$$

de telle façon que les axiomes suivants soient satisfaits :

(1) $\theta^{0,0} = \overline{\theta}$.

(2) *a) Soit le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc}
o & \longrightarrow & A' \times B & \longrightarrow & A \times B & \longrightarrow & A'' \times B & \longrightarrow & o \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
o & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & o
\end{array}$$

où les suites horizontales sont des fibrations. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K^{-n-1}(A'')\times K^{-p}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^{n-1}\times 1"'] & K^{-n-p-1}(C'') \arrow[d, "\partial^{-n-p-1}"] \\ K^{-n}(A')\times K^{-p}(B) \arrow[r] & K^{-n-p}(C') \end{tikzcd}$$

(2 *b*) *Soit le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A\times B' \arrow[r] \arrow[d] & A\times B \arrow[r] \arrow[d] & A\times B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r] & C \arrow[r] & C'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les suites horizontales sont des fibrations. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K^{-n}(A)\times K^{-p-1}(B'') \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^n\times\partial^{-p-1}"'] & K^{-n-p-1}(C'') \arrow[d, "\partial^{-n-p-1}"] \\ K^{-n}(A)\times K^{-p}(B') \arrow[r] & K^{-n-p}(C') \end{tikzcd}$$

La démonstration de ce théorème nécessite le lemme suivant :

Lemme 4.2. — *Considérons le diagramme commutatif suivant où toutes les lignes et les colonnes sont des fibrations.*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Le diagramme suivant est alors anticommutatif

$$\begin{tikzcd} K^{-n-2}(C'') \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n-1}(A'') \arrow[d] \\ K^{-n-1}(C') \arrow[r] & K^{-n}(A') \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit D le produit fibré de C et de B″ au-dessus de C″ et soit $\Delta : B \to D$ l'homorphisme canonique. Alors le noyau de Δ s'identifie à A'. Montrons que Δ est une fibration de Serre. Soit donc

$$d = d(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{GL}(\mathrm{D}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$$

tel que $d(0, \ldots, 0) = 1$. L'automorphisme d s'écrit comme un couple (c, b'') où $c = c(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{GL}(\mathrm{C}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ et où $b'' = b''(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{GL}(\mathrm{B}''\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$. Soit

$$b = b(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{GL}(\mathrm{B}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$$

tel que $b(0, \ldots, 0) = 1$ et $v(b) = c$. L'automorphisme

$$a'' = a''(x_1, \ldots, x_n) = (\beta(b))^{-1} b''$$

appartient à $\mathrm{GL}(\mathrm{A}''\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) \subset \mathrm{GL}(\mathrm{B}''\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ et $a''(0, \ldots, 0) = 1$. Soit $a = a(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle)$ tel que $a(0, \ldots, 0) = 1$ et $\alpha(a) = a''$ et soit $\tilde{d} = b.u(a)$. Alors $v(\tilde{d}) = v(b) = c$ et $\beta(\tilde{d}) = \beta(b)(\beta u)(a) = \beta(b)(\alpha u'')(a) = \beta(b)(\beta(b))^{-1} b'' = b''$ et, par conséquent, $\Delta(\tilde{d}) = d$; l'assertion est démontrée. On obtient ainsi le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{A}' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "u'"] \arrow[dr, dash] & \mathrm{A} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "u"] & & \mathrm{A}'' \arrow[r] \arrow[d, "u''"] \arrow[ddl, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{B}' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[dd, "v'"] & \mathrm{B} \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dd, "v"] \arrow[dr, "\delta"] & & \mathrm{B}'' \arrow[r] \arrow[dd, "v''"] & 0 \\
 & & & \mathrm{D} & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{C}' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d] \arrow[urr, dashed] & \mathrm{C} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d] & & \mathrm{C}'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{A}'' \to \mathrm{D}$ est induit par u et où $\mathrm{C}' \to \mathrm{D}$ est induit par β'. L'homomorphisme $\mathrm{K}^{-n-2}(\mathrm{C}'') \to \mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{A}'') \to \mathrm{K}^{-n}(\mathrm{A}')$ est donc ainsi l'homomorphisme composé

$$\mathrm{K}^{-n-2}(\mathrm{C}'') \to \mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{A}'') \to \mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{D}) \to \mathrm{K}^{-n}(\mathrm{A}').$$

Une propriété symétrique vaut pour $\mathrm{K}^{-n-2}(\mathrm{C}'') \to \mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{C}') \to \mathrm{K}^{-n}(\mathrm{A}')$. Pour démontrer le lemme 8.2 il est donc suffisant de montrer que les deux homomorphismes

$$\lambda : \quad \mathrm{K}^{-n-2}(\mathrm{C}'') \to \mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{A}'') \to \mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{D}),$$
$$\mu : \quad \mathrm{K}^{-n-2}(\mathrm{C}'') \to \mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{C}') \to \mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{D})$$

sont opposés. En remplaçant éventuellement C'', C', A'' et D par $\Omega^n\mathrm{C}''$, $\Omega^n\mathrm{C}'$, $\Omega^n\mathrm{A}''$ et $\Omega^n\mathrm{D}$ respectivement, on est ramené à démontrer cette assertion pour $n = 0$ seulement. Soit donc $c''(x)$ un lacet dans $\mathrm{GL}(\mathrm{C}'')$, $b''(x)$ et $c(x)$ deux chemins dans $\mathrm{GL}(\mathrm{B}'')$ et $\mathrm{GL}(\mathrm{C})$ respectivement tels que $\gamma(c(x)) = \varphi''(b''(x)) = c''(x)$, $b''(0) = 1$ et $c(0) = 1$. Alors

$$(\lambda + \mu)\,(c''(x)) = (c(1),\, b''(1))$$

qui est homotope à l'identité grâce à l'homotopie $t \to (c(t),\, b''(t))$.

