

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ALAIN CHENCINER
FRANÇOIS LAUDENBACH

**Contribution à une théorie de Smale à un paramètre dans
le cas non simplement connexe**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 3, n° 4 (1970), p. 409-478

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_4_409_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION A UNE THÉORIE DE SMALE A UN PARAMÈTRE DANS LE CAS NON SIMPLEMENT CONNEXE

PAR ALAIN CHENCINER
ET FRANÇOIS LAUDENBACH.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
0. INTRODUCTION	409
0.1. Définition des espaces $\mathcal{F}(W)$, $\mathcal{E}(W)$, $\mathfrak{H}^0(W)$, $\mathfrak{H}(W)$, $\mathcal{F}_i^0(W)$, $\mathcal{F}_i(W)$; rappels des résultats connus.....	409
0.3. Strate de croisement, strate de naissance.....	411
0.4. Graphique d'un chemin de fonctions.....	412
1. Problème de l'unicité des éliminations : définition d'une obstruction.....	415
1.1. Position du problème et notations.....	415
1.2. Le morphisme χ	416
1.3. Lemme de dualité.....	421
1.4. Obstruction à l'unicité des éliminations.....	424
2. Problème de l'unicité des éliminations (<i>suite</i>) : Lemme fondamental.....	430
3. Problème de l'unicité des éliminations (<i>fin</i>) : lemme de translation des indices...	436
4. Connexité de \mathcal{F}_i	449
5. Le lemme du bec.....	453
6. Lemme de la queue d'aronde dans le cas non simplement connexe.....	456
APPENDICE A. — Propriétés homotopiques de certaines variétés.....	468
APPENDICE B. — Singularités de codimension 1 et chemins élémentaires d'élimi- nation	474

0. Introduction.

0.1. DÉFINITION DES ESPACES $\mathcal{F}(W)$, $\mathcal{E}(W)$, $\mathfrak{H}^0(W)$, $\mathfrak{H}(W)$, $\mathcal{F}_i^0(W)$, $\mathcal{F}_i(W)$; RAPPEL DES RÉSULTATS CONNUS. — Soit (W, V_0, V_1) un cobordisme orienté C^∞ compact dont le bord est la réunion des variétés fermées V_0 et V_1 . On considère l'espace $\mathcal{F}(W)$ des fonctions C^∞ définies sur W , à

valeurs dans $[0, 1]$, telles que $f^{-1}(i) = V_i$ ($i = 0, 1$); on le munit de la topologie C^∞ ; $\mathcal{F}(W)$ est un convexe dans l'espace de toutes les fonctions réelles sur W ; les fonctions de Morse excellentes (fonctions dont les points critiques sont quadratiques non dégénérés et les valeurs critiques toutes distinctes) y forment un ouvert partout dense $\mathcal{F}^0(W)$ [14; section 2]; cet ouvert constitue la réunion des strates ⁽¹⁾ de codimension 0 pour une certaine stratification de $\mathcal{F}(W)$ [1; chap. I]. Notons $\mathcal{E}(W) \subset \mathcal{F}^0(W)$ le sous-espace formé des fonctions sans point critique; $\mathcal{E}(W)$ est une réunion de strates de codimension zéro (éventuellement vide).

Si W est un h -cobordisme (i. e. : les injections de V_0 et de V_1 dans W sont des équivalences d'homotopie), si V_0 est simplement connexe et $\dim V_0 \geq 5$, S. Smale démontre que $\mathcal{E}(W)$ n'est pas vide [18], [3], [14]. Cela revient à dire que W est difféomorphe au produit $V_0 \times [0, 1]$. Dans les mêmes conditions, J. Cerf démontre que $\mathcal{E}(W)$ est connexe par arcs [1, chap. VII, § 4, théor. 3]. On peut dire que la théorie de Cerf est une généralisation à un paramètre de la théorie de Smale, puisque le résultat de Cerf signifie qu'un h -cobordisme simplement connexe n'admet essentiellement qu'une trivialisat.

Si maintenant V_0 n'est pas simplement connexe, à tout h -cobordisme W « d'origine » V_0 est associée une torsion $\tau(W) \in \text{Wh}(\pi_1(V_0))$, où $\text{Wh}(\pi_1(V_0))$ désigne le groupe de Whitehead du groupe fondamental de V_0 [15]. Barden, Mazur et Stallings ont démontré que la torsion classe à difféomorphisme près les h -cobordismes d'origine V_0 , lorsque $\dim V_0 \geq 5$ [10]. En revanche, il n'y a que peu de résultats dans la théorie à un paramètre du cas non simplement connexe. Signalons cependant que L. Siebenmann a donné des exemples de cobordismes triviaux $W = V_0 \times [0, 1]$ tels que l'espace $\mathcal{E}(W)$ des fonctions sans point critique ne soit pas connexe [17] : il considère des variétés V_0 de la forme $F \times S^1$, où $\text{Wh}(\pi_1(F))$ est un groupe non trivial.

Les démonstrations de Smale et de Cerf font intervenir les sous-espaces suivants de $\mathcal{F}(W)$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}_i(W) \subset \mathfrak{N}(W) \subset \mathcal{F}(W) \\ \cup \qquad \cup \qquad \cup \\ \mathcal{E}(W) \subset \mathcal{F}_i^0(W) \subset \mathfrak{N}^0(W) \subset \mathcal{F}^0(W) \end{array}$$

$\mathfrak{N}^0(W)$ est le sous-espace formé des fonctions de Morse excellentes et ordonnées (ou « nice »), c'est-à-dire telles que les valeurs critiques croissent avec les indices; $\mathcal{F}_i^0(W)$ est le sous-espace de $\mathfrak{N}^0(W)$ formé des fonctions

⁽¹⁾ Étant donnée une stratification d'un espace topologique $X = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_i \cup \dots$, où X_i est de codimension i , nous appellerons strate de codimension i une composante connexe de X_i . Dans la stratification de $\mathcal{F}(W)$, les strates sont aussi les composantes connexes par arcs [1].

dont tous les points critiques sont d'indice i ou $i + 1$; $\mathfrak{U}^0(W)$ et $\mathfrak{F}_i^0(W)$ sont réunion de strates de codimension 0. On définit enfin $\mathfrak{U}(W)$ comme l'intérieur de l'adhérence de $\mathfrak{U}^0(W)$ et aussi $\mathfrak{F}_i(W) = \text{int}(\overline{\mathfrak{F}_i^0(W)})$. Les premières étapes de la théorie de Smale (resp. de Cerf) sont les suivantes : on démontre tout d'abord que, pour tout cobordisme W , $\mathfrak{U}(W)$ n'est pas vide (resp. est connexe par arcs); on démontre ensuite que si W est un h -cobordisme de dimension $n + 1$, $n \geq 5$, et que si W est simplement connexe, $\mathfrak{F}_i(W)$ n'est pas vide (resp. est connexe par arcs) pour $2 \leq i \leq n - 2$. La théorie d'obstruction de Barden-Mazur-Stallings est basée sur le fait que, même si W n'est pas simplement connexe, $\mathfrak{F}_i(W)$ n'est pas vide, pourvu que $n \geq 5$ et $2 \leq i \leq n - 2$.

0.2. Le but de cet article est de démontrer que la situation est la même dans la théorie à un paramètre; plus précisément, *si W est un h -cobordisme de dimension $n + 1$, $n \geq 7$, $\mathfrak{F}_i(W)$ est connexe par arcs pour $3 \leq i \leq n - 3$* . Comme dans la théorie à zéro paramètre, le passage du cas simplement connexe au cas général présente une difficulté que nous allons essayer d'expliquer, après avoir rappelé quelques définitions.

0.3. STRATE DE CROISEMENT, STRATE DE NAISSANCE. — Étant données deux fonctions de Morse f_0 et f_1 sur W , il existe toujours un chemin les joignant dans l'espace convexe $\mathfrak{F}(W)$. Parmi ces chemins, il y a un ensemble dense de chemins génériques; ce sont ceux qui sont inclus dans la réunion des strates de codimension 0 et des strates de codimension 1 [2]. Rappelons que les strates de codimension 1 sont de deux types. Le premier type correspond aux fonctions ayant des points critiques quadratiques non dégénérés et exactement deux valeurs critiques égales; une telle strate s'appelle *strate de croisement*. Le second type correspond aux fonctions ayant tous leurs points critiques quadratiques non dégénérés sauf un, c , au voisinage duquel la fonction est de la forme

$$f(x) = f(c) - x_1^2 - \dots - x_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2 + y_{n+1}^2,$$

pour un choix convenable des coordonnées; en outre, on demande que toutes les valeurs critiques soient distinctes; une telle strate s'appelle *strate de naissance*; elle sépare une strate de fonctions de Morse excellentes à q points critiques d'une strate de fonctions de Morse excellentes à $q + 2$ points critiques; lorsqu'on passe de la première à la seconde en traversant la strate de naissance, il apparaît une paire de points critiques d'indices respectifs i et $i + 1$; parcouru dans le sens opposé, ce chemin s'appelle un *chemin d'élimination*.

0.4. GRAPHIQUE D'UN CHEMIN DE FONCTIONS. — A tout chemin $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$ de l'espace fonctionnel $\mathcal{F}(W)$, on peut associer son *graphique* [2]; c'est le sous-ensemble de $[0, 1] \times [0, 1]$ dont l'intersection avec $\{t\} \times [0, 1]$ est formée des valeurs critiques de la fonction f_t . Pour un chemin générique le graphique est de dimension 1 (la réciproque est fautive) et ses seules singularités sont des points doubles, lorsqu'on traverse une strate de croisement, et des points de rebroussement, lorsqu'on traverse une strate de naissance. Enfin, sur chaque branche du graphique d'un chemin générique on peut reporter l'indice du point critique correspondant.

Exemple :

Le chemin dont le graphique est donné sur la figure 1 a cinq accidents : une naissance en t_1 , trois croisements en t_2, t_3 et t_4 , et une élimination en t_5 .

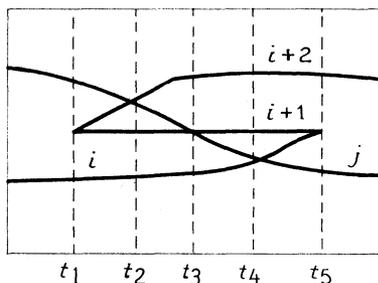
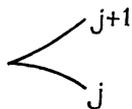


Fig. 1.

0.5. Pour démontrer la connexité d'un sous-ensemble de l'espace fonctionnel $\mathcal{F}(W)$, que ce soit $\mathfrak{N}(W)$, $\mathcal{F}_i(W)$ ou $\mathcal{E}(W)$, on part d'un chemin générique joignant deux fonctions de ce sous-ensemble et on cherche à déformer ce chemin jusqu'à ce qu'il ne traverse plus que des strates de codimension 1 incluses dans l'intérieur du sous-ensemble en question. On veut donc éliminer certaines singularités dans le graphique du chemin donné. Par exemple, pour démontrer la connexité de $\mathfrak{N}(W)$, il faut éliminer les croisements où $i \neq j$.



Pour démontrer la connexité de $\mathcal{F}_i(W)$, il faut, à partir d'un chemin générique dans $\mathfrak{N}(W)$, éliminer les naissances où $j \neq i$. Dans cet ordre



d'idées, un des lemmes fondamentaux est celui dit de l'unicité des éliminations (encore appelé lemme d'unicité des morts).

0.5.1. LEMME (Cerf [1, chap. III, § 2, prop. 4], Douady, Siebenmann, Wagoner). — Soit $W = V_0^n \times [0, 1]$, où V_0 est une variété compacte sans bord simplement connexe de dimension n , $n \geq 5$. Soient f_0, f_1 deux fonctions sans point critique, et $\gamma = \{f_t\}_{t \in [0, 1]}$ un chemin générique dans $\mathcal{F}(W)$, joignant f_0 à f_1 , dont les seuls accidents [i. e. les valeurs de t pour lesquelles $f_t \notin \mathcal{F}_i^0(W)$] sont une naissance d'un couple de points critiques suivie de l'élimination de ce couple. Alors γ peut être déformé, relativement à ses extrémités, en un chemin dans l'espace des fonctions sans point critique; de plus la déformation peut se faire en restant dans les strates que rencontre γ .

Si V_0 n'est pas simplement connexe, il y a en général une obstruction à déformer γ comme nous l'avons dit dans l'énoncé de ce lemme. Lorsque $n \geq 7$, nous expliciterons cette obstruction (§1). Évidemment ce n'est pas une obstruction à trouver un chemin de fonctions sans point critique joignant f_0 à f_1 . Ce problème reste ouvert; mais une étude détaillée de l'obstruction nous permettra de voir que γ , de graphique

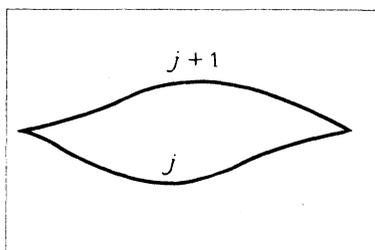


Fig. 2.

est homotope à un chemin γ' de graphique

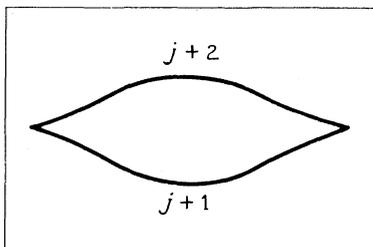


Fig. 3

pourvu que $0 \leq j \leq n-4$ et $n \geq 7$ (§3). Ce sera l'outil essentiel pour démontrer au paragraphe 4 la connexité de $\mathcal{F}_i(W)$ ($3 \leq i \leq n-3$, $n \geq 7$).

Comme nous l'avons dit plus haut, on partira d'un chemin dans $\mathfrak{N}(W)$, qui est connexe, et on cherchera à diminuer la complexité de son graphique. Mais il est clair qu'une homotopie générique ne pourra pas en général se faire dans la réunion des strates de codimension 0 et de codimension 1; on introduira donc les strates de codimension 2 définies par Cerf [1; chap. I, § 3] :

(1) Strates formées de fonctions de Morse ayant exactement trois valeurs critiques égales;

(2) Strates formées de fonctions ayant la singularité « naissance à un niveau critique »;

(3) Strates formées de fonctions ayant, en plus de leurs points critiques quadratiques non dégénérés, un point critique c du type « queue d'aronde » au voisinage duquel f s'écrit, dans des coordonnées locales convenables,

$$f(x) = f(c) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^4.$$

Il y a d'autres strates de codimension 2; ce sont celles constituées de fonctions ayant exactement deux singularités de codimension 1 *indépendantes* [1; chap. I, § 3-1]; la traversée de ces strates ne pose aucun problème d'après le lemme des singularités indépendantes [1; chap. IV, § 1].

Le plan de l'article est le suivant :

Les paragraphes 1, 2, 3 concernent la démonstration d'un lemme (théor. 3.1) remplaçant, dans le cas non simplement connexe, le lemme d'unicité des éliminations dont on vient de parler. Le paragraphe 4 rappelle la technique (due à Cerf) qui permet de ramener l'étude de la connexité de $\mathcal{F}_i(W)$ à l'étude de la stratification de $\mathcal{F}(W)$ au voisinage des strates de codimension 2 (types 1, 2, 3, ci-dessus). Les résultats de Cerf concernant les strates du type 1 (lemme du triangle [1; chap. V, § 2, prop. 2]) ne font pas intervenir la simple connexité de W . Dans le paragraphe 5, nous montrons que le « lemme du bec » de Cerf, concernant les strates du type 2, est encore valable sans condition de simple connexité. Enfin, dans le paragraphe 6, nous démontrons un lemme concernant les strates du type 3, qui, bien que plus faible que le « lemme de la queue d'aronde » de Cerf, est suffisant si l'on n'a en vue que la connexité de $\mathcal{F}_i(W)$. C'est la démonstration de ce lemme qui utilise de façon essentielle les résultats des paragraphes 1, 2, 3.

**1. Problème de l'unicité des éliminations :
définition d'une obstruction.**

1.1. POSITION DU PROBLÈME ET NOTATIONS. — Dans ce paragraphe, σ désignera une strate de l'ouvert $\mathfrak{U}^0(W)$ des fonctions ordonnées excellentes, définies sur un cobordisme compact orienté W de dimension $n + 1$; σ^1 désignera la réunion des strates de naissance adhérentes à σ , la traversée de σ^1 en rentrant dans σ correspondant à l'apparition d'une paire de points critiques d'indices $i, i + 1$. Dans ce qui suit on suppose que σ^1 n'est pas vide. Le problème de l'unicité des éliminations proprement dit serait le calcul du nombre de composantes connexes de σ^1 . Dans le cas simplement connexe Cerf montre que, pour $n \geq 5$, $\pi_1(\sigma, \sigma^1) = 0$ (lemme 0.5.1), ce qui implique $\pi_0(\sigma^1) = 0$. Dans le cas non simplement connexe, nous allons voir que $\pi_1(\sigma, \sigma^1)$ n'est jamais trivial si $0 < i < n$ ⁽²⁾, $n \geq 7$, ce qui, évidemment, ne donne aucun renseignement sur $\pi_0(\sigma^1)$; mais le calcul de $\pi_1(\sigma, \sigma^1)$, objet de ce paragraphe, sera suffisant pour le but que nous poursuivons.

Soit h une fonction appartenant à σ . Soit M une variété intermédiaire, c'est-à-dire une variété de niveau séparant les points critiques d'indice i et ceux d'indice $i + 1$. Soient c le point critique d'indice $i + 1$ le plus bas et c' le point critique d'indice i le plus haut; on a $h(c') < h(M) < h(c)$. La paire (c, c') est celle qui est éliminée lorsqu'on traverse σ^1 . Pour calculer $\pi_1(\sigma, \sigma^1)$, Cerf introduit la notion de *chemin élémentaire d'élimination*, issu de h et relatif à la paire (c, c') ; rappelons qu'un tel chemin est associé à la donnée d'une nappe descendante ⁽³⁾ de c et d'une nappe montante de c' , dont les bords dans M se coupent transversalement et en un seul point [3]; deux telles nappes forment ce que l'on appelle un couple de nappes en bonne position. On démontre que $\pi_1(\sigma, \sigma^1)$ est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de l'espace des chemins élémentaires d'élimination et, par là-même, que $\pi_1(\sigma, \sigma^1)$ est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de l'espace des couples de nappes en bonne position (cf. appendice B). Puisque σ^1 n'est pas vide, il existe au moins un chemin élémentaire d'élimination traversant σ^1 . Pour une métrique riemannienne convenable \mathfrak{M} , les deux nappes associées à ce

⁽²⁾ Si $i = 0$ ou n , il est immédiat de vérifier, à l'aide du résultat de Cerf sur les chemins élémentaires d'élimination, que $\pi_1(\sigma, \sigma^1)$ est réduit à un élément.

⁽³⁾ Une nappe descendante de c est un disque D^{i+1} , plongé dans W et contenant c , dont le bord est à un niveau constant de la fonction h , et tel que $h|D^{i+1}$ admette pour seul point critique un maximum en c .

chemin sont des nappes de gradient [3]; appelons S_0 le bord dans M de la nappe descendante de c et T_0 le bord dans M de la nappe montante de c' . On se fixe deux plongements $\varphi_0 : S^i \rightarrow M$ et $\theta_0 : S^{n-i} \rightarrow M$, d'images respectives S_0 et T_0 (S^k désigne la sphère de dimension k). En utilisant la métrique riemannienne \mathfrak{M} , il est facile de construire une *bijection naturelle entre l'ensemble des composantes connexes de l'espace des couples de nappes en bonne position et*

$$\pi_1[\text{Plgt}(S^i, M), \text{Plgt}(S^i, M; S^i \pitchfork T_0 = \mathbf{1}), \varphi_0],$$

où $\text{Plgt}(S^i, M)$ désigne l'espace, muni de la topologie C^∞ , des plongements de S^i dans M , et où $\text{Plgt}(S^i, M; S^i \pitchfork T_0 = \mathbf{1})$ désigne le sous-espace des plongements φ , tels que $\varphi(S^i)$ coupe T_0 transversalement et en un seul point [1; chap. III]. Finalement le calcul de $\pi_1(\sigma, \sigma')$ se ramène à celui de

$$\pi_1[\text{Plgt}(S^i, M), \text{Plgt}(S^i, M; S^i \pitchfork T_0 = \mathbf{1}), \varphi_0].$$

Dans la suite on désignera cet ensemble par la notation abrégée $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0)$. Introduisons aussi l'ensemble $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M))$ des classes d'homotopie de chemins dans $\text{Plgt}(S^i, M)$, ayant leurs extrémités dans $\text{Plgt}(S^i, M; S^i \pitchfork T_0 = \mathbf{1})$, mais dont l'origine n'est plus fixée en φ_0 .

1.2. DÉFINITION, POUR $3 \leq i \leq n - 3$, D'UNE APPLICATION

$$\chi : \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M)) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{\lfloor \pi_1(M) - 1 \rfloor} \quad (*).$$

N. B. — Dans tout ce qui suit, le point base de M sera le point $S_0 \cap T_0$; il sera sous-entendu dans la notation $\pi_*(M)$.

1.2.1. Considérons l'espace Λ des isotopies $F : S^i \times [0, 1] \rightarrow M$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- (1) $F(S^i \times \{t\})$ rencontre T_0 transversalement et en un seul point si $t = 0, 1$;
- (2) F est transversale sur T_0 ;
- (3) F est une isotopie constante au voisinage des extrémités.

Pour $3 \leq i \leq n - 3$, nous allons construire une application

$$\bar{\chi} : \Lambda \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{\lfloor \pi_1(M) - 1 \rfloor}.$$

(*) Étant donné un groupe G et un ensemble E , $G^{[E]}$ désigne le groupe des applications $f : E \rightarrow G$, telles que $f(x)$ est l'élément neutre de G , sauf pour un nombre fini d'éléments x de E . Ici E est le groupe fondamental $\pi_1(M)$ privé de son élément neutre $\mathbf{1}$.

Remarquons, d'une part que, d'après la condition (3), Λ est un monoïde et d'autre part, que $(\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(\mathbf{M}))^{[\pi_1(\mathbf{M})-1]}$ est un groupe abélien. L'application $\bar{\chi}$ sera un morphisme de monoïdes.

Soit une isotopie $F: S^i \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{M}$, $F \in \Lambda$. Alors $F^{-1}(T_0)$ est constitué de courbes fermées l_k , $k \in \{1, 2, \dots, q\}$, et d'une courbe l_0 dont les extrémités sont respectivement dans $S^i \times \{0\}$ et dans $S^i \times \{1\}$ (fig. 4).

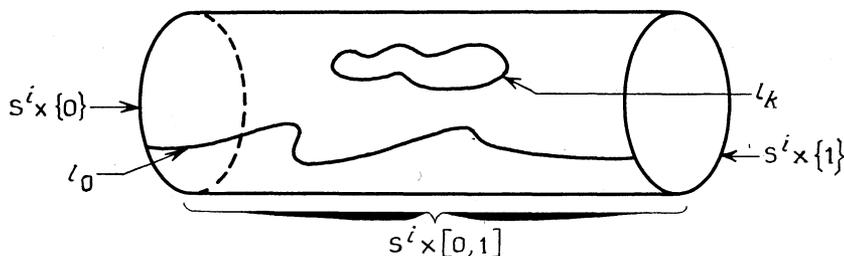


Fig. 4.

Si on fixe une orientation de S^i , T_0 et \mathbf{M} , ces courbes sont canoniquement orientées ⁽⁵⁾.

Étant donnée une courbe fermée l_k , il lui correspond un élément bien défini $g(l_k)$ dans $\pi_1(\mathbf{M})$, de la façon suivante : dans nos hypothèses de dimension, S^i et T_0 sont simplement connexes; l'unique classe d'homotopie de chemins joignant l_0 à l_k dans $S^i \times [0, 1]$ a pour image par F dans \mathbf{M} une classe de chemins relatifs de \mathbf{M} modulo T_0 , c'est-à-dire un élément $g(l_k) \in [([0, 1], \{0, 1\}), (\mathbf{M}, T_0)] \cong \pi_1(\mathbf{M})$.

Choisissons un paramétrage $S^1 \rightarrow l_k$, conservant l'orientation; puisque $i \geq 3$, il se prolonge de façon unique à homotopie près en une application $\bar{l}_k: D^2 \rightarrow S^i \times [0, 1]$. Notons que, même si $i = 3$, parmi les prolongements possibles, il existe toujours un plongement. La classe $F\bar{l}_k$ est bien définie dans $[(D^2, S^1), (\mathbf{M}, T_0)]$, lequel est canoniquement isomorphe à $\pi_2(\mathbf{M})$, puisque T_0 est 2-connexe. On notera $\omega(l_k) \in \pi_2(\mathbf{M})$ l'élément ainsi construit.

⁽⁵⁾ Soit (X^{i+1}, Y^{n-i}) une paire ordonnée de deux sous-variétés orientées d'une variété orientée Z^n , se coupant transversalement suivant une courbe l . Alors l est canoniquement orientée de la façon suivante : soit $x \in l$; un vecteur $\vec{u} \in \tau_x l$ est positif si, étant donné un repère positif $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i$ de $\tau_x X$ et un repère positif $\vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_{n-1}$ de $\tau_x Y$, alors $\vec{u}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_{n-1}$ est un repère positif de $\tau_x Z$. Cette définition se généralise au cas où, au lieu d'un plongement de X dans Z , on a une application transversale sur Y .

