ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES VEY

Sur la division des domaines de Siegel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 3, nº 4 (1970), p. 479-506
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_4_479_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, 1970, p. 479 à 506.

SUR LA DIVISION DES DOMAINES DE SIEGEL

PAR JACQUES VEY.

Soient D un domaine borné dans $\mathbf{C}^N$, et Γ un groupe d'automorphismes holomorphes de D. On dira que Γ *balaye* D s'il existe un compact $K \subset D$ tel que $\Gamma K = D$; et on dira que Γ *divise* D s'il le balaye, et si, muni de la topologie discrète, il opère proprement dessus. Le domaine D sera dit *balayable* (resp. *divisible*) s'il admet un groupe d'automorphismes holomorphes le balayant (resp. le divisant).

Dans un travail récent [6], W. Kaup, Y. Matsushima et T. Ochiai ont introduit la classe suivante de domaines :

DÉFINITION. — *Soient m et n deux entiers, c un nombre réel. Un* S-*domaine d'exposant c dans* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ *est un domaine* D *ayant les deux propriétés suivantes :*

1° *Il est isomorphe à un domaine borné, et contient un point de la forme* (z, O), *où* $z \in \mathbf{C}^n$, *et où* O *désigne l'origine de* $\mathbf{C}^m$.

2° *Il est stable par les transformations holomorphes de* $\mathbf{C}^{n+m}$ *des trois types suivants :*

(*a*) $(z, w) \mapsto (z + a, w)$ *quel que soit* $a \in \mathbf{R}^n$;

(*b*) $(z, w) \mapsto (z, e^{it} w)$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$;

(*c*) $(z, w) \mapsto (e^t z, e^{ct} w)$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Ces domaines sont appelés « domaines de Siegel généralisés » dans [6]. Avant de donner des exemples, énonçons le résultat principal :

THÉORÈME 1. — *Un* S-*domaine divisible est homogène.*

Compte tenu des résultats classiques de Hano, Koszul et Borel, ceci implique que les S-domaines divisibles sont symétriques.

Donnons maintenant des exemples de S-domaines :

1° *Un domaine de Siegel de première espèce* dans $\mathbf{C}^n$ est un domaine D

$$D = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid \operatorname{Im} z \in \Omega \},$$

où Ω est un cône ouvert convexe et saillant dans $\mathbf{R}^n$ (appelé « domaine tubulaire » dans [6]). La valeur de l'exposant est ici arbitraire (*cf.* toutefois la remarque 2 ci-dessous).

2° *Un domaine de Siegel de deuxième espèce* dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ est un domaine D défini de la façon suivante : on se donne dans $\mathbf{R}^n$ un cône Ω ouvert convexe saillant, et une application

$$F : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$$

linéaire sur la première variable, antilinéaire sur la seconde, et telle que :

(*a*) quels que soient w et $w' \in \mathbf{C}^m$, $F(w, w') = \overline{F(w', w)}$;

(*b*) quel que soit $w \in \mathbf{C}^m$, $F(w, w) \in \overline{\Omega}$;

(*c*) et $F(w, w) = 0$ si et seulement si $w = 0$.

Le domaine D est alors défini par

$$D = \{ (z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - F(w, w) \in \Omega \},$$

l'exposant est ici $1/2$.

(Dans [6], ces domaines sont appelés « domaines de Pjateckii-Sapiro »); lorsque $m = 0$, on retrouve les domaines de Siegel de première espèce.

3° Soient Ω un cône ouvert convexe saillant dans $\mathbf{R}^n$, c un nombre réel non nul, et $F : \mathbf{C}^m \to \overline{\Omega}$ une application continue telle que :

(*a*) $F(\lambda w) = |\lambda|^{\frac{1}{c}} F(w)$ quels que soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $w \in \mathbf{C}^m$;

(*b*) $F(w) = 0$ si et seulement si $w = 0$.

Alors le domaine D

$$D = \{ (z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - F(w) \in \Omega \}$$

est un S-domaine d'exposant c.

4° Un domaine borné cerclé contenant l'origine dans $\mathbf{C}^m$ est un S-domaine d'exposant nul.

Remarque 1. — Si dans la définition des S-domaines, $n = 0$ et $m \neq 0$, c est nécessairement nul, faute de quoi D contiendrait une droite complexe.

Remarque 2. — Si, par contre, $m = 0$, la valeur de c est affaire de convention; il sera commode de poser qu'elle est égale à $1/2$.

THÉORÈME 2. — *Si un* S-*domaine d'exposant non nul est balayable, c'est un domaine de Siegel de première ou deuxième espèce.*

THÉORÈME 3. — *Si un* S-*domaine* D *d'exposant nul dans* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ *est balayable, il est le produit* $D_1 \times D_2$ *d'un domaine de Siegel de première espèce* D_1 *dans* $\mathbf{C}^n$ *et d'un domaine borné* D_2 *cerclé, contenant l'origine, et homogène, dans* $\mathbf{C}^m$.

NOTATIONS ET CONVENTIONS :

1° Soit D un domaine dans $\mathbf{C}^N$, borné ou isomorphe à un domaine borné.

On notera G(D) le groupe des automorphismes holomorphes de D : c'est un groupe de Lie; les sous-groupes d'isotropie sont compacts; si une transformation $g \in G(D)$ conserve un point $p \in D$, et opère trivialement sur l'espace tangent en ce point, c'est la transformation identique [2].

On notera $\mathfrak{g}(D)$ l'algèbre de Lie de G(D) : c'est l'algèbre des champs holomorphes sur D, complètement intégrables. Nous appellerons principe de Cartan le résultat bien connu qui veut que si un champ X non nul appartient à $\mathfrak{g}(D)$, le champ iX n'est pas dans $\mathfrak{g}(D)$. Si $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}(D)$, et p un point de D, on notera $\mathfrak{h}(p)$ le sous-espace (réel)

$$\mathfrak{h}(p) = \{ X(p) \in T_p{}^{\mathbf{C}}D \mid X \in \mathfrak{h} \}$$

de $T_p{}^{\mathbf{C}}D$, espace tangent complexe en p à D; et $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(p)$ le $\mathbf{C}$-sous-espace vectoriel de $T_p{}^{\mathbf{C}}D$ engendré par $\mathfrak{h}(p)$.

2° Soit D un S-domaine d'exposant c dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$. Un point p de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ sera repéré par ses projections z et w sur $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{C}^m$. Rappelons un résultat fondamental de [6] (théor. 1 et lemme 3.1; la démonstration du lemme ne fait pas jouer l'hypothèse $c = 1/2$) :

THÉORÈME. — *Les champs de* $\mathfrak{g}(D)$ *sont polynomiaux; leur composante sur* $\mathbf{C}^n$ *(resp. sur* $\mathbf{C}^m$*) est de degré en* w *inférieur ou égal à* 1 *(resp. à* 2*).*

Les entiers k et α variant respectivement de 1 à n et de 1 à m, on posera

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial z^k}, \qquad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial w^\alpha};$$

en vertu de la clause 2° de la définition des S-domaines, $\mathfrak{g}(D)$ contient les champs ∂_k $(1 \leq k \leq n)$ et les champs

$$\partial' = i \sum_{\alpha=1}^{m} w^{\alpha} \partial_{\alpha}, \qquad \partial = \sum_{k=1}^{n} z^k \partial_k + c \sum_{\alpha=1}^{m} w^{\alpha} \partial_{\alpha}.$$

Soient μ et ν deux entiers : $\mathfrak{Z}_{\mu\nu}$ désignera l'espace des champs polynomiaux sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ de la forme $\sum_k p^k \partial_k$, où les polynômes p^k sont homogènes de degré μ en z, de degré ν en w; et $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$ désignera l'espace des champs de la forme $\sum_\alpha q^\alpha \partial_\alpha$, où les polynômes q^α sont homogènes de degré μ en z, de degré ν en w. On convient en outre que $\mathfrak{Z}_{\mu\nu} = \mathfrak{W}_{\mu\nu} = 0$ si l'un des entiers est strictement négatif. Quel que soit $Z_{\mu\nu} \in \mathfrak{Z}_{\mu\nu}$, et $W_{\mu\nu} \in \mathfrak{W}_{\mu\nu}$, on a les formules

$$\begin{aligned}
[\partial, Z_{\mu\nu}] &= (\mu - 1 + c\nu) Z_{\mu\nu}, \\
[\partial, W_{\mu\nu}] &= (\mu + c(\nu - 1)) W_{\mu\nu}, \\
[\partial', Z_{\mu\nu}] &= i\nu Z_{\mu\nu}, \\
[\partial', W_{\mu\nu}] &= i(\nu - 1) W_{\mu\nu};
\end{aligned}$$

en outre, crocheter un champ X avec ∂_k $(1 \leq k \leq n)$ revient à le dériver par rapport à z^k dans la connexion plate canonique sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$.

1. Convexité. — Rappelons d'abord un résultat classique, dû à Siegel : si un domaine borné dans $\mathbf{C}^N$ est balayable, il est holomorphiquement convexe (*cf.* [7], théor. 6.1 et 6.2; le balayage suffit à entraîner que la métrique de Bergman est complète).

Proposition 1.1. — *Soit* D *un* S-*domaine dans* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, *holomorphiquement convexe, et soit* D_1 *l'intersection*

$$D_1 = D \cap (\mathbf{C}^n \times \{0\}).$$

Alors,

(*a*) D_1 *est domaine de Siegel de première espèce dans* $\mathbf{C}^n$;

(*b*) *si* $(z, w) \in D$, *tous les points* $(z, \lambda w)$, *avec* $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| \leq 1$, *sont dans* D; *en particulier* $(z, 0) \in D_1$.

La première clause de la définition des S-domaines garantit que D_1 est non vide.

1° On va commercer par établir (*b*). Soit $(\zeta, 0) \in D_1$, et $(z, w) \in D$; dans le domaine D, on peut tracer une courbe $t \mapsto (z, w)_t = (z_t, w_t)$ paramétrée par $[0, 1]$, avec $(z, w)_0 = (\zeta, 0)$ et $(z, w)_1 = (z, w)$.

Pour $t \in [0, 1]$, soit γ_t le cercle

$$\gamma_t = \{ (z_t, e^{is} w_t) \mid s \in \mathbf{R} \}$$

qui est contenu dans D quel que soit t [condition 2°, (*b*) de la définition des S-domaines], et soit Δ_t le disque

$$\Delta_t = \{ (z_t, \lambda w_t) \mid \lambda \in \mathbf{C}, \mid \lambda \mid \leq 1 \}$$

qui est inclus dans D pour t assez petit [Δ_0 se réduit au point $(\zeta, 0)$]. Enfin, soit

$$E = \{ t \in [0, 1] \mid \Delta_t \subset D \},$$

on va prouver que $E = [0, 1]$.

