Annales scientifiques de l'É.N.S.

A. Cerezo
F. Rouvière

Résolubilité locale d'un opérateur différentiel invariant du premier ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 4, nº 1 (1971), p. 21-30
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_1_21_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 4, 1971, p. 21 à 30.

RÉSOLUBILITÉ LOCALE D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL INVARIANT DU PREMIER ORDRE

PAR A. CEREZO ET F. ROUVIÈRE.

Soient V une variété analytique réelle et G un groupe de Lie de transformations de V : cela signifie que l'application

$$(g, x) \mapsto g.x,$$
$$G \times V \to V$$

est analytique. Supposons que G opère *transitivement* sur V. Nous noterons *e* l'élément neutre de G, et x_0 un point de V, fixé dans la suite. Soit

$$H = \{ h \in G ;\ h.x_0 = x_0 \}$$

le sous-groupe d'isotropie de x_0. Alors, si G est à base dénombrable d'ouverts, V s'identifie avec sa structure de variété à l'espace homogène G/H des classes à gauche gH.

Dans la suite nous appellerons *opérateur invariant* un opérateur différentiel linéaire sur V dont les coefficients sont des fonctions analytiques sur V, à valeurs complexes, et qui commute à l'action de G sur V, i. e., P désignant l'opérateur, tel que

$$P(_g f) = {}_g(Pf)$$

pour tout $g \in G$ et toute fonction f C^∞ sur V, avec

$$_g f(x) = f(g.x).$$

Les opérateurs invariants sur V à coefficients réels forment pour le crochet [P, Q] = PQ − QP de deux opérateurs une algèbre de Lie réelle $D(V)$; les opérateurs invariants à coefficients réels, homogènes d'ordre un, en forment une sous-algèbre de dimension finie $D_1(V)$. Nous considérerons souvent le cas particulier $V = G$, $H = \{e\}$; alors $D_1(V)$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

On dit que P est *localement résoluble* si tout point de V a un voisinage ouvert ω tel que

$$P\mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega),$$

i. e. tel que, pour tout f C^∞ à support compact dans ω, l'équation $Pu = f$ ait une solution distribution dans ω. D'après l'invariance de P et la transitivité de l'action de G, c'est équivalent à la propriété suivante :

x_0 a un voisinage ouvert ω tel que $P\mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega)$.

Nous obtenons ici une condition nécessaire et suffisante de résolubilité locale pour les opérateurs invariants du premier ordre, et nous étudions quelques conséquences de cette condition. A cause de l'invariance elle peut être obtenue par des moyens indépendants du résultat de Nirenberg et Trèves [4], et beaucoup plus élémentaires.

Un opérateur invariant du premier ordre s'écrit

$$P = X + iY + c \qquad (i^2 = -1),$$

où X et Y appartiennent à $D_1(V)$ et c est un nombre complexe.

PROPOSITION 1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, l'opérateur invariant* $P = X + iY + c$ *est localement résoluble si et seulement si* $\mathfrak{L}(X, Y)$: *Il existe deux nombres réels* α et β *tels que*

$$[X, Y] = \alpha X + \beta Y.$$

Démonstration. — Si P est localement résoluble, le point x_0 a un voisinage ouvert ω tel que $P\mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega)$; on peut supposer que l'on a une carte locale de ω sur un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$. L'opérateur s'écrit dans ces coordonnées locales (en gardant les notations P, X, Y) :

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = X\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + iY\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + c,$$

et il résulte de la condition nécessaire de résolubilité de Hörmander [(3], theorem 6.1.1) que, pour $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$\left.\begin{array}{r} X(0, \xi) = 0 \\ \text{et} \quad Y(0, \xi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow [X, Y](0, \xi) = 0.$$

Comme X, Y et [X, Y] sont trois formes linéaires en ξ, on en déduit qu'il existe α, $\beta \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$[X, Y](o, \xi) = \alpha X(o, \xi) + \beta Y(o, \xi).$$