Enfin, puisque F est transversale sur T_0 , il existe, pour chaque $k \in \{1, \dots, q\}$, un isomorphisme naturel des fibrés de base l_k , $\nu(l_k; S^i \times [0, 1])$ et $(F|_{l_k})^*(\nu(T_0; M))$ [pour une sous-variété X d'une variété Y , $\nu(X; Y)$ désigne le fibré normal à X dans Y]. Puisque M et T_0 ont été orientés et que T_0 est le bord d'une nappe, son fibré normal est

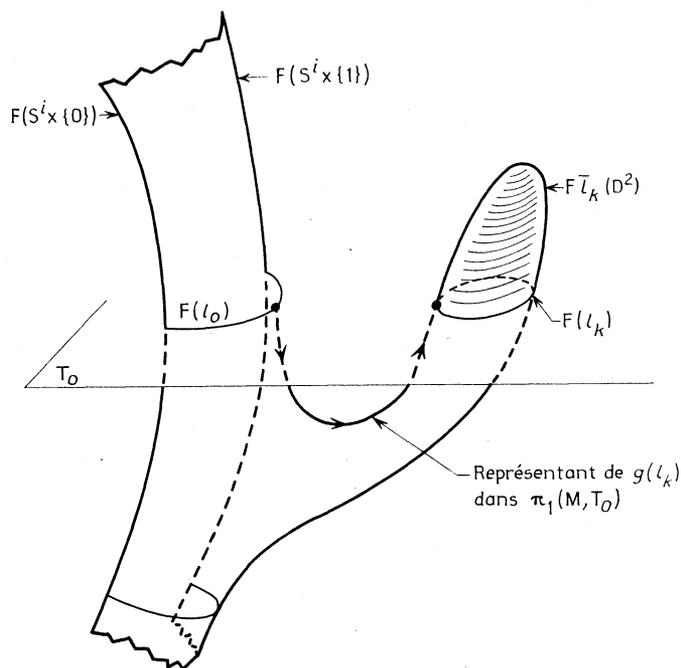


Fig. 5. — Figure dans le cas où $F : S^i \times [0, 1] \rightarrow M$ est un plongement.

canoniquement trivialisé. On en déduit une trivialisatation canonique de $\nu(l_k; S^i \times [0, 1])$. Par la construction classique de Thom-Pontrjagin [16], applicable à l_k inclus dans la boule ouverte $\text{int}(S^i \times [0, 1] - l_0)$, cette trivialisatation définit un élément, noté $a(l_k)$, du groupe stable $\Pi_1 \cong \mathbf{Z}_2$.

Ainsi à chaque courbe fermée l_k dans $F^{-1}(T_0)$, nous avons associé

$$g(l_k) \in \pi_1(M), \omega(l_k) \in \pi_2(M) \text{ et } a(l_k) \in \mathbf{Z}_2,$$

donc un élément $\dot{l}_k \in (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{\pi_1(M)}$ de la façon suivante : \dot{l}_k est l'application qui envoie tous les éléments de $\pi_1(M)$ sur l'élément neutre de $\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M)$, sauf l'élément $g(l_k)$ qui est envoyé sur $(a(l_k), \omega(l_k))$. Dans ce groupe, on considère maintenant l'élément $\dot{l}_1 + \dot{l}_2 + \dots + \dot{l}_k$ et $\chi(F)$

désigne son image par la projection naturelle

$$(\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)]} \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]}.$$

On vérifie trivialement que $\bar{\chi}$ est un morphisme de monoïdes.

Avant de démontrer la proposition qui assure l'existence de l'application χ , nous plaçons ici un lemme utile relatif à la construction de Thom-Pontrjagin.

1.2.2. LEMME. — Soit l une courbe simple dans \mathbf{R}^{i+1} , $i \geq 3$. Soit ξ un champ de i -repères normaux à l . Notons $\alpha \in \pi_{i+1}(S^i) \cong \Pi_1$ la classe d'homotopie de l'application $S^{i+1} \rightarrow S^i$ construite à partir de ξ par la construction de Thom-Pontrjagin. Soit enfin D un 2-disque plongé dans \mathbf{R}^{i+1} , bordé par l . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\alpha = 0$;

(2) ξ est homotope à un champ $\xi_1 = \xi'_1 \oplus \vec{u}$, où \vec{u} est le champ de vecteurs rentrant dans D et où ξ'_1 est un champ de $(i-1)$ -repères qui peut se prolonger en un champ normal à D .

Preuve. — Cet énoncé traduit exactement le fait que, pour $i \geq 3$, le J-homomorphisme $\pi_1(O(i)) \rightarrow \pi_{i+1}(S^i)$ est un monomorphisme.

Remarque. — Si $i = 3$ et si on a $\alpha = 0$ et $\xi = \xi' \oplus \vec{u}$, il se peut très bien que ξ' ne se prolonge pas à D ; dans ce cas, on ne peut éviter de changer ξ en ξ_1 .

1.2.3. PROPOSITION. — Soit le morphisme $\bar{\chi} : \Lambda \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]}$ défini en 1.2.1 pour $3 \leq i \leq n-3$. Alors il existe une unique application

$$\chi : \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M)) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]},$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\bar{\chi}} & (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]} \\ \downarrow & & \parallel \\ \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M)) & \xrightarrow{\chi} & (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]} \end{array}$$

où $\Lambda \rightarrow \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M))$ est la projection canonique qui, à toute isotopie $F \in \Lambda$, associe la classe d'homotopie du chemin relatif que définit F dans $(\text{Plgt}(S^i, M), \text{Plgt}(S^i, M; S^i \uparrow T_0 = 1))$.

Démonstration. — Soient $F, F' \in \Lambda$ deux isotopies ayant même classe dans $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M))$. Soit $H : S^i \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ une isotopie de F à F' ; H peut être choisie transversale sur T_0 . Il suffit donc de

démontrer que, si $H^{-1}(T_0)$ est un cobordisme élémentaire entre $F^{-1}(T_0)$ et $F'^{-1}(T_0)$, alors $\bar{\chi}(F) = \bar{\chi}(F')$. Il y a donc trois cas à regarder : on passe de $F^{-1}(T_0)$ à $F'^{-1}(T_0)$

(1) par somme connexe de l_k et de l_0 ;

(2) par somme connexe de l_k et de $l_{k'}$;

(3) par suppression de l_k ;

où l_k est une courbe fermée de $F^{-1}(T_0)$ et où l_0 est la composante de $F^{-1}(T_0)$ homéomorphe à $[0, 1]$. Pour définir $\bar{\chi}(F)$, on a associé à l_k des éléments $g(l_k) \in \pi_1(M)$, $\omega(l_k) \in \pi_2(M)$ et $a(l_k) \in \mathbf{Z}_2$.

Cas 1 : $g(l_k)$ est nécessairement l'élément neutre de $\pi_1(M)$; donc les éléments associés à l_k n'ont pas été pris en compte dans $\bar{\chi}(F)$; il est alors clair que $\bar{\chi}(F) = \bar{\chi}(F')$.

Cas 2 : Tout chemin joignant l_k et $l_{k'}$ dans $S^i \times [0, 1]$ est envoyé par F sur un chemin représentant l'élément trivial de $\pi_1(M, T_0)$; on a donc $g(l_k) = g(l_{k'}) = g(l_k \# l_{k'})$. De plus, un prolongement du plongement $l_k \# l_{k'} \rightarrow S^i \times [0, 1]$ en une application $\bar{l}_k \# \bar{l}_{k'} : D^2 \rightarrow S^i \times [0, 1]$ est, par exemple, obtenue en faisant la somme sur le bord de \bar{l}_k et de $\bar{l}_{k'}$, le long du chemin joignant l_k à $l_{k'}$, donné par la projection sur $S^i \times [0, 1] \times \{0\}$ de l'anse d'indice 1 du cobordisme élémentaire $H^{-1}(T_0)$; $F'(\bar{l}_k \# \bar{l}_{k'}) : (D^2, S^1) \rightarrow (M, T_0)$ est donc homotope à la somme connexe sur le bord des applications $F\bar{l}_k$ et $F\bar{l}_{k'}$, le long du chemin de T_0 , image par H de l'anse du cobordisme élémentaire. On a donc, dans $\pi_2(M, T_0) \cong \pi_2(M)$, l'égalité

$$\omega(l_k \# l_{k'}) = \omega(l_k) + \omega(l_{k'}).$$

Enfin, on sait que la construction de Thom-Pontrjagin sur la somme connexe de deux sous-variétés avec champs de repères transverses correspond à l'addition, dans le groupe d'homotopie stable, des éléments associés à chacune des sous-variétés, à condition que ces deux sous-variétés ne soient pas enlacées; c'est le cas ici, puisque deux cercles ne sont jamais enlacés dans une boule de dimension supérieure ou égale à quatre. On a donc

$$a(l_k \# l_{k'}) = a(l_k) + a(l_{k'})$$

dans $\pi_1 \cong \mathbf{Z}_2$.

Cas 3 : Ici l_k borde sans $S^i \times [0, 1]$ la projection sur $S^i \times [0, 1] \times \{0\}$ de l'anse d'indice 2 du cobordisme élémentaire $H^{-1}(T_0)$ et l'image par F de ce disque est homotope dans (M, T_0) à l'image de l'anse par H , laquelle est incluse dans T_0 . C'est dire que $\omega(l_k) = 0$. Par transversalité de H ,

la trivialisation canonique de $\nu(l_k; S^i \times [0, 1])$ se prolonge en une trivialisation du fibré normal à $H^{-1}(T_0)$ dans $S^i \times [0, 1] \times [0, 1]$. Donc $a(l_k) = 0$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si tous les points critiques de la fonction ordonnée h sont d'indices appartenant à l'intervalle $[3, n-2]$, $\pi_1(M)$ et $\pi_2(M)$ sont isomorphes à $\pi_1(W)$ et $\pi_2(W)$, à condition que M sépare effectivement un couple de points critiques d'indices $(i, i+1)$.

1.2.3. NOTATIONS. — Si l'on compose l'une des applications naturelles

$$\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M))$$

ou

$$\pi_1(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M))$$

avec l'application χ , nous obtenons des applications

$$\chi_0 : \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]}$$

et

$$\chi_* : \pi_1(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]}.$$

On peut voir facilement que χ_* est un morphisme de groupes; c'est une conséquence immédiate du fait que $\bar{\chi}$ est un morphisme de monoïdes.

1.3. LEMME DE DUALITÉ. — En échangeant les rôles des plongements φ_0 et θ_0 , définis au début du paragraphe 1, on construit de même une application

$$\chi'_0 : \pi_1^{\text{rel } S_0}(\text{Plgt}(S^{n-i}, M), \theta_0) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]}.$$

LEMME (Lemme de dualité) (Les notations sont celles de 1.1 et 1.2).
— Il existe une bijection naturelle

$$A : \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow \pi_1^{\text{rel } S_0}(\text{Plgt}(S^{n-i}, M), \theta_0)$$

et un automorphisme B de $(\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]}$, tels que le diagramme suivant, défini pour $3 \leq i \leq n-3$, soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) & \xrightarrow{\chi_0} & (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]} \\ A \downarrow & & B \downarrow \\ \pi_1^{\text{rel } S_0}(\text{Plgt}(S^{n-i}, M), \theta_0) & \xrightarrow{\chi'_0} & (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M)-1]} \end{array}$$

1.3.1. *Démonstration.* — Soit une isotopie $F : S^i \times [0, 1] \rightarrow M$ représentant un élément de $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0)$. Par extension des isotopies, on construit une isotopie $\Phi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\Phi(\varphi_0 \times \text{Id}) = F$. La classe d'isotopie $G : S^{n-i} \times [0, 1] \rightarrow M$, définie par $G(x, t) = \Phi_t^{-1}(\theta_0(x))$

($x \in S^{n-i}$, $t \in [0, 1]$, $\Phi_t(x) = \Phi(x, t)$) est par définition l'image par A de la classe de F. La définition est consistante comme conséquence du fait que l'application $\text{Diff}(M) \rightarrow \text{Plgt}(S^i, M)$ qui, à tout difféomorphisme f de M associe le plongement $f\varphi_0$, est une fibration; en particulier, elle a la propriété de relèvement des carrés. L'application A est bijective, car l'on peut avec la même méthode exhiber son inverse.

A partir de maintenant, on choisit $F \in \Lambda$, c'est-à-dire F transversale sur T_0 . On a défini, dans ces conditions, $\chi_0([F]) = \bar{\chi}(F)$ en associant à chaque courbe fermée $l_k \subset S^i \times [0, 1]$ de $F^{-1}(T_0)$ des éléments $a(l_k) \in \mathbf{Z}_2$, $\omega(l_k) \in \pi_2(M)$, $g(l_k) \in \pi_1(M)$. Notons $l'_k \subset S^{n-i} \times [0, 1]$ la courbe qui correspond à l_k dans la bijection naturelle de $F^{-1}(T_0)$ sur $G^{-1}(S_0)$. On calcule $\chi'_0(A([F])) = \chi'_0([G])$ en calculant les éléments $a'(l'_k)$, $\omega'(l'_k)$, $g'(l'_k)$ en fonction des éléments associés à l_k . Une façon de relier ces éléments entre eux est la suivante : on considère le plongement

$$\bar{F} : S^i \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1],$$

défini par $\bar{F}(x, t) = (F(x, t), t)$ pour $(x, t) \in S^i \times [0, 1]$. Notons $Z = M \times [0, 1]$, $X = \bar{F}(S^i \times [0, 1])$ et $Y = T_0 \times [0, 1]$; aussi, $L = \bar{F}(l_k)$ et $L_0 = \bar{F}(l_0)$. Comme en 1.2.1, on peut associer à la courbe d'intersection L des éléments

$$g(L) \in \pi_1(Z, Y) \cong \pi_1(Z), \quad \omega(L) \in \pi_2(Z, Y) \cong \pi_2(Z) \quad \text{et} \quad a(L) \in \mathbf{Z}_2,$$

et aussi des éléments

$$g'(L) \in \pi_1(Z, X) \cong \pi_1(Z), \quad \omega'(L) \in \pi_2(Z, X) \cong \pi_2(Z) \quad \text{et} \quad a'(L) \in \mathbf{Z}_2;$$

les premiers sont obtenus en regardant L comme courbe d'intersection de la paire ordonnée (X, Y) de sous-variétés de Z, les seconds sont obtenus en regardant L comme courbe d'intersection de la paire ordonnée (Y, X). On a clairement

$$\begin{aligned} g(L) &= g(l_k), & g'(L) &= g'(l'_k), \\ \omega(L) &= \omega(l_k), & \omega'(L) &= \omega'(l'_k), \\ a(L) &= a(l_k), & a'(L) &= a'(l'_k). \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer $g'(L)$, $\omega'(L)$ et $a'(L)$ en fonction de $g(L)$, $\omega(L)$ et $a(L)$. Il est clair que $g'(L) = -g(L)$. D'autre part, quand on change l'ordre de la paire (X, Y), on change l'orientation de L par le facteur $(-1)^{i(n-i)}$. On en déduit facilement que $\omega'(L) = (-1)^{i(n-i)+1} g(L) \cdot \omega(L)$, pour l'action naturelle de $\pi_1(Z)$ sur $\pi_2(Z)$.

Regardons de plus près le calcul de $a'(L)$ en fonction de $a(L)$.

1.3.2. Considérons pour cela la situation suivante : soit (X^{i+1}, Y^{n-i+1}) une paire ordonnée de sous-variétés orientées d'une variété orientée Z^{n+1} ,

se coupant transversalement; on suppose $\dim X$ et $\dim Y \geq 4$; soit L une courbe fermée, composante de $X \cap Y$. On suppose que L borde un disque D dans X et un disque D' dans Y ; c'est le cas pour le lemme de dualité, puisqu'alors L est inclus dans un ouvert euclidien de X (resp. de Y), de dimension plus grande que 4 (rappelons qu'une courbe n'est jamais nouée dans \mathbf{R}^q , $q \geq 4$). Les fibrés normaux $\nu(X; Z)|L$ et $\nu(Y; Z)|L$ sont donc des fibrés triviaux et orientés suivant la convention classique; alors les fibrés $\nu(L; X)$ et $\nu(L; Y)$ sont canoniquement trivialisés. La construction de Thom-Pontrjagin pour la paire (X, L) fournit un élément $\alpha \in \Pi_1 \cong \mathbf{Z}_2$; la même construction pour la paire (Y, L) fournit un élément $\beta \in \Pi_1$. La réunion des disques D et D' forme une sphère anguleuse Σ , « immergée » dans Z . Puisque $\dim Z \geq 5$, il existe un homomorphisme $\mu : \pi_2(Z) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ défini de la manière suivante : toute sphère singulière dans Z est homotope à une sphère immergée, unique à homotopie régulière près [19], et μ associe à une sphère immergée la classe de son fibré normal, élément de $\pi_1(O) \cong \mathbf{Z}_2$. On a le résultat suivant :

1.3.3. SOUS-LEMME. — *Dans la situation décrite en 1.3.2, on a, dans \mathbf{Z}_2 , l'égalité $\alpha + \beta = \mu([\Sigma])$.*

Preuve. — Choisissons une métrique riemannienne sur Z pour laquelle X et Y se coupent orthogonalement. Considérons le champ unitaire \vec{u} rentrant le long de L dans D , orthogonalement à L ; et aussi le champ \vec{v} rentrant dans D' .

Soit ξ (resp. η) un champ de i -repères sur Y [resp. de $(n - i)$ -repères sur X] réalisant la trivialisatation canonique du fibré normal $\nu(Y; Z)$ [resp. $\nu(X; Z)$] ⁽⁶⁾. Puisque X et Y sont de codimension supérieure à 3, on peut toujours supposer que $\xi|L$ contient le champ \vec{u} et que $\eta|L$ contient le champ \vec{v} comme première composante. Notons ξ' le champ de $(i - 1)$ -repères et η' le champ de $(n - i - 1)$ -repères formés des dernières composantes respectivement de ξ et de η . Si $\alpha = 0$, ξ sera choisi de telle sorte que $\xi'|L$, considéré comme champ de repères dans $\nu(L; X)$, se prolonge en un champ normal à D dans X (lemme 1.2.2). Si $\beta = 0$, on choisira η avec la même propriété. Notons $\nu'(Y; Z)$ le fibré engendré par ξ' et $\nu'(X; Z)$ le fibré engendré par η' . Considérons alors sur $\Sigma = D \cup D'$

(6) En fait, ces trivialisations canoniques ne sont définies qu'au-dessus de D et D' respectivement. Pour alléger les notations, nous supposons qu'elles sont définies partout.

les fibrés E_1 et E_2 définis comme suit :

$$\begin{aligned} E_1|D &= \nu(D, X), & E_1|D' &= \nu'(Y; Z)|D', \\ E_2|D &= \nu'(X; Z)|D, & E_2|D' &= \nu(D'; Y). \end{aligned}$$

Ces définitions sont évidemment consistantes. Soit $E = E_1 \oplus E_2$. Notons $\tilde{\Sigma}$ et \tilde{E} des arrondis de Σ et de E ; on a $\nu(\tilde{\Sigma}; Z) = \tilde{E} \oplus \varepsilon^1$, où ε^1 est le fibré trivial de dimension 1 sur $\tilde{\Sigma}$; les premières composantes des champs ξ et η coïncident après arrondissement de l'arête L et définissent ce fibré trivial de dimension 1 normal à $\tilde{\Sigma}$. Par définition, $\mu([\Sigma])$ est la classe de $\tilde{E} \oplus \varepsilon^1$, et donc aussi la classe de E . On a alors $\mu([\Sigma]) = [E_1] + [E_2]$. Mais, d'après le lemme 1.2.2, $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$) si et seulement si E_1 (resp. E_2) est un fibré trivial. On a donc, dans \mathbf{Z}_2 , $\mu([\Sigma]) = \alpha + \beta$.

C. Q. F. D.

1.3.4. *Fin de la démonstration du lemme 1.3.* — On a alors

$$a'(L) + a(L) = \mu(\omega(L)) = \mu(\omega'(L)).$$

On a donc également

$$a'(l'_k) + a(l_k) = \mu(\omega(l_k)).$$

Il est maintenant clair que le diagramme de l'énoncé est commutatif si on prend l'automorphisme B de $(\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{\lfloor \pi_1(M) - 1 \rfloor}$ défini comme suit : si $(a, \omega, g) \in (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{\lfloor \pi_1(M) - 1 \rfloor}$, on pose

$$B(a, \omega, g) = (a + \mu(\omega), (-1)^{\lfloor n - l \rfloor + 1} g \cdot \omega, -g)$$

et on prolonge linéairement.

C. Q. F. D.

1.4. OBSTRUCTION À L'UNICITÉ DES ÉLIMINATIONS. — Nous pouvons énoncer maintenant le théorème qui donne l'obstruction au problème de relier deux chemins élémentaires d'élimination; il donne le calcul de $\pi_1(\sigma, \sigma^1)$, puisque comme nous l'avons vu en 1.1,

$$\pi_1(\sigma, \sigma^1) = \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^l, M), \varphi_0).$$

THÉORÈME (Les notations sont celles de 1.1). — Si $3 \leq i \leq n - 3$ et $n \geq 7$, l'application

$$\chi_0: \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^l, M), \varphi_0) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{\lfloor \pi_1(M) - 1 \rfloor}$$

définie en 1.2, est une bijection.

Démonstration. — D'après le lemme de dualité 1.3, il suffit de démontrer le théorème pour $i \leq \frac{n}{2}$. Mais, pour la suite où nous aurons besoin de modèles explicites, nous allons démontrer le lemme suivant, dont il découle que χ_0 est une surjection.

1.4.1. LEMME. — Si $3 \leq i \leq n - 4$,

$$\chi_*: \pi_1(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{\pi_1(M)-1}$$

est un épimorphisme de groupes.

Démonstration du lemme 1.4.1. — Puisque χ_* est un morphisme de groupes (1.2.3), il suffit de prouver que l'image de χ_* contient les éléments de la forme (a, ω, g) . On commence par choisir une métrique riemannienne \mathcal{M} sur M telle que S_0 et T_0 se coupent orthogonalement. Étant donné $a \in \mathbf{Z}_2$, $\omega \in \pi_2(M)$, $g \in \pi_1(M)$, nous allons construire dans M une sous-variété Γ satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) Il existe un plongement $F: S^i \times S^1 \rightarrow M$ d'image Γ , tel que $F|_{S^i \times \{o\}} = \varphi_0$;

(b) Γ coupe T_0 transversalement suivant deux courbes fermées l_0 et l , où l_0 représente le générateur de $\pi_1(\Gamma)$, et où l est homotope à zéro sur Γ , avec (a, ω, g) pour invariants associés [l_0 joue ici le rôle joué par la composante non fermée de $F^{-1}(T_0)$ dans la définition des invariants].

Les sous-variétés Γ satisfaisant à ces conditions ne sont évidemment pas uniques. Celle que nous allons exhiber jouera un rôle particulier dans la suite en raison de certaines propriétés supplémentaires qu'elle possède. Nous l'appellerons $\Gamma(a, \omega, g)$; sa construction passe par la construction d'une sous-variété de M , diffeomorphe à S^{i+1} , qui ne fait intervenir que les invariants (a, ω) ; nous la noterons $\mathfrak{S}(a, \omega)$.

1.4.2. *Construction de $\mathfrak{S}(a, \omega)$.* — L'élément $\omega \in \pi_2(M)$ peut être représenté par une sphère Σ anguleuse plongée dans M . Écrivons Σ comme réunion sur leurs bords de deux disques D et D' . Soit N un voisinage tubulaire de S_0 dans M ; il est trivial car S_0 est le bord d'une anse. Puisque T_0 et S_0 sont de codimension plus grande que 3, on peut imposer à D et D' les conditions suivantes :

(a) D' est inclus dans la $(n - i - 1)$ -sphère $\partial N \cap T_0$;

(b) $D \cap \text{int} N = \emptyset$;

(c) $\text{int} D \cap T_0 = \emptyset$;

(d) $D \cap \partial N = l = \partial D = \partial D'$ et D est orthogonal à ∂N le long de la courbe l .

Maintenant, comme N est un tube trivial, il existe un plongement $K: S^i \times S^1 \rightarrow \partial N$ dont l'intersection avec T_0 est exactement la courbe l ; pour tout $t \in S^1$, $K(S^i \times \{t\})$ est isotope à S_0 . Ce plongement K représente un lacet homotope à zéro dans $\text{Plgt}(S^i, M)$. On a $K(S^i \times S^1) \cap \Sigma = l$.

Choisissons un champ \vec{u} de vecteurs normaux à D , qui, le long de l , soit normal à T_0 et tangent à $K(S^i \times S^1)$. Si l'on choisit la métrique riemannienne telle que $K(S^i \times S^1)$ soit totalement géodésique, ce champ permet de translater D jusqu'à \tilde{D} tel que $\tilde{D} \cap T_0 = \emptyset$, $\tilde{D} \cap S_0 = \emptyset$ et $\text{int } \tilde{D} \cap \partial N = \emptyset$. Nous notons $\tilde{l} = \partial \tilde{D}$. Considérons aussi le champ de i -repères normaux sur T_0 réalisant la trivialisatation canonique du fibré $\nu(T_0; M)$. En translantant le long de \vec{u} sa restriction à l , on obtient un champ ξ , tangent à $K(S^i \times S^1)$, défini sur la couronne C ($C \cong S^1 \times [0, 1]$) limitée par l et \tilde{l} , dont les génératrices sont tangentes à \vec{u} . Soit enfin ξ_a un champ de repères du fibré normal $\nu(\tilde{l}; K(S^i \times S^1))$, se déduisant de $\xi|_{\tilde{l}}$ par l'action d'une application $S^1 \rightarrow O(i)$, dont la classe d'homotopie dans $\pi_1(O(i)) \cong \pi_1(O) \cong \mathbf{Z}_2$ est l'élément a . Par transport parallèle, on définit ξ_a sur toute la couronne. Nous écrirons symboliquement $\xi_a = a \cdot \xi$.

