

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FRANÇOIS LAUDENBACH

Disjonction de sous-variétés et application au croisement des anses

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 3, n° 4 (1970), p. 385-408

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_4_385_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISJONCTION DE SOUS-VARIÉTÉS ET APPLICATION AU CROISEMENT DES ANSES

PAR FRANÇOIS LAUDENBACH.

TABLE DES MATIÈRES.

| | Pages. |
|---|--------|
| INTRODUCTION..... | 385 |
| 1. Un théorème de disjonction..... | 387 |
| 2. Étude à plusieurs paramètres du problème de la disjonction..... | 396 |
| 3. Calcul de $\pi_1[\text{Plgt}_1(S^m, V^v), \text{Plgt}_1(S^m, V^v - N^u), \varphi_0]$. Application au problème des croisements de points critiques dans une théorie de Smale à plusieurs paramètres..... | 402 |

Le présent travail, ainsi que le suivant (intitulé *Contribution à une théorie de Smale à un paramètre dans le cas non simplement connexe*) ont été réunis pour constituer une thèse qui a été préparée sous la direction du Professeur Jean Cerf et qui a été soutenue à la Faculté des Sciences d'Orsay en juin 1970.

Avant d'entrer dans le sujet, je tiens à exprimer ici ma reconnaissance à Jean CERF, qui m'a incité à poursuivre mes recherches dans ce domaine de la topologie. Le second article a été écrit avec Alain CHENCINER, dont la collaboration amicale m'a été précieuse. Je remercie enfin Claude MORLET pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés à propos du premier article.

Je dédie ce mémoire à mon ami Harold ROSENBERG.

Introduction.

Soient une variété V et deux sous-variétés M et N de V . Le problème que nous nous proposons d'étudier est celui de la disjonction de M et de N ; plus précisément, il s'agit de trouver des conditions homotopiques nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une isotopie $H : M \times [0, 1] \rightarrow V$,

telle que $H|M \times \{0\}$ soit l'injection canonique $M \hookrightarrow V$ et que $H(M \times \{1\})$ soit disjoint de N ; nous dirons que H est une isotopie de disjonction de M par rapport à N .

Nous ferons cette étude, soit dans la catégorie différentielle de classe infinie, notée DIFF, soit dans la catégorie semi-linéaire (ou linéaire par morceaux), notée PL. Soient X et Y deux variétés dans la catégorie C ($C = \text{DIFF}$ ou PL); $\text{Aut}^c(X)$ désigne l'ensemble semi-simplicial des automorphismes de X et $\text{Plgt}^c(Y, X)$ désigne l'ensemble semi-simplicial des plongements de Y dans X . Rappelons, par exemple, qu'un p -simplexe de $\text{Aut}^{\text{PL}}(X)$ est un automorphisme semi-linéaire

$$F: \Delta^p \times X \rightarrow \Delta^p \times X$$

respectant la projection sur Δ^p , où Δ^p est le p -simplexe standard de dimension p . Si $C = \text{DIFF}$ on sait que $\text{Aut}^{\text{DIFF}}(X)$ a le même type d'homotopie que le complexe singulier de l'espace des difféomorphismes de X , muni de la topologie \mathcal{C}^∞ . Si les bords ∂X et ∂Y ne sont pas vides, il est sous-entendu que les morphismes respectent les relations d'incidence, c'est-à-dire qu'ils envoient une face dans une face de même indice.

Enfin $\text{Aut}^c(X; \partial X)$ est le sous-ensemble de $\text{Aut}^c(X)$ des automorphismes qui sont l'identité sur le bord, et $\text{Plgt}^c(Y, X; f_0)$ est le sous-ensemble de $\text{Plgt}^c(Y, X)$ des plongements de Y dans X dont la restriction à ∂Y est un plongement donné $f_0: \partial Y \rightarrow \partial X$.

Rappelons les théorèmes de fibration suivants : soient Y une sous-variété de X et $j: Y \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. Soit $\rho: \text{Aut}^c(X) \rightarrow \text{Plgt}^c(Y; X)$ [resp. $\rho': \text{Aut}^c(X, \partial X) \rightarrow \text{Plgt}^c(Y, X; j|_{\partial Y})$] l'application qui à tout automorphisme associe sa restriction à la sous-variété Y . Alors ρ et ρ' sont des fibrations de Kan, à condition que Y soit localement plate; cette condition est toujours satisfaite si $C = \text{DIFF}$, ou si $C = \text{PL}$ et si Y est de codimension supérieure ou égale à 3 dans X . (Si $C = \text{DIFF}$, voir [1] ou l'appendice de [2]; si $C = \text{PL}$, voir [11; p. 154].) Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, une sous-variété PL sera toujours localement plate.

Une conséquence de ces théorèmes de fibration est la suivante : dans la situation décrite au début, s'il existe une isotopie de disjonction de M par rapport à N , alors il existe une isotopie de disjonction de N par rapport à M ; en effet, l'isotopie H se prolonge en une isotopie ambiante de V .

DÉFINITION. — Si $f: M \times [0, 1] \rightarrow V$ est une application continue telle que $f|M \times \{0\}$ soit l'injection canonique $M \hookrightarrow V$ et que $f(M \times \{1\})$ soit disjoint de N , nous dirons que f est une homotopie de disjonction de M par rapport à N .