C. Q. F. D.

Démonstration de la partie unicité du théorème 4.1. — On va montrer que la propriété (2 *a*) [resp. (2 *b*)] permet de déterminer $\theta^{-n-1,-p}$ (resp. $\theta^{-n,-p-1}$) si l'on connaît déjà $\theta^{-n,-p}$. En effet, $\theta : \mathrm{A} \times \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ étant donné, θ induit de manière évidente, $\theta' : \mathrm{EA} \times \mathrm{B} \to \mathrm{EC}$ et $\theta'' : \Omega\mathrm{A} \times \mathrm{B} \to \Omega\mathrm{C}$ de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega\mathrm{A}\times\mathrm{B} & \longrightarrow & \mathrm{EA}\times\mathrm{B} & \longrightarrow & \mathrm{A}\times\mathrm{B} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \theta''} & & \downarrow{\scriptstyle \theta'} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega\mathrm{C} & \longrightarrow & \mathrm{EC} & \longrightarrow & \mathrm{C} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

L'axiome (2 *a*) permet d'en déduire le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{A})\times\mathrm{K}^{-p}(\mathrm{B}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^{-n-q-1}(\mathrm{C}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{K}^{-n}(\Omega\mathrm{A})\times\mathrm{K}^{-p}(\mathrm{B}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^{-n-p}(\Omega\mathrm{C}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{K}^{-n}(\mathrm{EA})\times\mathrm{K}^{-p}(\mathrm{B}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^{-n-p}(\mathrm{EC})
\end{array}$$

d'où évidemment $\theta^{-n-1,p}$. On détermine de même $\theta^{-n,-p-1}$ en appliquant l'axiome (2 *b*) et en considérant EB et ΩB.

Démonstration de la partie existence du théorème 4.1. — La démonstration précédente donne évidemment un procédé de construction explicite des homomorphismes $\theta^{-n,-p}$. Cependant, il convient de montrer que les deux manières de construire $\theta^{-n-1,-p-1}$ à partir de $\theta^{-n,-p}$ fournissent le même résultat. En effet, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{K}^{-n-1}(\mathrm{A})\times\mathrm{K}^{-p-1}(\mathrm{B}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{K}^{-n-p-2}(\mathrm{C}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{K}^{-n}(\Omega\mathrm{A})\times\mathrm{K}^{-p-1}(\mathrm{B}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^{-n-p-1}(\Omega\mathrm{C}) \\
{\scriptstyle 1\times}\downarrow{\scriptstyle (-1)^{n}} & & \downarrow \\
\mathrm{K}^{-n}(\Omega\mathrm{A})\times\mathrm{K}^{-p}(\Omega\mathrm{B}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^{-n-p}(\Omega^{2}\mathrm{C})
\end{array}$$

ainsi que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K^{-n-1}(A)\times K^{-p-1}(B) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "1\times(-1)^{n+1}"'] & K^{-n-p-2}(C) \arrow[d] \\
K^{-n-1}(A)\times K^{-p}(\Omega B) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n-p-1}(\Omega C) \arrow[d] \\
K^{-n}(\Omega A)\times K^{-p}(\Omega B) \arrow[r] & K^{-n-p}(\Omega^2 C)
\end{tikzcd}$$

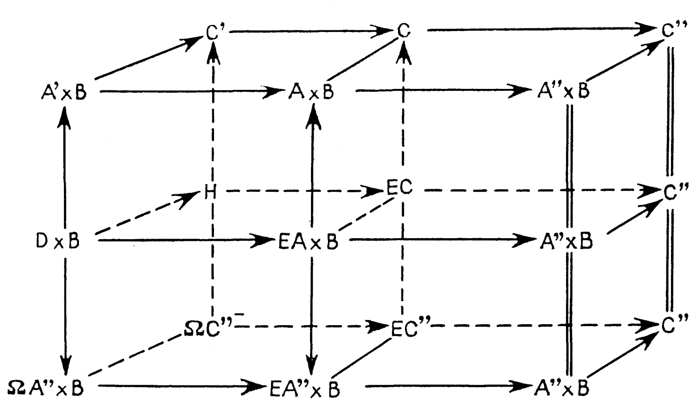
d'où le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K^{-n-1}(A)\times K^{-p-1}(B) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(-1)\times 1"'] & K^{-n-p-2}(C) \approx \mathrm{Ker}[K^{-n-p}(\Omega^2 C) \longrightarrow K^{-n-p}(E\Omega C)] \arrow[d, "T"] \\
K^{-n-1}(A)\times K^{-p-1}(B) \arrow[r, "\alpha'"] & K^{-n-p-2}(C) \approx \mathrm{Ker}[K^{-n-p}(\Omega^2 C) \longrightarrow K^{-n-p}(\Omega E C)]
\end{tikzcd}$$

et T est induit par le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, x)$ dans $\Omega^2 C$. D'après le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\Omega^2 C \arrow[r] \arrow[d] & E\Omega C \arrow[r] \arrow[d] & \Omega C \arrow[d] \\
\Omega EC \arrow[r] \arrow[d] & E^2 C \arrow[r] \arrow[d] & EC \arrow[d] \\
\Omega C \arrow[r] \arrow[d] & EC \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

et le lemme 4.2, on a $T(x) = -x$, d'où $\alpha = \alpha'$. Vérifions maintenant la propriété $(2\,a)$ par exemple. On considère le diagramme spatial



On en déduit le diagramme d'homomorphismes

$$\begin{tikzcd}
K^{-n-1}(A'') \times K^{-p}(B) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddd, bend right] & K^{-n-p-1}(C'') \arrow[d] \arrow[ddd, bend left] \\
K^{-n}(A') \times K^{-p}(B) \arrow[r] & K^{-n-p}(C') \\
\tilde{K}^{-n}(D) \times K^{-p}(B) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \tilde{K}^{-n-p}(H) \arrow[u] \arrow[d] \\
\tilde{K}^{-n}(\Omega A'') \times K^{-p}(B) \arrow[r] & \tilde{K}^{-n-p}(\Omega C'')
\end{tikzcd}$$

où l'on pose

$$\begin{aligned}
\tilde{K}^{-n}(D) &= \operatorname{Ker}[K^{-n}(D) \longrightarrow K^{-n}(EA)], \\
\tilde{K}^{-n}(\Omega A'') &= \operatorname{Ker}[K^{-n}(\Omega A'') \longrightarrow K^{-n}(EA'')], \\
K^{-n}(H) &= \operatorname{Ker}[K^{-n-p}(H) \longrightarrow K^{-n-p}(EC)], \\
K^{-n-p}(\Omega C'') &= \operatorname{Ker}[K^{-n-p}(\Omega C'') \to K^{-n-p}(EC'')].
\end{aligned}$$

Dans ces conditions, compte tenu de la naturalité des opérateurs de connexion, il est clair qu'il suffit de démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
K^{-n-1}(A'') \times K^{-p}(B) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-n-p-1}(C'') \arrow[d] \\
\tilde{K}^{-n}(\Omega A'') \times K^{-p}(B) \arrow[r] & \tilde{K}^{-n-p}(\Omega C'')
\end{tikzcd}$$

ce qui résulte de la définition récurrente du cup-produit. La vérification de la propriété (2 b) s'effectue de manière analogue. Ceci achève la démonstration du théorème 4.1.