Nous allons modifier la sous-variété $K(S^i \times S^1)$ en faisant une chirurgie sur \tilde{l} avec le disque \tilde{D} , le champ ξ_a trivialisant $\nu(\tilde{l}; K(S^i \times S^1))$. Alors l'obstruction à faire la « chirurgie plongée » avec ces données est l'obstruction à prolonger ξ_a en un champ normal à \tilde{D} [11], [4]. Une telle obstruction habite dans $\pi_1(V_i(\mathbf{R}^{n-2}))$, où $V_i(\mathbf{R}^{n-2})$ désigne la variété de Stiefel des i -repères de \mathbf{R}^{n-2} . Or ce groupe est nul dès que $i \leq n - 4$. La modification sphérique se fait dans un voisinage de \tilde{D} , voisinage que l'on choisit suffisamment petit pour ne rencontrer ni S_0 ni T_0 . *Le résultat en est une $(i + 1)$ -sphère $\mathfrak{S}(a, \omega)$, plongée dans M , intersectant T_0 suivant la courbe l (⁷).*

En 1.2.1, nous avons associé à une telle courbe d'intersection des éléments $\omega(l) \in \pi_2(M, T_0) \cong \pi_2(M)$ et $a(l) \in \mathbf{Z}_2$. Or l borde dans $\mathfrak{S}(a, \omega)$ un 2-disque Δ , homotope rel le bord, à $C \cup \tilde{D}$; il est alors clair que $\omega = \omega(l)$. Les champs $\xi|_l$ et $\xi_a|_l$ trivialisent $\nu(l; \mathfrak{S}(a, \omega))$. Or $\xi_a|_l$ possède la propriété d'être homotope à $\xi' \oplus \vec{u}$, où ξ' se prolonge en un champ normal à Δ dans $\mathfrak{S}(a, \omega)$. Pour que $\xi|_l$ possède la même propriété, il faut et il suffit que $a = 0$. En tenant compte du lemme 1.2.2, $a(l) = 0$ si et seulement si $a = 0$. Donc, dans \mathbf{Z}_2 , $a = a(l)$. Ainsi $\mathfrak{S}(a, \omega)$ est bien nommée.

(⁷) Rappelons que le résultat d'une chirurgie effectuée sur $\{0\} \times S^1$ dans $S^i \times S^1$ est S^{i+1} , quelle que soit la trivialisatation choisie du fibré normal à $\{0\} \times S^1$ dans $S^i \times S^1$; en effet, on passe d'une trivialisatation à l'autre par un difféomorphisme global de $S^i \times S^1$.

1.4.3. *Construction de $\Gamma(a, \omega, g)$.* — Reprenons maintenant un plongement $K' : S^i \times S^1 \rightarrow M$ représentant un petit lacet de l'espace $\text{Plgt}(S^i, M)$, vérifiant cette fois la condition $K'|S^i \times \{o\} = \varphi_o$. On peut supposer que l'image de K' est disjointe de $\mathfrak{S}(a, \omega)$. Choisissons un chemin α plongé dans M avec origine dans $l_o = K'(S^i \times S^1) \cap T_o$ et extrémité dans $l = \mathfrak{S}(a, \omega) \cap T_o$, ne rencontrant ces deux sous-variétés qu'en ses extrémités, et représentant l'élément $g \in \pi_1(M, T_o) \cong \pi_1(M)$. Faisons la somme connexe des deux sous-variétés le long du chemin, obtenu à partir de α par une isotopie le disjoignant de T_o . Nous obtenons ainsi une sous-variété $\Gamma(a, \omega, g)$ satisfaisant aux deux conditions énoncées au début de cette démonstration. Ceci achève la démonstration du lemme 1.4.1, et donc de la première partie du théorème 1.4, à savoir la surjectivité de χ_o .

De ce premier résultat nous retiendrons deux choses : la première est que, pour $3 \leq i \leq n - 3$, $\pi_1^{\text{rel } T_o}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_o)$ n'est pas nul (ainsi donc que $\pi_1(\sigma, \sigma')$, où σ et σ' sont les strates de l'espace fonctionnel définies au début du paragraphe). En fait, nous verrons au paragraphe 2 que c'est encore vrai pour $i = 1, 2$. Pour $i = 2$, si on voulait en avoir une expression algébrique, il faudrait au moins faire intervenir les coefficients d'enlacement des courbes d'intersection l_k . La seconde chose que nous retiendrons est la construction des sous-variétés $\Gamma(a, \omega, g)$ et en particulier de la $(i + 1)$ -sphère $\mathfrak{S}(a, \omega)$ plongée dans M .

1.4.4. *Démonstration de la seconde partie du théorème 1.4 : injectivité de χ_o .* — Soit une isotopie $F : S^i \times [o, 1] \rightarrow M$, $F \in \Lambda$, c'est-à-dire transversale sur T_o , et telle que $\bar{\chi}(F) = o$. Il s'agit de montrer que F représente l'élément trivial de $\pi_1^{\text{rel } T_o}(\text{Plgt}(S^i, M))$. Puisque $\bar{\chi}$ est un morphisme de monoïdes (1.2.1), l'injectivité de

$$\chi_o : \pi_1^{\text{rel } T_o}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_o) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{\pi_1(M)-1}$$

en découlera immédiatement. D'après le lemme de dualité (lemme 1.3), on peut se limiter au cas où $i \leq n/2$. Dans ce qui suit, nous supposons que $n \geq 7$. Certaines étapes de la démonstration n'exigent pas cette hypothèse; nous soulignerons, au passage, l'endroit où elle est nécessaire pour cette démonstration. Avec $i \leq n/2$ et $n \geq 7$, on est dans le domaine métastable ($3(i + 1) < 2n$) et F est un plongement sauf sur une certaine sous-variété U de $S^i \times [o, 1]$, dont la dimension satisfait à l'égalité $\dim U = 2(i + 1) - n$ (si $\dim U < o$, c'est que U est vide) [7]. On voit que, pour avoir $\dim U = 2$, il faut que $i = n - i$, ce qui implique $\dim(S^i \times [o, 1]) = i + 1 \geq 5$; alors, il n'y a jamais d'enlacement des courbes $F^{-1}(T_o)$ avec U dans $S^i \times [o, 1]$. On pourra donc raisonner dans la

suite comme si F était un plongement et on conviendra d'identifier $S^i \times [0, 1]$ à son image par F .

La première opération que l'on peut faire, même si $\bar{\chi}(F) \neq 0$, consiste à se ramener à la situation suivante : soient l_1, l_2, \dots, l_q les courbes fermées contenues dans l'intersection de $S^i \times [0, 1]$ avec T_0 ; les éléments $g(l_k) \in \pi_1(M)$, associés à ces courbes (1.2.1) sont tels que

- (1) pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, $g(l_k) \neq 1$;
- (2) si $k \neq k'$, $g(l_k) \neq g(l_{k'})$.

Supposons qu'il y ait deux courbes fermées l_k et $l_{k'}$ telles que $g(l_k) = g(l_{k'})$; on choisit un chemin α joignant l_k à $l_{k'}$ dans $S^i \times [0, 1]$ et un chemin β joignant l_k à $l_{k'}$, dans T_0 , de sorte que $\alpha \cup \beta$ soit une courbe simple dans M . Puisque $g(l_k) = g(l_{k'})$, cette courbe est homotope à zéro dans M . Dans des conditions de dimension, même moins restrictives que les nôtres, il est possible de plonger un modèle de Whitney, à travers lequel on pourra isotoper $S^i \times [0, 1]$ pour réaliser la somme connexe des deux courbes d'intersection ⁽⁸⁾ [14; p. 80-84]. Si $g(l_k) = 1$, on pourra de même réaliser par isotopie la somme connexe de l_k et de la courbe d'intersection non fermée l_0 ; ce dernier point est dû à J. Wagoner et est fondamental dans la démonstration du théorème d'unicité des éliminations dans le cas simplement connexe [1; chap. I, § 5, prop. 3].

Supposons maintenant, qu'ayant fait cette première opération, il reste une courbe l avec $g(l) \neq 1$; elle est la seule à avoir cet invariant dans $\pi_1(M)$; si donc $\chi([F]) = 0$, on a nécessairement $a(l) = 0$ dans \mathbf{Z}_2 et $\omega(l) = 0$ dans $\pi_2(M)$. On peut alors construire une sphère anguleuse Σ , « plongée » dans M : Σ est la réunion de deux disques plongés D et D' , avec $D \subset S^i \times [0, 1]$, $D' \subset T_0$ et $\partial D = \partial D' = l$ (une courbe simple dans \mathbf{R}^4 est toujours le bord d'un disque; il en est de même dans $S^3 \times [0, 1]$ ou dans S^4). Puisque $\omega(l) = 0$, la sphère Σ borde une 3-boule B dans M .

Si T_0 est de codimension strictement plus grande que 3, par position générale, l'intérieur de B n'intersecte pas T_0 . Si T_0 est de codimension 3, on peut choisir une boule B vérifiant $\text{int} B \cap T_0 = \emptyset$, parce que $\pi_2(M - T_0) \rightarrow \pi_2(M)$ est injectif (propos. A.1 de l'appendice A).

Si $S^i \times [0, 1]$ est de codimension 3 (i. e. $n = 7$, $i = 3$ ou $n = 8$, $i = 4$), en position générale $\text{int} B \cap S^i \times [0, 1]$ est formé de points, que l'on peut placer dans un nombre fini de boules disjointes. Par un procédé classique (piping) on peut les éliminer par le bord de $S^i \times [0, 1]$. Dans tous les cas

⁽⁸⁾ Cela signifie que la nouvelle intersection $S^i \times [0, 1] \cap T_0$ se déduit de l'intersection initiale par somme connexe de l_k et de $l_{k'}$.

on peut trouver B , boule anguleuse plongée, bordée par Σ et vérifiant $\text{int}B \cap (S^i \times [0, 1] \cup T_0) = \emptyset$.

Soit ξ le champ de i -repères normaux à T_0 dans M , réalisant la trivialisation canonique de $\nu(T_0; M)$. Puisque $a(l) = 0$, d'après le lemme 1.2.2, on peut supposer que, le long de l , sa première composante est le champ de vecteurs rentrant dans D et que ξ' se prolonge en un champ normal à D dans $S^i \times [0, 1]$, où ξ' est le champ de $(i-1)$ -repères formé des dernières composantes de ξ . En notant encore ξ' un tel prolongement, ξ' est défini sur la sphère anguleuse Σ ; il est normal à D et à D' ; nous dirons, par abus de langage, qu'il est normal à Σ . Bien que la boule B ait une arête sur son bord, et si ξ' est orthogonal au champ de vecteurs défini sur $\Sigma - l$ et rentrant dans B , cela a un sens de chercher à plonger ξ' à B , en un champ normal à B . L'obstruction à faire un tel prolongement habite dans

$$\pi_2(V_{i-1}(\mathbf{R}^{n-3})) = \pi_2(O(n-3)/O(n-i-2)).$$

Or $\pi_2(O(j)) = 0$ pour tout j ; alors ce groupe est nul, sauf pour $n-i=4$, ce qui, dans nos hypothèses de dimension arrive pour $i=3, n=7$ ou $i=4, n=8$. Notons \mathcal{O} l'obstruction que nous rencontrons et considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_2(O(n-3)/O(n-i-2)) \xrightarrow{\delta} \pi_1(O(n-i-2)) \rightarrow \pi_1(O(n-3)) \rightarrow 0.$$

$\delta(\mathcal{O})$ est la classe du $(n-i-2)$ -fibré de base Σ orthogonal au champ ξ' dans le fibré trivial $\nu(B; M)|_{\Sigma}$, [4], [8; p. 461]. Pour montrer que \mathcal{O} est nul, nous allons montrer que ce fibré est trivial, c'est-à-dire en construire une trivialisation η' .

Soit η la trivialisation canonique de $\nu(S^i \times [0, 1]; M)$. D'après le sous-lemme 1.3.3 et le lemme 1.2.2, $\eta = \{\tilde{\nu}\} \oplus \eta'$, où $(\tilde{\nu})|_l$ est le champ rentrant dans D' et où $\eta'|_l$ se prolonge en un champ de repère normal à D' dans T_0 . Finalement, η' est défini sur Σ ; il est orthogonal à Σ et au champ ξ' ; c'est bien la trivialisation cherchée. Donc l'obstruction à prolonger ξ' est nulle, à condition de prendre une boule B dont le champ rentrant le long de D soit la première composante de η et dont le champ rentrant le long de D' soit la première composante de ξ . Mais il est tout à fait clair que l'on peut choisir arbitrairement le « jet » de B le long de Σ .

On peut donc maintenant construire un plongement

$$\psi: B \times \mathbf{R}^{i-1} \times \mathbf{R}^{n-i-2} \rightarrow M$$

tel que :

- (a) $\psi|_{B \times \{0\} \times \{0\}}$ soit le plongement donné de B dans M ;
- (b) $\psi(D \times \mathbf{R}^{i-1} \times \{0\}) \subset S^i \times [0, 1]$;
- (c) $\psi(D' \times \{0\} \times \mathbf{R}^{n-i-2}) \subset T_0$.

C'est le plongement du modèle d'élimination, généralisant le procédé de Whitney pour les intersections ponctuelles. Il est donné en détail par R. Wells dans [21]. Ceci achève la démonstration du théorème 1.4.

C. Q. F. D.

1.5. COROLLAIRE. — Si $n \geq 7$ et $3 \leq i \leq n - 4$, l'application naturelle

$$\pi_1(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0)$$

est une surjection.

Preuve. — Nous avons vu (lemme 1.4.1) que, si $3 \leq i \leq n - 4$,

$$\chi_*: \pi_1(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{\pi_1(M)^{-1}}$$

est un épimorphisme. Le corollaire est donc une conséquence immédiate du théorème 1.4. Il faut remarquer le rôle du lemme de dualité. Si ce lemme nous manquait, tout en ayant la surjectivité de χ dans le domaine $3 \leq i \leq n - 3$, nous n'aurions, pour $n \geq 7$, la surjectivité

$$\pi_1(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0)$$

que dans le domaine $3 \leq i \leq n/2$.

Nous verrons que cette flèche est encore une surjection pour $0 \leq i \leq 2$, sans calculer l'obstruction. En revanche, nous ne saurons rien d'analogue pour le domaine $n - 4 \leq i \leq n$.

2. Problème de l'unicité des éliminations (suite) : lemme fondamental.

Les résultats importants de ce paragraphe sont les propositions 2.3.2 et 2.5. La situation est celle décrite au début du paragraphe 1 et nous conservons les mêmes notations. Cependant la proposition 2.1 et le corollaire 2.2 sont valables dans des conditions plus générales : T_0 peut être une variété simplement connexe quelconque, et la sphère S_0 peut avoir son fibré normal non trivial (voir propos. A.1).

Nous commençons par étendre le corollaire 1.5 aux cas où $i \leq 2$; le domaine de dimensions dans lequel est valable la méthode que nous utilisons se recoupe en fait avec celui du paragraphe 1.

2.1. PROPOSITION. — Soit $F: S^i \times [0, 1] \rightarrow M^n$ une isotopie vérifiant :

(1) $F|S^i \times \{0\} = \varphi_0$;

(2) $F(S^i \times \{1\})$ coupe T_0 transversalement et en un seul point.

Alors, si $2i + 2 \leq n$, il existe une isotopie $G : S^i \times [0, 1] \rightarrow M$ qui vérifie :

- (1) $G|_{S^i \times \{0, 1\}} = F|_{S^i \times \{0, 1\}}$;
- (2) pour tout $t \in [0, 1]$, $G(S^i \times \{t\})$ coupe T_0 transversalement et en un seul point.

Démonstration. — On ne perd pas de généralité en supposant que F est transversale sur T_0 . Soit l_0 la composante non fermée de $F^{-1}(T_0)$: l_0 est un segment joignant les deux composantes du bord de $S^i \times [0, 1]$, et les rencontrant transversalement. Soit U un voisinage tubulaire ouvert de l_0 dans $S^i \times [0, 1]$, suffisamment petit pour ne pas rencontrer $F^{-1}(T_0) - l_0$; $S^i \times [0, 1] - U$ est homéomorphe à D^{i+1} , donc $F|_{S^i \times [0, 1] - U}$ définit un élément $\tau(F) \in \pi_{i+1}(M, M - T_0)$. D'après la proposition A.1 de l'appendice A, la flèche bord $\pi_{i+1}(M, M - T_0) \rightarrow \pi_i(M - T_0)$ est nulle ; $F|_{\partial(S^i \times [0, 1] - U)}$ se prolonge donc en une application

$$g : S^i \times [0, 1] - U \rightarrow M - T_0.$$

On peut évidemment choisir g différentiable, et ayant même germe que F le long de $\partial(S^i \times [0, 1] - U)$. Ceci permet de recoller $F|_U$ et g pour donner une application $G : S^i \times [0, 1] \rightarrow M$ transversale sur T_0 telle que :

- (1) $G|_{S^i \times \{0, 1\}} = F|_{S^i \times \{0, 1\}}$,
- (2) $G^{-1}(T_0) = l_0$.

Si $2i + 2 < n$, en position générale, G est un plongement ; si $2i + 2 = n$, G a, en position générale, des points doubles isolés de telle sorte que pour tout $t \in [0, 1]$, $S^i \times \{t\}$ contienne au plus un de ces points. Dans tous les cas, on a donc construit l'isotopie cherchée.

C. Q. F. D.

Une forme équivalente de la proposition 2.1 est le :

2.2. COROLLAIRE. — *L'application naturelle*

$$\pi_1(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0) \rightarrow \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0)$$

est surjective si $2i + 2 \leq n$.

Rappelons qu'au paragraphe 1 on a montré la surjectivité de cette application pour $3 \leq i \leq n - 4$ et $n \geq 7$ (corollaire 1.5).

2.3.1. *Quelques notations nouvelles.* — Rappelons que M^n est une variété intermédiaire dans un cobordisme W muni d'une fonction excellente h . Soit (Q, M, L) un cobordisme élémentaire d'indice $i + 1$ inclus dans W et au-dessus de M ; $h|_Q$ a un seul point critique c . Pour une certaine

métrique riemannienne \mathcal{M} , S_0 est bord d'une nappe de gradient D_0 descendant de c . Si $x \in M - S_0$, la ligne de gradient issue de x évite le point critique et aboutit à un point $\gamma(x) \in L$; ceci définit un plongement $\gamma: M - S_0 \rightarrow L$. Le fibré normal de S_0 étant trivial, on peut choisir un nouveau point-base φ'_0 dans $\text{Plgt}(S^i, M)$, voisin de φ_0 , mais d'image S'_0 disjointe de S_0 . Alors γ induit une application

$$\gamma_*: \pi_1(\text{Plgt}(S^i, M - S_0), \varphi'_0) \rightarrow \pi_1(\text{Plgt}(S^i, L), \gamma\varphi'_0).$$

On aura aussi besoin de l'application naturelle

$$\alpha: \pi_1(\text{Plgt}(S^i, M - S_0), \varphi'_0) \rightarrow \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi'_0).$$

2.3.2. PROPOSITION. — Avec les notations précédentes, si $0 \leq i \leq n - 4$ et $n \geq 7$, la restriction de α au noyau de γ_* est une surjection sur $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi'_0)$.

I. *Démonstration pour $2i + 3 \leq n$ (en particulier pour $n \geq 7$ et $i \leq 2$).*
— La démonstration est un raffinement de celle de la proposition 2.1. Soit $F: S^i \times [0, 1] \rightarrow M$ une isotopie transversale sur T_0 représentant un élément de $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi'_0)$. Puisque $2i + 2 \leq n$, on peut supposer que l'image de F est contenue dans $M - S_0$. Comme dans la démonstration de 2.1, introduisons un petit voisinage U de l_0 , composante non fermée de $F^{-1}(T_0)$. Nous avons construit une application $g: S^i \times [0, 1] - U \rightarrow M - T_0$; en plus des conditions déjà vérifiées par g , on peut, d'après la proposition A.3 de l'appendice A, imposer que g vérifie aussi les conditions suivantes :

- (1) l'image de g est disjointe de S_0 ;
- (2) γg et $\gamma F | (S^i \times [0, 1] - U)$ sont deux applications homotopes de $S^i \times [0, 1] - U$ dans L , relativement à $\partial(S^i \times [0, 1] - U)$.

A l'aide de cette application g , on a construit $G: S^i \times [0, 1] \rightarrow M - S_0$, qui, en position générale, est une isotopie. En écrivant S^1 comme le double de l'intervalle, $S^1 = D_+^1 \cup D_-^1$, on définit une isotopie $\Omega: S^i \times S^1 \rightarrow M$ en posant $\Omega | S^i \times D_+^1 = F$ et $\Omega | S^i \times D_-^1 = G$; Ω représente un élément de $\pi_1(\text{Plgt}(S^i, M - S_0), \varphi'_0)$ dont l'image par α dans $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi'_0)$ est représentée par F . Il reste à voir que Ω représente en fait un élément du noyau de γ_* . Or, à cause des nouvelles conditions imposées à g , $\gamma\Omega$ se prolonge en une application $\Psi: S^i \times D^2 \rightarrow L^n$. Il résulte du théorème de transversalité que, si $2i + 3 \leq n$, en position générale, Ψ est une famille à deux paramètres de plongements de S^i dans L^n , prolongeant la famille à un paramètre $\gamma\Omega$ (voir [6]).

II. *Démonstration pour* $3 \leq i \leq n - 4$. — Rappelons que, dans ces conditions de dimension, nous avons, d'après le théorème 1.4, un isomorphisme

$$\chi_0: \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi'_0) \rightarrow (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M) - (i)]}.$$

Il suffit donc de relever les éléments de $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi'_0)$ dont l'image par χ_0 est un générateur (a, ω, g) de $(\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(M))^{[\pi_1(M) - (i)]}$; $\chi_0^{-1}(a, \omega, g)$ est représenté par un plongement de $S^i \times S^1$ dans M (et même dans $M - S_0$) dont l'image $\Gamma(a, \omega, g)$ a été construite en 1.4.2 et 1.4.3. Pour prouver 2.3.2, il suffit de montrer que la sous-variété $\gamma(\Gamma(a, \omega, g))$ de L borde une sous-variété difféomorphe à $S^i \times D^2$. A cet effet rappelons les étapes de la construction de $\Gamma(a, \omega, g)$. On part d'un plongement $K: S^i \times S^1 \rightarrow M$ d'image dans ∂N , où N est un voisinage tubulaire de la sphère S_0 ; dans L , $\gamma(K(S^i \times S^1))$ borde une sous-variété \mathfrak{C} difféomorphe à $D^{i+1} \times S^1$. Par chirurgie plongée sur le générateur de $\pi_1(K(S^i \times S^1))$ avec une anse \tilde{D} d'indice 2, on a construit une $(i + 1)$ -sphère $\mathfrak{S}(a, \omega)$ (1.4.2); or \tilde{D} a pu être choisi disjoint de $\text{int } N$; donc $\gamma(\tilde{D})$ ne rencontre \mathfrak{C} que le long de son bord; on en déduit que $\gamma(\mathfrak{S}(a, \omega))$ borde dans L la sous-variété \mathfrak{B} obtenue par chirurgie sur le bord de \mathfrak{C} avec l'anse $\gamma(\tilde{D})$; \mathfrak{B} est donc difféomorphe à D^{i+2} ⁽⁹⁾. Soit $K': S^i \times S^1 \rightarrow M$ un plongement, dont l'image dans ∂N y borde une sous-variété \mathfrak{A} difféomorphe à $S^i \times D^2$ et disjointe de $\mathfrak{S}(a, \omega)$. On observe que $\gamma(\mathfrak{A})$ et \mathfrak{B} sont deux sous-variétés disjointes de L . Enfin $\Gamma(a, \omega, g)$ est somme connexe dans M de $\mathfrak{S}(a, \omega)$ et de $\partial \mathfrak{A}$ le long d'un chemin plongé que l'on peut choisir avec les deux propriétés suivantes :

- (1) il ne rencontre pas l'intérieur de \mathfrak{A} ;
- (2) son image par γ ne rencontre pas l'intérieur de \mathfrak{B} .

Alors $\gamma(\Gamma(a, \omega, g))$ borde dans L une sous-variété qui est somme connexe sur le bord des sous-variétés $\gamma(\mathfrak{A})$ et \mathfrak{B} et qui, par conséquent, est difféomorphe à $S^i \times D^2$.

C. Q. D. F.

2.4.1. *Notations et conventions.* — Nous introduisons à ce point l'espace $\text{Plgt}[(D^{i+1}, S^i), (Q, M)]$ des plongements de D^{i+1} dans le cobordisme élémentaire Q , dont la restriction au bord est un plongement de S^i dans M . On choisit dans cet espace un élément ψ_0 dont l'image est la nappe de

⁽⁹⁾ On rappelle que le résultat d'une chirurgie « sortante » effectuée sur le bord de $D^{i+1} \times S^1$ pour tuer le générateur du groupe fondamental ne dépend pas de la trivialisat[i]on choisie pour le fibré normal à $\{\star\} \times S^1$. En effet, on passe d'une trivialisat[i]on à l'autre par un automorphisme global de $D^{i+1} \times S^1$.

gradient D_0 descendant du point critique c ; à partir de maintenant φ_0 sera la restriction $\psi_0 | S^i$.

Par translation le long d'un champ normal à D_0 , on construit un chemin τ dans $\text{Plgt}[(D^{i+1}, S^i), (Q, M)]$, d'origine ψ_0 et d'extrémité ψ'_0 ; l'image de ψ'_0 est notée D'_0 et φ'_0 la restriction $\psi'_0 | S^i$. Il est facile de choisir cette translation de telle sorte que toutes les fonctions induites de h sur D^{i+1} par les plongements appartenant à τ soient des fonctions du même type que la fonction « carré de la distance au centre du disque », c'est-à-dire qu'elles s'en déduisent par un automorphisme de \mathbf{R} ; en particulier, elles ont toutes mêmes surfaces de niveau (les sphères concentriques) et le centre o du disque est leur seul point critique, qui est d'ailleurs un maximum non dégénéré. On note $m = \psi'_0(o)$. Enfin, on peut supposer que sur un certain collier de ∂D^{i+1} , ψ'_0 est le paramétrage naturel, prolongeant φ'_0 , d'un cylindre de gradient dont la base est $\varphi'_0(S^i)$ et dont la face supérieure est dans une variété de niveau de la fonction h au-dessus du point critique c (fig. 6).