Comme nous le verrons dans un exemple (§ 1.4), il peut très bien exister une homotopie de disjonction de M par rapport à N et pas d'homotopie de disjonction de N par rapport à M . Ceci montre qu'en général l'existence d'une homotopie de disjonction n'est pas équivalente à l'existence d'une isotopie de disjonction.

Dans le paragraphe 1, nous montrerons que si

$$2 \dim V - 2 \dim M - \dim N - 3 \geq 0$$

et si l'on peut disjoindre M de N homotopiquement, alors on peut le faire isotopiquement. La condition dimensionnelle ne fait pas intervenir symétriquement M et N ; mais cela n'a rien d'étonnant d'après l'exemple cité plus haut. D'ailleurs, le même exemple montre que, sorties de ce domaine, les deux notions de disjonction ne sont plus équivalentes. Le résultat est valable dans les deux catégories DIFF et PL. La démonstration est fondée sur la méthode d'engouffrement (engulfing) due à J. Stallings [18]; c'est une méthode naturelle en PL et elle s'adapte facilement à la catégorie DIFF; en revanche, elle ne marche en général pas dans la catégorie topologique. Nous finirons ce paragraphe en comparant, pour des variétés DIFF, l'existence d'isotopies de disjonction DIFF et PL.

Dans le paragraphe 2, nous verrons comment le résultat du paragraphe 1, joint au résultat de C. Morlet (isotopie et pseudo-isotopie en codimension plus grande que 3, [14] et appendice [15]), permet de calculer, en termes homotopiques, les premiers groupes d'homotopie de la paire $(\text{Plgt}(M; V), \text{Plgt}(M, V - N))$.

Au paragraphe 3, nous pourrions pousser plus loin ce calcul dans le cas où M est une sphère. Nous verrons aussi l'application de cette étude au problème des croisements dans une théorie d'anses (ou théorie de Smale) à plusieurs paramètres. Cette application fut d'ailleurs pour nous la justification de ce travail.

1. Un théorème de disjonction.

Nous commencerons ce paragraphe en rappelant en quoi consiste la méthode d'engouffrement de J. Stallings. Soient dans la catégorie C ($=$ DIFF ou PL) une variété V et un polyèdre P ; si $V \in \text{DIFF}$, P est un sous-complexe d'une C^1 -triangulation de V [22]. Soient L un sous-polyèdre de P et \mathcal{U} un ouvert de V contenant L . Supposons que P collapse simplicialement sur L à travers un simplexe σ ; c'est-à-dire que σ est le joint $a \star \tau$ d'un sommet a et d'une face τ tels que $L \cap \sigma = a \star \partial \tau$; nous désignerons cette situation par la notation $P \searrow_{\sigma} L$.

1.1. LEMME D'ENGOUFFREMENT ÉLÉMENTAIRE. — Soit la situation ci-dessus. Alors il existe, dans la catégorie C une isotopie ⁽¹⁾ $H: V \times [0, 1] \rightarrow V$ telle que $H|V \times \{0\}$ soit l'identité de V , que $H(\mathcal{U} \times \{1\})$ contienne P et que, pour tout $t \in [0, 1]$, $H|L \times \{t\}$ soit l'injection $L \hookrightarrow V$. De plus, on peut choisir H pour que son support soit inclus dans un voisinage arbitraire de σ .

On dira que H est un engouffrement de P par \mathcal{U} .

On peut trouver une démonstration détaillée de ce lemme dans [16; fasc. I, p. 11]. Il est évidemment généralisable au cas où P collapse sur L à travers un nombre fini de simplexes (i. e. : il existe une suite finie de complexes $K_0 = P \supset K_1 \supset \dots \supset K_k \supset \dots \supset K_n = L$, telle que $\overline{K_k - K_{k+1}}$ soit un simplexe σ_k et que $K_k \xrightarrow{\sigma_k} K_{k+1}$).

A titre d'exemple, donnons le théorème d'engouffrement dû à J. Stallings et dont on trouvera des démonstrations dans [18], [11; p. 163], [16; fasc. I, p. 1.17].

1.2. THÉORÈME. — Soient, dans la catégorie C ($= \text{DIFF}$ ou PL), une variété V de dimension ν , un polyèdre P dans V de dimension p , un sous-polyèdre compact L de dimension l , inclus dans P , et un ouvert \mathcal{U} de V contenant $\overline{P - L}$. On suppose que $p \leq \nu - 3$ et que la paire (V, \mathcal{U}) est au moins l -connexe. Alors il existe dans la catégorie C une isotopie $H: V \times [0, 1] \rightarrow V$, telle que $H|V \times \{0\}$ soit l'identité de V , que $H(\mathcal{U} \times \{1\})$ contienne P et que, pour tout $t \in [0, 1]$, $H(\mathcal{U} \times \{t\})$ contienne $\overline{P - L}$.

La démonstration du théorème suivant (th. 1.3) est une adaptation des idées de J. Stallings au problème de la disjonction. Mais le théorème 1.3 n'est pas un corollaire de 1.2; dans cette direction, le théorème 1.2 ne donne qu'un théorème classique de position générale, qui peut évidemment s'obtenir sans introduire la notion d'engouffrement.