Or, si $Q \in D_1(V)$ est tel que, pour $\xi \in \mathbf{R}^n$, $Q(o, \xi) = o$, on a, pour $f \in C^\infty(V)$,

$$(Qf)(x_0) = Q(o, \operatorname{grad} f(o)) = o$$

et pour $g \in G$

$$(Qf)(g.x_0) = {}_g(Qf)(x_0) = Q({}_g f)(x_0) = o$$

par invariance, d'où $Q = o$ puisque G opère transitivement. Ici on a donc

$$[X, Y] = \alpha X + \beta Y$$

avec égalité dans l'algèbre $D_1(V)$.

La réciproque est classique (*voir*, par exemple, Trèves [5], chap. III) : rappelons qu'un opérateur différentiel P d'ordre $m \geqq 1$, à coefficients C^∞ sur V, de partie principale P_m, est dit *de type principal* si

$$\sum_j \left| \frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(x, \xi) \right| \neq o \qquad \text{pour} \quad x \in V, \quad \xi \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad \xi \neq o;$$

pour un opérateur de type principal, on a l'inégalité suivante :

(1) Pour tout $\varepsilon > o$ il existe un voisinage ouvert ω de x_0 tel que pour $u \in \mathcal{D}(\omega)$

$$\| u \|_{m-1}^2 \leqq \varepsilon (\| P u \|_0^2 + \| P^\star u \|_0^2)$$

($\| \ \|_k$ désigne la norme de l'espace de Sobolev H^k et $P^\star$ l'adjoint formel de P).

Si $P = X + iY + c$ est effectivement du premier ordre, X ou Y est différent de zéro, donc P est de type principal. En reportant la propriété $\mathfrak{T}(X, Y)$ dans (1), on obtient sans difficulté l'inégalité

$$\| u \|_0^2 \leqq \| P^\star u \|_0^2$$

pour $u \in \mathcal{D}(\omega)$, doù on déduit que $P\, \mathbf{L}^2(\omega) \supset \mathbf{L}^2(\omega)$ et *a fortiori* $P\, \mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega)$.

Autre méthode. — Nous donnons ici une autre démonstration de cette réciproque, *dans le cas particulier où* $V = G$, $H = \{ e \}$, de manière à profiter pleinement de l'invariance de P.

La propriété $\mathfrak{T}(X, Y)$ *exprime alors que* X *et* Y *engendrent une sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{g}'$ *de* $\mathfrak{g}$ *de dimension* 2 *au plus.* Nous allons construire au voisinage de l'origine e de G un système de coordonnées qui nous ramène à étudier la résolubilité locale sur un groupe de Lie de dimension 2 au plus, ce qui sera facile à faire directement en explicitant les opérateurs.

D'abord on peut écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}',$$

où $\mathfrak{m}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. L'application

$$\begin{gathered}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \mapsto \exp \mathrm{M} . \exp \mathrm{N}, \\ \mathfrak{m} \times \mathfrak{g}' \to \mathrm{G}\end{gathered}$$

est alors un difféomorphisme local (d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{m} \times \mathfrak{g}'$ sur un voisinage de e dans G; *cf.* Helgason [2], lemma II.2.4). $\mathfrak{g}'$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie G' de G, de dimension 2 au plus. Comme l'application exponentielle

$$\mathfrak{g}' \xrightarrow{\exp} \mathrm{G}'$$

est un difféomorphisme local, on obtient un difféomorphisme local

$$\begin{gathered}(\mathrm{M}, g') \mapsto \exp \mathrm{M} . g', \\ \mathfrak{m} \times \mathrm{G}' \to \mathrm{G}.\end{gathered}$$

Si f est une fonction C^∞ sur G, posons

$$\tilde{f}(\mathrm{M}, g') = f(\exp \mathrm{M} . g').$$

Pour $\mathrm{Z} \in \mathfrak{g}'$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Z}f}(\mathrm{M}, g') &= \mathrm{Z}f(\exp \mathrm{M} . g') \\ &= \frac{d}{dt} f(\exp \mathrm{M} . g' . \exp t\mathrm{Z})\,|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \tilde{f}(\mathrm{M}, g' . \exp t\mathrm{Z})\,|_{t=0},\end{aligned}$$

soit $\widetilde{\mathrm{Z}f}(\mathrm{M}, g') = \mathrm{Z}\tilde{f}(\mathrm{M}, g')$, où Z, au second membre, est considéré comme un opérateur différentiel sur G'.