Considérons maintenant le cas particulier où A est commutatif. On a alors un bimorphisme évident

$$\theta : \quad A \times A \to A$$

défini simplement par $\theta(a, b) = ab$. Le morphisme de $K^0(A) \times K^0(A)$ dans $K^0(A)$ qu'on en déduit coïncide avec celui induit par le produit tensoriel des A-modules. Soit maintenant x_n(resp. x_p) un élément de $K^{-n}(A)$ [resp. $K^{-p}(A)$]. Alors $x_n \cup y_p$ et $y_p \cup x_n$ sont deux éléments du groupe $K^{-n-p}(A)$.

Théorème 4.3. — *Soient x_n et y_p deux éléments des groupes* $K^{-n}(A)$ *et* $K^{-p}(A)$. *On a alors la formule d'anticommutation*

$$y_p \cup x_n = (-1)^{np} x_n \cup y_p.$$

Démonstration. — La formule est évidente si n ou p est égal à zéro. Supposons donc n et $p > 0$. On a alors

$$K^{-n}(A) \approx \operatorname{Ker}[K(\Omega^n(A)) \to K(E\Omega^n A)]$$

pour tout n. L'élément $y_p \cup x_n$ se déduit donc de $x_n \cup y_p$ dans $K(\Omega^{n+p}(A))$ qui consiste à échanger les places des n premières variables et des p dernières. D'après le lemme 4.2 appliqué np fois, cette permutation induit la transformation $(-1)^{np}$ sur $K^{-n-p}(A)$, d'où évidemment le résultat.

V. — Compléments sur le foncteur K_2.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et soit $E = (E_1, \ldots, E_n, \ldots)$ une suite infinie d'objets de $\mathcal{C}$ ne contenant qu'un nombre fini d'objets distincts. Soit $\mathcal{F}(E)$ le groupe libre engendré par les symboles e_{ij}^{λ}, $\lambda \in \mathcal{C}(E_j, E_i)$, $i \neq j$. Le « groupe de Steinberg » ST(E) associé à la suite E est alors le quotient de $\mathcal{F}(E)$ par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} e_{ij}^{\lambda} . e_{ij}^{\mu} = e_{ij}^{\lambda+\mu}, & & \\ [e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] = 1 & \text{si} \quad j \neq k, & i \neq l, \\ [e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] = e_{il}^{\lambda\mu} & \text{si} \quad j = k, & i \neq l, \\ [e_{ij}^{\lambda}, e_{kl}^{\mu}] = e_{kj}^{-\mu\lambda} & \text{si} \quad j \neq k, & i = l \end{array}$$

(noter que la dernière relation est une conséquence des précédentes; comparer avec [6]).

Le groupe ST (E) dépend fonctoriellement de E de la manière suivante. Soit $F = (F_1, \ldots, F_n, \ldots)$ une autre suite dans la catégorie $\mathcal{C}$. Un « morphisme » de E dans F est la donnée d'une application *injective* $i \mapsto n_i$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et d'une collection (f) de « $\mathcal{C}$-morphismes directs » $f_i = E_i \to F_{n_i}$ (en suivant [4] la donnée de f_i équivaut donc à la donnée de deux $\mathcal{C}$-morphismes $s_i : E_i \to F_{n_i}$ et $p_i : F_{n_i} \to E_i$ tels que $p_i . s_i = 1$). Un tel morphisme de E dans F sera désigné simplement par f. Il induit un homomorphisme $ST(f)$ de ST(E) dans ST(F) : c'est celui qui associe au générateur e_{ij}^{λ} le générateur $e_{n_i n_j}^{s_i \lambda p_j}$.

Posons $GL(E) = \varinjlim_n GL(E_1 \oplus \ldots \oplus E_n)$. On a alors une application évidente de $\mathcal{F}(E)$ dans GL(E); celle-ci associe au générateur e_{ij}^{λ} l'automorphisme de $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$, $n \geq \mathrm{Sup}(i, j)$, égal à l'identité plus l'homomorphisme induit par $\lambda : E_j \to E_i$.

Comme le montre un calcul facile, cette application induit un homomorphisme $\varphi_E : ST(E) \to GL(E)$. En outre, si $f : E \to F$ est un morphisme entre deux suites dans le sens précédent, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} ST(E) & \xrightarrow{ST(f)} & ST(F) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_F} \\ GL(E) & \xrightarrow{GL(f)} & GL(F) \end{array}$$

L'ensemble des objets de la catégorie des suites est évidemment préordonné pour la relation de préordre définie par les morphismes entre suites. Ceci permet de poser la définition suivante :

DÉFINITION 5.1. — *Le groupe* $K_2(\mathcal{C})$ *de la catégorie additive* $\mathcal{C}$ *est la limite inductive* $\varinjlim_f \operatorname{Ker}\varphi_E$ $\left[\text{on notera que } K_1(\mathcal{C}) = \varinjlim_f \operatorname{Coker}\varphi_E\right]$.

A tout anneau A, Milnor a attaché un groupe abélien $K_2(A)$ qui n'est autre que $\operatorname{Ker}\varphi_E$, E étant la suite $(A, \ldots, A, \ldots)$ dans la catégorie $\mathcal{L}(A)$ ou $\mathcal{P}(A)$. On va voir que $K_2(A)$ est isomorphe à $K_2(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ étant précisement la catégorie $\mathcal{L}(A)$ ou $\mathcal{P}(A)$. Si on pose $G_A = \operatorname{Im}\varphi_E = [GL(E), GL(E)]$, il est montré dans [7] par exemple que ST(A) [5] est une extension centrale de G_A par le groupe abélien $K_2(A)$ [plus généralement, on démontre que pour toute suite E, $\operatorname{Ker}\varphi_E$ est le centre de ST(E) à condition qu'il existe un objet de la suite qui contienne tous les autres comme facteur direct et qui se répète une infinité de fois] [6]. Ceci permet de définir un homomorphisme

$$h : \quad H_2(G_A; \mathbf{Z}) \to K_2(A)$$

de la manière classique : on choisit une application ensembliste $\sigma \mapsto \sigma'$ quelconque de G_A dans ST(A) qui relève φ_E telle que $\sigma'^{-1} = (\sigma^{-1})'$. A la 2-chaîne (σ_1, σ_2) on associe alors l'expression $\sigma'_3\sigma'^{-1}_2\sigma'^{-1}_1$, où $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$. On démontre (*cf.* [7]) que h est en fait un isomorphisme. Si g est un élément quelconque de GL(E), l'automorphisme intérieur par g laisse stable G_A donc induit un automorphisme h_g de $K_2(A) \approx H_2(G_A; Z)$.