Il est évident que E est ouvert dans $[0, 1]$. D'autre part, soit

$$K = \bigcup_{t \in [0, 1]} \gamma_t,$$

K est un compact inclus dans D; et si $t \in E$, le principe du maximum montre que

$$\sup_{\Delta_t} |f| = \sup_{\gamma_t} |f| \leq \sup_{K} |f|$$

quelle que soit la fonction f holomorphe sur D, i. e. $\Delta_t \subset \hat{K}$. Comme D est holomorphiquement convexe, $\hat{K}$ est compact; si donc θ est adhérent à E, $\Delta_\theta \subset \hat{K} \subset D$, ce qui montre que E est fermé. Par suite, $E = [0, 1]$. En particulier, $\Delta_1 \subset D$, ce qui établit l'assertion (*b*).

2° Considérons à présent D_1. Soit π la projection canonique de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ sur $\mathbf{C}^n$: l'assertion (*b*) montre que $D_1 = \pi(D)$: D_1 est donc connexe. Le domaine D_1 dans $\mathbf{C}^n$ est stable par homothétie de centre O et par translation réelle; par suite,

$$D_1 = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid \operatorname{Im} z \in \Omega \},$$

où Ω est un cône ouvert convenable dans $\mathbf{R}^n$. Comme D est holomorphiquement convexe, D_1 aussi, et donc D_1 est linéairement convexe ([4], théor. 2.5.10), ce qui fait que Ω est linéairement convexe. Reste à voir que Ω est saillant : mais s'il contenait une droite affine réelle $a + \mathbf{R}b$ $(a \in \Omega,\ b \in \mathbf{R}^n)$, D_1 et donc D contiendraient la droite affine complexe $ia + \mathbf{C}b$, contrairement au fait que D doit être isomorphe à un domaine borné. Ainsi D_1 est un domaine de Siegel de première espèce.

C. Q. F. D.

2. Propriétés de densité.

Proposition 2.1. — *Soient* D *un domaine borné dans* $\mathbf{C}^N$, *et* $H^\infty(D)$ *l'algèbre de Banach des fonctions holomorphes bornées sur* D. *Soit* Γ *un groupe d'automorphismes holomorphes de* D *balayant* D, *et* a *un point de* D *: pour toute fonction* $f \in H^\infty(D)$,

$$\|f\| = \sup_D |f| = \sup_{\Gamma a} |f|.$$

En particulier, si une fonction $f \in H^\infty(D)$ *s'annule sur une orbite, elle est identiquement nulle.*

Posons, pour p et q dans D,

$$C_D(p, q) = \sup\{|f(p) - f(q)| : f \in H^\infty(D), \|f\| = 1\};$$

il est bien connu (*cf.* [5], § 2) que C_D est une distance sur D (dite distance de Gleason), invariante par automorphismes; la borne supérieure de la définition est atteinte, et C_D est continue, strictement inférieure à 2 sur $D \times D$; comme ici $\Gamma \diagdown D$ est quasi-compact, elle est même complète.

Puisqu'il existe un compact $K \subset D$ (qu'on peut supposer contenir a) tel que $\Gamma K = D$, on peut trouver $\rho < 2$ tel que les translatées de la boule $B(a, \rho)$ de centre a et de rayon ρ recouvrent D : tout point de D se trouve à distance inférieure ou égale à $\rho < 2$ d'un point de l'orbite Γa. Maintenant, soit $f \in H^\infty(D)$, et

$$r = \sup_{\Gamma a} |f| \leq \|f\| = 1.$$

On va prouver que $r = 1$. La fonction f envoie le domaine D dans le disque unité E du plan complexe, et on voit de suite que

$$C_E(f(p), f(q)) \leq C_D(p, q)$$

quels que soient p et q dans D. Alors :

(1) l'ensemble $f(\Gamma a)$ est inclus dans le disque E_r de centre O et de rayon r;

(2) il existe une suite p_n de points de D tels que $|f(p_n)| \to 1$;

(3) mais quel que soit n, $f(p_n)$ est à une C_E-distance de $f(\Gamma a)$ inférieure ou égale à $\rho < 2$. Si $r < 1$, cette situation est contradictoire, vu que $C_E(c, f(p_n)) \to 2$ quel que soit le point c fixé dans E.

En opposition avec ce résultat, on observera qu'il peut fort bien exister une fonction holomorphe sur D (non bornée !), non identiquement nulle, et nulle sur l'orbite Γa : en particulier, si Γ divise D, les orbites sont discrètes, et D est un ouvert de Stein; l'ensemble $\Gamma a \cup \{b\}$, où b est n'importe quel point de D n'appartenant pas à Γa, est discret dans D, et il existe une fonction holomorphe sur D prenant des valeurs arbitraires sur $\Gamma a \cup \{b\}$: en particulier, la valeur 1 en b et la valeur 0 sur Γa.

Il est facile de voir que si $X \in \mathfrak{g}(D)$, l'ensemble V des zéros de X est fermé pour la topologie de Zariski définie par $H^\infty(D)$, i. e. que quel que soit $a \in D - V$, il existe $f \in H^\infty(D)$ non nulle en a, et nulle sur V. La généralisation suivante jouera un rôle essentiel :

Proposition 2.2. — *Soient* D *un domaine borné dans* $\mathbf{C}^N$, *et* $\mathfrak{h}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g}(D)$. *L'ensemble des points* $p \in D$, *où* $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(p)$ *n'est pas de dimension maximale est fermé pour la topologie de Zariski définie par* $H^\infty(D)$.

Donnons une définition :

Définition 2.1. — *Une fonction* $f \in H^\infty(D)$ *est dite spéciale si quel que soit* $X \in \mathfrak{g}(D)$, *la fonction* Xf, *qui est holomorphe sur* D, *est bornée. On note* $SH^\infty(D)$ *le sous-espace des fonctions spéciales.*

Lemme 2.1. — $SH^\infty(D)$ *est dense dans* $H^\infty(D)$ *pour la convergence uniforme sur tout compact.*

On va utiliser un procédé d'approximation inspiré de Gårding [3]. Soit $f \in H^\infty(D)$, et φ une fonction sur le groupe de Lie G(D), à valeurs complexes, de classe C^∞, à support compact. Considérons, pour $p \in D$, l'intégrale

$$\varphi \star f(p) = \int_{G(D)} \varphi(s) f(s^{-1}p)\, ds,$$

où ds désigne la mesure de Haar. Comme l'application $s \mapsto f(s^{-1}p)$ de G(D) dans $\mathbf{C}$ est continue, l'intégrale converge, et uniformément lorsque p varie dans un compact de D. Il s'ensuit que la fonction $\varphi \star f$ est holomorphe sur D; en outre, elle est bornée :

$$\|\varphi \star f\| \leq \|f\| \int_{G(D)} |\varphi|.$$

Soit $\sigma \in G$:

$$\varphi \star f(\sigma p) = \int_{G(D)} \varphi(s) f(s^{-1}\sigma p)\, ds = \int_{G(D)} \varphi(\sigma s) f(s^{-1}p)\, ds.$$

Soit $X \in \mathfrak{g}(D)$. En tout état de cause, la dérivée $X.\varphi \star f$ est holomorphe sur D, et

$$(1) \qquad X.\varphi \star f(p) = \lim_{t \to 0} t^{-1}(\varphi \star f(e^{tX}p) - \varphi \star f(p))$$

$$= \lim_{t \to 0} \int_{G(D)} t^{-1}(\varphi(e^{tX}s) - \varphi(s)) f(s^{-1}p)\, ds.$$

Considérons X comme un champ de vecteurs invariant à droite sur G(D). D'après le théorème dit des accroissements finis,

$$t^{-1}(\varphi(e^{tX}s)-\varphi(s))=X\varphi(e^{\theta X}s), \tag{2}$$

où θ est un nombre réel compris entre o et t (dépendant de s). La fonction $X\varphi$ sur G(D) est continue, à support compact : le deuxième membre de (2) converge uniformément vers $X\varphi(s)$. Dans l'intégrale (1), on peut se borner à intégrer sur le compact réunion des translatés du support de φ pour $|t|\leqq 1$; après permutation de la limite et de l'intégrale, il vient

$$X.\varphi\star f(p)=\int_{G(D)} X\varphi(s)\,f(s^{-1}p)\,ds,$$

ce qui montre que $X.\varphi\star f$ est bornée :

$$\|X.\varphi\star f\|\leqq\|f\|\int_{G(D)}|X\varphi|$$

et que $\varphi\star f$ est une fonction spéciale.

Soit alors K un compact de D, et $\varepsilon>0$. Il existe un voisinage V de l'identité dans G(D) tel que

$$|f(s^{-1}p)-f(p)|<\varepsilon$$

quels que soient $p\in K$ et $s\in V$. Soit φ une fonction C^∞ sur G(D), à valeurs réelles positives ou nulles, à support compact inclus dans V, et de moyenne 1 sur G(D). On aura, pour $p\in K$,

$$|\varphi\star f(p)-f(p)|=\int_{G(D)}\varphi(s)\,|f(s^{-1}p)-f(p)|\,ds\leqq\varepsilon,$$

ce qui prouve la densité de $SH^\infty(D)$ dans $H^\infty(D)$ pour la convergence compacte. (On se convainc facilement qu'il n'y a pas densité pour la convergence uniforme.)

Lemme 2.2. — *Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur* D, *qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction g. Si* $X\in\mathfrak{g}(D)$, Xf_n *converge uniformément sur tout compact vers* Xg.

Soient $z^1, \ldots, z^N$ les coordonnées canoniques dans $\mathbf{C}^N$, et $X^j(z)$ les coordonnées de X sur la base $\dfrac{\partial}{\partial z^j}$: ce sont des fonctions holomorphes sur D, et

$$Xf_n=\sum_{j=1}^{N}X^j(z)\,\frac{\partial f}{\partial z^j}.$$

Il est notoire que sous les hypothèses faites, $\frac{\partial f_n}{\partial z^j}$ converge vers $\frac{\partial g}{\partial z^j}$: l'assertion en découle trivialement.