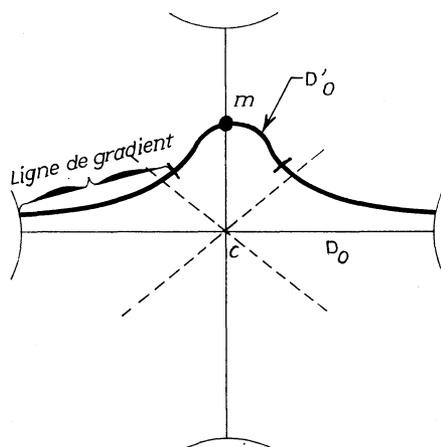


Fig. 6

2.4.2. LEMME. — Soit $\{\varphi'_t | t \in S^1\}$ un lacet d'origine φ'_0 dans l'espace $\text{Plgt}(S^i, M - S_0)$ tel que le lacet $\{\gamma\varphi'_t | t \in S^1\}$ soit contractible dans $\text{Plgt}(S^i, L)$. Il existe alors un lacet $\{\psi'_t | t \in S^1\}$ d'origine ψ'_0 dans l'espace $\text{Plgt}[(D^{i+1}, S^i), (Q, M)]$ et un voisinage \mathcal{O} de l'origine de D^{i+1} qui vérifient, pour tout $t \in S^1$,

- (1) $\psi'_t | S^i = \varphi'_t$;
- (2) $\varphi'_t | \mathcal{O} = \psi'_0 | \mathcal{O}$;
- (3) la restriction de h à $D'_t = \psi'_t(D^{i+1})$ admet m comme seul point critique (maximum non dégénéré).

Démonstration. — Soit $C : L \times ([0, 2], \{2\}) \rightarrow (Q, L)$ un « collier » défini par les lignes de gradient. Notons $L_j = C(L \times \{j\})$ pour $j = 0, 1$. Soit $S^i \times [-1, +1]$ un voisinage collier de ∂D^{i+1} dans D^{i+1} , où $S^i \times \{-1\}$ est identifié à ∂D^{i+1} . On définit ψ'_i successivement sur $S^i \times [-1, 0]$, $S^i \times [0, 1]$ et $D^{i+1} - S^i \times [-1, +1[$ de façon que

$$\psi'_i(S^i \times \{-1, 0, 1\}) \subset \{M, L_0, L_1\}.$$

(1) Sur $S^i \times [-1, 0]$, ψ'_i est le paramétrage naturel, prolongeant φ'_i , du cylindre de gradient de base $\varphi'_i(S^i)$.

(2) Soit $\Omega_i : S^i \times [0, 1] \rightarrow L \times [0, 1]$ une famille à un paramètre d'isotopies de $\gamma\varphi'_i$ jusqu'à $\gamma\varphi'_0$. On pose $\psi'_i | S^i \times [0, 1] = C\Omega_i$.

(3) Enfin $\psi'_i | (D^{i+1} - S^i \times [-1, +1[) = \psi'_0 | (D^{i+1} - S^i \times [-1, +1[)$.

Le lacet $\{\psi'_i | t \in S^1\}$ a évidemment les propriétés voulues.

C. Q. F. D.

De la proposition 2.3.2 et du lemme 2.4.2, on déduit la

2.5. PROPOSITION (lemme fondamental). — Soit $\lambda \in \pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M^n), \varphi'_0)$. Si $0 \leq i \leq n - 4$ et $n \geq 7$, il existe alors, dans l'espace $\text{Plgt}[(D^{i+1}, S^i), (Q, M)]$, un lacet $\{\psi'_i | t \in S^1\}$ d'origine ψ'_0 et un voisinage \mathcal{O} de l'origine de D^{i+1} qui vérifient les conditions suivantes :

(1) le lacet $\{\psi'_i | S^i; t \in S^1\}$ représente λ dans $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi'_0)$;

(2) pour tout $t \in S^1$, $\psi'_i | \mathcal{O} = \psi'_0 | \mathcal{O}$; en particulier $\psi'_i(\mathcal{O}) = m$;

(3) la restriction de la fonction h à $D'_i = \psi'_i(D^{i+1})$ admet m comme seul point critique et c'est un maximum non dégénéré.

Suivant une suggestion de J. Cerf, nous allons donner un énoncé équivalent à celui de la proposition 2.5. Pour cela, introduisons l'espace \mathcal{K} , constitué par les plongements $\psi' : (D^{i+1}, S^i) \rightarrow (Q, M)$, tels que :

(i) le germe de ψ' au voisinage du centre de D^{i+1} coïncide avec le germe de ψ'_0 ;

(ii) $h\psi'$ n'admet qu'un seul point critique et c'est un maximum non dégénéré.

Nous noterons \mathcal{K}_0 le sous-espace de \mathcal{K} constitué par les plongements tels qu'en outre $\psi'(\partial D^{i+1})$ coupe T_0 transversalement et en un seul point.

2.5 bis. PROPOSITION. — Dans les conditions de dimension de 2.5, l'inclusion naturelle $\mathcal{K}_0 \hookrightarrow \mathcal{K}$ induit une injection $\pi_0(\mathcal{K}_0) \rightarrow \pi_0(\mathcal{K})$.

Démonstration de 2.5 \Rightarrow 2.5 bis (nous laissons la réciproque au soin du lecteur).

Soient $\psi' \in \mathcal{K}_0$ et $\{\psi'_t; t \in [0, 1]\}$ un chemin joignant ψ'_0 à ψ' dans \mathcal{K} . D'après la proposition 2.5, il existe, dans \mathcal{K} un lacet $\{\psi'_t; t \in [-1, 0]\}$, d'origine ψ'_0 , tel que le chemin $\{\psi'_t \mid \partial D^{i+1}; t \in [-1, +1]\}$ représente l'élément trivial de $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi'_0)$. Autrement dit, le chemin $\{\psi'_t; t \in [-1, +1]\}$ représente l'élément trivial de $\pi_1(\mathcal{K}, \mathcal{K}_0, \psi'_0)$.

C. Q. F. D.

Remarque complémentaire. — L'intérêt de l'énoncé 2.5 bis est qu'il y a un critère simple pour que ψ' et ψ'_0 appartiennent à la même composante de \mathcal{K} . Il suffit par exemple que ψ' et ψ'_0 coïncident jusqu'en-dessous de c [i. e., il existe $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout x vérifiant $h \psi'(x) > h(c) - \varepsilon$, on ait $\psi'(x) = \psi'_0(x)$].

Dans la suite, nous n'aurons à nous référer qu'à la proposition 2.5 (ou 2.5 bis). Le calcul d'obstruction, fait au paragraphe 1, n'a servi qu'à trouver des modèles permettant la démonstration de ces deux dernières propositions. Peut-être y a-t-il une attaque plus directe !

3. Problème de l'unicité des éliminations (*fin*) : Lemme de translation des indices.

Le paragraphe est entièrement consacré à la démonstration du théorème suivant :

3.1. THÉORÈME (lemme de translation des indices). — *Soit L^n une variété compacte orientable de dimension n . Soit une fonction C^∞ sans point critique*

$$f_0 : L^n \times ([0, 1], \{0\}, \{1\}) \rightarrow ([0, 1], \{0\}, \{1\}).$$

Soit f_1 une fonction sans point critique obtenue à partir de f_0 en faisant naître une paire de points critiques d'indices $i, i+1$, puis en les éliminant. Alors, pour $n \geq 7$ et $i \leq n-4$, f_1 peut être obtenue à partir de f_0 en faisant naître une paire de points critiques d'indices $i+1, i+2$, puis en les éliminant.

Cette proposition traduit la possibilité de passer du graphique I au graphique II (*fig. 7*).

Bien que plus faible que le lemme d'unicité des morts, démontré par J. Cerf dans le cas simplement connexe et énoncé dans notre introduction (0.5.1), ce résultat nous permettra cependant de démontrer dans

les paragraphes suivants la connexité de $\mathcal{F}_i(W)$, où W est un h -cobordisme de dimension supérieure à 8 et où $3 \leq i \leq n-3$ [l'espace $\mathcal{F}_i(W)$ a été défini en (0.1)].

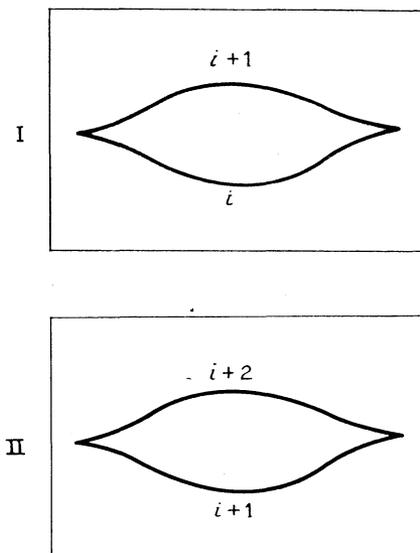


Fig 7.

Démonstration. — On peut supposer [1; chap. III, § 2] que f_0 et f_1 sont les extrémités de deux chemins élémentaires d'élimination ε_0 et ε_1 , issus d'une fonction h ayant deux points critiques c et c' , d'indices respectifs $i+1$ et i ($h(c) > h(c')$). Soit M une variété intermédiaire pour la fonction h . On note \mathcal{X}_M l'espace des couples (D, A) de nappes en bonne position, à bord dans M ; c'est-à-dire que D est une nappe descendant de c jusqu'à M , que A est une nappe montant de c' jusqu'à M , toutes les deux adaptées à h et telles que ∂A coupe ∂D transversalement et en un seul point.

On sait [1; *Ibid.*] qu'il existe un modèle standard d'élimination; on y choisit une variété intermédiaire standard. On note \mathfrak{P}_M l'espace des plongements du modèle dans le cobordisme, adaptés à h et envoyant dans M la variété de niveau choisie dans le modèle; il existe une application continue

$$\pi : \mathfrak{P}_M \rightarrow \mathcal{E}l,$$

où $\mathcal{E}l$ désigne l'espace des chemins élémentaires d'élimination; cette application induit une surjection de $\pi_0(\mathfrak{P}_M)$ sur $\pi_0(\mathcal{E}l)$; donc, quitte à

faire une homotopie sur ε_0 et sur ε_1 , on peut supposer qu'il existe $q_0, q_1 \in \mathfrak{P}_M$ tels que

$$\varepsilon_0 = \pi(q_0) \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 = \pi(q_1).$$

Enfin par restriction d'un élément de \mathfrak{P}_M au couple standard des nappes du modèle, on définit une fibration localement triviale

$$\mathfrak{P}_M \rightarrow \mathcal{N}_M.$$

Désignons par (D_0, A_0) et (D_1, A_1) les couples de nappes associés aux plongements q_0 et q_1 . On peut, par une homotopie, modifier q_1 (et aussi ε_1) de telle sorte que $A_0 = A_1$. Dans la suite, nous noterons $S_0 = \partial D_0$, $S_1 = \partial D_1$ et T_0 la sphère transverse, bord de A_0 .

3.2. — Nous allons considérer des chemins de fonctions $\{g_t | t \in [0, 1]\}$, d'origine h , et ayant même restriction que h au cobordisme inférieur $h^{-1}([0, h(M)])$. Soit $\{c_t | t \in [0, 1]\}$ un chemin dans $L \times [0, 1]$ tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, c_t soit le point critique le plus bas au-dessus de M de la fonction g_t et qu'il soit d'indice $i + 1$; cela revient à dire que le chemin $\{g_t | t \in [0, 1]\}$ a un graphique du type suivant (fig. 8) :

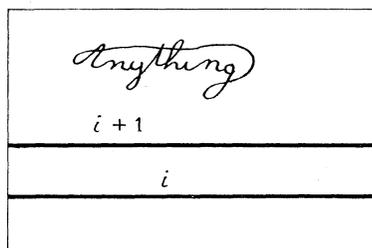


Fig. 8.

Soit maintenant un chemin $\{\psi_t | t \in [0, 1]\}$ dans $\text{Plgt} [(D^{i+1}, S^i), (Q, M)]$, où Q est le cobordisme supérieur $h^{-1}([h(M), 1])$; notons $D_t = \psi_t(D^{i+1})$.

3.2.1. DÉFINITION. — Nous dirons, dans cette situation, que le chemin $\{D_t | t \in [0, 1]\}$ est un chemin de nappes descendantes pour le chemin $\{g_t | t \in [0, 1]\}$, si, pour tout $t \in [0, 1]$, D_t est une nappe descendante du point c_t pour la fonction g_t .

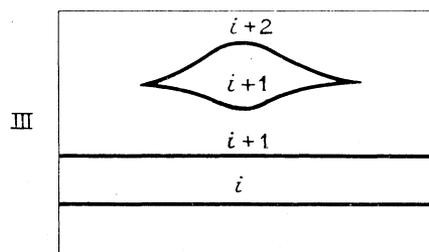
3.2.2. Remarque. — Un chemin de disques, qui n'est pas un lacet, peut être un chemin de nappes descendantes pour un lacet de fonctions. Par exemple, il existe un chemin de disques $\{\Delta_t | t \in [0, 1]\}$, tel que $\Delta_0 = D_0$, $\Delta_1 = D_1$ et qui est un chemin de nappes descendantes pour le lacet trivial en h : en effet, l'espace des nappes descendant d'un point critique c jusqu'à une variété de niveau M , telle que l'intervalle $[h(M), c[$

ne contienne aucune valeur critique, est un espace contractible [1; Appendice, prop. 4].

3.3. LEMME. — Il existe un lacet de fonctions $\omega = \{g_t | t \in [0, 1]\}$, d'origine h , ayant le graphique III (fig. 9) et possédant un chemin $\delta = \{D_t | t \in [0, 1]\}$ de nappes descendantes avec les deux propriétés suivantes :

(1) l'origine de δ est D_0 et son extrémité est D_1 , où D_0 et D_1 sont les nappes descendantes associées aux plongements adaptés q_0 et q_1 .

(2) pour tout $t \in [0, 1]$, ∂D_t coupe T_0 transversalement et en un seul point.



(graphique de ω)

Fig. 9.

Le théorème 3.1 découle alors immédiatement du corollaire du lemme 3.

3.4. COROLLAIRE. — Le chemin composé $\varepsilon_0^{-1} \star \omega \star \varepsilon_1$, d'origine f_0 et d'extrémité f_1 , dont le graphique est IV (fig. 10), est déformable, relativement à ses extrémités, en un chemin de graphique II (fig. 7).

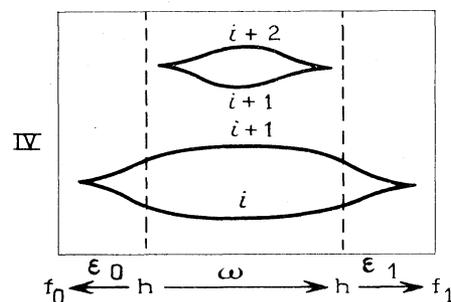


Fig. 10.

De plus, on peut choisir la déformation de telle sorte que le type topologique du graphique reste le même jusqu'à disparition de sa décomposante inférieure.

Preuve du corollaire. — D'après le lemme 3.3, il existe une famille continue D_t de D_0 à D_1 , telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, D_t soit une nappe

descendant du point critique c_i pour la fonction g_i et que ∂D_i coupe T_0 transversalement et en un seul point dans M ($\omega = \{g_i | t \in [0, 1]\}$) et c_i est le point critique de la fonction g_i , le plus bas au-dessus de M).

Supposons que $g_i(M) = 1/2$ et notons

$$\text{Diff}(Q \bmod M) \text{ (resp. } \text{Diff}([1/2, 1] \bmod 1/2))$$

l'espace des difféomorphismes de Q (resp. de $[1/2, 1]$), C^∞ -tangents à l'identité le long de M (resp. de $\{1/2\}$). Notons $\mathcal{U} = L \times [1/4, 3/4]$ et supposons que l'image par q_0 du modèle standard d'élimination soit incluse dans \mathcal{U} (en particulier, les points critiques c, c' de la fonction h sont dans \mathcal{U}). Nous allons prouver qu'il existe un chemin $\{k_t | t \in [0, 1]\}$ dans $\text{Diff}(Q \bmod M)$ et un chemin $\{l_t | t \in [0, 1]\}$ dans $\text{Diff}([1/2, 1] \bmod 1/2)$, tous deux commençant à l'identité et tels que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$(\star) \quad g_t k_t | \mathcal{U} \cap Q = l_t h | \mathcal{U} \cap Q.$$

Tant que g_t appartient à la même strate de fonctions de Morse excellentes que h , c'est une conséquence du théorème classique de stabilité [1; Appendice, corollaire 1]. De toutes façons, on peut se ramener à cette situation, car il existe une famille continue L_t de variétés de niveau des fonctions g_t , telles que $g_t(L_t) < 1$ et que $L_t \cup M$ borde un cobordisme élémentaire Q_t , difféomorphe à Q , sur lequel g_t n'a qu'un seul point critique c_t . Si l'on pose $Q_0 = \mathcal{U} \cap Q$, on pourra choisir k_t tel que $k_t(\mathcal{U} \cap Q) = Q_t$.

Le disque D_t , descendant de c_t et adapté à g_t , est nécessairement inclus dans Q_t et alors, d'après (\star) , $\{k_t^{-1}(D_t) | t \in [0, 1]\}$ est une famille de nappes descendant du point critique $c_0 \equiv c$ pour la fonction $g_0 \equiv h$; de plus, $\partial(k_t^{-1}(D_t)) = \partial D_t$ et donc $k_t^{-1}(D_t)$ forme avec la nappe A_0 montant de c' un couple de nappes en bonne position. Puisque $\mathfrak{P}_M \rightarrow \mathcal{X}_M$ est une fibration localement triviale, il existe dans \mathfrak{P}_M un relèvement $\{q'_t | t \in [0, 1]\}$, d'origine $q'_0 = q_0$, au-dessus de $\{(k_t^{-1}(D_t), A_0)\}$; on peut imposer en outre que q'_t plonge le modèle d'élimination dans \mathcal{U} . Alors $\{\pi(q'_t)\}$ est une famille à un paramètre de chemins élémentaires d'élimination de la paire (c, c') , issus de h ; on a $\varepsilon_0 = \pi(q'_0)$.

En prolongeant k_t par l'identité sur le cobordisme inférieur et l_t par l'identité sur $[0, 1/2]$, on définit $\bar{k}_t \in \text{Diff}(L \times [0, 1])$ et $\bar{l}_t \in \text{Diff}([0, 1])$. Rappelons que \mathfrak{P}_M est un sous-espace de

$$\text{Plgt}(D^{n+1}, L \times]0, 1[) \times \text{Plgt}(D^1,]0, 1[).$$

Si $q = (q_1, q_2)$ est un élément de cet espace et si

$$(k, l) \in \text{Diff}(L \times [0, 1]) \times \text{Diff}([0, 1]),$$

on note $(k, l) \circ q = (kq_1, lq_2)$. On constate alors, d'après (\star) , que $(\bar{k}_i, \bar{l}_i) \circ q'_i$ est un plongement adapté à la fonction g_i . On a donc une famille continue ε'_i de chemins d'élimination de la paire (c_i, c') pour la fonction g_i ; l'origine de cette famille est le chemin ε_0 .

On observe aussi que les deux plongements adaptés à h, q_1 et $(\bar{k}_1, \bar{l}_1) \circ q'_1$, sont au-dessus du couple (D_1, A_0) de \mathcal{X}_M , c'est-à-dire qu'ils appartiennent à la même fibre de la fibration $\mathfrak{P}_M \rightarrow \mathcal{X}_M$. Or cette fibre est connexe [1; chap. III, 2.1, propriété 3c]; on en déduit que les chemins d'élimination ε'_1 et ε_1 sont joignables dans l'espace des chemins élémentaires d'élimination de la paire (c, c') pour la fonction h .

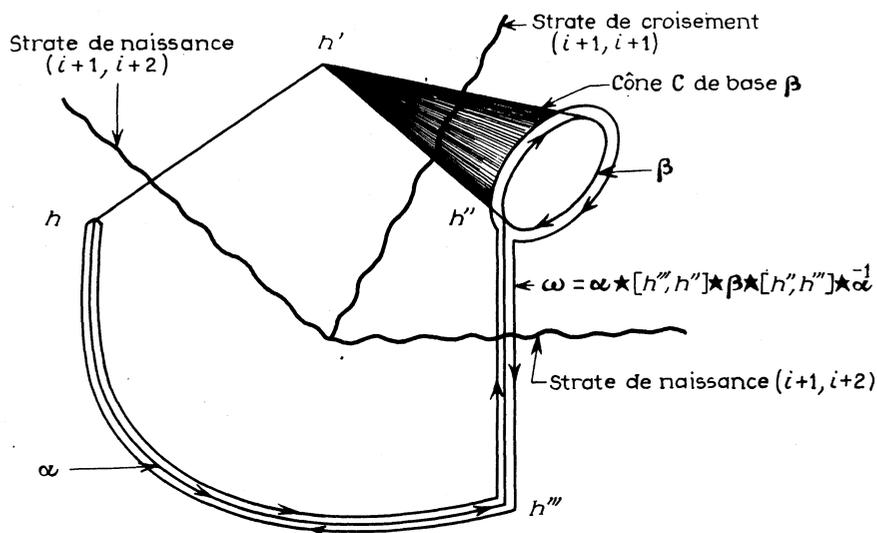
Finalement, on a une famille à un paramètre $\{\varepsilon_t | t \in [0, 1]\}$ de chemins dans l'espace fonctionnel, joignant les deux chemins donnés ε_0 et ε_1 et tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, ε_t soit un chemin d'élimination de la paire (c_t, c') pour la fonction g_t .

C. Q. F. D.

3.5. DÉMONSTRATION DU LEMME 3.3.

3.5.1. *Construction du chemin δ .* — Rappelons qu'en 2.4.1 nous avons défini, par translation le long d'un champ de vecteurs normal à D_0 , un chemin τ dans $\text{Plgt}[(D^{i+1}, S^i), (Q, M)]$, d'origine ψ_0 et d'extrémité ψ'_0 [on a noté $D'_0 = \psi'_0(D^{i+1})$ et $\varphi'_0 = \psi'_0|S^i$]. Soit $\{\Phi_t | t \in [0, 1]\}$ un chemin dans $\text{Plgt}[(D^{i+1}, S^i), (Q, M)]$ ayant pour image un chemin de disques $\{\Delta_t | t \in [0, 1]\}$, qui possède la propriété énoncée dans la remarque 3.2.2; en particulier, $\Delta_0 = D_0$ et $\Delta_1 = D_1$. Si λ désigne la classe dans $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi'_0)$ de la restriction à S^i du chemin $\tau^{-1} \star \{\Phi_t | t \in [0, 1]\}$, le lemme fondamental (propos. 2.5) assure l'existence d'un lacet $\{\psi'_t | t \in S^1\}$ dans $[\text{Plgt}(D^{i+1}, S^i), (Q, M)]$ dont le bord $\{\psi'_t | S^i; t \in S^1\}$ appartient à la classe λ , et qui possède d'autres propriétés que nous rappellerons en temps utile. Appelons $\{\psi_t | t \in [0, 1]\}$ le composé $\tau \star \{\psi'_t\} \star \tau^{-1} \star \{\Phi_t\}$; le chemin de disques $\delta = \{\psi_t(D^{i+1}) | t \in [0, 1]\}$ vérifie la condition (1) du lemme 3.3, mais non la condition (2); on a seulement le fait que $\{\psi_t | S^i; t \in [0, 1]\}$ représente l'élément trivial de $\pi_1^{\text{rel } T_0}(\text{Plgt}(S^i, M), \varphi_0)$. Nous verrons en 3.5.3 comment modifier δ pour satisfaire aux deux conditions requises, tout en restant un chemin de nappes descendantes pour le chemin de fonctions ω que nous construisons maintenant.

3.5.2. *Construction de ω .* — On pourra suivre la construction du lacet ω sur la figure 11 qui représente la situation dans l'espace fonctionnel.



(Les chemins rectilignes sont des chemins élémentaires de naissance ou de croisement.)

Fig. 11.

On voit bien sur la figure 11 que le graphique de ω sera

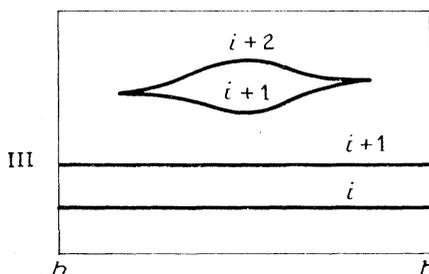


Fig. 12.

Nous allons maintenant construire chacun des éléments de la figure 11.

(i) *Construction du chemin élémentaire de naissance $[h, h']$ (fig. 13) :*

Posons $D'_i = \psi'_i(D^{i+1})$. Rappelons que, pour tout $t \in [0, 1]$, m est l'unique point critique (maximum) de $h|D'_i$ et qu'au voisinage de m les disques D'_i ont en commun un petit disque \mathfrak{D} (cf. propos. 2.5). Plongeons alors un modèle de naissance B au-dessus de c pour faire apparaître un couple de points critiques d'indices $i+1$ et $i+2$. On s'arrange pour que l'extrémité d'un chemin élémentaire de naissance soit une fonction h' admettant comme points critiques d'indice $i+1$ les points c et m et que le disque \mathfrak{D}

soit adapté à h' . On peut même supposer que B est suffisamment « étroit » pour que $B \cap D'_0 \subset \mathcal{D}$; alors, pour tout $t \in [0, 1]$, D'_t est une nappe descendante pour h' permettant le croisement des points c et m .

(ii) *Construction du cône \mathcal{C}* : Le lacet $\{\psi_t^{-1}\}$ dans $\text{Plgt}[(D^{i+1}, S^i), (Q, M)]$ se relève évidemment en un lacet dans l'espace des plongements du modèle de Morse adaptés à la fonction h' et relatifs au point critique m . Puisque les nappes descendantes ont leur bord dans M , c'est-à-dire en-dessous du niveau $h'(c)$, un tel lacet dans l'espace des plongements du modèle de

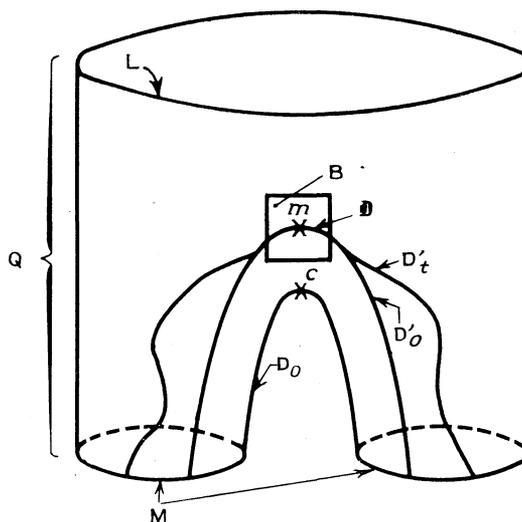


Fig. 13.