1.3. THÉORÈME DE DISJONCTION. — Soient, dans la catégorie C ($= \text{DIFF}$ ou PL) une variété V de dimension ν et, dans V , deux polyèdres M et N de dimensions respectives m et n . Notons ∂M et ∂N les intersections de M et de N avec le bord ∂V . On suppose que M est compact et que $\partial M \cap \partial N = \emptyset$. Soit $h: (M, \partial M) \times [0, 1] \rightarrow (V, \partial V)$ une homotopie de disjonction de M par rapport à N : $h|M \times \{0\}$ est l'injection canonique de M dans V et $h(M \times \{1\}) \cap N = \emptyset$; on suppose aussi que $h(\partial M \times [0, 1]) \cap \partial N = \emptyset$.

(1) Une isotopie ambiante de V , c'est aussi un 1-simplexe de l'ensemble semi-simplicial $\text{Aut}(V)$.

(1) Si $2\nu - 2m - n - 3 \geq 0$, alors il existe dans la catégorie C une isotopie $H: V \times [0, 1] \rightarrow V$ telle que $H|_{V \times \{0\}}$ soit l'identité de V et que $H(M \times \{1\}) \cap N = \emptyset$. H peut être choisie à support dans l'intérieur de V .

(2) Si $2\nu - 2m - n - 3 > 0$, l'isotopie de disjonction H peut être choisie de telle sorte que $H|_{M \times [0, 1]}$ et h soient homotopes, relativement à $M \times \{0\}$, en tant qu'applications de paires de $(M \times [0, 1], M \times \{1\} \cup \partial M \times [0, 1])$ dans $(V, V - N)$.

Remarque. — La démonstration se fait simultanément pour la catégorie DIFF et pour la catégorie PL; il n'est pas nécessaire de faire appel à un théorème de lissage pour obtenir le résultat DIFF à partir du résultat PL. D'ailleurs, le choix de la catégorie n'intervient que chaque fois que l'on veut appliquer le lemme 1.1.

Démonstration de la première partie. — Rappelons d'abord que si l'on a deux polyèdres dans une variété, on peut, par une isotopie ambiante, déplacer l'un pour le mettre en position générale par rapport à l'autre [20; chap. 6, th. 15]. En particulier, si la somme de leurs dimensions est strictement inférieure à la dimension de la variété, alors on peut les disjointre par une isotopie ambiante.

Nous observons tout de suite que, pour $m \geq \nu - 2$, l'inégalité $2\nu - 2m - n - 3 \geq 0$ implique l'inégalité $m + n < \nu$, et qu'alors, une petite isotopie de mise en position générale est une isotopie de disjonction.

En revanche, dès que $m \leq \nu - 3$, la disjonction ne peut plus se faire par mise en position générale. On part alors de l'homotopie $h: M \times [0, 1] \rightarrow V$ qui nous est donnée par hypothèse. Il existe une triangulation T de $M \times \{1\}$, arbitrairement fine, pour laquelle $M \times [0, 1]$ s'effondre sur $M \times \{1\}$ par une suite finie de collapsés simpliciaux

$$K_1 = M \times [0, 1] \searrow \dots \searrow K_k \xrightarrow{\sigma_k} K_{k+1} \searrow \dots \searrow K_p = M \times \{1\}$$

avec la propriété supplémentaire suivante : si la face libre de σ_k est dans $\partial M \times [0, 1]$, on demande que σ_k soit entièrement inclus dans $\partial M \times [0, 1]$; par exemple on choisit d'abord un collapse de $M \times [0, 1]$ sur $\partial M \times [0, 1] \cup M \times \{1\}$ et un collapse de $\partial M \times [0, 1]$ sur $\partial M \times \{1\}$ (cf. [16], fasc. I, p. 16, [11], p. 44). Si T est choisie suffisamment fine, on peut approcher h , relativement à $M \times \{0\}$ par une nouvelle homotopie de disjonction, notée encore h , telle que h soit linéaire sur chaque simplexe et en position générale [11; chap. VI]; ceci veut dire la chose suivante :

- (a) h est non dégénérée : pour tout $x \in V$, $h^{-1}(x)$ est un ensemble fini;
- (b) pour toute paire (σ, σ') de simplexes de la triangulation T , tels que $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$, on a $\dim(h(\sigma) \cap h(\sigma')) \leq \dim \sigma + \dim \sigma' - \dim \nu$;
- (c) si $x \in (M - \partial M) \times [0, 1]$, $h(x) \in V - \partial V$.

La démonstration consiste maintenant à réaliser un engouffrement de $h(M \times [0, 1])$ par l'ouvert $\mathcal{U} = V - N$, compte tenu du fait que \mathcal{U} contient déjà $h(M \times \{1\})$ et que $M \times [0, 1]$ collapse sur $M \times \{1\}$; en effet, trouver une isotopie de \mathcal{U} jusqu'à ce qu'il contienne $h(M \times \{0\}) \equiv M$, c'est bien disjoindre M de N par une isotopie ambiante. En fait, on pourrait se contenter de réaliser l'engouffrement de $h(P)$, où P est un sous-complexe de $M \times [0, 1]$ contenant $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$; effectivement nous aurons besoin de prendre pour P le squelette de codimension 1 de $M \times [0, 1]$.