Démonstration de la proposition 2.2. — Soit $X_1, \ldots, X_h$ une **R**-base de $\mathfrak{h}$, et r un entier. On va voir que l'ensemble V

$$V = \{ p \in D \mid \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(p) < r \}$$

est fermé pour la topologie de Zariski de $H^{\infty}(D)$. Pour que p appartienne à V, il faut et il suffit que quelles que soient les fonctions $f_1, \ldots, f_N$ dans $H^{\infty}(D)$, les déterminants d'ordre r extraits de la matrice

$$M(f_1, \ldots, f_N)(p) = \begin{pmatrix} X_1 f_1(p) & \ldots & X_h f_1(p) \\ \vdots & & \\ X_1 f_N(p) & \ldots & X_h f_N(p) \end{pmatrix}$$

soient tous nuls : on voit que la condition est suffisante en prenant pour $f_1, \ldots, f_N$ les coordonnées canoniques dans $\mathbf{C}^N$, et elle est nécessaire parce que toute relation linéaire entre les $X_j(p)$ amène une relation entre les colonnes de la matrice. Soient $\Delta_m(f_1, \ldots, f_N)(p)$ les déterminants d'ordre r extraits de la matrice. Si $f_1, \ldots, f_N$ sont dans $SH^{\infty}(D)$, les $\Delta_m(f_1, \ldots, f_N)$ sont dans $H^{\infty}(D)$, et identiquement nuls sur V.

Maintenant soit $a \in D - V$. L'un des $\Delta_m(z^1, \ldots, z^N)$, disons pour $m = 1$, est non nul en a. Soit U un voisinage compact de a. D'après le lemme 2.1, il existe des fonctions spéciales $f_1, \ldots, f_N$ arbitrairement proches de $z^1, \ldots, z^N$ respectivement sur U. D'après le lemme 2.2, les fonctions bornées $X_j f_k$ $(1 \leq j \leq h, 1 \leq k \leq N)$ vont être arbitrairement proches des fonctions $X_j z^k$ sur U. Il s'ensuit que $\Delta_1(f_1, \ldots, f_N)$, qui est une fonction bornée sur D, nulle sur V, va être arbitrairement proche de $\Delta_1(z^1, \ldots, z^N)$ sur U, donc non nulle en a. Ceci achève la démonstration.

Nous en arrivons au résultat principal de ce paragraphe :

PROPOSITION 2.3. — *Soient* D *un domaine borné dans* $\mathbf{C}^N$, *et* Γ *un sous-groupe de* G(D) *balayant* D. *Si le sous-espace* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}(D)$ *est stable par l'action adjointe de* Γ *sur* $\mathfrak{g}(D)$, *la dimension de* $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(p)$ *est constante quand* p *varie dans* D.

Ce résultat s'applique à tout idéal caractéristique de l'algèbre $\mathfrak{g}(D)$: elle-même, son centre, son radical, etc.

Soit V l'ensemble des points de D où la dimension de $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(p)$ n'est pas maximale : par essence même, V est différent de D. Il est stable par l'action de Γ sur D, puisque $\mathfrak{h}$ est stable par l'action de Γ sur $\mathfrak{g}(D)$. S'il était non vide, il contiendrait une orbite de Γ, et donc d'après la proposition 2.1, il serait dense dans D pour la topologie de Zariski définie par $H^\infty(D)$; il serait alors égal à D entier, puisqu'il est fermé pour cette topologie d'après la proposition 2.2 : ce qui est contradictoire.

3. Valeur de l'exposant. — Le but de ce paragraphe est de démontrer le fait suivant :

Proposition 3.1. — *Si un* S-*domaine est balayable, son exposant est* o *ou* $1/2$.

Dans tout ce paragraphe, D désignera un S-domaine dans $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^m$, *d'exposant* $c\neq 0$, balayable.

Lemme 3.1. — *Tout champ indépendant de* z, *appartenant à* $\mathfrak{g}(D)$, *est de la forme*

$$Z_{01}+Z_{00}+W_{01}+W_{00}$$

où $Z_{\mu\nu}\in\mathfrak{Z}_{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu}\in\mathfrak{W}_{\mu\nu}$, *et* Z_{00} *est une translation réelle sur* z. *Si, de plus,* $c\neq 1/2$, $Z_{01}=W_{00}=0$.

Soit X un champ de $\mathfrak{g}(D)$ indépendant de z : il est *a priori* de la forme

$$X=Z_{01}+Z_{00}+W_{02}+W_{01}+W_{00}$$

(*cf.* [6], théor. 1 et lemme 3.1). On a

$$(\mathrm{ad}\,\partial')^2X=-Z_{01}-W_{02}-W_{00},$$
$$\mathrm{ad}\,\partial.(\mathrm{ad}\,\partial')^2X=(1-c)Z_{01}-cW_{02}+cW_{00}.$$

Tout d'abord,

$$X'=X+(\mathrm{ad}\,\partial')^2X=Z_{00}+W_{01}$$

appartient à $\mathfrak{g}(D)$, ainsi que $[\partial, X']=-Z_{00}$. Comme $\mathfrak{g}(D)$ contient toutes les translations réelles sur z, le principe de Cartan implique que Z_{00} est réel.

Ensuite, on trouve dans $\mathfrak{g}(D)$ le champ

$$X''=c(\mathrm{ad}\,\partial')^2X+\mathrm{ad}\,\partial.(\mathrm{ad}\,\partial')^2X=(1-2c)Z_{01}-2cW_{02},$$

or $[\partial', X'']=iX''$. Par conséquent, $X''=0$ et comme nous supposons $c\neq 0$, $W_{02}=0$: ceci prouve la première assertion du lemme. Si, de plus, $c\neq 1/2$, l'annulation de X'' entraîne celle de Z_{01}. Alors $\mathfrak{g}(D)$ contient les champs

$$(\mathrm{ad}\,\partial')^2X=-W_{00},$$
$$(\mathrm{ad}\,\partial')^3X=iW_{00}$$

et donc $W_{00}=0$.

C. Q. F. D.

LEMME 3.2. — *Si* $c \neq 1/2$, ∂' *est dans le centre de* $\mathfrak{g}(D)$.

On va procéder par récurrence sur le degré en z du champ $X \in \mathfrak{g}(D)$. Si ce degré est nul, le lemme 3.1 montre que $X \in \mathfrak{Z}_{00} \oplus \mathfrak{W}_{01}$ et, par suite, que X et ∂' commutent. Supposons le résultat acquis pour les champs de degré en z inférieur à m, et $X \in \mathfrak{g}(D)$ de degré m en z.

Observons que quel que soit $1 \leq k \leq n$, $[\partial_k, X]$ est de degré en z inférieur ou égal à $m-1$, donc par l'hypothèse de récurrence,

$$[\partial_k, [\partial', X]] = [\partial', [\partial_k, X]] = 0,$$

i. e. $[\partial', X]$ est indépendant de z. Décomposons X sur les espaces $\mathfrak{Z}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$:

$$X = \sum_{\mu=0}^{m} X_\mu,$$

$$X_\mu = Z_{\mu 1} + Z_{\mu 0} + W_{\mu 2} + W_{\mu 1} + W_{\mu 0}.$$

Le champ

$$[\partial', X_\mu] = iZ_{\mu 1} + iW_{\mu 2} - iW_{\mu 0}$$

est homogène de degré μ en z. Comme $[\partial', X] = \sum_{\mu=0}^{m} [\partial', X_\mu]$ doit être indépendant de z, tous les $[\partial', X_\mu]$ sont nuls pour $\mu \geq 1$, et

$$[\partial', X] = [\partial', X_0] = iZ_{01} + iW_{02} - iW_{00}.$$

Or $[\partial', X] \in \mathfrak{g}(D)$, étant indépendant de z, doit être dans $\mathfrak{Z}_{00} \oplus \mathfrak{W}_{01}$ d'après le lemme 3.1 : il est donc nul.

C. Q. F. D.

Soit $D_1 = D \cap (\mathbf{C}^n \times \{0\})$, qui est non vide d'après la définition des S-domaines.

LEMME 3.3. — *Si* $c \neq 1/2$, D_1 *est l'ensemble des zéros communs des champs du centre de* $\mathfrak{g}(D)$.

Soit V cet ensemble de zéros communs. Si $(z, w) \in V$, ∂' doit s'y annuler, donc $w = 0$. Inversement, soit X un champ du centre de $\mathfrak{g}(D)$. Comme X commute avec les ∂_k, il est indépendant de z et donc (lemme 3.1) de la forme $Z_{00} + W_{01}$; comme il commute avec ∂, $Z_{00} = 0$, et X s'annule sur D_1.

Démonstration de la proposition 3.1. — Nous avons convenu que si $m = 0$, la valeur de c est $1/2$. Supposons donc $m > 0$. Dans son opération sur $\mathfrak{g}(D)$, un sous-groupe Γ de $G(D)$ qui balaye D conserve le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}(D)$. Par conséquent, $\dim \mathfrak{z}^{\mathbf{C}}(p)$ doit être constante quand p varie dans D (propos. 2.3). Or, si $c \neq 1/2$, cette dimension est nulle sur D_1 et non nulle ailleurs (lemme 3.3), ce qui est contradictoire.