Par suite, il suffit d'étudier la résolubilité locale d'un opérateur invariant à gauche du premier ordre sur G', groupe de dimension ≤ 2. Pour ceux de ces groupes qui sont abéliens, ces opérateurs se ramènent à des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbf{R}^k$, $k \leq 2$. Le seul non abélien parmi ces groupes peut être identifié, au voisinage de l'élément neutre, au groupe des matrices.

$$\begin{pmatrix} e^t & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et tout opérateur invariant à gauche du premier ordre est de la forme

$$a\frac{\partial}{\partial t} + b\, e^t \frac{\partial}{\partial x} + c,$$

avec des constantes complexes a, b, c — qui se ramène immédiatement aux coefficients constants. Grâce aux propriétés connues des opérateurs à coefficients constants sur $\mathbf{R}^k$ (Hörmander [3], chap. III), on obtient la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert ω de e dans G tel que $P\,\mathcal{D}'(\omega) = \mathcal{D}'(\omega)$, qui entraîne la résolubilité locale de P.

Si $G = \mathbf{R}^n$, $H = \{ e \}$, tout opérateur invariant est localement résoluble : cela vient simplement de ce qu'il est à coefficients constants, donc possède une solution élémentaire. Nous voulons maintenant caractériser les groupes de Lie tels que tout opérateur invariant d'ordre un soit localement résoluble.

Proposition 2. — *Pour que tout opérateur invariant du premier ordre sur* V *soit localement résoluble, il faut et il suffit que l'algèbre de Lie* $D_1(V)$ *soit abélienne ou isomorphe à l'une des algèbres* $\mathfrak{a}_n$ *suivantes* ($n = 2, 3, 4, \ldots$) :

$\mathfrak{a}_n$ *est l'algèbre des matrices réelles* $n\times n$ *dont toutes les lignes sont nulles sauf la première.*

$D_1(V)$ doit donc admettre un idéal abélien de codimension un au plus.

Démonstration. — Supposons que

$$\forall\, X, Y \in D_1(V), \quad \mathcal{L}(X, Y).$$

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une base de $D_1(V)$. Nécessairement il existe des λ_{ij}, $\mu_{ij} \in \mathbf{R}$ tels que

$$[X_i, X_j] = \lambda_{ij} X_i + \mu_{ij} X_j, \qquad 1 \leqq i, j \leqq n.$$

On a immédiatement $\lambda_{ij} = -\mu_{ji}$, $1 \leqq i$, $j \leqq n$, d'où

$$[X_i, X_j] = \lambda_{ij} X_i - \lambda_{ji} X_j.$$

Puis

$$[X_i, X_j + X_k] = (\lambda_{ij} + \lambda_{ik})\, X_i - \lambda_{ji} X_j - \lambda_{ki} X_k$$

doit s'écrire aussi $\alpha X_i + \beta(X_j + X_k)$; par suite,

$$\lambda_{ji} = \lambda_{ki} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i, j, k \leqq n.$$

Donc λ_{ij} ne dépend que du deuxième indice; écrivons le λ_j. Il vient

$$(2) \qquad [X_i, X_j] = \lambda_j X_i - \lambda_i X_j, \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq n.$$

Réciproquement les relations (2) entraînent

$$\forall X, Y \in D_1(V), \quad \mathcal{P}(X, Y).$$

— Si tous les λ_i sont nuls, on obtient l'algèbre de Lie abélienne de dimension n.