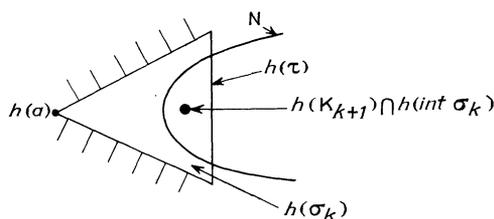


Fig. 1.

Reprenons la suite de collapses décrite plus haut et, pour une récurrence descendante sur k , supposons que \mathcal{U} contienne $h(K_{k+1})$. On ne peut pas appliquer directement le lemme 1.1 d'engouffrement puisque $h|K_k$ n'est pas un plongement; plus précisément, $h(K_{k+1}) \cap h(\text{int } \sigma_k)$ peut ne pas être vide et être « enlacé » avec $N \cap h(\text{int } \sigma_k)$ dans $h(\sigma_k)$; dans ce cas, on rencontre une obstruction à réaliser l'engouffrement de $h(K_k)$ par \mathcal{U} , de telle sorte que, tout au cours de la déformation, l'image de \mathcal{U} contienne toujours $h(K_{k+1})$.

Soit τ la face libre de σ_k et a le sommet opposé : $\sigma_k = a \star \tau$. Désignons par Σ le sous-cône de $h(\sigma_k)$ de sommet $h(a)$ s'appuyant sur le polyèdre des points doubles $h(K_{k+1}) \cap h(\text{int } \sigma_k)$. Si $N \cap \Sigma$ est vide, \mathcal{U} contient $h(K_{k+1}) \cup \Sigma$ et l'engouffrement peut être réalisé par application du lemme élémentaire puisque $h(K_k)$ collapse sur $h(K_{k+1}) \cup \Sigma$ [20; chap. III, p. 7]. De plus, il est facile de voir que l'on peut choisir l'isotopie réalisant cet engouffrement à support dans l'intérieur de V . Si $N \cap \Sigma$ n'est pas vide, deux cas se présentent :

Premier cas : $2\nu - 2m - n - 3 > 0$.

Dans ce cas, par une petite isotopie, on met N en position générale par rapport à Σ . Mais puisque h est en position générale,

$$\dim \Sigma - 1 \leq \dim(h(K_{k+1}) \cap h(\text{int } \sigma_k)) \leq 2(m+1) - \nu;$$

on a donc $\dim \Sigma < \nu - n$; autrement dit, en position générale $N \cap \Sigma = \emptyset$.

Deuxième cas : $2\nu - 2m - n - 3 = 0$.

Dans ce cas, en position générale, $N \cap \Sigma$ est de dimension zéro. On introduit alors \tilde{K}_k , le squelette de codimension 1 de K_k ; \tilde{K}_1 contient $M \times \{0\}$. Notons $\tilde{\Sigma}$ le sous-cône de Σ s'appuyant sur $h(\tilde{K}_{k+1}) \cap h(\text{int}\sigma_k)$. Puisque h est en position générale,

$$\dim \tilde{\Sigma} \leq \dim(h(\tilde{K}_{k+1}) \cap h(\text{int}\sigma_k)) + 1 \leq 2m + 1 - \nu + 1.$$

En mettant N en position générale par rapport à $\tilde{\Sigma}$, on se ramène au cas où $\tilde{\Sigma} \cap N = \emptyset$. Si, pour une récurrence sur k , on suppose que \mathcal{U} contient $h(\tilde{K}_{k+1})$, on voit alors que, quitte à faire une petite isotopie, on peut supposer que \mathcal{U} contient $h(\tilde{K}_{k+1}) \cup \tilde{\Sigma}$. Alors \mathcal{U} peut engouffrer $h(\tilde{K}_{k+1}) \cup h(\sigma_k)$ qui collapse sur $h(\tilde{K}_{k+1}) \cup \tilde{\Sigma}$. En particulier, à la fin de l'isotopie, \mathcal{U} contiendra $h(\tilde{K}_k)$, ce qui établit la récurrence. Il faut remarquer qu'à l'étape suivante on part avec \mathcal{U} contenant $h(\tilde{K}_k) \cup h(\sigma_k)$, mais que, pour réaliser l'engouffrement de $h(\tilde{K}_{k-1})$, on ne pourra pas imposer que $h(\sigma_k)$ reste dans \mathcal{U} si $\dim \sigma_k = m + 1$.

Démonstration de la seconde partie. — Tout d'abord, si $m \geq \nu - 2$, l'inégalité $2\nu - 2m - n - 3 > 0$ entraîne $(m + 1) + n < \nu$; donc par position générale, toutes les homotopies de disjonction sont homotopes entre elles.