4. Exposant 1/2. — Dans tout ce paragraphe, D désigne un S-domaine d'exposant 1/2 dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, qu'on supposera *balayable.*

Soit, pour λ entier supérieur ou égal à -1,

$$\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}(\mathrm{D}) \cap (\mathfrak{Z}_{\lambda+1,0} \oplus \mathfrak{W}_{\lambda,1}),$$
$$\mathfrak{g}_{\lambda+1/2} = \mathfrak{g}(\mathrm{D}) \cap (\mathfrak{Z}_{\lambda+1,1} \oplus \mathfrak{W}_{\lambda,2} \oplus \mathfrak{W}_{\lambda+1,0}),$$

on définit ainsi une famille de sous-espaces de $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$, indexée par

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{R} : 2\lambda \in \mathbf{Z},\ \lambda \geqq -1\}.$$

On vérifie immédiatement que l'opérateur ad∂ conserve les sous-espaces $\mathfrak{g}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, et que si $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_\lambda$,

$$\mathrm{ad}\,\partial.\mathrm{X} = \lambda \mathrm{X}.$$

Tenant compte de ce que les champs de $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$ ont leur composante sur $\mathbf{C}^n$ de degré en w inférieur ou égal à 1, et leur composante sur $\mathbf{C}^m$ de degré en w inférieur ou égal à 2, ([6], lemme 3.1) on en déduit que

$$\mathfrak{g}(\mathrm{D}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$$

et que les $\mathfrak{g}_\lambda$ sont les espaces propres de l'opérateur ad∂; l'algèbre $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$ est donc graduée :

$$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$$

quels que soient λ et μ dans Λ. On montre en fait ([6], théor. 4) que $\mathfrak{g}_\lambda = (0)$ si $\lambda \geqq 3/2$:

$$\mathfrak{g}(\mathrm{D}) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-1/2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_1.$$

Le principe de Cartan montre tout de suite que $\mathfrak{g}_{-1}$ est constitué par les translations réelles sur z; ∂ et ∂' sont évidemment dans $\mathfrak{g}_0$; quant aux champs de $\mathfrak{g}_{-1/2}$, ils sont de la forme

$$\mathrm{X} = a_\alpha^k w^\alpha \partial_k + c^\alpha \partial_\alpha,$$

où les a_α^k, c^α sont des constantes complexes (convention d'indices); ce qui fait que

$$(1) \qquad [\partial', \mathrm{X}] = i a_\alpha^k w^\alpha \partial_k - i c^\alpha \partial_\alpha.$$

Notons $c(\mathrm{X})$ le vecteur de $\mathbf{C}^m$ de coordonnées c^α (c'est la valeur de X à l'origine) : la formule (1) montre :

(1) que si $c(\mathrm{X}) = 0$, $\mathrm{X} = 0$;

(2) que les valeurs en un point $(z, 0)$ des champs de $\mathfrak{g}_{-1/2}$, i. e. les vecteurs $c(X)$ quand X décrit $\mathfrak{g}_{-1/2}$, forment un $\mathbf{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^m$. Il en résulte que la dimension de $\mathfrak{g}_{-1/2}$ est paire, et inférieure ou égale à $2m$. Le but de ce paragraphe est d'établir le point suivant :

Proposition 4.1. — *Si le* S-*domaine* $D \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ *d'exposant* $1/2$ *est balayable,* $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} = 2m$.

Il n'y a évidemment rien à démontrer si $m = 0$: nous pouvons donc supposer dans la suite que $m > 0$. Par ailleurs, il serait facile de voir que si $\mathfrak{g}_{-1/2} = (0)$, ∂' est central, et d'en déduire par des considérations analogues à celle du paragraphe 3 une contradiction; mais cette remarque ne nous sera pas utile.

Soit $2h$ la dimension de $\mathfrak{g}_{-1/2}$.

Lemme 4.1. — *Il existe une* $\mathbf{R}$-*base* $X_1, \ldots, X_h, Y_1, \ldots, Y_h$ *de* $\mathfrak{g}_{-1/2}$, *telle que* $Y_j = [\partial', X_j]$; *les vecteurs* $c_j = c(X_j)$ *sont alors* $\mathbf{C}$-*indépendants dans* $\mathbf{C}^m$.

Cela résulte du fait que l'application $X \mapsto c(X)$ de $\mathfrak{g}_{-1/2}$ dans $\mathbf{C}^m$ est injective, et que son image est un $\mathbf{C}$-sous-espace; et de la formule (1).

Lemme 4.2. — *En tout point* $p \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, *les valeurs des champs* $X_1, \ldots, X_h, \partial_1, \ldots, \partial_n$ *sont* $\mathbf{C}$-*indépendantes.*

En effet, soit $p = (z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, et $\lambda^1, \ldots, \lambda^h, \mu^1, \ldots, \mu^n$ des nombres complexes tels que

$$\lambda^1 X_1(p) + \ldots + \lambda^h X_h(p) + \mu^1 \partial_1 + \ldots + \mu^n \partial_n = 0.$$

Séparant les composantes sur $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{C}^m$, il vient en particulier

$$\lambda^1 c_1 + \ldots + \lambda^h c_h = 0,$$

et comme les c_j sont $\mathbf{C}$-indépendants dans $\mathbf{C}^m$, tous les λ^j et tous les μ^j sont nuls.

Lemme 4.3. — *Quel que soit* $p \in D$, *les vecteurs* $X_1(p), \ldots, X_h(p), \partial_1, \ldots, \partial_n$ *forment une* $\mathbf{C}$-*base de* $\mathfrak{g}(D)^{\mathbf{C}}(p)$.

Le $\mathbf{C}$-sous-espace engendré par $X_1(p), \ldots, \partial_n$ est de dimension sur $\mathbf{C}$ $h + n$ d'après le lemme 4.2, et il est inclus dans $\mathfrak{g}(D)^{\mathbf{C}}(p)$. Par ailleurs, D étant balayable, la proposition 2.3 montre que $\mathfrak{g}(D)^{\mathbf{C}}(p)$ est de dimension constante. Il suffit donc de constater que sa dimension est $h + n$ en un point particulier de D, par exemple un point de D de la forme $(ia, 0)$ avec $a \in \mathbf{R}^n$.

Soit donc $A \in \mathfrak{g}_{-1}$ la translation définie par $A(0, 0) = (a, 0)$. Il s'agit de voir que si $X \in \mathfrak{g}(D)$, $X(ia, 0)$ est combinaison linéaire complexe de $X_1(ia, 0), \ldots, X_h(ia, 0), \partial_1, \ldots, \partial_n$.

1° Si $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, il est combinaison linéaire (réelle) des ∂_k.

2° Si $X \in \mathfrak{g}_{-1/2}$, il est combinaison linéaire réelle des X_j et des $Y_j = [\partial', X_j]$. Sa valeur en $(ia, 0)$ est combinaison linéaire réelle des c_j et des $ic_j = - Y_j(ia, 0)$ [formule (1)].

3° Si $X \in \mathfrak{g}_0$, il appartient à $\mathfrak{Z}_{10} \oplus \mathfrak{W}_{01}$: sa valeur en $(ia, 0)$ est combinaison linéaire complexe des ∂_k.

4° Si $X \in \mathfrak{g}_{1/2}$, le champ $X + \mathrm{ad}\, \partial'.\mathrm{ad}\, A.X$ s'annule en $(ia, 0)$ (calcul immédiat; *cf.* [6], form. (5.1) et remarques qui suivent); X y prend donc la même valeur que $- ad\, \partial'.\mathrm{ad}\, A.X \in \mathfrak{g}_{-1/2}$.

5° Si $X \in \mathfrak{g}_1$, le champ $X + 1/2\, (\mathrm{ad}\, A)^2 X$ s'annule en $(ia, 0)$ (*cf.* [6], form. (5.1)) et X y prend la même valeur que $- 1/2\, (\mathrm{ad}\, A)^2 X \in \mathfrak{g}_{-1}$.

Démonstration de la proposition 4.1. — En vertu du lemme 4.3, quel que soit $p = (z, w) \in D$, la valeur en p du champ ∂, i. e.

$$\partial(p) = z + 1/2\, w,$$

doit être combinaison linéaire complexe des $X_j(p)$ et des ∂_k. Il doit exister des nombres complexes λ^j, μ^k (dépendant de z et w) tels que :

$$z + 1/2\, w = \sum_j \lambda^j X_j(z, w) + \sum_k \mu^k \partial_k,$$

ce qui donne, par projection sur $\mathbf{C}^m$:

$$1/2\, w = \sum_j \lambda^j c_j.$$

Mais la possibilité de résoudre ce système quel que soit $(z, w) \in D$ exige que les c_j engendrent (sur $\mathbf{C}$) $\mathbf{C}^m$ entier. Par conséquent, $h = m$.

C. Q. F. D.

5. Démonstration du théorème 2. — Compte tenu des propositions 3.1 et 4.1, le théorème 2 découle du résultat suivant :

Proposition 5.1. — *Soit* D *un* S-*domaine d'exposant* $1/2$ *dans* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, *holomorphiquement convexe. Si* $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} = 2m$, D *est un domaine de Siegel, de première ou deuxième espèce selon que* m *est nul ou non.*

Dans tout ce qui suit, D désigne un S-domaine satisfaisant les hypothèses de la proposition.

LEMME 5.1. — *Il existe une application* $F : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}$-*linéaire sur la première variable, antilinéaire sur la deuxième, telle que les champs de* $\mathfrak{g}_{-1/2}$ *soient les champs*

$$2iF(w, c) + c \in \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^m$$

avec c quelconque dans $\mathbf{C}^m$.

Un champ de $\mathfrak{g}_{-1/2}$ se met sous la forme

$$X = a^k_\alpha(X)\, w^\alpha\, \partial_k + c^\alpha(X)\, \partial_\alpha$$

où les $a^k_\alpha(X)$ et les $c^\alpha(X)$ sont des constantes complexes. Soit $c(X)$ le vecteur de $\mathbf{C}^m$ de coordonnées $c^\alpha(X)$; la formule

$$[\partial', X] = i a^k_\alpha(X)\, w^\alpha\, \partial_k - i c^\alpha(X)\, \partial_\alpha \tag{1}$$

montre que $c(X) = 0$ implique $X = 0$ (principe de Cartan) et donc, puisque $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} = 2m$ que $c(X)$ est arbitraire dans $\mathbf{C}^m$. Les coefficients $a^k_\alpha(X)$ sont des fonctions $\mathbf{R}$-linéaires de $c(X)$, et la formule (1) montre qu'ils sont multipliés par $-i$ quand $c(X)$ est multiplié par i. Il existe donc des nombres complexes $f^k_{\alpha\beta}$ tels que

$$a^k_\alpha(X) = f^k_{\alpha\beta}\, \overline{c^\beta(X)}$$

quel que soit $X \in \mathfrak{g}_{-1/2}$. Soit $F : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ l'application définie par

$$F(w, c) = 1/2i\, f^k_{\alpha\beta}\, w^\alpha\, \overline{c^\beta}\, \partial_k,$$

on a bien

$$X = 2iF(w, c(X)) + c(X).$$

avec $c(X)$ arbitraire dans $\mathbf{C}^m$.

Notation. — Pour c dans $\mathbf{C}^m$, on note X_c le champ

$$2iF(w, c) + c \in \mathfrak{g}_{-1/2}.$$

LEMME 5.2. — *Quels que soient c et d dans* $\mathbf{C}^m$, $F(c, d) - F(d, c)$ *est imaginaire pur; en particulier,* $F(c, c)$ *est réel.*

En effet, $[X_c, X_d] = 2i(F(c, d) - F(d, c))$ est un élément de $\mathfrak{g}_{-1}$, donc une translation réelle. En prenant $d = ic$, il vient que

$$F(c, ic) - F(ic, c) = -2iF(c, c)$$

est imaginaire pur; donc $F(c, c)$ est réel.