— Si l'un des λ_i n'est pas nul, λ_1 par exemple, on obtient une algèbre de Lie résoluble non nilpotente. En prenant pour nouvelle base

$$X'_1 = -\frac{1}{\lambda_1} X_1,$$
$$X'_i = \lambda_i X_1 - \lambda_1 X_i, \qquad 1 < i \leq n,$$

les relations (2) se réduisent à

$$[X'_1, X'_i] = X'_i, \qquad 1 < i \leq n,$$
$$[X'_i, X'_j] = 0, \qquad 1 < i, j \leq n.$$

On obtient l'algèbre $\mathfrak{a}_n$.

Corollaire. — *Les seuls groupes de Lie connexes tels que tout opérateur invariant à gauche d'ordre un soit localement résoluble sont* (à un isomorphisme près)

— *les* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$, *p, q entiers* ≥ 0;

— *les groupes* A_n *suivants* : $n = 2, 3, 4, \ldots,$

$$A_n = \left\{ \begin{bmatrix} e^t & x_1 & \ldots & x_{n-1} \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \ \textit{avec}\ (t, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^n \right\}$$

($\mathbf{T}^q$ désigne le tore de dimension q).

Démonstration. — D'après la proposition 2, l'algèbre de Lie du groupe cherché G est abélienne ou isomorphe à celle d'un A_n.

Par suite, le revêtement universel de G est un $\mathbf{R}^n$ ou un A_n (A_n est simplement connexe, car difféomorphe à $\mathbf{R}^n$), et G lui-même est quotient de l'un de ces groupes par un sous-groupe invariant discret.

Les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$ sont isomorphes aux $\mathbf{Z}^p$ ($p \leq n$), d'où la conclusion dans le cas abélien. Il reste à montrer que les A_n n'ont pas de sous-groupe invariant discret non trivial. Avec des notations évidentes, la loi du groupe A_n s'écrit $(t, x)(t', x') = (t + t', x + e^t x')$. Soit Γ un sous-groupe invariant de A_n, et $(\tau, \xi) \in \Gamma$. Alors pour tous t, x,

$$(t, e^t x)^{-1} (\tau, \xi)(t, e^t x) = (\tau, e^{-t}\xi + x(e^\tau - 1))$$

appartient aussi à Γ. Si ξ et $e^{\tau} - 1$ ne sont pas tous deux nuls, il existe donc une suite de points de Γ distincts de (τ, ξ) et convergeant vers (τ, ξ), par suite Γ ne peut être discret. Donc le seul sous-groupe invariant discret de A_n est $\Gamma = \{(0, 0)\}$.

C. Q. F. D.

Sur ces groupes, on peut abandonner la restriction au premier ordre :

PROPOSITION 3. — *Sur les groupes décrits dans le corollaire précédent, tout opérateur invariant à gauche de type principal est localement résoluble.*

Démonstration. — Le seul cas à traiter est celui des groupes A_n. Les opérateurs

$$e^t \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad e^t \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

forment une base de $D_1(A_n)$. Un opérateur invariant à gauche d'ordre m sur A_n est donc un polynôme en $e^t \frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$. Sa partie principale s'écrit

$$P_m = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} e^{\alpha t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-\alpha} Q_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

où Q_α est un polynôme de $n - 1$ variables, homogène de degré α, à coefficients complexes. On en déduit pour le commutateur $[P, P^*]$ l'expression

$$[P, P^*] = R^* P + R P^* + \text{termes d'ordre} \leq 2m - 2,$$

avec

$$R = -m \sum_{0 \leq \alpha < m} \alpha\, e^{\alpha t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1-\alpha} Q_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