Si $m \leq \nu - 3$ et $2\nu - 2m - n - 3 > 0$, nous avons pu réaliser l'engouffrement de $h(M \times [0, 1])$ par l'ouvert \mathcal{U} . Nous avons donc construit une isotopie $\Lambda : V \times [0, 1] \rightarrow V$ telle que :

- $\Lambda|_{V \times \{0\}}$ soit l'identité de V ;
- $\Lambda(\mathcal{U} \times \{1\})$ contienne $h(M \times [0, 1])$;
- pour tout $t \in [0, 1]$, $\Lambda(\mathcal{U} \times \{t\}) \supset h(M \times \{1\})$.

De plus, on a pu choisir Λ à support dans l'intérieur de V . Considérons alors l'isotopie de disjonction $H : M \times [0, 1] \rightarrow V$ définie par $H = \Lambda^{-1} \circ j_M$, où j_M est l'injection canonique de M dans V . Soit $\Psi : M \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow V$ l'application définie comme suit : pour $(x, u, t) \in M \times [0, 1] \times [0, 1]$, on pose

$$\begin{aligned} \Psi(x, u, t) &= h(x, u) && \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ &= \Lambda^{-1}(h(x, u), 2t - 1) && \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

On observe que

$$\begin{aligned}\Psi(x, u, 0) &= h(x, u) \\ \Psi(x, 0, t) &= H(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ \Psi(x, 0, t) &= x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \Psi(x, u, t) &\in V - N & \text{si } t=1 \text{ ou } u=1.\end{aligned}$$

Considérons sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ un homéomorphisme α possédant sur le bord les propriétés suivantes : α $[0, 1] \times \{0\}$ identifie les deux exemplaires de l'intervalle $[0, 1] \times \{0\}$ et $\{1\} \times [0, 1]$;

$$\alpha([0, 1] \times \{1\} \cup \{1\} \times [0, 1]) = [0, 1] \times \{1\}$$

et

$$\alpha(0, t) = (0, 2t-1) \quad \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

Définissons alors $\varphi: M \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow V$ par $\varphi(x, u, t) = \Psi(x, \alpha^{-1}(u, t))$. On vérifie que

$$\begin{aligned}\varphi(x, u, 0) &= x, \\ \varphi(x, u, 1) &\in V - N, \\ \varphi(x, 0, t) &= H(x, t), \\ \varphi(x, 1, t) &= h(x, t).\end{aligned}$$

Autrement dit, H et h sont homotopes, relativement à $M \times \{0\}$, en tant qu'applications de paires de $(M \times [0, 1], M \times \{1\})$ dans $(V, V - N)$. De plus, $H|_{\partial M \times [0, 1]}$ et $h|_{\partial M \times [0, 1]}$ sont homotopes en tant qu'applications de $\partial M \times [0, 1]$ dans $\partial V - \partial N$.

C. Q. F. D.

Remarques :

(1) Soient $\text{Hom}(M, V)$ l'ensemble semi-simplicial des applications continues de M dans V et $\text{Plgt}(M, V)$ le sous-ensemble des plongements (si M est un polyèdre, un plongement de M dans V est une injection linéaire par morceaux). Alors le théorème 1.3 peut s'interpréter comme suit :

Si $2\varphi - 2m - n - 3 \geq 0$, l'application naturelle

$$\pi_0(\text{Plgt}(M, V), \text{Plgt}(M, V - N)) \rightarrow \pi_0(\text{Hom}(M, V), \text{Hom}(M, V - N))$$

est un monomorphisme d'ensembles pointés en ce sens que l'image réciproque du point base est le point base ⁽²⁾.

⁽²⁾ Si X est un sous-espace d'un espace topologique Y localement connexe par arcs, $\pi_0(X, Y)$ est l'ensemble quotient de $\pi_0(X)$, où toutes les composantes connexes de X rencontrant Y sont identifiées en un point. Ce point est le point-base de $\pi_0(X, Y)$.

Si $m \leq \nu - 1$ et $2\nu - 2m - n - 3 > 0$, l'application naturelle

$$\pi_1(\text{Plgt}(M, V), \text{Plgt}(M, V - N), \varphi_0) \rightarrow \pi_1(\text{Hom}(M, V), \text{Hom}(M, V - N), \varphi_0),$$

où φ_0 est un plongement de M dans $V - N$, est une surjection.

(2) Rappelons que, si M est une sous-variété de V , alors, avec la seule hypothèse $m \leq \nu - 1$, on a une homotopie régulière de disjonction, parmi les immersions, dès qu'on a une homotopie de disjonction; en effet, l'espace $\text{Imm}(M, V)$ des immersions de M dans V a le type d'homotopie faible de l'espace $\text{Mono}(\tau M, \tau V)$ des monomorphismes du fibré tangent τM dans le fibré tangent τV , [8], [10], [17]; or $\text{Mono}(\tau M, \tau V)$ est naturellement fibré sur $\text{Hom}(M, V)$. Si donc une immersion de M dans V représente l'élément trivial de $\pi_0(\text{Hom}(M, V), \text{Hom}(M, V - N))$, alors elle représente l'élément trivial dans

$$\pi_0(\text{Mono}(\tau M, \tau V), \text{Mono}(\tau M, \tau(V - N))) \cong \pi_0(\text{Imm}(M, V), \text{Imm}(M, V - N)).$$

(3) A. Haefliger [6; p. 169] et R. Wells [21] ont déjà donné des théorèmes de disjonction de sous-variétés dans le domaine métastable $2\nu - \max(m, n) - m - n - 3 \geq 0$. Par exemple, dans ce domaine et avec des hypothèses de q -connexité, Wells définit un invariant algébrique qui est une obstruction à la disjonction. Or il est très facile de vérifier que, dans les mêmes conditions, la nullité de l'obstruction de Wells implique l'existence d'une homotopie de disjonction. Pour cette raison, et dans la mesure où la méthode d'engouffrement s'applique aux polyèdres, notre résultat constitue une généralisation du théorème de Wells.