LEMME 8.2. — *L'automorphisme* h_g *est l'automorphisme identique.*

Démonstration. — Nous distinguerons deux cas :

1° $g = \varphi_E(g')$. On choisit le relèvement ensembliste $\sigma \mapsto g'\sigma' g'^{-1}$. On a alors $g'\sigma'_3\sigma'^{-1}_2\sigma'^{-1}_1 g'^{-1} = \sigma'_3\sigma'^{-1}_2\sigma'^{-1}_1$ car $\sigma'_3\sigma'^{-1}_2\sigma'^{-1}_1$ appartient au centre de ST(A).

2° g quelconque. Soit (σ_1, σ_2) un 2-cycle, σ_1 et σ_2 appartenant à un $GL(A, n) \subset GL(E)$. Dans $GL(A, 3n)$, $g\sigma_i g^{-1}$, $i = 1, 2$, peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

(5) Comme il est d'usage, on écrira désormais ST(A) au lieu de ST(E) pour la suite particulière $E = (A, \ldots, A)$.

(6) Une telle suite sera dite « admissible ».

On est ainsi ramené au premier cas, la matrice $3\,n\times 3\,n$ construite avec g et g^{-1} étant un produit de commutateurs.

Soit maintenant $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathcal{L}(A)$ ou $\mathfrak{T}(A)$. Il en résulte des considérations précédentes qu'on a un homomorphisme $m : K_2(A) \to K_2(\mathcal{C})$ (c'est simplement l'homomorphisme de passage à la limite inductive). Nous allons tâcher de montrer que m est bijectif en construisant un homomorphisme en sens inverse. Soit en effet $E = (E_1, \ldots, E_n, \ldots)$ une suite d'objets de $\mathcal{C}$. Il existe alors des morphismes directs $f_i : E_i \to F_i = A^r$. A un élément α de $ST(E)$ on associe l'élément $f(\alpha)$ de $ST(F) = ST(A(r))$ [$A(r)$ désignant l'algèbre des matrices $r\times r$ à coefficients dans A]. On en déduit un homomorphisme θ de $K_2(\mathcal{C})$ dans $\varinjlim_r K_2(A(r))$ à condition de vérifier les points suivants :

1° Une permutation des facteurs de la somme $A(r)\oplus\ldots\oplus A(r)\oplus\ldots$ n'altère pas $f(\alpha)$.

2° Un automorphisme intérieur par une matrice diagonale dans $GL(F)$ n'altère pas non plus $f(\alpha)$.

Pour cela, il suffit d'appliquer le lemme 5.2.

En l'état présent, on dispose donc du diagramme commutatif

$$(\mathcal{D})\qquad \begin{tikzcd} K_2(\mathcal{C}) \arrow[dr, "\theta"'] & & K_2(A) \arrow[ll, "m"'] \arrow[dl, "j"] \\ & \varinjlim_r K_2(A(r)) & \end{tikzcd}$$

LEMME 5.3. — *L'homomorphisme j est surjectif.*

Démonstration. — Soit α un élément de $K_2(A(r)) \approx H_2(G_{A(r)})$ écrit sous la forme $\sum \lambda_i(\sigma_i, \tau_i)$ où σ_i et τ_i appartiennent au groupe

$$[GL(A(r), n), GL(A(r), n)].$$

Dans le groupe $[GL(A(r), rn), GL(A(r), rn)]$ il existe des éléments $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\tau}_i$ appartenant à l'image de l'application

$$GL(A, rn) \to GL(A(r), rn)$$

ainsi qu'une matrice de permutation g dans $GL(A(r), rn)$ tels que $\sigma_i = g.\tilde{\sigma}_i.g^{-1}$ et $\tau_i = g.\tilde{\tau}_i.g^{-1}$. L'assertion résulte alors du lemme 5.2.

LEMME 5.4. — *L'homomorphisme j est injectif.*

La démonstration de ce lemme est complètement analogue à celle du lemme précédent [remarquer que $H_2(G_A) = \varinjlim H_2([GL(A, n), GL(A,n)])$].

Les lemmes 5.3 et 5.4 appliqués au diagramme ($\mathcal{D}$) impliquent donc le théorème suivant :

THÉORÈME 5.5. — *Soit $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathcal{L}$ (A) ou $\mathcal{P}$ (A). L'homomorphisme*

$$m : \quad K_2(A) \to K_2(\mathcal{C})$$

est alors un isomorphisme.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie additive quelconque, $E = (E_1, \ldots, E_n, \ldots)$, $F = (F_1, \ldots, F_n, \ldots)$ deux suites admissibles, α et β deux éléments de ST(E) et ST(F) respectivement tels que $\varphi_E(\alpha) = 1$ et $\varphi_F(\beta) = 1$. On définit de manière évidente l'élément $\alpha \oplus \beta$ de $ST(E \oplus F)$ où $E \oplus F$ est la suite $(E_1 \oplus F_1, \ldots, E_n \oplus F_n, \ldots)$.