La fin de la démonstration est classique (*cf.* Trèves [5], chap. III). En reportant cette expression dans l'inégalité (1), valable pour un opérateur de type principal, on en déduit qu'il existe un voisinage ouvert ω de l'élément neutre tel que

$$\| u \|_{m-1}^2 \leq \| P^* u \|_0^2$$

pour $u \in \mathcal{D}(\omega)$. Par suite, $P\, \mathbf{L}^2(\omega) \supset H^{1-m}(\omega)$ et *a fortiori*

$$P\, \mathcal{D}'(\omega) \supset \mathcal{D}(\omega).$$

Nous étudions maintenant, d'un point de vue algébrique, quelques cas où la propriété $\mathfrak{T}(X, Y)$ de la proposition 1 équivaut à $[X, Y] = 0$, c'est-à-dire *où la résolubilité locale de* $X + iY + c$ *exige que* X *et* Y *commutent.* Il y a donc dans ces cas « peu » d'opérateurs localement résolubles. Dans la suite, nous utiliserons souvent la notation $Z = [X, Y]$.

Proposition 4. — *Si* X *et* Y *sont des élément nilpotents de l'algèbre de Lie* $D_1(V)$, *alors* $\mathfrak{T}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

Démonstration. — Si $Z = \alpha X + \beta Y$, on a $[Z, Y] = \alpha Z$ et $[Z, X] = -\beta Z$. Si $Z \neq 0$, $-\alpha$ et β sont valeurs propres des endomorphismes nilpotents $\operatorname{ad} X$ et $\operatorname{ad} Y$, d'où $\alpha = \beta = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Corollaire. — *Soient* G *un groupe nilpotent, et* $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Alors* $\mathfrak{T}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

On voit ainsi une fois de plus que le célèbre opérateur de Hans Léwy

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} - 2i(x + iy)\frac{\partial}{\partial z}$$

n'est pas localement résoluble, puisque cet opérateur est invariant à gauche sur le groupe de Lie nilpotent des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{xy}{2} - \frac{z}{4} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et que $[\operatorname{Re} L, \operatorname{Im} L] = -4\frac{\partial}{\partial z} \neq 0$.

Proposition 5. — *Soient* B *la forme de Killing de l'algèbre* $D_1(V)$, *et* X, $Y \in D_1(V)$. $\mathfrak{T}(X, Y)$ *entraîne* $B(Z, Z) = 0$.

Démonstration. — On a

$$B(X, Z) = B(X, [X, Y]) = B([X, X], Y) = 0,$$

de même, $B(Y, Z) = 0$, donc

$$B(Z, Z) = \alpha B(X, Z) + \beta B(Y, Z) = 0.$$

Corollaire. — *Soient* G *un groupe de Lie semi-simple compact, et* X $Y \in \mathfrak{g}$. *Alors* $\mathfrak{T}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

En effet, la forme de Killing est alors définie négative.

Par exemple, considérons une base X_1, X_2, X_3 de l'algèbre de Lie du groupe SU (2) telle que $[X_j, X_k] = X_l$, pour (j, k, l) permutation circulaire de (1, 2, 3). Soient

$$X = \sum a_j X_j \qquad \text{et} \qquad Y = \sum b_j X_j \qquad (j = 1, 2, 3).$$

La résolubilité locale de l'opérateur $P = X + iY + c$ équivaut à $[X, Y] = 0$, c'est-à-dire $a_j b_k - a_k b_j = 0$ ($j, k = 1, 2, 3$). Donc P est localement résoluble si et seulement s'il est proportionnel à un opérateur à partie principale réelle; ceci justifie un résultat annoncé dans Cerezo et Rouvière ([1], § 4).

Nous donnons enfin (propos. 6 et 7) une généralisation de la proposition 5 et de son corollaire.

PROPOSITION 6. — *Soient* $X, Y \in D_1(V)$. $\mathfrak{L}(X, Y)$ *entraîne que* $[X, Y]$ *est un élément nilpotent de* $D_1(V)$.

Démonstration. — On a $\operatorname{ad} Z = \alpha \operatorname{ad} X + \beta \operatorname{ad} Y$.

Si $\alpha = \beta = 0$, le résultat est évident.