Démonstration de la proposition 5.1. — Soit $D_1 = D \cap (\mathbf{C}^n \times \{o\})$. D'après la proposition 1.1,

$$D_1 = \{(z, o) \mid \operatorname{Im} z \in \Omega\},$$

où Ω est un cône ouvert convexe saillant convenable de $\mathbf{R}^n$; en outre, si $(z, w) \in D$, $(z, o) \in D$. D'autre part, un calcul facile montre que quels que soient $(z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ et $c \in \mathbf{C}^m$,

$$\exp X_c . (z, w) = (z + 2i\,F(w, c) + i\,F(c, c),\ w + c).$$

Cela dit, pour que (z, w) soit dans D, il faut et il suffit que $\exp X_{-w}.(z, w)$ y soit. Or

$$\exp X_{-w} . (z, w) = (z - i\,F(w, w),\ o)$$

et, compte tenu du lemme 5.2, ce point est dans D si et seulement si $\operatorname{Im} z - F(w, w) \in \Omega$. Ainsi

$$D = \{(z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - F(w, w) \in \Omega\}. \tag{2}$$

Introduisons l'application $\tilde{F} : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ définie par

$$\tilde{F}(w, w') = 1/2\left(F(w, w') + \overline{F(w', w)}\right);$$

elle est $\mathbf{C}$-linéaire sur la première variable, antilinéaire sur la deuxième, et, à cause du lemme 5.2,

$$\tilde{F}(w, w) = F(w, w) \in \mathbf{R}^n$$

pour tout $w \in \mathbf{C}^m$. L'égalité (2) donne aussi bien

$$D = \{(z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - \tilde{F}(w, w) \in \Omega\},$$

par suite $\mathfrak{g}(D)$ (et en fait $\mathfrak{g}_{-1/2}$) contient les champs

$$X'_c = 2i\,\tilde{F}(w, c) + c$$

quel que soit $c \in \mathbf{C}^m$: le lemme 5.1 implique que $\tilde{F} = F$, i. e.

$$F(w, w') = \overline{F(w', w)}$$

quels que soient w et w' dans $\mathbf{C}^m$.

Maintenant, soit $(z, o) \in D$, et $c \in \mathbf{C}^m$. Quel que soit $t \in \mathbf{R}$, le point

$$\exp tX_c . (z, o) = (z + it^2\,F(c, c),\ c)$$

est dans D, donc (propos. 1.1), le point

$$(z + it^2\,F(c, c),\ o)$$

est dans D_1 quel que soit t. Ceci exige que $\operatorname{Im} z + t^2 F(c, c)$ reste dans Ω pour tout $t \in \mathbf{R}$, donc que $F(c, c) \in \overline{\Omega}$.

Finalement, supposons qu'il existe $w \neq 0$ dans $\mathbf{C}^m$ avec $F(w, w) = 0$. Alors, si $(z, 0) \in D$, D contient tous les points $(z, \lambda w)$, où λ décrit $\mathbf{C}$, ce qui est incompatible avec le fait que D est isomorphe à un domaine borné. Ainsi, $F(w, w) = 0$ exige $w = 0$.

Nous avons établi que

$$D = \{ (z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - F(w, w) \in \Omega \},$$

où

1° le cône $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est ouvert, convexe et saillant;

2° l'application $F : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ a les propriétés suivantes :

(*a*) elle est linéaire sur la première variable, antilinéaire sur la seconde;

(*b*) quels que soient w et w' dans $\mathbf{C}^m$, $F(w, w) \in \overline{\Omega}$ et

$$F(w, w') = \overline{F(w', w)};$$

(*c*) $F(w, w) = 0$ exige que $w = 0$.

Ainsi D est bien un domaine de Siegel.

C. Q. F. D.

6. Unimodularité.

Proposition 6.1. — *Soit* D *un domaine borné dans* $\mathbf{C}^N$. *Si* D *est divisible, le groupe* G(D) *de ses automorphismes holomorphes est unimodulaire.*

1° Tout d'abord, il est classique que le groupe de Lie G(D) opère proprement sur D (*cf.* [1], théor. 2, qui exprime précisément cette propriété si l'on tient compte du théorème de Montel et de l'existence d'une distance invariante sur D).

2° Soit Γ un sous-groupe de G(D), divisant D : alors Γ est discret dans G(D). En effet, muni de la topologie discrète, Γ doit opérer proprement dans D : il s'ensuit que les orbites de Γ sont discrètes. Soit (γ_n) une suite d'éléments de Γ convergeant vers 1 dans G(D). Soit a un point de D, V un voisinage de a géodésiquement convexe pour la métrique de Bergman, et $a_1, \ldots, a_{2n}$ des points de V tels que les vecteurs tangents en a aux géodésiques joignant a aux a_j forment une base de l'espace tangent en a. A partir d'un certain rang, les suites $\gamma_n a$, $\gamma_n a_j$ sont stationnaires, et les γ_n stabilisent a en opérant trivialement sur l'espace tangent : il s'ensuit qu'ils sont égaux à 1.

3° Le quotient $\Gamma\backslash G(D)$ est compact. En effet, soit K un compact inclus dans D tel que $\Gamma K = D$, et p un point de D : l'ensemble

$$A = \{ f \in G(D) \mid f(p) \in K \}$$

est compact puisque G(D) opère proprement sur D; et trivialement, $G(D) = \Gamma A$.

4° Ainsi le sous-groupe Γ divise G(D) : il en résulte par une argumentation classique (*cf.* [8]) que G(D) est unimodulaire.

Proposition 6.2. — *Soit* D *un domaine de Siegel. Si le groupe* G(D) *est unimodulaire, il est transitif sur* D.

Soient Ω un cône ouvert convexe saillant dans $\mathbf{R}^n$, F une application Ω-hermitienne de $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m$ dans $\mathbf{C}^n$ (c'est-à-dire ayant les propriétés énumérées dans l'exemple 2°) de l'introduction), et

$$D = \{ (z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - F(w, w) \in \Omega \}$$

un domaine de Siegel, qui sera de première ou deuxième espèce selon que m est nul ou non.

L'algèbre $\mathfrak{g}(D)$ est graduée :

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-1/2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_1,$$

où $\mathfrak{g}_\lambda$ est l'espace propre de ad ∂ pour la valeur λ (*cf.* § 3); $\mathfrak{g}_{-1}$, de dimension n, est constitué par les translations réelles sur z; $\mathfrak{g}_{-1/2}$, de dimension $2m$, par les champs

$$X(z, w) = 2iF(w, c) + c,$$

où c est arbitraire dans $\mathbf{C}^m$; et $\mathfrak{g}_0$, qui contient ∂ et ∂', est formé par les champs de $\mathfrak{g}(D)$ de la forme

$$a_l^k z^l \partial_k + b_\beta^\alpha w^\beta \partial_\alpha,$$

où les b_β^α sont des constantes complexes, et les a_l^k des constantes *réelles*; ce qui fait que le sous-groupe analytique G_0 obtenu par intégration de $\mathfrak{g}_0$ conserve la sous-variété $i\Omega \times \{0\}$ de D.

(Tous ces résultats sont établis dans [6], théor. 5.)

Lemme 6.1. — *Si* $\mathfrak{g}(D)$ *est unimodulaire,* $\dim \mathfrak{g}_{1/2} = 2m$ *et* $\dim \mathfrak{g}_1 = n$.

En effet, l'adjointe ad ∂, qui doit être de trace nulle, est égale à λ sur $\mathfrak{g}_\lambda$, et d'après ([6], théor. 4, (4))

$$\dim \mathfrak{g}_{1/2} \leqq 2m, \qquad \dim \mathfrak{g}_1 \leqq n.$$

(Noter qu'il en résulte que $\mathfrak{r}_{-1} \oplus \mathfrak{r}_{-1/2} = (0)$ ([6], théor. 4) par conséquent, $\mathfrak{r}_0$ commute avec $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_{-1/2}$ et ceci entraîne $\mathfrak{r}_0 = (0)$ comme au théorème 5, (1); ainsi $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$ est semi-simple.)

LEMME 6.2. — *Si* $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_1$, X *ne s'annule en aucun point de* D.

En effet, si $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_1$, $\mathrm{ad}\,\mathrm{X}$ est nilpotent. Mais si X s'annule en un point de D, $\mathrm{ad}\,\mathrm{X}$ est semi-simple, les algèbres d'isotropie étant compactes. Par suite, $\mathrm{ad}\,\mathrm{X} = 0$, donc $[\partial, \mathrm{X}] = 0$, et $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_0$, d'où $\mathrm{X} = 0$. (Le même raisonnement s'applique à tout champ X appartenant à un $\mathfrak{g}_\lambda$, $\lambda \neq 0$.)

LEMME 6.3. — *Soit* $a \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, *et* A *la translation de* $\mathbf{C}^n$ *définie par* $\mathrm{A}(0, 0) = (a, 0)$. *Si* $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_1$, *et si* $[\mathrm{A}, \mathrm{X}](ia, 0) = 0$, $\mathrm{X} = 0$.

Puisque $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_1$, il est de la forme

$$\mathrm{X}(z, w) = p^h_{kl} z^k z^l \partial_h + q^\alpha_{k\beta} z^k w^\beta \partial_\alpha,$$

les p^h_{kl}, $q^\alpha_{k\beta}$ étant des constantes ([6], form. (4.1)). On a

$$[\mathrm{A}, \mathrm{X}](z, w) = \mathrm{D}_{\mathrm{A}}\mathrm{X}(z, w) = 2p^h_{kl} a^k z^l \partial_h + q^\alpha_{k\beta} a^k w^\beta \partial_\alpha,$$

donc

$$[\mathrm{A}, \mathrm{X}](ia, 0) = 2ip^h_{kl} a^k a^l \partial_h = -2i\mathrm{X}(ia, 0),$$

par conséquent, si $[\mathrm{A}, \mathrm{X}]$ s'annule en $(ia, 0) \in \mathrm{D}$, X aussi : donc $\mathrm{X} = 0$ par le lemme 6.2.

LEMME 6.4. — *Mêmes notations qu'au lemme* 6.4. *L'application* $(\mathrm{ad}\,\mathrm{A})^2 : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_{-1}$ *est injective.*

Soit $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_1$. Un calcul immédiat (*cf.* [6], form. (5.1) et remarques qui suivent) montre que le champ

$$\mathrm{X} + 1/2\,(\mathrm{ad}\,\mathrm{A})^2\mathrm{X}$$

s'annule en $(ia, 0) \in \mathrm{D}$. Si donc $(\mathrm{ad}\,\mathrm{A})^2\mathrm{X} = 0$, X s'annule en $(ia, 0)$, et $\mathrm{X} = 0$ toujours par le lemme 6.2.