PROPOSITION 5.6. — *L'élément $\alpha \oplus \beta$ appartient au noyau de $\varphi_{E\oplus F}$. En outre, la classe de $\alpha \oplus \beta$ est égale à la somme des classes de α et β dans le groupe $K_2(\mathcal{C})$.*

Démonstration. — Sans restreindre la généralité, on peut supposer que les E_i(resp. F_i) sont égaux à un objet fixe E_0 (resp. F_0). Soit $\alpha' = \prod e_{ij}^{\lambda_{ij}}$ $\left(\text{resp. } \beta' = \prod e_{ij}^{\mu_{ij}}\right)$ l'image de α (resp. β) dans le groupe $ST(E \oplus F)$. Il existe des idempotents s et t tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_{ij} = \lambda_{ij} s = s \lambda_{ij},\\
&\mu_{kl} = \mu_{kl} t = t \mu_{kl},\\
&\mu_{kl} \lambda_{ij} = \lambda_{ij} \mu_{kl} = \lambda_{ij} t = t \lambda_{ij} = \mu_{kl} s = s \mu_{kl} = 0.
\end{aligned}$$

Donc, en posant $\lambda = \lambda_{ij}$ et $\mu = \mu_{kl}$, on a les relations

$$\begin{aligned}
e_{ij}^{\lambda} e_{kl}^{\mu} e_{ij}^{-\lambda} &= e_{ij}^{\lambda} [e_{kr}^{\mu}, e_{rl}^{\prime}] e_{ij}^{-\lambda} \quad (r \text{ assez grand}),\\
&= [e_{ij}^{\lambda} e_{kr}^{\mu} e_{ij}^{-\lambda}, e_{ij}^{\lambda} e_{rl}^{\prime} e_{ij}^{-\lambda}].\\
e_{ij}^{\lambda} e_{kr}^{\mu} e_{ij}^{-\lambda} &= e_{kr}^{\mu} \qquad \text{si } j \neq k\\
&= e_{kr}^{\mu} e_{ir}^{\lambda\mu} = e_{kr}^{\mu} \qquad \text{si } j = k.
\end{aligned}$$

De même $e_{ij}^{\lambda} e_{rl}^{\prime} e_{ij}^{-\lambda} = e_{rl}^{\prime}$. En définitive, on voit que chaque e_{ij}^{λ} commute avec chaque e_{kl}^{μ}. Donc $\alpha \oplus \beta = \alpha' \beta'$ et $\varphi_{E\oplus F}(\alpha \oplus \beta) = \varphi_E(\alpha) \varphi_F(\beta) = 1$.

Si $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur additif, il induit un homomorphisme $K_2(\psi) : K_2(\mathcal{C}) \to K_2(\mathcal{C}')$. D'après la proposition précédente, on a

$$K_2(\psi + \psi') = K_2(\psi) + K_2(\psi').$$

Proposition 5.7. — *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie flasque, on a* $K_2(\mathcal{C}) = 0$.

Démonstration. — D'après [4] une catégorie $\mathcal{C}$ est dite flasque s'il existe un foncteur additif $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tel que $\tau + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \approx \tau$. Soit donc (E, α), $E = (E_1, \ldots, E_n)$, $\alpha \in \operatorname{Ker} \varphi_E$, un élément de $K_2(\mathcal{C})$. Alors $(\tau(E) \oplus E, \tau(\alpha) \oplus \alpha)$ est isomorphe à $(\tau(E), \tau(\alpha))$. D'après la proposition précédente, $(\tau(E) \oplus E, \tau(\alpha) \oplus \alpha) = (\tau(E), \tau(\alpha)) + (E, \alpha)$ dans le groupe $K_2(\mathcal{C})$. Donc $(E, \alpha) = 0$ dans le groupe $K_2(\mathcal{C})$.

Corollaire 5.8. — *Soit* CA *le « cône » de l'anneau* A (*cf.* [5]). *Alors* $K_2(CA) = 0$.

Démonstration. — En effet, $K_2(CA) \approx K_2(\mathcal{P}(CA))$ d'après le théorème 5.5 et la catégorie $\mathcal{P}(CA)$ est flasque (*cf.* [4]).

Considérons maintenant la suite exacte canonique

$$0 \to \tilde{A} \to CA \xrightarrow{f} SA \to 0,$$

où $\tilde{A}$(resp. SA) est l'anneau stabilité de A(resp. la suspension de A).

D'après [6] et [7], on en déduit une suite exacte de groupes K :

$$K_2(CA) \to K_2(SA) \to K_1(f) \to K_1(CA).$$

Donc $K_2(SA)$ est isomorphe à $K_1(f)$ (l'identité $K_1(CA) = 0$ se démontre de manière analogue à l'identité $K_2(CA) = 0$; *cf.* [4]).

Désignons par $K_1(\tilde{A})$ le groupe abélien quotient de $GL(\tilde{A}) \subset GL(CA)$ par le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires de $GL(CA)$ de la forme $1 + \lambda$ où $\lambda \in \tilde{\tilde{A}}$. On a un épimorphisme évident $K_1(\tilde{A}) \to K_1(f)$.

Lemme 5.9. — *L'homomorphisme* $K_1(\tilde{A}) \to K_1(f)$ *est injectif.*

Démonstration. — Nous devons prouver le fait suivant : soit α un élément de $GL(CA)$ et soit γ une matrice élémentaire dans

$$GL(\tilde{A}) = \operatorname{Ker}[GL(CA) \to GL(SA)]$$

alors $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ s'écrit comme un produit de matrices élémentaires dans $GL(\tilde{A})$. Puisque $K_1(CA) = 0$, on peut choisir α élémentaire dans $GL(CA)$. Écrivons de plus que α (resp. γ) appartient à $GL(CA, n)$ [resp. $GL(\tilde{A}, n)$] et que $\gamma = 1 + \bar{\gamma}$ où $\bar{\gamma}$ est un élément de $\tilde{A}(n)$. De même α s'écrit sous la forme

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\overline{\gamma}$ peut s'écrire comme une matrice finie et que α est une somme finie de matrices permutantes, il existe une matrice

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où u' est finie, telle que $\alpha'\overline{\gamma}\alpha'^{-1} = \alpha\overline{\gamma}\alpha^{-1}$. Dans ce cas, $\alpha'\gamma\alpha'^{-1}\gamma^{-1} = \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}$ est un produit de matrices élémentaires dans $\mathrm{GL}(\tilde{\mathrm{A}})$.

Lemme 5.10. — *L'inclusion évidente de* A *dans* $\tilde{\mathrm{A}}$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{K}_1(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_1(\tilde{\mathrm{A}}).$$

Démonstration. — Ceci résulte évidemment du fait suivant : si $\alpha, \beta \in \mathrm{GL}(\mathrm{B}, n)$, α et $\beta\alpha\beta^{-1}$ ont la même classe dans $\mathrm{K}_1(\mathrm{B})$, $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ ou $\tilde{\mathrm{A}}$.