Si $\alpha \neq 0$, par exemple, on a $\alpha \operatorname{ad} Z = [\operatorname{ad} Z, \operatorname{ad} Y]$, d'où

$$\alpha (\operatorname{ad} Z)^p = [\operatorname{ad} Z, (\operatorname{ad} Z)^{p-1} \operatorname{ad} Y], \qquad p \geqq 1.$$

Par suite, $\operatorname{tr}((\operatorname{ad} Z)^p) = 0$ pour $p \geqq 1$ et $\operatorname{ad} Z$ a toutes ses valeurs propres nulles, donc est nilpotent.

DÉFINITION. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *une algèbre de Lie réelle et* $X \in \mathfrak{a}$. *Nous dirons que* X *est un vecteur compact de* $\mathfrak{a}$ *si* X *est contenu dans une sous-algèbre de* $\mathfrak{a}$ *compactement plongée dans* $\mathfrak{a}$. (*cf.* Helgason [2], chap. II; § 5).

C'est dire que l'ensemble $\{ e^{t \operatorname{ad} X}, t \in \mathbf{R} \}$ est relativement compact dans le groupe linéaire GL ($\mathfrak{a}$).

Remarque. — Cela revient encore à dire qu'il existe un groupe de Lie A, d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, tel que le sous-groupe à un paramètre engendré par X dans A soit relativement compact dans A [d'après la relation $\operatorname{Ad}(\exp tX) = e^{t \operatorname{ad} X}$]. Mais si $\mathfrak{a}$ est donnée comme algèbre de Lie d'un groupe A′, ce n'est pas nécessairement dans A′ lui-même que cette propriété sera vérifiée : par exemple, tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ est compact.

PROPOSITION 7. — *Soient* $X, Y \in D_1(V)$. *Supposons qu'il existe dans l'algèbre de Lie (réelle) engendrée par* X *et* Y *un vecteur non nul compact dans* $D_1(V)$. *Alors* $\mathfrak{L}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

Démonstration. — Si $\mathfrak{L}(X, Y)$ est vérifiée, on a $Z = [X, Y] = \alpha X + \beta Y$, et la sous-algèbre engendrée par X et Y se réduit au sous-espace engendré par X et Y. Soit donc $T = \lambda X + \mu Y$ un vecteur compact non nul. Supposons $Z \neq 0$.

Comme T est compact, ad T a toutes ses valeurs propres imaginaires pures; or

$$\operatorname{ad} T (Z) = (\lambda\beta - \mu\alpha) Z, \qquad \text{donc} \quad \lambda\beta - \mu\alpha = 0.$$

Par suite, $T = \gamma Z$, où γ est un nombre réel non nul. Donc Z lui-même est compact. Comme il est aussi nilpotent (propos. 6), on a $\operatorname{ad} Z = 0$.

De $\operatorname{ad} Z(X) = -\beta Z$ et $\operatorname{ad} Z(Y) = \alpha Z$, on déduit alors que $\alpha = \beta = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $Z \neq 0$.

COROLLAIRE. — *Soient* G *un groupe de Lie compact, et* $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Alors* $\mathfrak{T}(X, Y)$ *équivaut à* $[X, Y] = 0$.

C'est immédiat d'après la remarque suivant la définition.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. CEREZO et F. ROUVIÈRE, *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie réel compact et sur un espace homogène réductif compact* (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 2, 1969, p. 561 à 581).

[2] HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1962.

[3] HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1963.

[4] L. NIRENBERG and F. TRÈVES, *Solvability of a first order linear partial differentia equation* (*Comm. Pure Appl. Math.*, 1963).

[5] F. TRÈVES, *Cours sur les équations aux dérivées partielles linéaires*, Secrétariat Mathématique de l'E. N. S., 1967.

(Manuscrit reçu le 17 novembre 1970.)

André CEREZO,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose, 06-Nice;

Francois ROUVIÈRE
6, square du Croisic,
75-Paris, 15e