Morse définit un lacet dans l'espace des chemins de croisement de la paire (m, c) ; ces chemins de croisement, qui sont des chemins élémentaires (par définition), sont les génératrices du cône \mathcal{C} et leurs extrémités décrivent un lacet β . Le cône admet une génératrice-base, qui est le chemin élémentaire associé au modèle de Morse dont l'image de la nappe descendante est D'_0 ; son extrémité est notée h'' et pointe le lacet β .

(iii) *Construction du chemin d'élimination $[h'', h''']$ et du chemin α* : On observe que le chemin $[h, h'] \star [h', h''']$ a son support dans un voisinage de Morse de la fonction h , relatif au point critique c ; D_0 est la nappe descendante associée à ce voisinage. En transportant la métrique riemannienne du modèle par un paramétrage de ce voisinage de Morse, on y définit une métrique riemannienne pour laquelle D_0 est la nappe de gradient de h . On peut supposer que le point m se trouve sur la nappe de gradient ascendante et que le cylindre de naissance est un cylindre de gradient.

Le support du chemin élémentaire de croisement $[h', h'']$ peut être choisi dans un voisinage arbitrairement petit du disque D'_0 . On voit alors que, pour la fonction h'' , la nappe de gradient montante de c et celle descendante du point critique d'indice $i+2$ forment un couple en bonne posi-

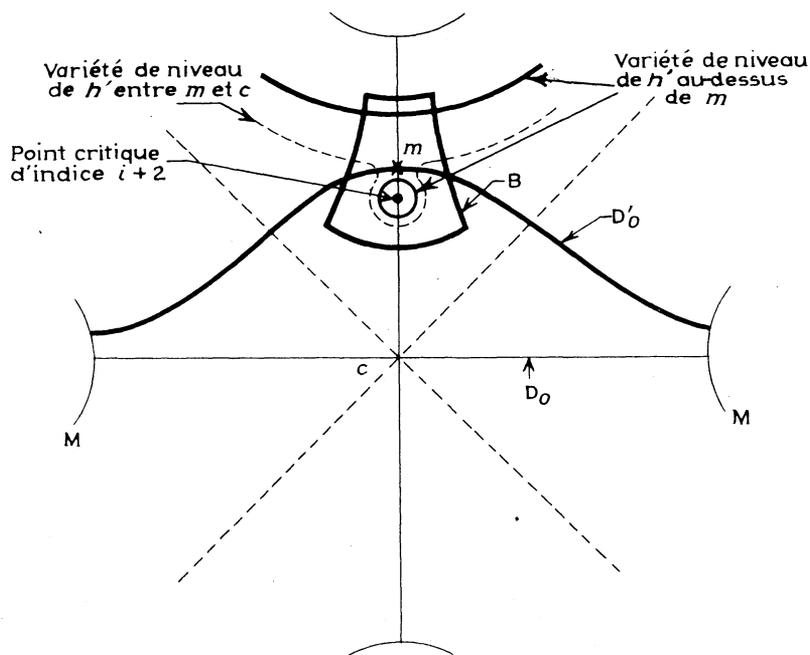


Fig. 14.

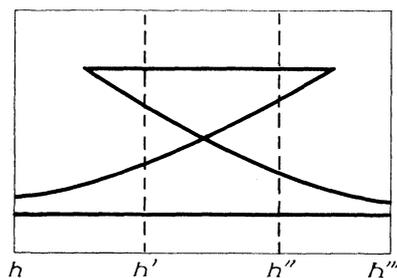


Fig. 15.

tion. Il y a donc un chemin d'élimination aboutissant à une fonction h''' admettant m pour seul point critique au-dessus de M . Le graphique du chemin $[h, h', h'', h''']$ est un graphique en queue d'aronde (fig. 15).

En fait il s'agit du chemin en queue d'aronde standard, dont les extrémités h et h''' appartiennent à la même strate de fonctions de Morse excel-

lentes [1; chap. IV, § 4]; α est alors un chemin joignant h et h''' dans cette strate.

On remarque que D'_0 est une nappe descendante pour h''' (et d'ailleurs pour toutes les fonctions du chemin élémentaire $[h'', h''']$). On peut choisir α tel que τ' soit un chemin de nappes descendantes pour le chemin α , où τ' est le chemin des disques, images des plongements du chemin τ (2.4.1 et 3.5.1); ceci se démontre en relevant τ dans l'espace des difféomorphismes du modèle de Morse, puis en remarquant que, d'après les hypothèses faites sur τ , les deux fonctions $h''\psi'_0$ et $h\psi_0$, définies sur D^{i+1} , ont les mêmes surfaces de niveau, ce qui permet enfin d'appliquer la proposition 1 de l'appendice de [1], qui est une conséquence de la stabilité des fonctions de Morse.

Comme sur la figure 11, on définit

$$\omega = \alpha \star [h''', h''] \star \beta \star [h'', h'''] \star \alpha^{-1} \star \text{Cte}(h),$$

où $\text{Cte}(h)$ désigne le lacet constant en h . Le lacet ω admet comme chemin de nappes descendantes

$$\delta = \tau' \star \text{Cte}(D'_0) \star \{D'_i\}^{-1} \star \text{Cte}(D'_0) \star \tau'^{-1} \star \{\Delta_i\},$$

chaque terme de la décomposition de δ étant un chemin de nappes descendantes pour le terme correspondant de la décomposition de ω .

3.5.3. *Fin de la démonstration.* — Pour l'instant nous avons un lacet de fonctions $\omega = \{g_t | t \in [0, 1]\}$ et un chemin de nappes descendantes $\delta = \{D_t | t \in [0, 1]\}$ avec la propriété suivante : le chemin $\{\partial D_t | t \in [0, 1]\}$ est homotope, relativement à ses extrémités, dans l'espace des sphères de M , à un chemin $\{S_t | t \in [0, 1]\}$, tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, S_t coupe T_0 transversalement et en un seul point. Autrement dit, étant donné $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $h^{-1}([1/2 - \varepsilon, 1/2])$ soit un produit, il existe une famille à un paramètre $\{A_t | t \in [0, 1]\}$ d'anneaux $S^i \times [1/2 - \varepsilon, 1/2]$, plongés dans $h^{-1}(1/2 - \varepsilon, 1/2)$, tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\partial A_t = \partial D_t \cup S_t$, avec $\partial D_t \subset h^{-1}(1/2)$ et $S_t \subset h^{-1}(1/2 - \varepsilon)$, et que $h|_{A_t}$ soit sans point critique.

Alors, si on prend maintenant comme variété intermédiaire $M = h^{-1}(1/2 - \varepsilon)$, on constate que les disques $D_t \cup A_t$ sont adaptés aux fonctions g_t et que leurs bords dans M coupent T_0 transversalement et en un seul point.

C. Q. F. D.

Les graphiques du chemin initial entre f_0 et f_1 et du chemin donné par la proposition 3.1 ont le même type topologique (voir fig. 16).

Or au paragraphe 1, on a défini une obstruction à déformer un tel chemin pour rendre vide son graphique, sans jamais modifier le type topologique de ce dernier, sauf à la dernière étape (théor. 1.4). Donc, à ces deux chemins correspondent, si $3 \leq i \leq n-4$, deux obstructions habitant dans le même groupe; nous allons montrer qu'elles sont égales au signe près. Par conséquent, par notre procédé de translation des indices, nous n'avons pas progressé dans la résolution du problème de l'unicité des éliminations au sens de 1.1.

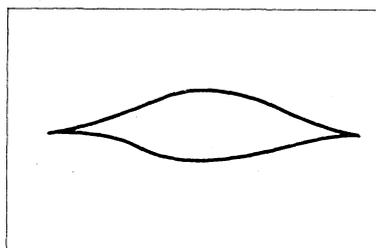


Fig. 16.

3.6. CALCUL DE L'OBSTRUCTION APRÈS TRANSLATION DES INDICES. (esquisse de démonstration).

3.6.1. Soient L^n une variété orientée, Δ_0^{n-1} et P_0^{i+1} deux disques, dans L , se coupant transversalement suivant un segment $[x_0, y_0]$, où

$$x_0 = \partial\Delta_0 \cap P_0 \in \text{int}P_0 \quad \text{et} \quad y_0 = \Delta_0 \cap \partial P_0 \in \text{int}\Delta_0.$$

On note $\theta_0 = \partial\Delta_0$ et $\Sigma_0 = \partial P_0$ (fig. 17).

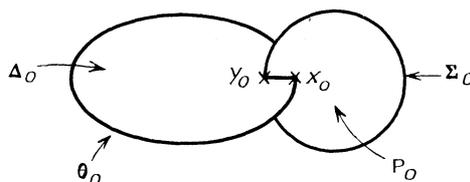


Fig. 17.

Soit $\{f_t | t \in S^1\}$ un lacet dans $\text{Plgt}(S^i, L - \theta_0)$ d'origine f_0 , avec $f_0(S^1) = \Sigma_0$. Si $3 \leq i \leq n-4$, on peut définir comme au chapitre 1 une obstruction $\lambda \in \Gamma \equiv (\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(L - \theta_0))^{\pi_1(L - \theta_0) - 1}$ à « réduire l'intersection » du lacet $\{f_t(S^1) | t \in S^1\}$ avec $\text{int}\Delta_0$, i.e. à déformer $\{f_t | t \in S^1\}$ en un lacet $\{f'_t | t \in S^1\}$ de même origine, qui vérifie

$$\forall t \in S^1, f'_t(S^1) \cap \text{int}\Delta_0 = \text{un point.}$$

Supposons le lacet $\{f_t | t \in S^1\}$ contractible dans l'espace $\text{Plgt}(S^i, L)$. Par extension des isotopies, il existe une 2-isotopie $F: L \times D^2 \rightarrow L$, telle que, pour tout $t \in \partial D^2$, $(F|_{\Sigma_0 \times \{t\}}) \circ f_0 = f_t$ et $F|_{L \times \{0\}} = \text{Id}$. Soit $G: L \times D^2 \rightarrow L$ la 2-isotopie définie par $G|_{L \times \{u\}} = (F|_{L \times \{u\}})^{-1}$, pour tout $u \in D^2$. Soit $g_0: S^{n-i-1} \rightarrow L - \Sigma_0$ un paramétrage de θ_0 ; on considère dans l'espace $\text{Plgt}(S^{n-i-1}, L - \Sigma_0)$ le lacet $\{(G|_{\theta_0 \times \{t\}}) \circ g_0 | t \in \partial D^2\}$; l'obstruction λ' à réduire son intersection avec $\text{int} P_0$ est un élément du groupe $(\mathbf{Z}_2 \times \pi_2(L - \Sigma_0))^{\{[\pi_1(L - \Sigma_0)]^{-1}\}}$, que l'on identifie à Γ .

LEMME. — Dans cette situation, $\lambda' = B(\lambda)$, où B est l'involution de Γ définie en 1.3.

Démonstration. — Si F a été choisie générique, il existe un disque $\Delta'_0 \subset \text{int} \Delta_0$ tel que $F(P_0 \times D^2) \cap \Delta'_0 = \emptyset$. Soit $\Lambda: L \times I \rightarrow L$ une isotopie prolongeant une rétraction de Δ_0 sur Δ'_0 ; λ est aussi l'obstruction à réduire l'intersection des deux familles à un paramètre $F|_{\Sigma_0 \times \partial D^2}$ et $\Lambda|_{\theta_0 \times I}$, étant entendu que $\Lambda(\theta_0 \times \partial I)$ doit rester disjoint de $F(\Sigma_0 \times \partial D^2)$. Soit $H: L \times I \rightarrow L$ l'isotopie définie par $H|_{L \times \{u\}} = (\Lambda|_{L \times \{u\}})^{-1}$. Alors λ est l'obstruction à réduire l'intersection avec la sphère θ_0 de la famille à deux paramètres

$$\{H_u \circ F_t(\Sigma_0) | u \in I, t \in S^1\}, \quad \text{où } H_u = H|_{L \times \{u\}} \quad \text{et} \quad F_t = F|_{L \times \{t\}}.$$

Remarquons que $H_1 \circ F|_{\Sigma_0 \times D^2}$ est une contraction dans $\text{Plgt}(S^i, L - \Delta_0)$ du lacet $\{H_1 \circ F_t|_{\Sigma_0}; t \in S^1\}$. On en déduit que λ est l'obstruction à réduire l'intersection avec θ_0 de la famille $F'|_{\Sigma_0 \times (D^2 \cup \partial D^2 \times I)}$, où $F': L \times (D^2 \cup \partial D^2 \times I) \rightarrow L$ est définie par $F'|_{L \times D^2} = H_1 \circ F$ et, pour $(t, u) \in \partial D^2 \times I$, $F'|_{L \times \{t\} \times \{u\}} = H_u \circ F_t$. Or F et F' sont des 2-isotopies isotopes rel ∂D^2 .

Enfin, λ est l'obstruction à réduire l'intersection de $F|_{\Sigma_0 \times D^2}$ avec la sphère θ_0 . De même, λ' est l'obstruction à réduire l'intersection de $G|_{\theta_0 \times D^2}$ avec la sphère Σ_0 . Le résultat découle alors du lemme 1.3, dont la démonstration ne fait pas intervenir le nombre des paramètres.

3.6.2. Considérons la fonction h' introduite en 3.5. On note m' son point critique d'indice $i + 2$ et L^c une variété de niveau entre c et m' (fig. 18). Pour une métrique riemannienne fixée, P_0 (resp. Δ_0) est l'intersection avec L de l'ensemble des lignes de gradient issues de m' (resp. c'); Σ_0 (resp. θ_0) est alors le bord dans L de la nappe de gradient descendant (m de resp. montant de c).

Avec les notations de 3.5, le lacet $\{\psi_t(D^{i+1}) \mid t \in S^1\}^{-1}$ de nappes descendantes pour la fonction h' est choisi de telle sorte que chaque nappe soit de gradient en-dessous de L , et son intersection avec L est un lacet contractible de i -sphères dans L ; l'obstruction à réduire (dans $L - \theta_0$) son intersection avec $\text{int } \Delta_0$ est l'élément $-\lambda \in \Gamma$.

Par dualité, on construit un lacet Ω de nappes montant du point c , adaptées à h' , de gradient au-dessus de L . Le cône \mathcal{C}' , dont les génératrices

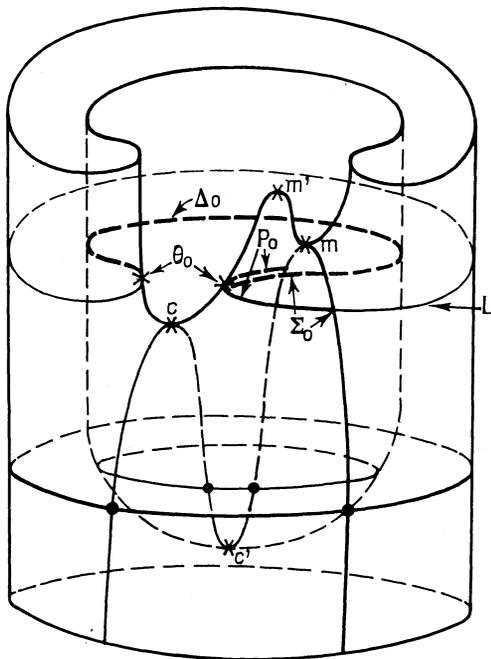


Fig. 18.

sont les chemins élémentaires de croisement associés à chacune de ces nappes, est homotope au cône \mathcal{C} , construit en 3.5.2.

D'après le lemme précédent, en intersectant ces nappes avec L , on obtient un lacet de $(n - i - 1)$ -sphères de $L - \Sigma_0$, pour lequel l'obstruction à réduire son intersection avec P_0 est $B(-\lambda)$. Soit β' la base de \mathcal{C}' ; le lacet Ω est un lacet de nappes montantes pour le lacet de fonctions β' . L'obstruction à le mettre en bonne position par rapport à la nappe de gradient descendant de m' est $B(-\lambda)$.

Par une nouvelle dualité, on peut fixer la nappe montant de c et l'on trouve alors un chemin de nappes descendant de m' , adapté au lacet de

fonctions β' . L'obstruction à mettre ce chemin de nappes en bonne position est l'obstruction à rendre vide le graphique

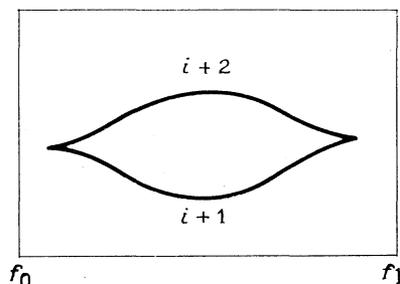


Fig. 19.

qui est donc $B(B(-\lambda)) = -\lambda$.

4. Connexité de \mathcal{F}_i .

4.1. THÉORÈME. — Soit (W^{n+1}, V_0^n, V_1^n) un h -cobordisme compact orientable; si $n \geq 7$ et si $3 \leq i \leq n - 3$, l'espace $\mathcal{F}_i(W)$, défini en 0.1, est connexe par arcs.

Dans ce paragraphe, nous démontrons ce théorème modulo quelques lemmes, dont certains ont été démontrés par Cerf, et dont les autres font l'objet des deux derniers paragraphes. La technique utilisée pour se ramener à ces lemmes est due à Cerf; nous en rappelons ici l'essentiel; les détails que nous omettons se trouvent dans [1; chap. V].

On utilise une filtration faisant intervenir les espaces suivants ⁽¹⁰⁾ : $\mathcal{F}_{[i,j];k}^0$ est le sous-espace de \mathcal{F} formé des fonctions de Morse excellentes et ordonnées, n'ayant d'indices critiques que dans l'intervalle $[i, j]$, et ayant au plus k points critiques d'indice i ; $\mathcal{F}_{[i,j];k}$ est l'intérieur de l'adhérence de $\mathcal{F}_{[i,j];k}^0$ dans \mathcal{F} ; en particulier, $\mathcal{F}_{[i-1, i+1];0} = \mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_{[0, n+1];\infty} = \mathfrak{U}$. On a toujours $\mathcal{F}_{[i-1, j];0} = \mathcal{F}_{[i, j];\infty}$.

Cerf a démontré que, sans aucune hypothèse sur W , \mathfrak{U} est connexe par arcs [1; chap. V, th. I]. A partir de là, on démontre par récurrence que tous les espaces de la filtration suivante, où $0 \leq j \leq n - i - 1$, sont

⁽¹⁰⁾ Pour alléger les notations, on remplace $\mathcal{F}_i(W)$, $\mathcal{F}(W)$, $\mathfrak{U}(W)$, ... par \mathcal{F}_i , \mathcal{F} , \mathfrak{U} , ...; tous ces espaces ont été définis en 0.1.

connexes par arcs si $n \geq 7$ et $i \geq 3$:

$$\mathfrak{H} = \mathcal{F}_{[0, n+1]; \infty} \supset \dots \supset \mathcal{F}_{[j, n+1]; k} \supset \mathcal{F}_{[j, n+1]; k-1} \supset \dots \supset \mathcal{F}_{[n-i-1, n+1]; 0} = \mathcal{F}_{[n-i, n+1]; \infty}.$$

La transformation $f \mapsto 1 - f$ établit un homéomorphisme de $\mathcal{F}_{[n-i, n+1]; \infty}$ sur $\mathcal{F}_{[0, i+1]; \infty}$. Alors, par récurrence sur la filtration suivante, où $0 \leq j \leq i-1$, on démontre que tous les espaces de cette filtration, et en particulier \mathcal{F}_i , sont connexes par arcs si $n \geq 7$ et $i \leq n-3$:

$$\mathcal{F}_{[0, i+1]; \infty} \supset \dots \supset \mathcal{F}_{[j, i+1]; k} \supset \dots \supset \mathcal{F}_{[i-1, i+1]; 0} = \mathcal{F}_i.$$

Pour les deux filtrations précédentes, l'argument de récurrence est le suivant : si $n \geq 7$, $i \leq n-4$ et $j \geq i+2$, il existe une famille de générateurs ⁽¹¹⁾ γ de $\pi_1(\mathcal{F}_{[i, j]; k}, \mathcal{F}_{[i, j]; k-1}^0)$ ayant chacun la propriété (P) :

(P) Les extrémités de γ , f_0 et $f_1 \in \mathcal{F}_{[i, j]; k-1}^0$, sont jointes par un chemin dans $\mathcal{F}_{[i, j]; k-1}$.

Pour construire cette famille de générateurs, Cerf utilise le fait que chaque point de $\mathcal{F}_{[i, j]; k}^0$ est l'origine d'un chemin générique (dit de Smale) d'extrémité dans $\mathcal{F}_{[i, j]; k-1}^0$ et de graphique :

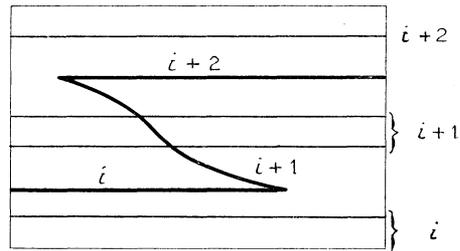


Fig. 20.

Une famille de générateurs est alors obtenue en prenant les chemins relatifs composés de trois parties : l'opposé d'un chemin de Smale, un chemin élémentaire traversant une strate de codimension 1 dans l'intérieur de $\mathcal{F}_{[i, j]; k}$ et un chemin de Smale. A ces chemins il faut ajouter les chemins composés de deux parties : un chemin élémentaire de naissance d'un couple $(i, i+1)$ suivi d'un chemin de Smale, ou l'opposé d'un chemin de Smale suivi d'un chemin élémentaire d'élimination d'un couple $(i, i+1)$.

⁽¹¹⁾ Une famille de chemins relatifs est génératrice si tout chemin relatif est homotope à un composé de chemins de la famille.

On se ramène alors facilement à un système de générateurs dont les graphiques sont des cinq types représentés sur la figure 21.

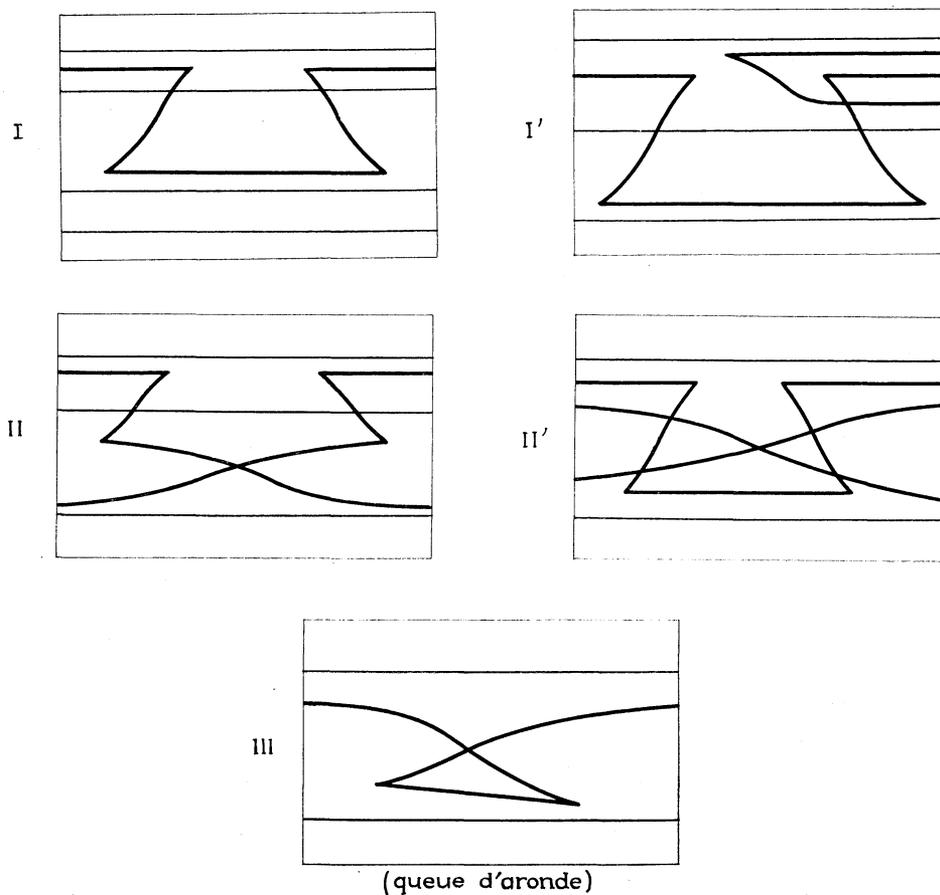


Fig. 21.

Il reste à montrer que chacun de ces générateurs possède la propriété (P). Rappelons que, dans le cas où W est simplement connexe, Cerf montre qu'ils se déforment, à extrémités fixes et à travers $\mathcal{F}_{[i,j];k}$, en chemins dans $\mathcal{F}_{[i,j];k-1}$, ce qui est plus fort que (P).

La première étape consiste à se ramener à l'étude des seuls générateurs du type III (queue d'aronde) à l'aide des lemmes suivants que nous résumons sur un tableau (fig. 22).

Les trois premiers lemmes (et le lemme du bec dans le cas simplement connexe) sont démontrés par Cerf. Au paragraphe 5 nous prouvons le lemme du bec dans le cas général. Nous ne développons pas ici cette

première étape, qui est rédigée par Cerf [1, chap. V, § 2] sans aucune hypothèse de simple connexité; signalons cependant que nous sommes responsables d'une astuce permettant de traiter les générateurs du type I, sans avoir à utiliser le « lemme de la base », qui justement est faux dans le cas non simplement connexe.

	Concerne la possibilité de déformer le graphique ci-dessous	en le graphique ci-dessous	Conditions suffisantes de validité
Lemme d'unicité des naissances			
Lemme d'apparition des becs			$k \leq n$
Lemme du triangle			$i \leq n - 1$
Lemme du bec (suppression de bec)			$i \leq n - 2$ $n \geq 5$

Fig. 22.