1.4. UN EXEMPLE. — Nous allons montrer par un exemple (fig. 2) que les conditions de dimension que nous nous sommes fixées dans le théo-

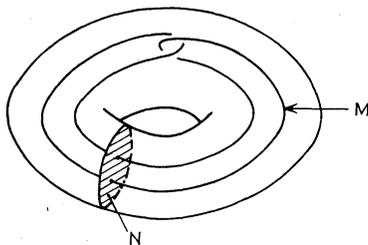


Fig. 2.

rème 1.3 sont les meilleures possibles. Cet exemple mettra en évidence le caractère non symétrique de la notion de disjonction homotopique.

Soient $V = S^1 \times D^{2k}$ et $N = \{x_0\} \times D^{2k}$, $x_0 \in S^1$. Supposons $k \geq 2$. Dans l'intérieur de $(S^1 - \{x_0\}) \times D^{2k}$, considérons deux sphères de dimen-

sion k , S_1^k et S_2^k , non nouées et enlacées de façon standard avec 1 pour coefficient d'enlacement. On joint S_1 à S_2 par un chemin γ plongé, coupant N en un seul point et ne rencontrant les deux sphères qu'en ses extrémités et transversalement (la classe d'isotopie de γ est bien définie par ces propriétés). On prend alors pour M la sphère plongée obtenue en faisant la somme connexe de S_1 et de S_2 le long de γ .

On observe que $M \cap N$ est une sphère de dimension $k - 1$. Il est clair que M peut être disjoint de N homotopiquement; en effet, $\pi_m(V) = 0$. En revanche, il n'existe pas de disjonction par isotopie, car il n'existe pas de disjonction homotopique de N par rapport à M . Avant de démontrer ce fait, constatons qu'ici $2 \dim V - 2 \dim M - \dim N - 3 = -1$. Plaçons-nous maintenant dans le revêtement universel $\tilde{V} \cong \mathbf{R} \times D^{2k}$ (fig. 3); l'image réciproque \tilde{M} de M est une chaîne de sphères.

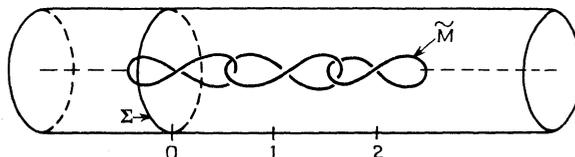


Fig. 3.

Nous conviendrons que l'image réciproque de x_0 est l'ensemble $\mathbf{Z} \times \{0\}$. Soit Σ la $(2k - 1)$ -sphère $\{0\} \times \partial D^{2k}$; c'est un relèvement du bord de N . Nous voulons voir que Σ n'est pas homotope à zéro dans $\tilde{V} - \tilde{M}$. Pour cela il suffit de voir que Σ n'est pas homotope à zéro dans $X \equiv (\tilde{V} - \tilde{M}) \cap [0, 1] \times D^{2k}$; en effet, X est un rétracte de $\tilde{V} - \tilde{M}$. Or X a le type d'homotopie du bouquet $S^k \vee S^k$ et la classe d'homotopie de Σ est le crochet de Whitehead des deux générateurs de ce bouquet. D'après le théorème de Hilton [9], ce crochet n'est pas nul. Finalement ∂N n'est pas homotope à zéro dans $V - M$.

Remarque critique. — L'exemple précédent, dont l'avantage est de mettre en évidence de façon lumineuse l'obstruction à laquelle nous avons fait allusion au cours de la démonstration du théorème 1.3, a cependant deux inconvénients : le premier est que la codimension de N n'est pas supérieure à 3 et le second est que V n'est pas simplement connexe. L'étude des enlacements de sphères, faite par A. Haefliger [7], fournit d'autres exemples montrant que l'on ne peut améliorer le théorème 1.3. Pour $p_2 \leq p_1$ et dans le domaine 2-métastable ($3q - 3p_1 - p_2 - 6 \geq 0$) il

existe un enlacement non trivial de deux sphères non nouées, S^{p_1} et S^{p_2} dans S^q , tel que S^{p_1} soit homotope à zéro dans $S^q - S^{p_2}$ et que S^{p_2} soit homotope à zéro dans $S^q - S^{p_1}$; c'est-à-dire que quels que soient les disques D^{p_1+1} et D^{p_2+1} , plongés dans D^{q+1} et bordés respectivement par S^{p_1} et S^{p_2} , ils auront toujours une intersection non vide, bien que l'un puisse être disjoint de l'autre homotopiquement. Plus précisément, si

$$2(q+1) - 2(p_1+1) - (p_2+1) - 3 = -1 \quad \text{et} \quad q - p_1 \geq 3,$$

on est dans le domaine 2-métastable et les classes d'isomorphisme de tels enlacements sont en bijection naturelle avec $\pi_{p_1+p_2-q+2}(\text{SO}, \text{SO}_{q-p_2-1})$ [7, p. 71].