Des considérations précédentes on déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème 5.11. — *L'homomorphisme composé*

$$\mathrm{K}_1(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_1(\tilde{\mathrm{A}}) \to \mathrm{K}_1(f) \approx \mathrm{K}_2(\mathrm{SA})$$

est un isomorphisme de $\mathrm{K}_1(\mathrm{A})$ *sur* $\mathrm{K}_2(\mathrm{SA})$.

Remarque 1. — Le théorème 5.11 est un cas particulier d'un théorème général sur les catégories filtrées (qui se démontre de la même manière) : considérons une suite exacte de catégories additives

$$0 \to \mathcal{C}' \to \mathcal{C} \xrightarrow{\psi} \mathrm{C}'' \to 0$$

où $\mathcal{C}$ est une catégorie flasque. Alors $\mathrm{K}_2(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\approx} \mathrm{K}_1(\psi) \approx \mathrm{K}_1(\mathcal{C}')$.

Remarque 2. — Dans le théorème 5.11, ou dans la remarque précédente, on peut expliciter un isomorphisme inverse $\mathrm{K}_1(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_2(\mathrm{SA})$ ou $\mathrm{K}_1(\mathcal{C}') \to \mathrm{K}_2(\mathcal{C}'')$. Dans le deuxième cas par exemple, considérons un élément (E, α) de $\mathrm{K}_1(\mathcal{C}')$. Puisque la classe de (E, α) dans $\mathrm{K}_1(\mathcal{C})$ est nulle, $\mathcal{C}$ étant flasque, il existe un objet G de $\mathcal{C}$ et une décomposition de $\mathrm{E} \oplus \mathrm{G}$ en somme directe, soit $\mathrm{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{F}_n$, telle que $\alpha \oplus \mathrm{Id}_{\mathrm{G}}$ s'écrive comme le produit $\prod e_{ij}^{\lambda_{ij}}$ de matrices élémentaires. Puisque $\psi(\alpha) = 1$, le produit formel $\prod e_{ij}^{\psi(\lambda_{ij})}$ dans le groupe $\mathrm{ST}(\mathrm{F})$ avec $\mathrm{F} = (\psi\mathrm{F}_1, \ldots, \psi\mathrm{F}_n, 0, \ldots)$ définit l'élément de $\mathrm{K}_2(\mathcal{C}'')$ cherché.

VI. — Calcul de $K_2(A[t, t^{-1}])$.

Considérons le diagramme commutatif où les suites horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A' \times B & \longrightarrow & A \times B & \xrightarrow{\varphi \times 1} & A'' \times B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\psi} & C'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On va tâcher de lui associer un homomorphisme bilinéaire

$$K(\varphi) \times K_1(B) \to K_1(\psi).$$

Soit donc (E, F, α) [resp. (T, ε)] un élément de $K(\varphi)$ [resp. $K_1(B)$]. Soit η l'automorphisme de $(E \otimes T) \oplus (F \otimes T)$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 \otimes \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \otimes \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

Alors $\psi(\eta)$ peut s'écrire comme le produit *st* d'automorphismes élémentaires

$$s = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \otimes 1 \\ \alpha^{-1} \otimes 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \otimes \varepsilon^{-1} \\ -\alpha^{-1} \otimes \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$s = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \otimes 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^{-1} \otimes 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \otimes 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$t = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \otimes \varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^{-1} \otimes \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \otimes \varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe des morphismes $\alpha' : E \to F$ et $\alpha'' : F \to E$ tels que $\varphi(\alpha') = \alpha$ et $\varphi(\alpha'') = \alpha^{-1}$. Posons alors

$$\tilde{s} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha' \otimes 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha'' \otimes 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha' \otimes 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{t} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha' \otimes \varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha'' \otimes \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha' \otimes \varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'élément y de $K_1(\psi)$ associé à (E, F, α) et à (T, ε) est la classe du couple $((E \otimes T) \oplus (F \oplus T)), \eta \tilde{t}^{-1} \tilde{s}^{-1}$. Pour que cette définition ait un sens, il convient évidemment de vérifier les points suivants :

1° *y ne dépend pas du choix des relèvements α' et α''.*

Soient α'_1 et α''_1 d'autres relèvements, $\tilde{s}_1$ et $\tilde{t}_1$ les automorphismes associés. Alors

$$\begin{aligned}&((E\otimes T)\oplus(F\otimes T),\ \eta\,\tilde{t}^{-1}\tilde{s}^{-1}) - ((E\otimes T)\oplus(F\otimes T),\ \eta\,\tilde{t}_1^{-1}\tilde{s}_1^{-1})\\ &= ((E\otimes T)\oplus(F\otimes T),\ \tilde{s}_1\tilde{t}_1\tilde{t}^{-1}\tilde{s}^{-1}) = ((E\otimes T)\oplus(F\otimes T),\ \tilde{s}_1\tilde{s}^{-1}(\tilde{s}\tilde{t}_1\tilde{t}^{-1}\tilde{s}^{-1})) = 0.\end{aligned}$$

2° *y ne dépend que des classes d'isomorphie* (E, F, α) *et de la paire* (T, ε), ce qui est clair. En outre *y dépend additivement du triple* (E, F, α) *et de la paire* (T, ε).

3° $y = 0$ *si* $E = F$ *et si* $\alpha = 1$. En effet, on choisit $\alpha' = \alpha'' = 1$. Alors $\eta\tilde{t}^{-1}\tilde{s}^{-1} = 1$. Même remarque si $\varepsilon = 1$.