La deuxième étape consiste à montrer que les générateurs en queue d'aronde possèdent la propriété (P); ceci est l'objet du paragraphe 6 et fait intervenir les résultats des trois premiers paragraphes; c'est donc là que la condition $n \geq 7$ apparaît.

Remarque. — Les chemins relatifs les plus simples dans $(\mathcal{F}_{[i,j];1}, \mathcal{F}_{[i,j];0})$ sont ceux de graphique

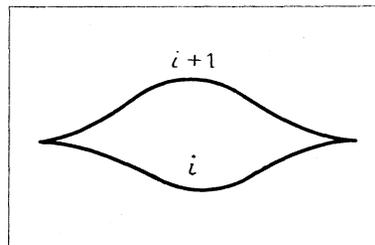


Fig. 23.

Le lemme de translation des indices (théor. 3.1) dit que si $n \geq 7$, $i \leq n - 4$ et $j \geq i + 2$, un tel chemin possède la propriété (P).

5. Le lemme du bec.

Soit (W^{n+1}, V^n, V'^n) un cobordisme élémentaire d'indice i , compact, orientable, de dimension $n + 1$. Considérons dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ un « chemin en bec », c'est-à-dire un chemin générique $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$ de graphique :

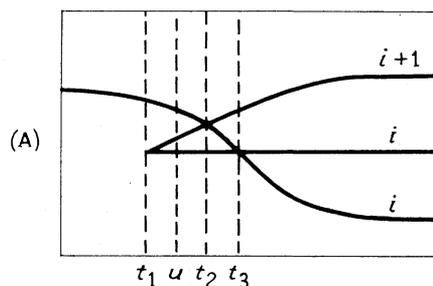


Fig. 24.

Ce chemin rencontre trois strates de codimension 1 de la stratification de $\mathcal{F}(W)$: f_{t_1} appartient à une strate de naissance d'un couple de points critiques d'indices i et $i + 1$; f_{t_2} (resp. f_{t_3}) appartient à une strate de croisement d'un couple de points critiques $(i, i + 1)$ [resp. (i, i)].

5.1. PROPOSITION (lemme du bec). — Si $n \geq 5$ et si $i \leq n - 2$, un « chemin en bec » se déforme relativement à ses extrémités en un chemin ayant le graphique :

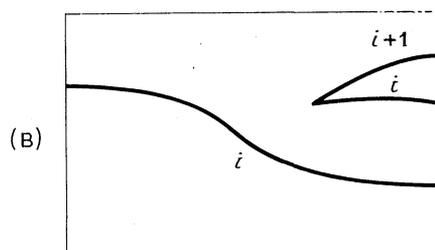


Fig. 25.

De plus, on peut s'arranger pour qu'il n'existe qu'une seule valeur de la déformation pour laquelle le chemin rencontre une strate de codimension 2 (naissance à un niveau critique).

Démonstration. — Considérons sur le « chemin en bec » une fonction f_u , $t_1 < u < t_2$ (graphique A); elle a trois points critiques que nous notons, dans l'ordre décroissant des valeurs, $c_1(i)$, $c_2(i+1)$, $c_3(i)$. Soit \mathcal{C} l'espace des chemins issus de f_u réalisant successivement le croisement de c_1 avec c_2 , puis avec c_3 . Nous démontrerons (prop. 5.2) que, dans les conditions de la proposition 5.1, cet espace est connexe; on se ramène donc à montrer qu'il existe un chemin particulier $\lambda \in \mathcal{C}$ tel que la proposition soit vraie pour le chemin $\{f_t\}_{t \in [0, u]} \star \lambda$; ce dernier point est facile: on fait décrire à un cylindre de naissance un chemin traversant le niveau critique de c_1 ; voir les détails dans [1; chap. IV, § 3, prop. 3 et 4].

C. Q. F. D.

5.2. PROPOSITION. — Si $n \geq 5$ et $i \leq n - 2$, l'espace \mathcal{C} des chemins de double croisement est connexe par arcs.

Démonstration. — Soit L (resp. M) une variété de niveau de la fonction f_u , située entre c_1 et c_2 (resp. entre c_2 et c_3). Pour une métrique riemannienne fixée, on peut supposer que c_2 et c_3 sont en position de s'éliminer, c'est-à-dire que, dans M, les sphères S_0^i et T_0^{n-i} se coupent transversa-

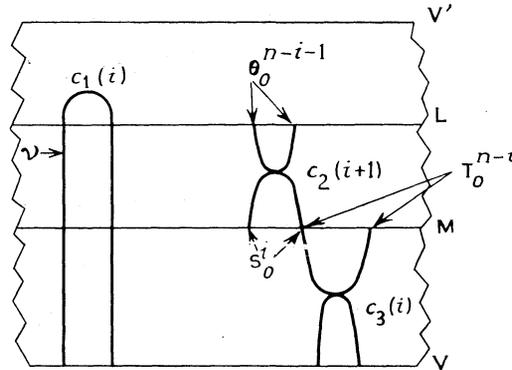


Fig. 26.

lement et en un seul point, où S_0^i désigne le bord de la nappe de gradient descendant de c_2 et où T_0^{n-i} désigne le bord de la nappe de gradient montant de c_3 . Enfin, nous notons θ_0^{n-i-1} le bord dans L de la nappe de gradient montant de c_2 (fig. 26).

Les points c_1 et c_3 sont inclus dans un cylindre de naissance; on peut donc supposer que la nappe de gradient ν descendant de c_1 évite ce cylindre. Nous notons $\nu_L: S^{i-1} \rightarrow L$ (resp. $\nu_M: S^{i-1} \rightarrow M$) un paramétrage de l'inter-

section $\nu \cap L$ (resp. $\nu \cap M$) ⁽¹²⁾ et λ un chemin élémentaire de double croisement « associé » à la nappe ν ⁽¹³⁾; soit λ' la partie de λ correspondant au croisement de c_1 et de c_2 , et soit g l'extrémité de λ' . Ainsi λ' est un élément de l'espace \mathcal{C}' des chemins de croisement de c_1 et de c_2 issus de f_u ; \mathcal{C}'' désigne alors l'espace des chemins de croisement de c_1 et de c_3 issus de g .

D'après [1; chap. II, § 3, prop. 2 et corollaire], la connexité d'un espace de chemins de croisement est équivalente à la connexité d'un espace de nappes; notons \mathcal{X} (resp. \mathcal{X}') l'espace des nappes, adaptées à la fonction f_u , descendant de c_1 jusqu'à V (resp. jusqu'à M); on a $\pi_0(\mathcal{X}) = \pi_0(\mathcal{C})$ et $\pi_0(\mathcal{X}') = \pi_0(\mathcal{C}')$. Notons \mathcal{X}'' le sous-espace de \mathcal{X} formé des nappes coïncidant avec ν au-dessus de la variété de niveau M . La restriction naturelle $\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ est une fibration (sur une réunion de composantes connexes de la base), dont la fibre au-dessus de $\rho(\nu) \equiv \nu'$ est \mathcal{X}'' . On considère alors la suite exacte d'homotopie

$$\pi_1(\mathcal{X}', \nu') \xrightarrow{\delta} \pi_0(\mathcal{X}'') \rightarrow \pi_0(\mathcal{X}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{X}').$$

On sait que $\pi_0(\mathcal{C}') = \pi_0(\mathcal{X}') = 0$, car indice $c_1 >$ indice c_2 [1; chap. II, § 3, prop. 3]; pour montrer que $\pi_0(\mathcal{C}) = \pi_0(\mathcal{X}) = 0$, il suffit donc de montrer que δ est surjective.

D'après [1; chap. II, § 4.2, lemme 4], il existe des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathcal{C}', \lambda') &\cong \pi_1(\mathcal{X}', \nu') \cong \pi_2(\text{Plgt}(S^{i-1}, L), \text{Plgt}(S^{i-1}, L - \theta_0^{n-i-1}), \nu_L), \\ \pi_0(\mathcal{C}'') &\cong \pi_0(\mathcal{X}'') \cong \pi_1(\text{Plgt}(S^{i-1}, M), \text{Plgt}(S^{i-1}, M - T_0^{n-i}), \nu_M). \end{aligned}$$

La transportée de δ par ces isomorphismes est une application

$$\tilde{\Delta}: \pi_2(\text{Plgt}(S^{i-1}, L), \text{Plgt}(S^{i-1}, L - \theta_0), \nu_L) \rightarrow \pi_1(\text{Plgt}(S^{i-1}, M), \text{Plgt}(S^{i-1}, M - T_0), \nu_M)$$

dont une définition directe est la suivante : le bord d'un élément a_1 de $\pi_2(\text{Plgt}(S^{i-1}, L), \text{Plgt}(S^{i-1}, L - \theta_0), \nu_L)$ est un élément a_2 de $\pi_1(\text{Plgt}(S^{i-1}, L - \theta_0), \nu_L)$; rappelons que les lignes de gradient définissent un difféomorphisme $\gamma: M - S_0 \rightarrow L - \theta_0$ (2.3.1); $a_3 = (\gamma^{-1})_*(a_2)$ est un élément de $\pi_1(\text{Plgt}(S^{i-1}, M - S_0), \nu_M)$ dont l'image dans

$$\pi_1(\text{Plgt}(S^{i-1}, M), \text{Plgt}(S^{i-1}, M - T_0), \nu_M)$$

est $\tilde{\Delta}(a_1)$.

⁽¹²⁾ ν_M est translaté de ν_L suivant les lignes de gradient.

⁽¹³⁾ Plus exactement, ν détermine la classe d'homotopie du chemin λ dans l'espace des chemins de double croisement.

D'autre part, si $n \geq 5$ et $2 \leq i \leq n - 2$, il existe des applications naturelles ξ et η rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(\text{Plgt}(S^{i-1}, L), \text{Plgt}(S^{i-1}, L - \theta_0), \nu_L) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & \pi_1(\text{Plgt}(S^{i-1}, M), \text{Plgt}(S^{i-1}, M - T_0), \nu_M) \\ \xi \uparrow & & \uparrow \eta \\ \pi_{i+1}(L, L - \theta_0) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_i(M, M - T_0) \end{array}$$

où la flèche Δ est définie par la composition

$$\pi_{i+1}(L, L - \theta_0) \xrightarrow{\partial} \pi_i(L - \theta_0) \xrightarrow{(\gamma^{-1})_k} \pi_i(M) \rightarrow \pi_i(M, M - T_0)$$

[12; prop. 3.2 et 3.2 bis, théor. 3.3 et sa remarque 1]. De plus, d'après la suite exacte de [12; théor. 3.3], ξ est un isomorphisme et η est une surjection. D'après la proposition A.4 de l'appendice, Δ est surjective si $i \leq n - 2$. La proposition 5.2 est donc démontrée pour $n \geq 5$ et $2 \leq i \leq n - 2$.

Si $i = 0$, c_1 et c_3 sont des minimums et par conséquent \mathcal{U}'' est contractible.

Si $i = 1$, nous notons $\nu_L(S^0) = \{x_L, y_L\}$ et $\nu_M(S^0) = \{x_M, y_M\}$; si $n \geq 5$, on a un diagramme commutatif [12; loc. cit.]

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(\text{Plgt}(S^0, L), \text{Plgt}(S^0, L - \theta_0), \nu_L) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & \pi_1(\text{Plgt}(S^0, M), \text{Plgt}(S^0, M - T_0), \nu_M) \\ \parallel \mathcal{R} & & \parallel \mathcal{R} \\ \pi_2(L, L - \theta_0, x_L) \times \pi_2(L, L - \theta_0, y_L) & \rightarrow & \pi_1(M, M - T_0, x_M) \times \pi_1(M, M - T_0, y_M) \end{array}$$

la proposition A.4 permet là encore de conclure.

C. Q. F. D.

6. Lemme de la queue d'aronde dans le cas non simplement connexe.

Soit (W^{n+1}, V^n, V'^n) un cobordisme élémentaire d'indice $i + 1$, compact, orientable, de dimension $n + 1$. Considérons dans l'espace $\mathcal{F}(W)$ un « chemin en queue d'aronde », c'est-à-dire un chemin générique $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ de graphique

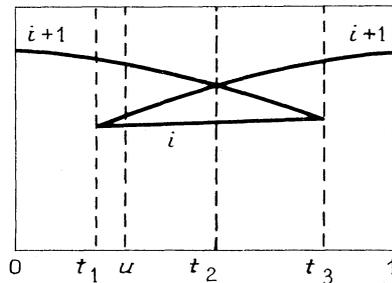


Fig. 27.

Ce chemin rencontre trois strates de codimension 1 de la stratification de $\mathcal{F}(W)$: f_{i_1} appartient à une strate de naissance d'un couple de points critiques c_2 et c_3 d'indices i et $i + 1$; cette naissance se fait en-dessous d'un point critique c_1 d'indice $i + 1$. En f_{i_2} , il y a croisement de c_1 avec le point critique c_2 d'indice $i + 1$ qui est né en f_{i_1} . Enfin, c_1 et c_3 s'éliminent en f_{i_3} .

6.1. PROPOSITION (lemme de la queue d'aronde). — Soient f_0 et f_1 deux fonctions de Morse excellentes ayant un seul point critique, d'indice $i + 1$, extrémités d'un chemin en queue d'aronde. Si $n \geq 7$ et si $i \leq n - 4$, f_0 et f_1 sont aussi extrémités d'un chemin générique de graphique

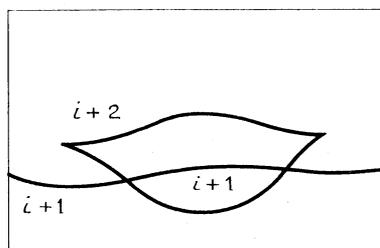


Fig. 28.

Toute la suite du paragraphe a pour objet la démonstration de cette proposition.

6.1.1. Notations. — Considérons sur le « chemin en queue d'aronde » une fonction f_u ($t_1 < u < t_2$) dont les points critiques sont, dans l'ordre décroissant des valeurs, $c_1(i + 1)$, $c_2(i + 1)$, $c_3(i)$. Soit L (resp. M) une variété de niveau de la fonction f_u située entre c_1 et c_2 (resp. entre c_2 et c_3). Pour une métrique riemannienne fixée, on peut supposer que c_2 et c_3 sont en position de s'éliminer, c'est-à-dire que, dans M , les sphères S_0^i et T_0^{n-i} se coupent transversalement et en un seul point, où S_0^i désigne le bord de la nappe de gradient descendant de c_2 , et où T_0^{n-i} désigne le bord de la nappe de gradient montant de c_3 . Enfin, nous notons θ_0^{n-i-1} le bord, dans L , de la nappe de gradient montant de c_2 . Le cobordisme bordé par L et M admet pour inverse le cobordisme bordé par M et V (en particulier, L est difféomorphe à V); θ_0 borde donc dans L un disque Δ_0^{n-i} dont l'intérieur est la trace sur L des lignes de gradient s'appuyant sur $T_0 - T_0 \cap S_0$. Les points c_2 et c_3 sont inclus dans un cylindre de naissance; on peut donc supposer que la nappe de gradient ν descendant de c_1 évite ce cylindre. Nous noterons $\nu_L : S^i \rightarrow L$ (resp. $\nu_M : S^i \rightarrow M$) un paramétrage de l'intersection $\nu \cap L$ (resp. $\nu \cap M$).

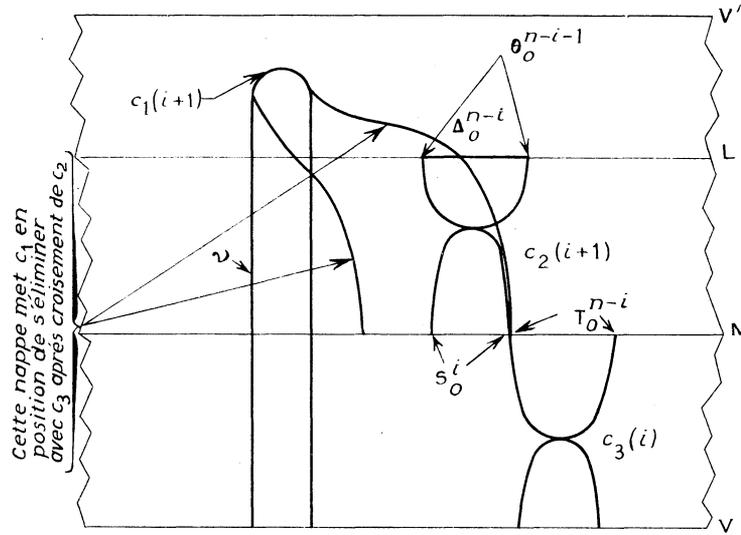


Fig. 29.

6.1.2. Soit \mathcal{C} l'espace des chemins d'origine f_u réalisant le croisement de c_1 et de c_2 ; soit \mathcal{C}' l'espace des chemins d'origine f_u réalisant le croisement de c_1 et de c_2 , puis l'élimination de la paire (c_1, c_3) ; puisqu'on ne s'intéresse qu'au type d'homotopie de ces espaces, on ne restreint pas la généralité en supposant que le paramétrage des chemins appartenant à \mathcal{C}' est choisi de telle sorte que le croisement de c_1 et de c_2 se réalise dans l'intervalle $[0, 1/2]$ du paramètre. Il y a alors une restriction naturelle $\rho : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$; à l'extrémité d'un chemin $\rho(\lambda')$, c_1 et c_3 peuvent s'éliminer. Puisqu'après avoir croisé c_1 et c_2 , il n'y a pas une unique façon en général d'éliminer c_1 et c_3 , $\rho_* : \pi_0(\mathcal{C}') \rightarrow \pi_0(\mathcal{C})$ n'est pas injective; cependant si M est simplement connexe, ρ_* est une injection d'après le lemme d'unicité des éliminations (0.5.1); c'est encore vrai si $i = 0$ ou $i + 1 = n + 1$.

Considérons deux chemins λ'_0 et λ'_1 , éléments de \mathcal{C}' , tels que $\rho(\lambda'_0)$ et $\rho(\lambda'_1)$ appartiennent à la même composante connexe de \mathcal{C} ; le chemin $\lambda'_0 \star \lambda'_1$ a pour graphique

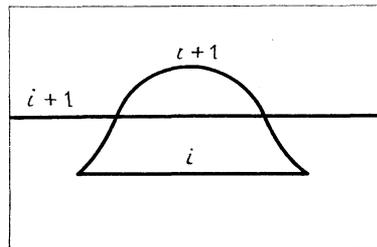


Fig. 30.

et est déformable relativement à ses extrémités en un chemin de graphique

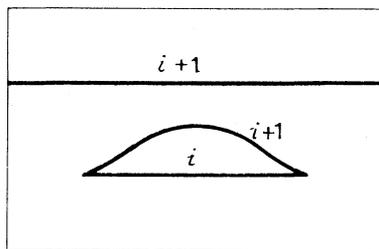


Fig. 31.

D'après le théorème 3.1, il existe un autre chemin, ayant mêmes extrémités et pour graphique

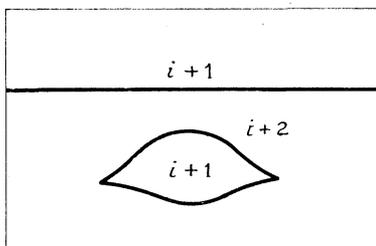


Fig. 32.

Ce dernier chemin n'est pas dans l'espace des fonctions ordonnées, mais par deux apparitions de bec [1; chap. IV, § 3, prop. 3], on le déforme jusqu'à ce que son graphique devienne

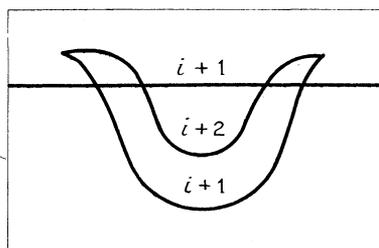


Fig. 33.

Enfin, puisqu'il n'y a qu'une seule façon de réordonner deux points critiques d'indices différents [1; chap. II, § 3, prop. 3], on peut construire

une dernière déformation aboutissant à un chemin de graphique

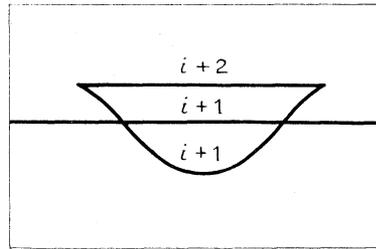


Fig. 34.

Pour démontrer la proposition 6.1, il suffit donc de voir que tout élément de $\rho_*(\pi_0(\mathcal{C}'))$ peut être représenté par un chemin $\lambda' \in \mathcal{C}'$ et possédant la propriété suivante (P) :

(P) *Le chemin en queue d'aronde $\{f_t\}_{t \in [0, u]} \star \lambda'$ a ses extrémités dans la même strate de fonctions excellentes.*

Il y a donc deux étapes : la première consiste à donner une caractérisation de $\rho_*(\pi_0(\mathcal{C}'))$, c'est-à-dire à associer injectivement ⁽¹⁴⁾ à chaque $\lambda \in \mathcal{C}$ un invariant algébrique sur lequel on puisse décider si $\lambda = \rho(\lambda')$ avec $\lambda' \in \mathcal{C}'$. Dans la seconde étape, on construit explicitement des éléments de \mathcal{C}' associés à chaque invariant, et vérifiant (P).

6.2. PREMIÈRE ÉTAPE : INVARIANT ALGÈBRE. — Pour caractériser les chemins de croisement qui mettent c_1 et c_3 en position de s'éliminer, on introduit l'espace \mathcal{N} des nappes descendant de c_1 jusqu'à la variété de niveau L , adaptées à la fonction f_u et dont le bord dans L est disjoint de la sphère transverse θ_0 . On sait que $\pi_0(\mathcal{C}) \cong \pi_0(\mathcal{N})$ [1; chap. II, § 3, prop. 2 et corollaire]; rappelons d'ailleurs qu'une nappe appartenant à \mathcal{N} , prolongée par un cylindre de gradient jusqu'en-dessous de c_2 définit un élément de $\pi_0(\mathcal{C})$; on peut donc parler des éléments de \mathcal{N} qui mettent c_1 et c_3 en position de se tuer; ce sont ces éléments qu'il s'agit de caractériser.

6.2.1. LEMME. — *On suppose $i \leq n - 3$. Pour qu'une nappe $D \in \mathcal{N}$ mette c_1 et c_3 en position de s'éliminer, il faut et il suffit que son bord soit isotope, dans $L - \theta_0$, à une sphère rencontrant le disque Δ_0^{n-i} transversalement et en un seul point.*

Preuve. — Considérons le difféomorphisme $\gamma : M - S_0 \rightarrow L - \theta_0$ défini en 2.3.1; rappelons qu'il met en bijection les extrémités des lignes de

⁽¹⁴⁾ L'injectivité est au niveau des classes d'homotopie.

gradient et que $\gamma(T_0 - T_0 \cap S_0) = \text{int } \Delta_0$. Alors, pour que $D \in \mathcal{D}$ mette c_1 et c_3 en position de s'éliminer, il faut et il suffit que $\gamma^{-1}(\partial D)$ soit isotope, dans M , à une sphère coupant T_0^{n-i} transversalement et en un seul point. Il est alors clair que la condition énoncée dans le lemme est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire; on suppose donc que $\gamma^{-1}(\partial D)$ est isotope dans M à une sphère coupant T_0^{n-i} transversalement et en un seul point. Si $2 \leq i < n$, cette isotopie peut être choisie dans le complémentaire de S_0 , ce qui démontre le lemme dans ce cas. Pour $2 \leq i \leq n - 3$, elle peut être obtenue par le procédé de Whitney ⁽¹⁵⁾, après mise en position générale de $\gamma^{-1}(\partial D)$ par rapport à T_0 ; en effet, même si T_0 est de codimension 2, le procédé de Whitney est applicable puisque $\pi_1(M - T_0)$ s'injecte dans $\pi_1(M)$ (propos. A.1 de l'appendice A). Or, puisque $i \leq n - 3$, ce procédé d'élimination de couples de points d'intersection de $T_0 \cap \gamma^{-1}(\partial D)$ peut évidemment s'effectuer dans le complémentaire de S_0 , ce qui prouve le lemme dans le cas général.

C. Q. F. D.

6.2.2. Introduisons l'espace $\tilde{\mathcal{U}}$ des nappes paramétrées dont l'image est élément de \mathcal{U} et telles qu'en outre la génératrice-base ne rencontre pas les lignes de gradient s'appuyant sur θ_0 . Si $i > 2$, on a évidemment un isomorphisme $\pi_0(\tilde{\mathcal{U}}) \cong \pi_0(\mathcal{U})$. Si $i = 1$, l'application naturelle est simplement une surjection. Quant au cas $i = 0$, nous ne nous en occuperons qu'à la fin. D'autre part, $\pi_0(\tilde{\mathcal{U}})$ est isomorphe, d'après [1; chap. II, § 4.2], à $\pi_1[\text{Plgt}((S^i, s_0), (L, L - \theta_0)), \text{Plgt}(S^i, L - \theta_0), \nu_L]$ qui, pour $i \leq n - 3$ et $n \geq 5$, est encore isomorphe, d'après [12; théor. 2.1], à

$$A \equiv \pi_1[\text{Hom}((S^i, s_0), (L, L - \theta_0)), \text{Hom}(S^i, L - \theta_0), \nu_L];$$

s_0 désigne le point-base de S^i et $\text{Hom}(-, -)$ l'espace des applications continues; le dernier isomorphisme est induit par l'inclusion naturelle $\text{Plgt}(-, -) \hookrightarrow \text{Hom}(-, -)$.