Nous allons finir ce paragraphe par une comparaison des catégories DIFF et PL dans le problème de disjonction. La proposition 1.5 est en fait une conséquence de la théorie générale de lissage; cependant, en suivant les idées d'engouffrement nous pouvons en donner une démonstration élémentaire.

1.5. PROPOSITION. — *Soient V une variété différentiable, M un polyèdre de V et \mathcal{U} un ouvert de V . On suppose qu'il existe, pour une C^1 -triangulation, un automorphisme PL, $F: V \rightarrow V$, PL-isotope à l'identité, tel que $F(M)$ soit inclus dans \mathcal{U} . Alors il existe un difféomorphisme $F': V \rightarrow V$, isotope à l'identité et tel que $F'(M) \subset \mathcal{U}$.*

Démonstration. — Il revient au même de trouver un difféomorphisme $G: V \rightarrow V$, isotope à l'identité et tel que $G(\mathcal{U}) \supset M$. Soit $H: V \times I \rightarrow V$ une isotopie PL telle que $H_0 = \text{Id}|V$ et $H_1 = F$. Soit N un voisinage régulier de M dans V . Pour $t \in [0, 1]$, notons $N_t = H(N \times \{t\})$ et $M_t = H(M \times \{t\})$; il existe une triangulation T_t , dépendant de t , pour laquelle N_t collapse simplicialement sur M_t [11, p. 48]; il s'ensuit que si \mathcal{O} est un ouvert de V contenant M_t , il existe, par une suite d'engouffrements élémentaires (cf. lemme 1.1), un difféomorphisme \mathcal{G} , isotope à l'identité par une isotopie constante sur M_t et tel que $\mathcal{G}(\mathcal{O}) \supset N_t$. Par ailleurs, on constate qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $t, t' \in [0, 1]$, $|t - t'| < \varepsilon$, on ait $M_{t'} \subset N_t$. Soit alors $t_0 = 1, t_1, \dots, t_k, \dots, t_q = 0$, une suite décroissante dans $[0, 1]$ de diamètre inférieur à ε . Par une récurrence sur k , on suppose avoir construit $G_k: V \rightarrow V$ tel que $G_k(\mathcal{U}) \supset M_{t_k}$. Alors $\mathcal{G} G_k(\mathcal{U}) \supset N_{t_k} \supset M_{t_{k+1}}$. On pose donc $G_{k+1} = \mathcal{G} G_k$ et $G_0 = \text{Id}|V$.

C. Q. F. D.

Remarques :

(1) Si $\mathcal{U} = \text{int } N_1$, on constate que $M \hookrightarrow G(\mathcal{U})$ est une équivalence d'homotopie. Si maintenant S_1^m et S_2^m sont deux nœuds dans \mathbf{R}^n , non

isotopes différentiablement, avec $n \geq m + 3$, on déduit du théorème de Zeeman [19] et de ce qui précède, que S_1 peut être isotopée différentiablement dans un voisinage tubulaire R de S_2 de sorte que $S_1 \hookrightarrow R$ soit une équivalence d'homotopie; et *vice versa*.

(2) Affaiblissons les hypothèses de la proposition 1.5 : on suppose qu'il existe un plongement PL, $f: M \rightarrow V$, PL-isotope à l'injection $M \hookrightarrow V$ et tel que $f(M) \subset \mathcal{U}$. Si l'isotopie PL est localement nouée, il se peut qu'il n'existe aucun plongement différentiable $f': M \rightarrow \mathcal{U}$, homotope à f dans \mathcal{U} . Par exemple, dans \mathbf{R}^3 , M sera le cercle standard et \mathcal{U} un voisinage tubulaire du nœud de trèfle (voir la relation de compagnonnage [5; p. 143]).

2. Étude à plusieurs paramètres du problème de la disjonction.

Dans toute la suite, M^n et N^n seront des sous-variétés de la variété V^n et M sera compacte. Tous les résultats sont valables dans les deux catégories DIFF et PL et nous omettrons de préciser les catégories dans les notations d'espaces de plongements.

Étant données deux variétés X et Y , considérons sur l'espace $\text{Plgt}(X, Y)$ les deux structures quasi-simpliciales (semi-simpliciales sans dégénérescence), qui ont été introduites par C. Morlet :

(a) $\text{Plgt}_I(X, Y)$ (I comme Isotopie) : un p -simplexe de $\text{Plgt}_I(X, Y)$ est un plongement $X \times \Delta^p \rightarrow Y \times \Delta^p$ respectant la projection sur le simplexe standard de dimension p .

(b) $\text{Plgt}_{PI}(X, Y)$ (PI comme Pseudo-Isotopie) : un p -simplexe de $\text{Plgt}_{PI}(X, Y)$ est un plongement $X \times \Delta^p \rightarrow Y \times \Delta^p$, qui, pour toute face F de Δ^p , induit un plongement $X \times F \rightarrow Y \times F$.