Démonstration de la proposition 6.2. — Comme au lemme 6.3, soient $a \in \Omega$, et A la translation définie par $\mathrm{A}(0, 0) = (a, 0)$. Il résulte des lemmes 6.1 et 6.4 que $[\mathrm{A}, \mathfrak{g}_1]$, qui est un sous-espace de $\mathfrak{g}_0$, est de dimension n. En outre, d'après le lemme 6.3, les champs de $[\mathrm{A}, \mathfrak{g}_1]$ ne s'annulent pas en $(ia, 0) \in \mathrm{D}$: puisque $\mathfrak{g}_0$ conserve $i\Omega \times \{0\}$, leurs valeurs en ce point vont fournir tous les vecteurs tangents en $(ia, 0)$ à $i\mathbf{R}^n \times \{0\}$. Comme les vecteurs tangents en ce point à $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ sont fournis par les translations réelles sur z, et ceux tangents à $\{0\}\times\mathbf{C}^m$ par $\mathfrak{g}_{-1/2}$, on voit que $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$ est transitive au voisinage de $(ia, 0)$, point quelconque de $i\Omega$. Mais tout point de D peut être ramené sur $i\Omega$ par une translation réelle combinée à une transformation

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + 2i\mathrm{F}(w, c) + i\mathrm{F}(c, c), \\ w &\mapsto w + c \end{aligned}$$

($c\in\mathbf{C}^m$; c'est ce qu'on obtient en intégrant les champs de $\mathfrak{g}_{-1/2}$). Il en résulte que $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$, et donc $\mathrm{G}(\mathrm{D})$, sont transitifs sur D.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Un domaine de Siegel divisible est homogène.*

Il suffit de conjoindre les propositions 6.1 et 6.2.

7. Exposant nul. — Dans tout ce paragraphe, D désigne un S-domaine d'exposant nul dans $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^m$. Rappelons qu'il est convenu que $\mathfrak{Z}_{\mu\nu}=\mathfrak{W}_{\mu\nu}=(0)$ si l'un des entiers μ ou ν est négatif.

Lemme 7.1. — *Soient :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}'_\mu &= \mathfrak{g}(\mathrm{D})\cap(\mathfrak{Z}_{\mu+1,1}\oplus\mathfrak{W}_{\mu,2}\oplus\mathfrak{W}_{\mu,0}), \\ \mathfrak{g}''_\mu &= \mathfrak{g}(\mathrm{D})\cap(\mathfrak{Z}_{\mu+1,0}\oplus\mathfrak{W}_{\mu,1}), \\ \mathfrak{g}_\mu &= \mathfrak{g}'_\mu\oplus\mathfrak{g}''_\mu \end{aligned}$$

pour tout entier $\mu\geqq-1$. *Alors :*

(*a*) $\mathfrak{g}(\mathrm{D})=\bigoplus_{\mu\geqq-1}\mathfrak{g}_\mu$;

(*b*) $\mathrm{ad}\,\partial\,|\,\mathfrak{g}_\mu=\mu$;

(*c*) $[\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{g}_{\mu'}]\subset\mathfrak{g}_{\mu+\mu'}$ *quels que soient* μ *et* $\mu'\geqq-1$.

Soit X un champ de $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$; d'après [6],

$$\mathrm{X}=\sum_{\mu\geqq0}\ \sum_{0\leqq\nu\leqq2}(\mathrm{Z}_{\mu\nu}+\mathrm{W}_{\mu\nu}),$$

où $\mathrm{Z}_{\mu\nu}\in\mathfrak{Z}_{\mu\nu}$, $\mathrm{W}_{\mu\nu}\in\mathfrak{W}_{\mu\nu}$. Quel que soit le polynôme P à coefficients réels, $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$ contient le champ

$$\mathrm{P}(\mathrm{ad}\,\partial)\,\mathrm{X}=\sum_{\mu\geqq0}\ \sum_{0\leqq\nu\leqq2}\mathrm{P}(\mu-1)\,\mathrm{Z}_{\mu\nu}+\mathrm{P}(\mu)\,\mathrm{W}_{\mu\nu},$$

ce qui montre, par un choix convenable de P, que $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$ contient les champs

$$\mathrm{X}_\mu=\sum_{0\leqq\nu\leqq2}(\mathrm{Z}_{\mu+1,\nu}+\mathrm{W}_{\mu,\nu})$$

quel que soit l'entier $\mu \geq -1$. Maintenant, P désignant toujours un polynôme à coefficients *réels*, $\mathfrak{g}(D)$ contient les champs

$$\begin{aligned} P(\mathrm{ad}\,\partial')X_\mu = P(2i)Z_{\mu+1,2} + P(i)Z_{\mu+1,1} + P(0)Z_{\mu+1,0} \\ + P(i)W_{\mu,2} + P(0)W_{\mu,1} + P(-i)W_{\mu,0}, \end{aligned}$$

d'où il ressort, par un choix convenable de P, que :

1° $\mathfrak{g}(D)$ contient $Z_{\mu+1,2}$; mais ce champ est multiplié par $2i$ par $\mathrm{ad}\,\partial'$ il est donc nul d'après le principe de Cartan;

2° $Z_{\mu+1,1} + W_{\mu,2} + W_{\mu,0} \in \mathfrak{g}(D)$;

3° $Z_{\mu+1,0} + W_{\mu,1} \in \mathfrak{g}(D)$.

Lemme 7.2. — $\mathfrak{g}_{-1}$ *se réduit aux translations réelles sur la variable z; et*

$$\mathfrak{g}'_\mu = \mathfrak{g}(D) \cap (\mathfrak{W}_{\mu,2} \oplus \mathfrak{W}_{\mu,0}).$$

(*a*) D'abord, si $X \in \mathfrak{g}''_{-1}$, $X \in \mathfrak{Z}_{00}$: c'est une translation sur z, et elle est forcément réelle d'après le principe de Cartan.

(*b*) Ensuite, soit $X \in \mathfrak{g}'_{-1}$: $X \in \mathfrak{Z}_{01}$. Mais $[\partial', X] = iX$, donc $X = 0$: ceci prouve la première assertion.

(*c*) Pour la deuxième assertion, on procède par récurrence sur μ; on vient de la vérifier pour $\mu = -1$. Supposons-la vraie pour l'entier μ, et soit $X \in \mathfrak{g}'_{\mu+1}$: X se décompose

$$X = Z_{\mu+2,1} + W_{\mu+1,2} + W_{\mu+1,0},$$

où $Z_{\alpha\beta} \in \mathfrak{Z}_{\alpha\beta}$, etc. Quel que soit l'entier k compris entre 1 et n,

$$[\partial_k, X] = [\partial_k, Z_{\mu+2,1}] + [\partial_k, W_{\mu+1,2}] + [\partial_k, W_{\mu+1,0}]$$

appartient à $\mathfrak{g}'_\mu$. Il s'ensuit que $[\partial_k, Z_{\mu+2,1}] = 0$ quel que soit k, et comme $\mu + 2 \geq 1$, $Z_{\mu+2,1} = 0$, i. e.

$$X \in \mathfrak{W}_{\mu+1,2} + \mathfrak{W}_{\mu+1,0}.$$

Le lemme 7.2 est susceptible de l'interprétation géométrique suivante : soit π la projection canonique de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ sur $\mathbf{C}^n$, et pour $\zeta \in \pi(D)$, soit

$$D(\zeta) = \{(\zeta, w) \in D\};$$

les sous-variétés $D(\zeta)$ forment une fibration régulière de D.

Lemme 7.3. — *Les champs de* $\mathfrak{g}(D)$ *sont* π*-projetables.*

Il suffit de voir que leurs composantes sur $\mathbf{C}^n$ sont indépendantes de w, ce qui ressort des lemmes 7.1 et 7.2.

LEMME 7.4. — *Pour* $\mu \geqq 2$, $\mathfrak{g}_\mu = (0)$.

1° Si $\mu \geqq 2$, $\mathfrak{g}_\mu$ est inclus dans $\mathfrak{r}$, le radical de $\mathfrak{g}(D)$. En effet, soit λ un autre entier, $\lambda \geqq -1$, et $X \in \mathfrak{g}_\mu$, $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$. L'opérateur $\operatorname{ad} X . \operatorname{ad} Y$ est de degré au moins 1 sur l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g}(D)$; il est donc nilpotent, et on voit que X est dans le radical de la forme de Killing de $\mathfrak{g}(D)$: ainsi $\mathfrak{g}_\mu \subset \mathfrak{r}$.

2° Montrons que $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_1'' = (0)$. En effet, soit $X \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_1''$:

$$X = Z_{20} + W_{11},$$

où $Z_{20} \in \mathfrak{Z}_{20}$, $W_{11} \in \mathfrak{W}_{11}$. Soit $a \in \mathbf{R}^n$ tel que $(ia, 0) \in D$, et $A \in \mathfrak{g}_{-1}$ la translation définie par $A(0, 0) = (a, 0)$. Soit $X' = 1/2 (\operatorname{ad} A)^2 X$:

$$X' = 1/2 (\operatorname{ad} A)^2 Z_{20}$$

et comme Z_{20} est quadratique en z,

$$X'(z, w) = Z_{20}(a, w) = -Z_{20}(ia, w);$$

en particulier,

$$X(ia, 0) = Z_{20}(ia, 0) = -X'(ia, 0),$$

i. e. le champ $X + X'$ s'annule en $(ia, 0) \in D$. Comme les algèbres d'isotropie sont compactes, $\operatorname{ad}(X + X')$ est semi-simple. D'un autre côté, nous avons supposé que X est dans $\mathfrak{r}$: X' s'y trouve aussi; et comme les opérateurs $\operatorname{ad} X$ et $\operatorname{ad} X'$, de degré $+1$ et -1 respectivement, sont nilpotents, le théorème de Lie montre que $\operatorname{ad}(X + X')$ est nilpotent. Il est donc nul. Il s'ensuit que

$$0 = [\partial, X + X'] = X - X',$$

i. e. $X \in \mathfrak{g}_{-1}$: X est donc nul.

C. Q. F. D.

3° Il est clair maintenant que $\mathfrak{g}_2'' = (0)$. Car si $X \in \mathfrak{g}_2'' \subset \mathfrak{r}$, les champs $[\partial_k, X]$, qui sont dans $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_1''$, sont nuls; et comme $X \in \mathfrak{Z}_{30} \oplus \mathfrak{W}_{21}$, $X = 0$.