4° Supposons que ε soit multiplié à droite par une matrice élémentaire

$$u = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : T = H\oplus K \to H\oplus K = T.$$

On va montrer que ceci n'affecte pas y. En effet, pour tout morphisme u, posons

$$\eta_u = \begin{pmatrix} 1\otimes\varepsilon u & 1 \\ 0 & 1\otimes u^{-1}\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \qquad t_u = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\otimes u^{-1}\varepsilon^{-1} \\ -\alpha^{-1}\otimes\varepsilon u & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{t}_u = \begin{pmatrix} 1 & \alpha'\otimes u^{-1}\varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha''\otimes\varepsilon u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha'\otimes u^{-1}\varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\tilde{t}_u = \begin{pmatrix} 1\otimes u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{t}\begin{pmatrix} 1\otimes u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\eta_u\tilde{t}_u^{-1}\tilde{s}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1\otimes\varepsilon u & 0 \\ 0 & 1\otimes u^{-1}\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\otimes u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{t}^{-1}\begin{pmatrix} 1\otimes u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{s}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\otimes u^{-1} \end{pmatrix}\eta\tilde{t}^{-1}\begin{pmatrix} 1\otimes u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{s}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\otimes u^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\otimes u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Posons

$$r = \eta\tilde{t}^{-1}\begin{pmatrix} 1\otimes u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{s}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\otimes u^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad r' = \eta\tilde{t}^{-1}\tilde{s}^{-1}.$$

Alors

$$r^{-1}r' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\otimes u \end{pmatrix}\tilde{s}\begin{pmatrix} 1\otimes u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{s}^{-1}.$$

Posons

$$v = v(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\otimes u \end{pmatrix}, \qquad \bar{v} = \bar{v}(u) = \begin{pmatrix} 1\otimes u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ainsi que $[v; h] = v\,h\,\bar{v}^{-1}h^{-1}$. On a évidemment

$$v(uu') = v(u)\,v(u') \qquad \text{et} \qquad \bar{v}(uu') = \bar{v}(u)\,\bar{v}(u').$$

Si on pose $\nu' = \nu(u')$ et $\overline{\nu}' = \overline{\nu}(u')$, on a la formule suivante :

$$[\nu\nu'; h] = [\nu, [\nu'; h]]\,[\nu'; h]\,[\nu; h].$$

Notons $\gamma(u)$ l'élément de $K_1(\psi)$ classe du couple $(G, [\nu; \overline{s}^{-1}])$ avec $G = (E \otimes T) \oplus (F \otimes T)\,(F \otimes T)$. La formule précédente montre que $\gamma(uu') = \gamma(u) + \gamma(u')$ [car le couple $(G, [\nu, [\nu'; s^{-1}]])$ a pour classe zéro dans le groupe $K_1(\psi)$]. En particulier, si u est stablement un commutateur, $\gamma(u) = 0$.

PROPOSITION 6.1. — *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} K(\varphi) \times K_1(B) & \longrightarrow & K_1(\psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(A) \times K_1(B) & \longrightarrow & K_1(C) \end{array}$$

(la dernière flèche horizontale est obtenue en faisant $\varphi = \psi = 0$ dans les considérations précédentes).

Démonstration. — En effet, soit (E, F, α) [resp. (T, ε)] un élément de $K(\varphi)$ [resp. $K_1(B)$]. Alors $(E, F, \alpha) \cup (T, \varepsilon) = \left(G, \eta\,\tilde{t}^{-1}\tilde{s}^{-1}\right)$ avec les notations précédentes. L'image de cette paire dans le groupe $K_1(C)$ est aussi évidemment la classe de la paire (G, η) qui est obtenue en parcourant l'autre chemin du diagramme.

En fait, la proposition précédente caractérise le cup-produit « relatif » que nous venons de définir. De manière précise, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 6.2. — *Il existe une façon et une seule (à isomorphisme près) de définir des applications naturelles*

$$K(\varphi) \times K_1(A) \to K_1(\psi)$$

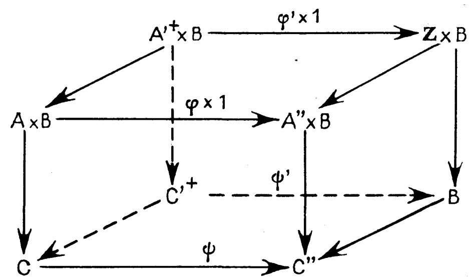
associées aux diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' \times B & \longrightarrow & A \times B & \xrightarrow{\varphi \times 1} & A'' \times A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\psi} & C'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

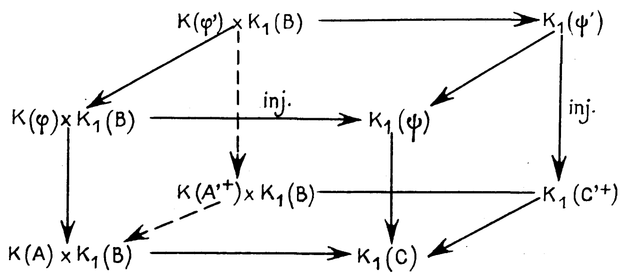
de telle sorte que la proposition 6.1 *soit satisfaite.*

Démonstration. — Nous venons précisemment de démontrer la partie « existence » du théorème 6.2. Pour démontrer la partie « unicité », remarquons tout d'abord que C et C″ sont naturellement des B-algèbres et que ψ

est un homomorphisme d'algèbres. Notons C'^{+} la B-algèbre unitaire augmentée sur B. On a alors le diagramme « cubique » :



d'où le diagramme commutatif



L'isomorphisme d'excision $K(\varphi') \approx K(\varphi)$ ainsi que les deux flèches injectives permettent de conclure.

Remarque. — Il résulte immédiatement des considérations précédentes qu'on peut aussi bien définir un cup-produit

$$K(\varphi) \times K^{-1}(B) \to K^{-1}(\psi).$$

THÉORÈME 6.3. — *Le diagramme suivant est anticommutatif,*

$$\begin{array}{ccc} K_1(A'') \times K_1(B) & \longrightarrow & K_2(C'') \\ {\scriptstyle \partial_1} \downarrow {\scriptstyle \times 1} & & \downarrow {\scriptstyle \partial_2} \\ K(\varphi) \times K_1(B) & \longrightarrow & K_1(\psi) \end{array}$$

Démonstration. — Soit α (resp. ε) un élément de $GL(A'', n)$ [resp. $GL(B, p)$]. D'après ce qui précède, l'élément de $K_1(\psi)$ qui lui correspond par l'homomorphisme à travers $K(\varphi) \times K_1(B)$ est égal à $\partial_2(\tilde{\eta})$ où l'élément $\tilde{\eta}$ de $ST(C''(np))$ s'exprime avec les notations de Milnor ([6], p. 67) sous la forme

$$\begin{aligned} & h_{12}(1 \otimes \varepsilon)\, w_{12}(-\alpha \otimes \varepsilon^{-1})\, w_{12}(\alpha \otimes 1) \\ & = h_{12}(1 \otimes \varepsilon)\, w_{12}(\alpha \otimes 1)\, w_{12}(-\alpha \otimes 1)\, w_{12}(-\alpha \otimes \varepsilon^{-1})\, w_{12}(\alpha \otimes 1) \\ & = h_{12}(1 \otimes \varepsilon)\, w_{12}(\alpha \otimes 1)\, w_{21}(-\alpha^{-1} \otimes \varepsilon^{-1}) \\ & = h_{12}(1 \otimes \varepsilon)\, w_{12}(\alpha \otimes 1)\, w_{12}(\alpha \otimes \varepsilon)^{-1} \\ & = h_{12}(1 \otimes \varepsilon)\, h_{12}(\alpha \otimes 1)\, h_{12}(\alpha \otimes \varepsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

D'après Milnor ([6], p. 70), l'élément de $K_1(\psi)$ qui correspond à α et à ε par l'homomorphisme à travers $K_2(C'')$ est précisément $\partial_2(\tilde{\eta}^{-1})$.