6.2.3. Pour $i \geq 1$, on définit une application

$$\mu: A \rightarrow \pi_{i+1}(L, L - \theta_0)$$

de la façon suivante : un élément $a \in A$ est représenté par une application continue $f: S^i \times [0, 1] \rightarrow L$; soit $R: D^{i+1} \rightarrow S^i \times [0, 1]$ l'application définie par $R(x, t) = (r(x), t)$, où $(x, t) \in D^i \times [0, 1] \equiv D^{i+1}$ et où

$$r: (D^i, \partial D^i) \rightarrow (D^i/\partial D^i, s_0) \equiv (S^i, s_0)$$

⁽¹⁵⁾ Voir [10] et aussi [14; p. 71 et suiv.] pour une description détaillée du procédé de Whitney.

est la projection naturelle; $\mu(a)$ est représenté par l'application

$$fR : (D^{i+1}, S^i) \rightarrow (L, L - \theta_0).$$

On notera δ et j_* les applications naturelles

$$\pi_{i+1}(L, L - \theta_0) \xrightarrow{\delta} \pi_i(L - \theta_0) \xrightarrow{j_*} \pi_i(L - \theta_0, L - \Delta_0).$$

6.2.4. LEMME. — L'application $j_* \delta \mu : A \rightarrow \pi_i(L^n - \theta_0^{n-i-1}, L^n - \Delta_0^{n-i})$ est une injection ensembliste pour $1 \leq i \leq n - 2$.

6.2.5. LEMME. — (1) Si $i \geq 2$, $\pi_i(L - \theta_0, L - \Delta_0) \cong \mathbf{Z}[\pi_i(L)]$.

(2) Si $i = 1$ et $n \geq 3$, $\pi_1(L - \theta_0)$ est isomorphe au produit libre $\pi_1(L) \star \mathbf{Z}$ et $\pi_1(L - \theta_0, L - \Delta_0)$ est l'ensemble quotient de ce groupe par la relation $x \sim y$ si $y^{-1}x \in \pi_1(L)$.

6.2.6. A l'aide de l'isomorphisme naturel $\pi_0(\tilde{\mathcal{U}}) \cong A$ (6.2.2) et des injections données par les lemmes 6.2.4 et 6.2.5, on définit deux applications injectives :

(1) si $2 \leq i \leq n - 3$, $\zeta : \pi_0(\tilde{\mathcal{U}}) \rightarrow \mathbf{Z}[\pi_i(L)]$;

(2) si $i = 1$, $n \geq 5$, $\zeta_1 : \pi_0(\tilde{\mathcal{U}}) \rightarrow \pi_1(L) \star \mathbf{Z}$.

Ces deux applications permettent d'obtenir les invariants algébriques cherchés; plus précisément, on a le lemme suivant :

6.2.7. LEMME. — Une nappe $D \in \mathcal{X}$ met les points critiques c_1 et c_3 en position de s'éliminer, si et seulement si elle est l'image d'une nappe paramétrée dont la classe $a \in \pi_0(\tilde{\mathcal{U}})$ vérifie la condition suivante :

(1) pour $2 \leq i \leq n - 3$, $\zeta(a) = \pm x$, $x \in \pi_i(L)$;

(2) pour $i = 1$, $n \geq 5$, $\zeta_1(a) = (x, \pm 1, x^{-1})$, $x \in \pi_1(L)$.

Démonstration du lemme 6.2.4. (a) Soit K le noyau de $\pi_i(L - \theta_0) \rightarrow \pi_i(L)$. L'image de δ est incluse dans K . Nous commençons par montrer que le morphisme de groupes $j_* | K : K \rightarrow \pi_i(L - \theta_0, L - \Delta_0)$ est injectif. Soit $f : S^i \rightarrow L - \theta_0$ une application homotope à zéro dans L et homotope, dans $L - \theta_0$, à $f' : S^i \rightarrow L - \Delta_0$. Alors, si $i \leq n - 2$, f' est homotope à zéro dans $L - \Delta_0$ et, *a fortiori*, dans $L - \theta_0$. Donc f est homotope à zéro dans $L - \theta_0$.

(b) On déduit, à l'aide du diagramme ci-dessous, l'injectivité de δ de la surjectivité de l'application $\pi_{i+1}(\mathbf{L} - \Delta_0) \rightarrow \pi_{i+1}(\mathbf{L})$, qui a lieu pour $i \leq n - 2$:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{i+1}(\mathbf{L} - \theta_0) & \rightarrow & \pi_{i+1}(\mathbf{L}) & \rightarrow & \pi_{i+1}(\mathbf{L}, \mathbf{L} - \theta_0) & \xrightarrow{\delta} & \pi_i(\mathbf{L} - \theta_0) \\ & & \uparrow & \nearrow & & & \\ & & \pi_{i+1}(\mathbf{L} - \Delta_0) & & & & \end{array}$$

(c) μ est une injection ensembliste : soient $f_0, f_1 : \mathbf{S}^i \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{L}$ telles que $\mu([f_0]) = \mu([f_1])$. Pour $i \geq 1$, $\pi_{i+1}(\mathbf{L}, \mathbf{L} - \theta_0)$ est un groupe; l'élément $\mu([f_0]) = \mu([f_1])$ est représenté par l'application FR, où R a été défini en 6.2.3 et où $F : \mathbf{S}^i \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{L}$ est définie par

$$F(x, t) = \begin{cases} f_1(x, 1 - 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ f_0(x, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Puisque $\mu([f_0]) = \mu([f_1]) = o$, il existe une homotopie, constante sur ∂D^{i+1} , $H : D^{i+1} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{L}$ telle que

$$H|_{D^{i+1} \times \{0\}} = \text{FR} \quad \text{et} \quad H(D^{i+1} \times \{1\}) \subset \mathbf{L} - \theta_0.$$

On peut donc factoriser H à travers une homotopie, constante sur $\{s_0\} \times [0, 1]$, $G : (\mathbf{S}^i \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{L}$ telle que

$$G|_{\mathbf{S}^i \times [0, 1] \times \{0\}} = F \quad \text{et} \quad G(\mathbf{S}^i \times [0, 1] \times \{1\}) \subset \mathbf{L} - \theta_0.$$

On en déduit facilement que, dans \mathbf{A} , $[f_0] = [f_1]$.

La combinaison des résultats obtenus en (a), (b) et (c) prouve le lemme.

C. Q. F. D.

Démonstration du lemme 6.2.5. — (1) $i \geq 2$: Dans ce cas, il est immédiat que l'inclusion induit des isomorphismes

$$\pi_1(\mathbf{L} - \Delta_0) \rightarrow \pi_1(\mathbf{L} - \theta_0) \rightarrow \pi_1(\mathbf{L}).$$

Si $p : \widetilde{\mathbf{L} - \theta_0} \rightarrow \mathbf{L} - \theta_0$ désigne la projection du revêtement universel de $\mathbf{L} - \theta_0$, on en déduit que $p^{-1}(\mathbf{L} - \Delta_0)$ est revêtement universel de $\mathbf{L} - \Delta_0$. On a

$$p^{-1}(\mathbf{L} - \Delta_0) = (\widetilde{\mathbf{L} - \theta_0}) - (p^{-1}(\Delta_0)).$$

On utilise alors les isomorphismes

$$\pi_i(\mathbf{L} - \theta_0, \mathbf{L} - \Delta_0) \cong \pi_i(\widetilde{\mathbf{L} - \theta_0}, p^{-1}(\mathbf{L} - \Delta_0)) \cong H_i(\widetilde{\mathbf{L} - \theta_0}, p^{-1}(\mathbf{L} - \Delta_0));$$

en utilisant l'excision et l'isomorphisme de Thom, on voit que ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}[\pi_1(\mathbf{L} - \theta_0)]$, c'est-à-dire à $\mathbf{Z}[\pi_1(\mathbf{L})]$.

(2) $i = 1$ et $n \geq 3$: Le complémentaire d'une sphère de codimension 2, non nouée, dans un espace euclidien \mathbf{R}^n a un groupe fondamental isomorphe à \mathbf{Z} . On en déduit, grâce au théorème de Van Kampen, que $\pi_1(\mathbf{L}^n - \theta^{n-2})$ est isomorphe à $\pi_1(\mathbf{L} - \Delta) \star \mathbf{Z}$. La fin de la proposition est une conséquence de l'exactitude de la suite d'homotopie de la paire $(\mathbf{L}, \mathbf{L} - \theta_0)$.

C. Q. F. D.

Démonstration du lemme 6.2.7. — Montrons d'abord que la condition est nécessaire. D'après le lemme 6.2.1, on peut pour cela partir d'une nappe $D \in \mathcal{X}$, dont le bord dans \mathbf{L} rencontre Δ_0 transversalement et en un seul point. En position générale, D peut être représentée par une nappe paramétrée, appartenant à $\tilde{\mathcal{X}}$, dont la classe dans $\pi_0(\tilde{\mathcal{X}})$ est notée a . Alors $j_* \delta \mu(a)$ peut être représenté par un plongement $S^i \rightarrow \mathbf{L} - \theta_0$, rencontrant Δ_0 transversalement et en un seul point. Si $i \geq 2$, il est clair que $\zeta(a) = \pm x$, où $x \in \pi_1(\mathbf{L})$; si $i = 1$, $\zeta_1(a)$ est de la forme $(x, \pm 1, y)$, où $x, y \in \pi_1(\mathbf{L})$; l'image de cet élément par l'application

$$\pi_1(\mathbf{L}) \star \mathbf{Z} \cong \pi_1(\mathbf{L} - \theta_0) \rightarrow \pi_1(\mathbf{L})$$

est $x.y$; par ailleurs, l'application composée

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\tilde{\mathcal{X}}) \cong \Lambda & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{L} - \theta_0) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{L}) \\ & \searrow & \parallel \\ & \zeta_1 & \pi_1(\mathbf{L}) \star \mathbf{Z} \end{array}$$

étant nulle, on a $y = x^{-1}$.

Réciproquement, étant donné que ζ et ζ_1 sont des injections, pour prouver que la condition est suffisante, il suffit d'exhiber, pour chaque invariant algébrique de la forme convenable, une nappe paramétrée dont le bord dans \mathbf{L} coupe Δ_0 transversalement et en un seul point, et qui admette cet élément pour invariant associé. Pour cela, on part du fait qu'il y a deux telles nappes réalisant les éléments $+1$ et -1 ⁽¹⁶⁾. On réalise les autres éléments en modifiant ces nappes suivant le procédé classique du « piping ». Nous ne développons pas ici cette construction car, au cours de la deuxième étape, il nous faudra faire une construction plus détaillée qui contiendra le procédé de piping.

C. Q. F. D.

6.3. SECONDE ÉTAPE : LACETS EN QUEUE D'ARONDE.

6.3.1. On sait [1; chap. IV, § 4.1] qu'il existe un lacet $\{g_t\}_{t \in [0,1]}$ en queue d'aronde, issu de la fonction f_0 , et tel que, pour $t \in [0, u]$, $g_t = f_t$, où $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ est le chemin en queue d'aronde considéré depuis le début

du paragraphe. Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction g_t ne diffère de f_0 qu'à l'intérieur d'un modèle de Morse du point critique c_1 , modèle contenant le cylindre de naissance des points c_2 et c_3 . La nappe descendante de c_1 , associée à ce modèle rencontre Δ_0 transversalement et en un seul point; on a la note D_0 . L'invariant algébrique de D_0 est $+1$ ⁽¹⁶⁾. Soit $\nu \in [t_2, t_3]$ une valeur du paramètre telle que $\{g_t\}_{t \in [u, \nu]}$ soit un chemin réalisant le croisement de c_1 et c_2 ; c'est un chemin élémentaire, noté λ_0 , associé à la nappe D_0 . Il y a deux procédés pour modifier le lacet $\{g_t\}$:

6.3.2. 1° Cerf a construit, dans [1; chap. IV, § 4, lemme 3], un difféomorphisme Φ de W , à support dans un cylindre de naissance \mathfrak{B} contenant les points critiques c_2 et c_3 de la fonction f_u , et dont le bord supérieur est au-dessus de L ; on a les propriétés suivantes :

- Φ est isotope à l'identité par une isotopie à support dans \mathfrak{B} ;
- Φ laisse la fonction f_u invariante;
- Φ laisse le disque Δ_0 invariant et $\Phi|_{\Delta_0}$ est de degré -1 .

Il est alors facile de vérifier que l'invariant algébrique de la nappe $\Phi(D_0)$ est -1 .

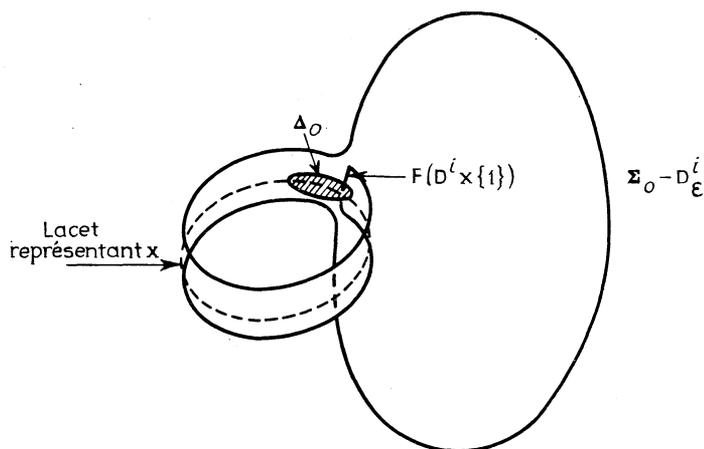
6.3.3. 2° Soit maintenant un élément $x \in \pi_1(L)$. A un lacet plongé représentant x , on peut associer un lacet $\{\bar{\Psi}_t\}_{t \in [0, 1]}$ dans l'espace des plongements de \mathfrak{B} dans W , adaptés à f_0 ⁽¹⁷⁾ et à hauteur constante, c'est-à-dire que $f_0 \bar{\Psi}_t$ est, pour toute valeur de t , la même fonction numérique sur le cylindre $D^n \times [0, 1]$. Ce lacet se relève en un chemin $\{\Psi_t\}_{t \in [0, 1]}$ dans l'espace des difféomorphismes de W , qui sont l'identité au voisinage de c_1 et qui laissent la fonction f_0 invariante. Remarquons qu'en outre, Ψ_1 laisse la fonction f_u invariante. Considérons la nappe D_0 associée au chemin élémentaire λ_0 ; dans L , son bord Σ_0 coupe Δ_0 transversalement et en un seul point. La sphère $\Psi_1(\Sigma_0)$ est isotope à la sphère Σ_1 construite de la façon suivante (procédé de piping) :

⁽¹⁶⁾ Il n'y a pas d'isomorphisme canonique $\zeta: A \rightarrow \mathbf{Z}[\pi_1(L)]$. ζ n'est défini qu'à multiplication par un élément de $\pi_1(L)$ près. En fixant à $+1$ l'invariant associé à D_0 , on détermine complètement ζ ; rappelons que le signe est déterminé par les conventions habituelles d'orientation.

⁽¹⁷⁾ Un plongement $\bar{\Psi}: D^n \times [0, 1] \rightarrow W$ est adapté à f_0 si, pour tout $t \in [0, 1]$, f_0 est constante sur $\bar{\Psi}(D^n \times \{t\})$.

On considère un petit disque D^i_ε au voisinage du point $\Sigma_0 \cap \Delta_0$ dans Σ_0 ; il existe $F : D^i \times [0, 1] \rightarrow L$ tel que $F(D^i \times \{0\}) = D^i_\varepsilon$, $F(D^i \times \{1\}) = 1/2 D^i_\varepsilon$, que $F|_{\partial D^i \times [0, 1] \cup D^i \times \{1\}}$ soit un plongement et que $F(\{0\} \times [0, 1])$ soit un lacet représentant l'élément x donné dans $\pi_1(L)$; alors Σ_1 est l'arrondie de $(\Sigma_0 - \text{int} D^i_\varepsilon) \cup F(\partial D^i \times [0, 1] \cup D^i \times \{1\})$ (fig. 35). Remarquons que l'on aurait pu choisir Ψ telle que $\Psi|_{D^i \times [0, 1]} = F$; on aurait eu alors $\Sigma_1 = \Psi_1(\Sigma_0)$.

On voit que l'invariant algébrique de la nappe $\Psi_1 = (D_0)$ est $+x$, si $2 \leq i \leq n - 3$; ou $(x, 1, x^{-1})$, si $i = 1$ et $n \geq 5$.



« figure dans L »

Fig. 35.

6.3.4. Les deux constructions précédentes fournissent des chemins élémentaires de croisement $\Phi(\lambda_0)$ ⁽¹⁸⁾ et $\Psi_1(\lambda_0)$ ayant leurs extrémités dans la même strate de fonctions excellentes que l'extrémité de λ_0 ; en effet, les difféomorphismes Φ et Ψ_1 sont isotopes à l'identité. Ils sont donc inclus dans des lacets en queue d'aronde d'origine f_0 .

En composant ces deux constructions, on prouve la chose suivante : tout chemin de croisement des points c_1 et c_2 , issu de la fonction f_u et mettant c_1 et c_2 en position de s'éliminer, est homotope à un chemin de croisement inclus dans un lacet en queue d'aronde d'origine f_0 . Compte tenu de 6.1.2, le lemme de la queue d'aronde (propos. 6.1) est complètement démontré pour $i \geq 1$.

(18) Si $\lambda_0 = \{h_t\}_{t \in [0, 1]}$, $\Phi(\lambda_0)$ désigne le chemin de fonctions $\{h_t \Phi\}_{t \in [0, 1]}$.

6.4. CAS $i = 0$. — Dans ce cas, l'unicité des éliminations est trivialement vraie, c'est-à-dire que $\pi_0(\mathcal{C}')$ s'injecte dans $\pi_0(\mathcal{C})$ (voir 6.1.2). On sait que

$$\pi_0(\mathcal{C}) \cong \pi_1(\text{Hom}(S^0, L), \text{Hom}(S^0, L - \theta_0), \nu_L);$$

si p et q ($p, q \in L - \Delta_0$), sont les deux points images de ν_L , on a aussi $\pi_0(\mathcal{C}) \cong \pi_1(L, L - \theta_0, p) \times \pi_1(L, L - \theta_0, q)$. Un élément de $\pi_0(\mathcal{C}')$ est représenté par le couple formé d'un chemin d'origine p (resp. q) d'extrémité dans $\text{int } \Delta_0$ et d'un chemin d'origine q (resp. p) d'extrémité dans $L - \Delta_0$. S'il n'existe aucun chemin joignant p ou q à Δ_0 , \mathcal{C}' est vide; s'il existe un chemin joignant p à Δ_0 et aucun joignant q à Δ_0 , $\pi_0(\mathcal{C}') \cong \pi_1(L, p)$; si p, q et Δ_0 appartiennent à la même composante connexe de L , $\pi_0(\mathcal{C}') \cong \pi_1(L, p) \cup \pi_1(L, q)$.

Pour ce dernier cas, on utilise le fait que, dans le modèle de Morse d'indice 1, il existe deux lacets en queue d'aronde issus de la fonction standard (nous avons communiqué cette observation à Cerf qui en a donné le détail dans sa rédaction [1; chap. IV, § 4, remarque 2 et prop. 5]); on peut donc réaliser par des lacets en queue d'aronde les éléments neutres de chacun des deux exemplaires de $\pi_1(L)$ dans $\pi_0(\mathcal{C}')$. On utilise alors la construction donnée en 6.3.3 pour faire agir $\pi_1(L)$ sur ces lacets et on conclut comme en 6.3.4 (la construction 6.3.2 n'existe pas dans ce cas).

C. Q. F. D.

Remarque. — Dans les cas où l'on a à appliquer ce lemme, il y a en général des points critiques au-dessus et en-dessous de ceux correspondant à la partie en queue d'aronde, comme sur le graphique

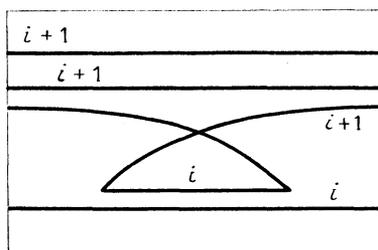


Fig. 36.

L'application de la proposition 6.1 fournit un chemin passant par des fonctions désordonnées; on peut le déformer en un chemin dans l'espace des fonctions ordonnées en utilisant le procédé décrit en 6.1.2.

APPENDICE A.

Propriétés homotopiques de certaines variétés.

On considère les variétés différentiables M^n compactes, sans bord, orientables, ayant la propriété suivante : il existe deux sous-variétés S_0^i et T_0^{n-i} de M^n , se rencontrant transversalement et en un seul point, où S_0 est difféomorphe à la sphère standard S^i , et où T_0 est compacte, orientable, sans bord, simplement connexe (ce qui entraîne $i \leq n - 2$) et à fibré normal trivial.

A.1. PROPOSITION. — *Dans ces conditions ⁽¹⁹⁾, l'application*

$$I_k : \pi_k(M - T_0) \rightarrow \pi_k(M),$$

induite par l'inclusion, est une bijection pour $0 \leq k \leq i - 1$, et est injective pour $k = i$.

Démonstration. — Le cas $i = 0$ est complètement trivial. Étudions à part le cas où $i = 1$: la surjectivité de I_0 est triviale, et l'injectivité de I_0 est une conséquence directe de l'existence du lacet S_0^1 . L'injectivité de I_1 se démontre par un argument classique utilisant la trivialité du fibré normal de T_0^{n-1} dans M^n : étant donné un disque singulier D^2 dans M représentant un élément de $\pi_2(M, M - T_0)$, et en position générale par rapport à T_0 , on peut le remplacer par un autre disque singulier ayant même bord, et un cercle de moins dans son intersection avec T_0 .

Si maintenant $i \geq 2$, la seule position générale implique que I_k est une bijection pour $k \leq i - 2$ et une surjection pour $k = i - 1$. Montrons l'injectivité de I_{i-1} qui implique en particulier que, pour $i \geq 2$, $I_1 : \pi_1(M - T_0) \rightarrow \pi_1(M)$ est toujours un isomorphisme. Nous allons pour cela montrer la nullité de $\delta : \pi_i(M, M - T_0) \rightarrow \pi_{i-1}(M - T_0)$.

Soit $\varphi : (D^i, S^{i-1}) \rightarrow (M, M - T_0)$ une application représentant un élément $x \in \pi_i(M, M - T_0)$; si on choisit φ transversale sur T_0 , l'image réciproque $\varphi^{-1}(T_0)$ est constituée d'un nombre fini de points a_1, \dots, a_q situés dans $\text{int}D^i$, au voisinage desquels φ est un plongement. Soit a_0

⁽¹⁹⁾ Il suffit en fait de supposer que Σ^{i-1} est homotope à zéro dans $M - T_0$, où Σ^{i-1} est le bord d'un petit disque normal à T_0 dans M .

le point-base de $S^{i-1} = \partial D^i$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ des chemins plongés, transverses au bord de D^i , joignant a_0 respectivement à a_1, \dots, a_q dans $\text{int} D^i$, et tels que $\lambda_k \cap \lambda_l = a_0$ si $k \neq l$. Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_q$ des voisinages tubulaires de a_1, \dots, a_q dans $\text{int} D^i$, assez petits pour que $\varphi|_{\Delta_j}$ soit un plongement pour $j = 1, \dots, q$. On pose $\Sigma_j = \partial \Delta_j$. En remarquant que D^i se rétracte par déformation sur $\bigcup_{j=1}^q (\lambda_j \cup \Delta_j)$, on voit facilement

que la nullité de δx est entraînée par la propriété suivante : si Σ^{i-1} est une petite sphère, bord d'une fibre d'un voisinage tubulaire de T_0 dans M , elle borde un disque singulier dans $M - T_0$; on se ramène immédiatement au cas où Σ^{i-1} est le bord d'un voisinage tubulaire dans S_0 du point $S_0 \cap T_0$, auquel cas la propriété est évidente.

Il nous reste à montrer l'injectivité de I_i pour $i \geq 2$. Soit $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ un revêtement universel de M ; puisque I_1 est un isomorphisme, $\pi^{-1}(M - T_0)$ est un revêtement universel de $M - T_0$, et sera noté $\widetilde{M - T_0}$; puisque T_0 est supposé 1-connexe, $\widetilde{M - T_0}$ est obtenu à partir de \tilde{M} en enlevant autant d'exemplaires disjoints de T_0 qu'il y a d'éléments dans $\pi_1(M)$. Grâce à l'excision et à l'isomorphisme de Thom, on démontre que

$$H_k(\tilde{M}, \widetilde{M - T_0}) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq i - 1, \\ \mathbf{Z}[\pi_1(M)] & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k = i, \end{cases} \quad \text{car } H_1(T_0) = \{0\}.$$

Ce fait suffit pour conclure dans le cas $i = 2$, car d'après le théorème de Hurewicz, on a les isomorphismes

$$\pi_2(M - T_0) \xrightarrow{\cong} H_2(\widetilde{M - T_0}) \quad \text{et} \quad \pi_2(M) \xrightarrow{\cong} H_2(\tilde{M}).$$

Si $i \geq 3$, on utilise l'existence d'une certaine suite exacte contenant l'homomorphisme de Hurewicz, que l'on obtient à l'aide de la suite spectrale d'homotopie, et qui est décrite dans [9; p. 251, exercice E] : si K est un complexe cellulaire (non nécessairement fini) simplement connexe, on a pour tout $p \geq 2$ une suite exacte naturelle (considérée en premier par J. H. C. Whitehead)

$$\dots \rightarrow H_{p+1}(K) \rightarrow D_{p,0}^2(K) \rightarrow \pi_p(K) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_p(K) \rightarrow \dots,$$

où

$$D_{p,0}^2(K) = \text{Image}(\pi_p(K^{[p-1]}) \rightarrow \pi_p(K^{[p]})),$$

les $K^{[j]}$ désignant les squelettes d'une décomposition cellulaire fixée de K . Pour éviter les triangulations infinies, on remplace $M - T_0$ par $M - E_0$, où E_0 est un voisinage tubulaire ouvert de T_0 dans M ; on se donne une décomposition cellulaire de M pour laquelle $M - E_0$ est un sous-complexe, et

telle que $\text{int } E_0$ ne rencontre que des cellules de dimension au moins i ; on en déduit une décomposition cellulaire de \widetilde{M} pour laquelle $\widetilde{M - E_0}$ est un sous-complexe. [Comme précédemment, on a posé $\widetilde{M - E_0} = \pi^{-1}(M - E_0) \subset \widetilde{M}$.] On obtient ainsi, pour $i \geq 2$, un diagramme commutatif dans lequel les suites verticales sont exactes et dans lequel les flèches horizontales sont induites par les inclusions naturelles.

$$\begin{array}{ccc}
 H_{i+1}(\widetilde{M - E_0}) & \xrightarrow{\text{surjection}} & H_{i+1}(\widetilde{M}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D_{i,0}^2(\widetilde{M - E_0}) & \xrightarrow{\tilde{J}_i} & D_{i,0}^2(\widetilde{M}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_i(\widetilde{M - E_0}) & \xrightarrow{\tilde{I}_i} & \pi_i(\widetilde{M}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_i(\widetilde{M - E_0}) & \xrightarrow{\text{injection}} & H_i(\widetilde{M})
 \end{array}$$

L'injectivité de \tilde{I}_i (et donc celle de I_i) découle alors du :

LEMME. — L'application $\tilde{J}_i : D_{i,0}^2(\widetilde{M - E_0}) \rightarrow D_{i,0}^2(\widetilde{M})$ est injective pour $i \geq 2$.