4° Soit $X \in \mathfrak{g}_2'$: $X = W_{22} + W_{20}$, avec $W_{22} \in \mathfrak{W}_{22}$, $W_{20} \in \mathfrak{W}_{20}$. Soit $a \in \mathbf{R}^n$ tel que $(ia, 0) \in D$, et

$$X' = 1/2 (\operatorname{ad} A)^2 X$$

$(X' \in \mathfrak{g}_0')$. Comme X est quadratique en z,

$$X'(z, w) = X(a, w) = -X(ia, w),$$

donc le champ $X+X'$ s'annule sur la fibre $D(ia)$. Considérons le jet d'ordre 1 en $(ia, 0)$ de $X+X'$: ce jet est semi-simple, les algèbres d'isotropie étant compactes; il s'annule évidemment sur l'espace tangent $T_{(ia,0)}D(ia)$, et aussi sur $T_{(ia,0)}D/T_{(ia,0)}D(ia)$, parce que X et X′ ont une composante nulle sur $\mathbf{C}^n$ (ils conservent la fibration par π). Nilpotent et semi-simple, ce jet est nul; et comme les éléments d'isotropie sont déterminés par leur jet d'ordre 1, $X+X'=0$, i. e. $X\in\mathfrak{g}_0$, donc $X=0$. Ainsi $\mathfrak{g}'_2=(0)$, et $\mathfrak{g}_2=(0)$.

5° Soit $X\in\mathfrak{g}_3$: les crochets $[\partial_k, X]$ sont dans $\mathfrak{g}_2$, et par conséquent nuls; comme X n'a pas de composante indépendante de z, il est nul. Une récurrence triviale montre ainsi que $\mathfrak{g}_\mu=(0)$ pour $\mu\geqq 2$.

Récapitulons :

Proposition 7.1. — *Soit* D *un* S-*domaine d'exposant nul dans* $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^m$; *soit*

$$\mathfrak{g}'_\mu=\mathfrak{g}(D)\cap(\mathfrak{W}_{\mu,2}\oplus\mathfrak{W}_{\mu,0}),$$
$$\mathfrak{g}''_\mu=\mathfrak{g}(D)\cap(\mathfrak{Z}_{\mu+1,0}\oplus\mathfrak{W}_{\mu,1}),$$
$$\mathfrak{g}_\mu=\mathfrak{g}'_\mu\oplus\mathfrak{g}''_\mu$$

pour μ *entier* $\geqq -1$. *Alors*

$$\mathfrak{g}(D)=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1;\qquad \operatorname{ad}\partial\,|\,\mathfrak{g}_\mu=\mu;\quad [\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{g}_{\mu'}]\subset\mathfrak{g}_{\mu+\mu'}$$

et les champs de $\mathfrak{g}(D)$ *sont* π-*projetables.*

Avant d'aller plus loin, nous énoncerons un petit lemme d'algèbre linéaire.

Lemme 7.5. — *Soient* K *un corps commutatif*, a *et* b *deux éléments distincts de* K, h *un entier, et* A *une quelconque matrice de dimension* $h\times h$, *à coefficients dans* K. *La matrice* $\tilde{A}$, *de dimension* $h\times 2h$

$$\tilde{A}=(A+aI\,|\,A+bI)$$

(I, *matrice unité* $h\times h$) *est toujours de rang* h.

Soit T l'endomorphisme linéaire de K^h dont la matrice dans la base canonique est la transposée ${}^tA$ de A; et soit $\tilde{T}$ l'application linéaire de K^h dans $K^h\oplus K^h$ définie par

$$\tilde{T}.x=(T+a)x\oplus(T+b)x,$$

$\tilde{T}$ est manifestement injective, et sa matrice est la transposée ${}^t\tilde{A}$ de $\tilde{A}$.

8. Démonstration du théorème 3. — On garde les notations du paragraphe 7, et on suppose de plus D balayable (donc holomorphiquement convexe). Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}(\mathrm{D})$ engendrée par $\mathfrak{g}'_0$ et ∂' : elle commute avec les translations (réelles ou non) sur $\mathbf{C}^n$, et elle opère naturellement par restriction sur les fibres $\mathrm{D}(\zeta)$ $(\zeta \in \pi(\mathrm{D}))$. L'idée de la démonstration est que $\mathfrak{h}$ est transitive sur les fibres $\mathrm{D}(\zeta)$.

Lemme 8.1. — *Les champs de $\mathfrak{h}$ sont indépendants de z, de degré en w inférieur ou égal à 2, et $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}'_0 \oplus \mathfrak{l}$, où*

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{W}_{01}, \qquad \mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{W}_{02} \oplus \mathfrak{W}_{00}).$$

Les assertions sur les degrés sont évidentes. Si $\mathrm{X} \in \mathfrak{h}$,

$$\mathrm{X} = \mathrm{W}_{02} + \mathrm{W}_{01} + \mathrm{W}_{00},$$
$$[\partial', \mathrm{X}] = i\mathrm{W}_{02} - i\mathrm{W}_{00} \in \mathfrak{h},$$

donc $\mathrm{W}_{02} + \mathrm{W}_{00} \in \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{W}_{02} + \mathfrak{W}_{00}) = \mathfrak{g}'_0$, et $\mathrm{W}_{01} \in \mathfrak{l}$.

Lemme 8.2. — *L'application $c : \mathfrak{h} \to \mathbf{C}^m$ qui à $\mathrm{X} \in \mathfrak{h}$ associe $\mathrm{X}(0, 0)$ a pour noyau $\mathfrak{l}$; elle est injective sur $\mathfrak{g}'_0$, et l'image $\mathfrak{h}(0, 0)$ est un $\mathbf{C}$-sous-espace de $\mathbf{C}^m$: $\mathfrak{h}(0, 0) = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(0, 0)$.*

En effet, si $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}'_0$, $\mathrm{X} = \mathrm{W}_{02} + \mathrm{W}_{00}$, et $\mathrm{X}(0, 0) = \mathrm{W}_{00}$. On a

$$[\partial', \mathrm{X}] = i\mathrm{W}_{02} - i\mathrm{W}_{00},$$

formule qui montre que :

(1) si $\mathrm{X}(0, 0) = 0$, $\mathrm{X} = 0$ (principe de Cartan);
(2) $i\,\mathrm{X}(0, 0) = -[\partial', \mathrm{X}]\,(0, 0)$, i. e. $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(0, 0) = \mathfrak{h}(0, 0)$.

Lemme 8.3. — *La dimension de $\mathfrak{g}'_0$ est paire, inférieure ou égale à $2m$, et $\mathfrak{g}'_0$ a une base $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_h$, $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_h$, où $\mathrm{Y}_j = [\partial', \mathrm{X}_j]$; les vecteurs $\mathrm{X}_j(0, 0)$ forment une base sur $\mathbf{C}$ de $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(0, 0) = \mathfrak{h}(0, 0)$.*

Tout ceci résulte aisément du lemme 8.2.

Soit $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D} \cap (\mathbf{C}^n \times \{0\})$. Puisque D est holomorphiquement convexe, il résulte de la proposition 1.1 que D_1 est un domaine de Siegel de première espèce, que $\pi(\mathrm{D}) = \mathrm{D}_1$, et que les fibres $\mathrm{D}(\zeta)$, pour $\zeta \in \mathrm{D}_1$, sont des domaines cerclés dans $\{\zeta\} \times \mathbf{C}^m$, étoilés par rapport à $(\zeta, 0)$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ opère sur les fibres $\mathrm{D}(\zeta)$ par restriction; si $\mathrm{X} \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{X}(\zeta, 0) = \mathrm{X}(0, 0)$ et donc

$$\mathfrak{h}(\zeta, 0) = \mathfrak{h}(0, 0) = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(0, 0) = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(\zeta, 0).$$

LEMME 8.4. — *Soit ζ un point de* D_1; $\mathfrak{g}(D)^{\mathbf{C}}(\zeta, 0)$ *admet comme* $\mathbf{C}$-*base* $\partial_1, \ldots, \partial_n, X_1(\zeta, 0), \ldots, X_h(\zeta, 0)$.

Il faut voir que si $X \in \mathfrak{g}(D)$, $X(\zeta, 0)$ est combinaison linéaire complexe des $n+h$ vecteurs en question. On procède cas par cas.

1° Si $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ ou si $X \in \mathfrak{g}'_0$, c'est trivial.

2° Si $X \in \mathfrak{g}''_0$, $X = Z_{10} + W_{01}$, donc $X(\zeta, 0) = Z_{10}(\zeta, 0) \in \mathbf{C}^n$.

3° Si $X \in \mathfrak{g}''_1$, $X = Z_{20} + W_{11}$, donc $X(\zeta, 0) = Z_{20}(\zeta, 0) \in \mathbf{C}^n$.

4° Si $X \in \mathfrak{g}'_1$, $X \in \mathfrak{W}_{12} + \mathfrak{W}_{10}$ est linéaire en z; donc

$$X = \sum_k z^k [\partial_k, X]$$

et $[\partial_k, X] \in \mathfrak{g}'_0$, donc $X(\zeta, 0) = \sum_k \zeta^k([\partial_k, X](\zeta, 0)) \in \mathfrak{g}'^{\mathbf{C}}_0(\zeta, 0) = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(\zeta, 0)$.

C. Q. F. D.

LEMME 8.5. — *L'algèbre* $\mathfrak{h}$ *opère transitivement sur les fibres* $D(\zeta)$, *pour* $\zeta \in D_1$; *de plus, ces dernières sont bornées dans* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$.

Puisque D est balayable, la dimension sur $\mathbf{C}$ de $\mathfrak{g}(D)^{\mathbf{C}}(z, w)$ est constante quand (z, w) varie dans D (propos. 2.3); en vertu du lemme 8.4, elle est égale à $h+n$. Soit $\zeta \in D_1$, et V un voisinage de $(\zeta, 0)$ sur lequel les champs $X_1, \ldots, X_h, \partial_1, \ldots, \partial_n$ restent $\mathbf{C}$-indépendants, et donc forment toujours une $\mathbf{C}$-base de $\mathfrak{g}(D)^{\mathbf{C}}(z, w)$.