C. Q. F. D.

Remarque 1. — Si on change le signe du cup-produit $K_1 \times K_1 \to K_2$ défini par Milnor, le diagramme précédent devient évidemment commutatif.

Remarque 2. — Dans la démonstration précédente, on a utilisé implicitement le fait que $K_2(C'') \approx K_2(C''(np)) \approx K_2(\mathcal{L}(C''))$.

Théorème 6.4. — *Soit* $\theta : A \times B \to C$ *un bimorphisme entre anneaux de Banach. Le diagramme suivant est alors anticommutatif,*

$$\begin{tikzcd}
K_1(A) \times K_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & K_2(C) \arrow[d] \\
K^{-1}(A) \times K^{-1}(B) \arrow[r] & K^{-2}(C)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soient $\varphi : A\langle x \rangle \to A \times A$ et $\psi : C\langle x \rangle \to C \times C$ les homomorphismes évidents. On a alors les diagrammes suivants qui sont tous commutatifs, à l'exception du second qui est anticommutatif

$$\begin{tikzcd}
K_1(A) \times K_1(B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & K_2(C) \arrow[d, hook] \\
K_1(A \times A) \times K_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & K_2(C \times C) \arrow[d] \\
K(\varphi) \times K_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(\psi) \arrow[d] \\
K(\varphi) \times K^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, shift left] & K^{-1}(\psi) \arrow[d, shift left] \\
K(\Omega A)^{+} \times K^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left] & K^{-1}(\Omega C)^{+} \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left] \\
K^{-1}(A) \times K^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[u, shift left] & K^{-2}(C) \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

Le théorème s'en déduit d'après la définition du cup-produit sur les groupes K^{-n}.

Théorème 6.5. — *Soit* A *un anneau discret et soit* u *le générateur de* $K_1(\Gamma Z)$ *supplémentaire de* $K_1(\mathbf{Z})$ *dans* $K_1(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$. *Le cup-produit par* u

induit alors un isomorphisme de $K_1(A)$ *sur un facteur direct de* $K_2(A[t, t^{-1}])$. *En particulier,* $K_2(A[t, t^{-1}])$ *contient* $K_1(A) \oplus K_2(A)$ *comme facteur direct* [7].

Démonstration. — Soit $\theta : A[t, t^{-1}] \to SA$ l'homomorphisme canonique défini dans [8] (*cf.* § 2). Alors θ induit un homomorphisme $\bar\theta$ de $K_2(A[t, t^{-1}])$ dans $K_2(SA) \approx K_1(A)$ (th. 5.11), noter que cet homomorphisme s'annule sur les images des groupes $K_2(A[t])$ et $K_2(A[t^{-1}])$ dans $K_2(A[t, t^{-1}])$ car $K_2(CA) = 0$; coroll. 5.8). Soit maintenant $\beta : K_1(A) \to K_2(A[t, t^{-1}])$ l'homomorphisme défini par $\beta(x) = ux$. On va voir que $-\beta$ est inverse à droite de $\bar\theta$. En effet, l'élément $(\bar\theta\beta)(x)$ de $K_1(A)$ s'obtient en appliquant l'opérateur de connexion $\partial_2 : K_2(SA) \to K_1(\psi) \approx K_1(\tilde{A}) \approx K_1(A)$ à l'élément $\bar u$ où $\bar u$ est l'image de u dans $K_1(S\mathbf{Z})$. D'après le théorème 6.3, $\partial_2(\bar u x) = \partial_1(\bar u)x$ où $\partial_1 : K_1(SZ) \to K(\tilde{\mathbf{Z}}) \approx K(\mathbf{Z})$. Mais on a choisi u de façon que $\partial_1(\bar u)$ soit précisément l'élément unité de $K(\mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$. Le théorème 6.2 permet de conclure.

Remarque. — En fait, on a démontré un théorème un peu plus fort que celui annoncé : le groupe $K_1(A)$ est naturellement un facteur direct dans $(LK_2)(A) = \text{Coker } K_2(A[t]) \oplus K_2(A[t^{-1}]) \to K_2(A[t, t^{-1}])$. J'ignore si le supplémentaire de $K_1(A)$ dans $(LK_2)(A)$ est distinct de zéro en général.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. F. Atiyah, *Bott periodicity and the index of elliptic operators.* (*Quart. J. Math.*, vol. 19, 1968, p. 113).

[2] H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1967.

[3] M. Karoubi, *Algèbres de Clifford et K-théorie* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 1, 1968, p. 161-270).

[4] M. Karoubi, *Foncteurs dérivés et K-théorie*, Exposé 4, Séminaire Heidelberg-Saarbrucken-Strasbourg, 1967-1968, Springer, Lecture Notes no 136.

[5] M. Karoubi et O. Villamayor, *K-théorie algébrique et K-théorie topologique.* (à paraître). En attendant, cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 416-419.

[6] J. Milnor, *Notes on algebraic K-theory.*

[7] R. G. Swan, *Algebraic K-theory*, Springer Lecture Notes no 76.

Pour un résumé de cet article voir la référence suivante :

[8] M. Karoubi, *La périodicité de Bott en K-théorie générale* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 270, série A, 1970, p. 1305-1307).

(Manuscrit reçu le 15 décembre 1970.)

Max Karoubi, I. R. M. A.,
7, rue Descartes, 67-Strasbourg.

[7] Ce résultat a été aussi prouvé par Farrell et Wagoner et, si A est noethérien régulier, par Gersten.