On considère le diagramme induit par les inclusions naturelles

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_i(\widetilde{M - E_0}^{[i-1]}) & \longrightarrow & \pi_i(\widetilde{M - E_0}^{[i]}) \\
 \downarrow & & \downarrow U \\
 \pi_i(\widetilde{M}^{[i-1]}) & \longrightarrow & \pi_i(\widetilde{M}^{[i]})
 \end{array}$$

Le lemme découle évidemment de l'injectivité de U . Pour la démontrer, nous allons construire une rétraction \tilde{R} de $\widetilde{M}^{[i]}$ sur $\widetilde{M - E_0}^{[i]}$ par l'intermédiaire d'une rétraction R de $M^{[i]}$ sur $(M - E_0)^{[i]}$. Remarquons que

$$M^{[i]} = (M - E_0)^{[i]} \cup \sigma_1(D^i) \cup \dots \cup \sigma_r(D^i), \quad \text{où } \sigma_k : (D^i, S^{i-1}) \rightarrow (M^{[i]}, M^{[i-1]})$$

est l'application d'attachement d'une cellule de dimension i dont le bord est dans $M^{[i-1]} = (M - E_0)^{[i-1]}$. Puisque $I_{i-1} : \pi_{i-1}(M - E_0) \rightarrow \pi_{i-1}(M)$ est injective, la restriction $\sigma_k|S^{i-1}$ est homotope à zéro dans $M - E_0$, et donc dans $(M - E_0)^{[i]}$; on appelle $\tau_k : D^i \rightarrow (M - E_0)^{[i]}$, $k \in \{1, \dots, r\}$, une application continue telle que $\tau_k|S^{i-1} = \sigma_k|S^{i-1}$, et on définit la

rétraction $R : M^{(i)} \rightarrow (M - E_0)^{(i)}$ par les formules

$$R|_{(M - E_0)^{(i)}} = \text{identité}, \quad R(x) = \tau_k \sigma_k^{-1}(x) \quad \text{si } x \in \sigma_k(D^i).$$

Par relèvement des applications τ_k , on définit \tilde{R} .

C. Q. F. D.

Remarque 1. — On voit tout de suite que \tilde{J}_i est surjective, à partir de l'égalité $\tilde{M}^{[i-1]} = \widetilde{(M - E_0)^{[i-1]}}$.

Remarque 2. — On peut améliorer la proposition A.1 si on sait que $H_j(T_0) = 0$ pour $j \leq j_0$. En particulier, si T_0 est difféomorphe à la sphère S^{n-i} , on peut montrer par la même méthode que L_k est injective pour $k \leq n - 2$.

On précise maintenant les hypothèses de la proposition A.1, en supposant que T_0 est difféomorphe à la sphère S^{n-i} , et que les fibrés normaux à S_0 et T_0 dans M sont triviaux. Cela revient à considérer M comme variété intermédiaire d'une fonction de Morse h n'ayant que deux points critiques d'indices i et $i + 1$ ($i \leq n - 2$), définie sur un cobordisme produit $L \times [0, 1]$, où L^n est une variété connexe, compacte, orientable, sans bord. S_0^i est le bord d'une nappe descendante du point critique d'indice $i + 1$, T_0^{n-i} est le bord d'une nappe montante du point critique d'indice i , et la condition d'intersection sur S_0 et T_0 fait correspondre à ce couple de nappes un « chemin élémentaire d'élimination » d'origine h , aboutissant à une fonction sans point critique (voir le début du paragraphe 1 à ce sujet).

Notons (Q, M, L) le cobordisme élémentaire « supérieur » [c'est-à-dire $Q = h^{-1}([1/2, 1])$, si $M = h^{-1}(1/2)$], et choisissons sur Q une métrique riemannienne \mathfrak{M} pour laquelle la nappe considérée, de bord S_0 , soit une nappe de gradient de la fonction $h|_Q$. Les lignes de gradient partant d'un point de $M - S_0$ vont jusqu'à l'autre bord L , et définissent donc une application

$$\gamma(h, \mathfrak{M}) \equiv \gamma : M - S_0 \rightarrow L.$$

On considère le diagramme ci-dessous, commutatif par définition, dans lequel toutes les flèches, sauf γ_* et $(\gamma j)_*$, sont induites par les inclusions naturelles :

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_k(L) & \xleftarrow{\gamma_*} & \pi_k(M - S_0) & & \\
 & \swarrow & \nearrow j_* & & \downarrow \\
 & \pi_k(M - (S_0 \cup T_0)) & & & \downarrow \\
 \pi_k(M - T_0) & \xrightarrow{\quad} & \pi_k(M) & &
 \end{array}$$

A.2. LEMME. — L'application $(\gamma j)_* : \pi_k(M - (S_0 \cup T_0)) \rightarrow \pi_k(L)$ est surjective pour $k \leq n - 1$ (et donc en particulier pour $k = i + 1$).

Démonstration. — L'image $\gamma(T_0 - (S_0 \cap T_0))$ est difféomorphe à $\text{int } D^{n-i}$; sa frontière est le bord dans L de la nappe de gradient qui monte du point critique d'indice $i + 1$. On en déduit que l'image de γj dans L est le complémentaire d'une sous-variété difféomorphe à D^{n-i} ; si $k \leq n - 1$, un élément de $\pi_k(L)$ est sûrement représenté par une application de S^k dans L dont l'image évite cette sous-variété, ce qui montre le lemme.

C. Q. F. D.

A.3. PROPOSITION. — Dans la situation du lemme A.2, considérons un élément $a \in \pi_{i+1}(M, M - T_0)$. Si $2i + 2 \leq n$, il existe un élément $b \in \pi_{i+1}(M - S_0)$ possédant les deux propriétés suivantes :

(1) a est l'image de b dans l'application naturelle

$$\pi_{i+1}(M - S_0) \rightarrow \pi_{i+1}(M, M - T_0);$$

(2) $\gamma_*(b) = \{o\}$ dans $\pi_{i+1}(L)$.

Démonstration. — L'existence d'un élément $b' \in \pi_{i+1}(M - S_0)$ satisfaisant à la première condition est une conséquence immédiate de la proposition A.1, compte tenu de la surjectivité de l'application $\pi_{i+1}(M - S_0) \rightarrow \pi_{i+1}(M)$, laquelle découle de la condition $2i + 2 \leq n$ par position générale. Le lemme A.2 fournit alors un élément $b'' \in \pi_{i+1}(M - (S_0 \cup T_0))$ tel que

$$(\gamma j)_*(b'') = \gamma_*(b').$$

Mais alors, $b = b' - j_*(b'')$ vérifie la deuxième condition. La première condition est satisfaite par b , car l'application naturelle

$$\pi_{i+1}(M - (S_0 \cup T_0)) \rightarrow \pi_{i+1}(M)$$

se factorise à travers $\pi_{i+1}(M - T_0)$, ce qui montre que l'image $j_*(b'')$ dans $\pi_{i+1}(M, M - T_0)$ est o .

C. Q. F. D.

Nous démontrons enfin une proposition utile dans le lemme du bec (§ 5); la situation est toujours celle du lemme A.2. Notons $\theta_0 \subset L$ le bord de la nappe de gradient montant du point critique d'indice $i + 1$ (fig. 37).

A.4. PROPOSITION. — L'application $\Delta : \pi_{i+1}(L, L - \theta_0) \rightarrow \pi_i(M, M - T_0)$ définie par la composition

$$\pi_{i+1}(L, L - \theta_0) \rightarrow \pi_i(L - \theta_0) \xrightarrow{(\gamma^{-1})_*} \pi_i(M) \rightarrow \pi_i(M, M - T_0)$$

est surjective pour $i \leq n - 2$.

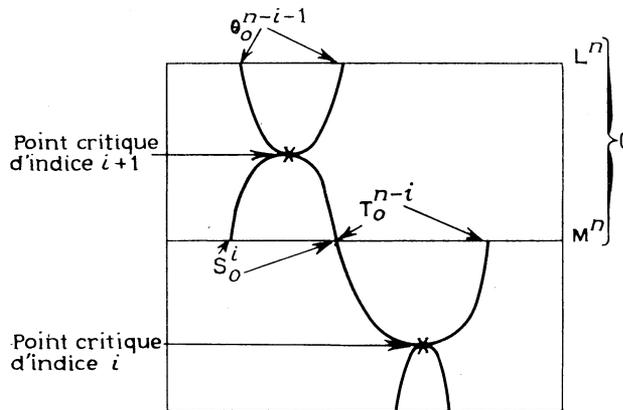


Fig. 37.

Démonstration. — D'après la proposition A.1, l'application

$$\pi_i(M) \rightarrow \pi_i(M, M - T_0)$$

est surjective. Nous allons considérer deux cas, suivant la valeur de i :

Premier cas : $2i + 1 \leq n$: Par position générale, l'application $\pi_i(M - S_0^i) \rightarrow \pi_i(M)$ est surjective. En utilisant le lemme A.2 comme dans la démonstration de la proposition A.3, on voit que tout élément de $\pi_i(M, M - T_0)$ se relève en un élément de $\pi_i(L - \theta_0)$ représentant zéro dans $\pi_i(L)$, d'où la conclusion.

Deuxième cas : $2 \leq i \leq n - 2$: On a vu, en démontrant la proposition A.1, que dans ce cas,

$$\pi_i(M, M - T_0) \cong H_i(\widetilde{M}, \widetilde{M} - T_0) \cong \mathbf{Z}[\pi_1(M)].$$

On en obtient des générateurs comme \mathbf{Z} -module de la manière suivante : on considère un plongement $\varphi : S^i \rightarrow M$ paramétrant la sphère S_0^i ; des générateurs sont alors les images dans $\pi_i(M, M - T_0)$ des éléments $g[\varphi]$, où $g \in \pi_1(M)$ et $[\varphi]$ est la classe de φ dans $\pi_i(M)$. Puisque le fibré normal à S_0^i dans M est trivial (S_0^i est le bord d'une anse) et que $i \leq n - 2$, on peut représenter ces générateurs par des applications dont l'image est disjointe de S_0^i ; les images par γ de ces applications sont incluses dans $L - \theta_0$ et homotopes à zéro dans L . La conclusion est alors évidente.

C. Q. F. D.

APPENDICE B.

Nous reproduisons ici le texte d'une Note proposée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ⁽²⁰⁾. C'est en constatant la longueur d'une rédaction complète et les possibilités d'extension du sujet que nous avons décidé de ne placer ici que les résultats. Les démonstrations complètes se trouveront dans un article à paraître ultérieurement.

**Singularités de codimension 1
et chemins élémentaires d'élimination.**

I. INTRODUCTION. — Si $h : V^n \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de Morse sur une variété C^∞ , et si c_1 et c_2 sont deux points critiques de h pouvant s'éliminer, on appelle chemin d'élimination issu de h relatif au couple (c_1, c_2) un chemin continu de fonctions $h_t : V \rightarrow \mathbf{R}$ (pour la topologie C^∞), d'origine $h = h_0$, d'extrémité une fonction de Morse h_1 ayant les mêmes points critiques que h moins le couple (c_1, c_2) , et tel qu'il existe une et une seule valeur θ du paramètre pour laquelle h_θ ne soit pas une fonction de Morse; en ce point on suppose que le chemin coupe transversalement une strate de naissance (voir [1]). On note $\mathcal{C}(h) = \mathcal{C}(h, c_1, c_2)$ l'espace de ces chemins, muni de la topologie C^0 . Dans [1] ⁽²¹⁾ Cerf introduit la notion de « chemin élémentaire d'élimination », et définit ainsi un sous-espace $\mathcal{E}l(h)$ de $\mathcal{C}(h)$. Le but de cette Note est de montrer que, pour tout $j \geq 1$ et tout $\gamma \in \mathcal{E}l(h)$, l'inclusion induit un isomorphisme de $\pi_j(\overline{\mathcal{E}l(h)}, \gamma)$ sur $\pi_j(\mathcal{C}(h), \gamma)$, ainsi qu'une bijection sur les π_0 , où $\overline{\mathcal{E}l(h)}$ est un sous-complexe du complexe singulier de $\mathcal{E}l(h)$ défini dans [1] (Cerf montre la surjection sur le π_0). Le calcul de $\pi_j(\overline{\mathcal{E}l(h)}, \gamma)$ est ramené au paragraphe 3 à l'étude de certains espaces de plongements, ce qui fait le lien avec [5] ⁽²¹⁾, et donne une meilleure interprétation des obstructions qui y sont décrites. Le paragraphe 2 est basé sur la méthode utilisée par J. Mather pour l'étude de la stabilité des fonctions C^∞ ; nous sommes, d'autre part, reconnaissants à B. Teissier d'avoir attiré notre attention sur l'idéal \mathfrak{M}^2 . Dans une prochaine Note, le premier auteur développera les méthodes du paragraphe 2 dans un cadre plus général.

⁽²⁰⁾ *C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 1575-1578.

⁽²¹⁾ Voir aussi le paragraphe 1 de cet article.

2. ÉTUDE LOCALE. — Le modèle local $f: (\mathbf{R}^n, \mathfrak{o}) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathfrak{o})$ d'un point singulier de codimension 1 correspondant à la naissance d'un couple de points critiques d'indices i et $i + 1$ est $f(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n^2$, où

$$q(x_1, \dots, x_{n-1}) = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2.$$

Soit \mathfrak{D} l'espace (muni de la topologie C^∞) des germes de difféomorphismes locaux de $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o})$ tangents à l'identité en \mathfrak{o} . Soit \mathfrak{F} l'espace (muni de la topologie C^∞) des germes en \mathfrak{o} de fonctions C^∞ de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} ; soit \mathfrak{M} l'idéal maximal de l'anneau local \mathfrak{F} , et soit \mathfrak{J} l'idéal jacobien de f .

LEMME FONDAMENTAL. — L'application continue de \mathfrak{D} dans \mathfrak{F} définie par $(\psi \mapsto f \circ \psi - f)$ admet une section continue au-dessus du sous-espace $\mathfrak{M} \mathfrak{J}^2$ de \mathfrak{F} .

Démonstration. — Elle est basée sur la méthode de J. Mather telle qu'elle a été exposée dans [22]. Si $g \in \mathfrak{M} \mathfrak{J}^2$, et si $t \in [0, 1]$, l'idéal jacobien \mathfrak{J}_t de $f + tg$ est constant, et on peut écrire

$$g = - \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = - \sum_{j=1}^n X'_j \frac{\partial (f + tg)}{\partial x_j},$$

où le champ de vecteurs X'_j dépend différentiablement de t et du champ X_j . Soit ψ_t la famille de difféomorphismes locaux de $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o})$ solution de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_t^{-1}(x) = X'_t(\psi_t^{-1}(x)) \quad (\psi_0 = \text{identité}).$$

On vérifie que $f + tg = f \circ \psi_t$ et que $\psi'_t(\mathfrak{o})$ est constant, donc égal à l'identité. Le seul problème est la dépendance continue de ψ_t par rapport à g , c'est-à-dire la dépendance continue du champ X par rapport à g ; la forme simple de $\mathfrak{J} = \{x_1, \dots, x_n\}$ permet d'écrire canoniquement un élément

de \mathfrak{J} sous la forme $\sum_{j=1}^{n-1} X_j x_j + X_n x_n^2$, où les X_j sont certaines combinaisons d'intégrales faisant intervenir les dérivées de g .

C. Q. F. D.

Ce lemme nous permet d'étudier l'espace \mathfrak{S} (muni de la topologie C^∞) des germes de difféomorphismes locaux de $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{o})$, conservant l'orientation, qui laissent invariant le germe de f . Soit $J\mathfrak{S}$ le sous-espace de $GL(n; \mathbf{R})$ formé des jets en \mathfrak{o} d'éléments de \mathfrak{S} .

THÉORÈME. — L'application « jet » : $\mathfrak{S} \rightarrow \mathbf{J}\mathfrak{S}$ est une fibration triviale de fibre acyclique. De plus, $\mathbf{J}\mathfrak{S}$ (et donc \mathfrak{S}) a le type d'homotopie du sous-espace $\mathrm{SO}(i, n-1-i)$ de $\mathrm{GL}(n-1, \mathbf{R})$ formé des éléments laissant invariante la forme quadratique q et conservant l'orientation.

Démonstration. — On commence par démontrer le théorème en remplaçant \mathfrak{S} par l'espace \mathfrak{S}' formé des germes de difféomorphismes φ de $(\mathbf{R}^n, 0)$ tel que $f \circ \varphi - f \in \mathfrak{M}^3 \subset \mathfrak{F}$. Dans ce cas, on peut expliciter l'espace $\mathbf{J}\mathfrak{S}'$ et une section $\mathbf{J}\mathfrak{S}' \rightarrow \mathfrak{S}'$, ainsi qu'une contraction de la fibre au-dessus du jet identité. Le lemme fondamental donne alors une rétraction de déformation fibrée de \mathfrak{S}' sur \mathfrak{S} , et montre que $\mathbf{J}\mathfrak{S}' = \mathbf{J}\mathfrak{S}$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Soit \mathfrak{S}_0 le sous-espace de \mathfrak{S} formé des germes qui laissent séparément invariantes les fonctions $q(x_1, \dots, x_{n-1})$ et x_n^3 . L'inclusion $\mathfrak{S}_0 \hookrightarrow \mathfrak{S}$ est une équivalence d'homotopie.

3. APPLICATION AUX CHEMINS ÉLÉMENTAIRES D'ÉLIMINATION. — On trouvera dans [1] les définitions de « plongement adapté », « chemin élémentaire de traversée » (en un point d'une strate de naissance), « chemin élémentaire d'élimination » (issu d'une fonction h comme dans l'introduction). Nous avons été obligés de modifier légèrement la définition de Cerf des chemins élémentaires, afin de rendre variable avec le paramètre le support de la déformation.

Application 1. — L'espace des plongements du modèle de naissance ($\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^n$, muni de la fonction f), adaptés à une fonction donnée F de la strate de naissance, est fibré sur l'espace contractile des difféomorphismes croissants de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , avec pour fibre l'espace $\mathfrak{S}(\mathbf{B})$ des difféomorphismes qui conservent l'orientation du modèle de naissance (qui est une boule de \mathbf{R}^n) et qui laissent invariante la fonction f .

Application 2. — Le complexe de Kan $\widetilde{\mathcal{E}l}(F)$ des chemins élémentaires de traversée en un point F de la strate de naissance a même type d'homotopie faible que le quotient $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}_0$ et est donc acyclique. Ceci découle en particulier du fait que \mathfrak{S}_0 est exactement le sous-groupe de \mathfrak{S} formé des germes de difféomorphismes qui laissent invariants les germes de toutes les fonctions $f_\lambda = f + \lambda x_n$, $\lambda \in [-1, +1]$. On déduit de [1] le

COROLLAIRE. — Avec les notations de l'introduction, l'inclusion $\mathcal{E}l(h) \rightarrow \mathcal{C}(h)$ induit pour tout $j \geq 1$ et tout $\gamma \in \mathcal{E}l(h)$ un isomorphisme de $\pi_j(\widetilde{\mathcal{E}l}(h), \gamma)$ sur $\pi_j(\mathcal{C}(h), \gamma)$, et une bijection de $\pi_0(\widetilde{\mathcal{E}l}(h))$ sur $\pi_0(\mathcal{C}(h))$.

Application 3. — On démontre que l'application naturelle de $\mathfrak{S}(B)$ sur \mathfrak{S} , qui à un difféomorphisme associe son germe en o , est une équivalence d'homotopie faible. On en déduit que l'application naturelle de $\mathfrak{S}_0(B)$ dans \mathfrak{S}_0 est une équivalence d'homotopie faible, où $\mathfrak{S}_0(B) = \{\text{difféomorphismes de } B \text{ laissant toutes les } f_i \text{ invariantes}\}$. En particulier, $\mathfrak{S}_0(B)$ a même type d'homotopie faible que $SO(i) \times (SO(n-1-i))$.

COROLLAIRE. — $\widetilde{\mathcal{E}l}(h)$ a même type d'homotopie faible que l'espace des « couples de nappes en bonne position relatives à (h, c_1, c_2) » (voir définition dans [1]). On en déduit alors que, pour tout $j \geq 0$,

$$\pi_j(\widetilde{\mathcal{E}l}(h), \gamma) \cong \pi_{j+1}(\text{Plgt}(S^i, M), \text{Plgt}(S^i, M; S^i \cdot h T_0 = 1), \varphi_0),$$

où M^{n-1} est une variété intermédiaire de h entre c_1 et c_2 , et T_0^{n-i-1} le bord dans M d'une nappe montante de c_2 (point d'indice i) correspondant à γ .

Les notations sont celles de [5] ⁽²¹⁾ qui prend ainsi un nouvel intérêt.

4. UNE REMARQUE SUR LA QUEUE D'ARONDE. — Soit $\mathfrak{P}(B)$ l'espace des plongements du modèle adaptés à une fonction $k: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ sans point critique (la fonction sur le modèle est x_n). Soit $\widetilde{\mathcal{E}l}(k)$ le complexe de Kan des chemins élémentaires de naissance $(i, i+1)$ issus de k . Le morphisme naturel de $\mathfrak{P}(B)$ sur $\widetilde{\mathcal{E}l}(k)$ est une fibration de Kan dont la fibre a le type d'homotopie faible de $\mathfrak{S}_0(B)$, et donc de \mathfrak{S}_0 . On en déduit la suite exacte (les points-base ne jouent aucun rôle)

$$\pi_1(\mathfrak{S}_0) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{P}(B)) \rightarrow \pi_1(\widetilde{\mathcal{E}l}(k)) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{S}_0) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{P}(B)).$$

La première flèche n'est autre que l'application

$$\pi_1(SO(i, n-1-i)) \rightarrow \pi_1(GL(n-1))$$

induite par l'inclusion, et est surjective pour tout i .

D'autre part,

$$\pi_0(\mathfrak{P}(B)) \cong \{o\}, \text{ donc } \pi_1(\widetilde{\mathcal{E}l}(k)) \cong \pi_0(\mathfrak{S}_0).$$

Lorsque $1 \leq i \leq n-2$, $\pi_0(\mathfrak{S}_0) \cong \mathbf{Z}_2$, donc $\pi_1(\widetilde{\mathcal{E}l}(k)) \cong \mathbf{Z}_2$, ce qui éclaircit la démonstration que donne Cerf du lemme de la queue d'aronde, et explique en particulier le « cône » de la remarque (p. IV.24 de [1]).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. CERF, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, à paraître aux *Publications math. de l'I. H. E. S.*, vol. 39, (Bures-sur-Yvette).
- [2] J. CERF, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension 3 ($\Gamma_4 = 0$)* (*Lectures Notes in Math.*, 53, Springer, 1968).
- [3] J. CERF et A. GRAMAIN, *Le théorème du h-cobordisme*, Secrétariat Mathématique de l'E. N. S., Paris, 1968.
- [4] A. CHENCINER, *La classification des sphères exotiques*, exposés au Séminaire Shih, I. H. E. S., 1970.
- [5] A. CHENCINER et F. LAUDENBACH, *Théorie de Smale à un paramètre dans le cas non simplement connexe* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 176-178 et 307-310).
- [6] J.-P. DAX, *C. R. Acad. Sc.*, t. 264, série A, 1967, p. 499.
- [7] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables de variétés dans variétés* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 36, 1961, p. 47-82).
- [8] A. HAEFLIGER, *Knotted $(4k-1)$ -spheres in $6k$ -Space* (*Ann. of Math.*, vol. 75, 1962, p. 452-466).
- [9] S. T. HU, *Homotopy Theory*, Academic Press, 1959.
- [10] M. KERVAIRE, *Le théorème de Barden-Mazur-Stallings* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 40, 1965, p. 31-42).
- [11] M. KERVAIRE and J. MILNOR, *Groups of homotopy spheres I* (*Ann. of Math.*, vol. 77, 1963, p. 504-537).
- [12] F. LAUDENBACH, *Disjonction de sous-variétés et application au croisement d'anses* (Thèse, 1^{re} partie, Orsay, 1970; miméographiée au Centre de Math. de l'École Polytechnique, Paris) ou *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 3, fasc. 4, 1970, p. 385-408.
- [13] F. LAUDENBACH, *C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 1320.
- [14] J. MILNOR, *Lectures on the h-cobordism theorem*, notes by L. SIEBENMANN and J. SONOW, Princeton University Press, 1965.
- [15] J. MILNOR, *Whitehead Torsion* (*Bull. Amer. Math. Sc.*, vol. 72, 1966, p. 358-426).
- [16] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [17] L. SIEBENMANN, *Torsion invariants for pseudo-isotopies on closed manifolds* (*Notices A. M. S.*, t. 14, 1967, p. 942).
- [18] S. SMALE, *On the structure of manifolds* (*Amer. J. Math.*, vol. 84, 1962, p. 387-399).
- [19] S. SMALE, *The classification of immersions* (*Ann. of Math.*, vol. 69, 1959, p. 327-344).
- [20] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [21] R. WELLS, *Modifying intersections* (*Ill. J. Math.*, vol. 11, 1967, p. 389-403).
- [22] R. THOM, *Bifurcation des gradients*, Conférence à l'I. H. E. S., décembre 1969.

(Manuscrit reçu le 13 août 1970.)

Alain CHENCINER,
 François LAUDENBACH,
 Centre de Mathématiques,
 École Polytechnique,
 17, rue Descartes,
 75-Paris, 5^e.