1° Ceci amène d'abord, pour tout $(z, w) \in V$, l'existence de nombres complexes λ_j^k (dépendant de z et w) tels que

$$(1)_j \qquad Y_j(z, w) = \sum_k \lambda_j^k X_k(z, w)$$

(les champs X_j, Y_j n'ont pas de composante sur $\mathbf{C}^n$). Posons

$$X_j(z, w) = F_j(w) + c_j,$$

où $c_j = X_j(0, 0) \in \mathbf{C}^m$, et où F_j est une application quadratique de $\mathbf{C}^m$ dans lui-même;

$$Y_j(z, w) = i F_j(w) - i c_j$$

et la relation $(1)_j$ s'écrit

$$\sum_k (\lambda_j^k - i\delta_j^k) F_k(w) + (\lambda_j^k + i\delta_j^k) c_k = 0.$$

Soit Λ la matrice $h\times h$ des λ_j^k; la matrice $(\Lambda - i\mathrm{I}; \Lambda + i\mathrm{I})$ est de rang h (lemme 7.5), donc les h relations $(1)_j$ $(1 \leq j \leq h)$ sont indépendantes, et sur les $2h$ vecteurs $\mathrm{F}_k(w)$, c_k, h s'expriment linéairement en fonction des h autres. Le sous-espace engendré est de dimension inférieure ou égale à h, et comme les $c_j = \mathrm{X}_j(0, 0)$ forment h vecteurs indépendants dans $\mathbf{C}^m$ (lemme 8.3), on voit qu'on peut exprimer les $\mathrm{F}_k(w)$ en fonction des c_j. Ceci prouve que si (z, w) est dans le voisinage V de $(\zeta, 0)$, les $\mathrm{F}_k(w)$ $(1 \leq k \leq h)$ sont dans $\mathfrak{h}(0, 0) = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(0, 0)$ (lemme 8.2); par conséquent, les F_k, qui sont quadratiques, prennent leurs valeurs dans $\mathfrak{h}(0, 0)$, et il apparaît que $\mathrm{X}_j(z, w) \in \mathfrak{h}(0, 0)$ quel que soit $(z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$.

2° Maintenant, toujours pour la même raison, il doit exister, pour tout $(z, w) \in \mathrm{V}$, des nombres complexes μ^j tels que

$$\partial'(z, w) = \sum_{j=1}^{h} \mu^j \mathrm{X}_j(z, w).$$

Par suite, si $(z, w) \in \mathrm{V}$, $iw = \partial'(z, w)$ est dans $\mathfrak{h}(0, 0)$. Ceci exige que $\mathfrak{h}(0, 0) = \mathbf{C}^m$.

3° Ainsi $\mathfrak{h}(\zeta, 0) = \mathbf{C}^m$ et $\mathfrak{h}$ est transitive en $(\zeta, 0)$ sur $\mathrm{D}(\zeta)$. Soient H le sous-groupe analytique de G(D) correspondant à $\mathfrak{h}$, et $\mathrm{D}'(\zeta)$ l'orbite de $(\zeta, 0)$ par H : c'est un ouvert de $\mathrm{D}(\zeta)$ (qui est connexe puisque étoilé). Soit d la distance de Bergman sur $\mathrm{D}(\zeta)$ et $r > 0$ tel que $\mathrm{D}'(\zeta)$ contienne la boule $\mathrm{B}_{\mathrm{D}(\zeta)}((\zeta, 0), r)$ de centre $(\zeta, 0)$ et de rayon r. Alors quel que soit $p \in \mathrm{D}'(\zeta)$, la boule $\mathrm{B}_{\mathrm{D}(\zeta)}(p, r)$ de centre p et de rayon r est incluse dans $\mathrm{D}'(\zeta)$. Il en résulte trivialement que $\mathrm{D}'(\zeta)$ est fermé dans $\mathrm{D}(\zeta)$, i. e. $\mathrm{D}'(\zeta) = \mathrm{D}(\zeta)$: $\mathfrak{h}$ est transitive sur $\mathrm{D}(\zeta)$.

4° Reste à voir que $\mathrm{D}(\zeta)$ est borné dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$. Soit $\| \ \|$ une norme quelconque sur $\mathbf{C}^m$. Quel que soit $u \in \mathbf{C}^m$, de norme 1, l'intersection de $\mathrm{D}(\zeta)$ avec la $\mathbf{C}$-droite $\{\zeta\} \times \mathbf{C}u$ est un disque (parce que $\mathrm{D}(\zeta)$ est cerclé) de rayon $\mathrm{R}(u)$ fini (parce que D ne saurait contenir de $\mathbf{C}$-droite entière). D'un autre côté le bord de $\mathrm{D}(\zeta)$ dans $\{\zeta\} \times \mathbf{C}^m$ est inclus dans la variété algébrique réelle

$$\mathrm{V} = \{ p \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{h}(p) < 2m \},$$

ce qui fait que la fonction $u \mapsto \mathrm{R}(u)$ est continue, et donc bornée.

Démonstration du théorème 3. — Comme l'algèbre $\mathfrak{h}$, et par conséquent le sous-groupe analytique H obtenu par intégration, commutent avec les translations réelles ou non sur z, on voit que les fibres $\mathrm{D}(\zeta)$ se déduisent les unes des autres par translation quand ζ varie dans D_1. Ainsi

$D = D_1 \times D_2$, où $D_2 \subset \{0\} \times \mathbf{C}^m$ est l'orbite de $(0, 0)$ par H; étant translaté des fibres, D_2 a toutes les propriétés annoncées.

Le théorème 3 a une annexe :

PROPOSITION 8.1. — *Sous les hypothèses du théorème* 3,

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}(D_1) \oplus \mathfrak{g}(D_2).$$

Commençons par pointer un lemme :

LEMME 8.6. — *Dans la situation du théorème* 3, *si un champ* $X \in \mathfrak{g}(D)$ *prend ses valeurs dans* $\mathbf{C}^m$, *il est indépendant de* z.

Soit, en effet, X un tel champ : il opère naturellement sur les fibres $D(z)$, $z \in D_1$. Soit $\zeta \in D_1$: la restriction de X à $D(\zeta)$ est un automorphisme holomorphe de $D(\zeta)$. Soit X_ζ le champ

$$X_\zeta(z, w) = X(\zeta, w),$$

il est indépendant de z et coïncide avec X sur $D(\zeta)$. Compte tenu du théorème 3, $X_\zeta \in \mathfrak{g}(D)$. Le champ $X - X_\zeta \in \mathfrak{g}(D)$ est nul sur $D(\zeta)$; considérons son jet d'ordre 1 en $(\zeta, 0)$:

(1) ce jet est semi-simple, car les algèbres d'isotropie sont compactes;

(2) il est nul sur l'espace tangent à $D(\zeta)$, soit $T_{(\zeta, 0)} D(\zeta)$;

(3) il est nul sur le quotient

$$T_{(\zeta, 0)} D / T_{(\zeta, 0)} D(\zeta)$$

parce que X et X_ζ ont une projection nulle sur $\mathbf{C}^n$. Il en résulte que ce jet est nul, et donc (*cf.* lemme 7.3, 4°) $X - X_\zeta = 0$, i. e. X est indépendant de z.

C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition 8.1. — Puisque $D = D_1 \times D_2$, $\mathfrak{g}(D_1)$ et $\mathfrak{g}(D_2)$ se plongent naturellement dans $\mathfrak{g}(D)$. Il est clair que $\mathfrak{g}_{-1} \subset \mathfrak{g}(D_1)$, et que $\mathfrak{g}'_0 \subset \mathfrak{g}(D_2)$.

1° Soit $X \in \mathfrak{g}''_0$: il est de la forme

$$X = Z_{10} + W_{01},$$

avec $Z_{10} \in \mathfrak{Z}_{10}$, etc. Sur D_1, X et Z_{10} coïncident, et prennent leurs valeurs dans $\mathbf{C}^n$. Il en résulte que $Z_{10} \in \mathfrak{g}(D)$, donc que $W_{01} \in \mathfrak{g}(D)$; et manifestement $W_{01} \in \mathfrak{g}(D_2)$. Ainsi $X \in \mathfrak{g}(D_1) \oplus \mathfrak{g}(D_2)$.

2° Soit $X \in \mathfrak{g}''_1$: il est de la forme

$$X = Z_{20} + W_{11},$$

avec $Z_{20} \in \mathfrak{Z}_{20}$, etc. Le même argument que ci-dessus montre que $Z_{20} \in \mathfrak{g}(D_1)$, et $W_{11} \in \mathfrak{g}(D)$. Le lemme 8.6 exige que W_{11} soit indépendant de z : il est donc nul, et $X \in \mathfrak{g}(D_1)$.

3° Enfin, soit $X \in \mathfrak{g}'_1$: il est de la forme

$$X = W_{12} + W_{10},$$

donc nul d'après le lemme 8.6.

[Tenant compte de ce que D_2 est symétrique, on pourrait d'ailleurs montrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(D_2)$.]

9. Démonstration du théorème 1. — Soit D un S-domaine d'exposant c dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, divisible.

1° Si l'exposant c est non nul, D est un domaine de Siegel (théor. 2), donc (propos. 6.1 et 6.2, et corollaire) il est homogène.

2° Si l'exposant c est nul, D se factorise en $D_1 \times D_2$ (théor. 3), où D_1 est un domaine de Siegel de première espèce dans $\mathbf{C}^n$, et D_2 un domaine borné cerclé, contenant l'origine, homogène, dans $\mathbf{C}^m$; en outre,

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}(D_1) \oplus \mathfrak{g}(D_2)$$

(propos. 8.1). Puisque D est divisible, $\mathfrak{g}(D)$ est unimodulaire (propos. 6.1), donc $\mathfrak{g}(D_1)$ est unimodulaire et D_1 homogène (propos. 6.2); ainsi $D = D_1 \times D_2$ est homogène.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. Cartan, *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes; l'itération des transformations intérieures d'un domaine borné* (*Math. Zeitschrift*, t. 35, 1932, p. 760-773).

[2] H. Cartan, *Sur les groupes de transformations analytiques*, Hermann, Paris, 1935.

[3] L. Gårding, *Note on Continuous representations of Lie groups* (*Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 33, 1947, p. 331-332).

[4] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in several Variables*, Van Nostrand, 1966.

[5] W. Kaup, *Transformationsgruppen und invariante Metriken* (*Inv. Math.*, t. 3, 1967, p. 43-70).

[6] W. Kaup, Y. Matsushima et T. Ochiai, *On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel Domains* (*American J. of Maths.*, 92, 1970, p. 475-498).

[7] S. Kobayashi, *Geometry of bounded Domains* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 92, 1959, p. 267-290).

[8] J.-L. Koszul, *Sous-groupes discrets des groupes de transformations affines admettant une trajectoire convexe* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 259, 1964, p. 3675-3677).

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1970.)

Jacques Vey,
Institut de Mathématiques pures,
B. P. n° 116,
38-Saint-Martin-d'Hères.