Sur l'ensemble $\text{Hom}(X, Y)$ des applications continues de X dans Y , on pourrait aussi définir deux structures $\text{Hom}_I(X, Y)$ et $\text{Hom}_{PI}(X, Y)$; mais il est bien connu qu'elles ont même type d'homotopie; nous les confondrons donc.

Si X et Y ont des bords non vides, on supposera dans tout ce paragraphe que tous les plongements de X dans Y ont même restriction sur le bord; sans le préciser, cela sera toujours sous-entendu dans la notation $\text{Plgt}(X, Y)$.

Considérons les inclusions des trois paires

$$\begin{aligned} (\text{Plgt}_I(M, V), \text{Plgt}_I(M, V - N)) &\xrightarrow{\alpha} (\text{Plgt}_{PI}(M, V), \text{Plgt}_{PI}(M, V - N)) \\ &\xrightarrow{\beta} (\text{Hom}(M, V), \text{Hom}(M, V - N)). \end{aligned}$$

L'étude de β se fera à l'aide du théorème de disjonction (th. 1.3). L'étude de α se fera à l'aide des travaux de C. Morlet ([14] et appendice de [15]). L'ensemble des résultats fournira le théorème suivant :

2.1. THÉORÈME. — Soient M^m, N^n, V^n, α et β comme ci-dessus. Soit $\varphi_0 : M \rightarrow V$ un plongement disjoint de N .

Si $m, n \leq \nu - 3$ et $1 \leq i \leq \inf(2\nu - 2m - n - 3, 2\nu - m - n - 5)$, alors

$$(\beta\alpha)_* : \pi_i(\text{Plgt}_1(M, V), \text{Plgt}_1(M, V - N), \varphi_0) \rightarrow \pi_i(\text{Hom}(M, V), \text{Hom}(M, V - N), \varphi_0)$$

est une bijection.

Remarque. — Ce théorème ne contient pas le résultat que l'on obtient par application du théorème de transversalité dans le cas où $2m + i + 1 \leq \nu$ (domaine stable). Ceci tient au fait que la méthode employée pour comparer Plgt_1 et Hom fait intervenir Plgt_{PI} comme intermédiaire.

□ *Étude de*

$$\beta : (\text{Plgt}_{\text{PI}}(M, V), \text{Plgt}_{\text{PI}}(M, V - N)) \rightarrow (\text{Hom}(M, V), \text{Hom}(M, V - N)).$$

2.2. PROPOSITION. — (1) Si $1 \leq i \leq 2\nu - 2m - n - 3$, alors

$$\beta_* : \pi_i(\text{Plgt}_{\text{PI}}(M, V), \text{Plgt}_{\text{PI}}(M, V - N), \varphi_0) \rightarrow \pi_i(\text{Hom}(M, V), \text{Hom}(M, V - N), \varphi_0)$$

est une bijection.

(2) Si $2\nu - 2m - n - 3 \geq 0$,

$$\beta_0 : \pi_0(\text{Plgt}_{\text{PI}}(M, V), \text{Plgt}_{\text{PI}}(M, V - N)) \rightarrow \pi_0(\text{Hom}(M, V), \text{Hom}(M, V - N))$$

est un monomorphisme d'ensembles pointés (i. e. l'image réciproque du point base est le point base).

Démonstration. — C'est une conséquence directe du théorème 1.3 grâce à l'isomorphisme

$$\pi_i(\text{Plgt}_{\text{PI}}(M \times D^k, V \times D^k)) \xrightarrow{\cong} \pi_{i+k}(\text{Plgt}_{\text{PI}}(M, N))$$

qui est établi par C. Morlet dans [15]. La démonstration détaillée que nous donnons plus bas contient la démonstration de cet isomorphisme.

Le (2) de la proposition 2.2 est une formulation du théorème de disjonction [voir la remarque (1) suivant le théorème 1.3].

a. *Injectivité de β_* .* — Pour $i > 1$, β_* est un morphisme de groupes. Soit $g : M \times D^i \rightarrow V \times D^i$ un plongement tel que $g|_{M \times \partial D^i}$ soit un plongement dans $(V - N) \times \partial D^i$ et que $g|_{M \times \{\star\}} = \varphi_0$, où $\{\star\}$ est le point de base de ∂D^i . On suppose que g est homotope, relativement à $M \times \{\star\}$, à une application continue $g' : M \times D^i \rightarrow (V - N) \times D^i$, en tant qu'application de paires $(M \times D^i, M \times \partial D^i) \rightarrow (V \times D^i, (V - N) \times \partial D^i)$. Cette homotopie de disjonction a une restriction au bord d'image entièrement contenue dans le complémentaire de $N \times \partial D^i$. Alors, d'après le théorème 1.3, si $2(\nu + i) - 2(m + i) - (n + i) - 3 \geq 0$, il existe une isotopie $H : (V \times D^i) \times [0, 1] \rightarrow V \times D^i$, constante sur le bord, telle que $H_0 = \text{Id}|_{V \times D^i}$ et $H_1 g(M \times D^i) \cap N \times D^i = \emptyset$. Donc g représente l'élément neutre de $\pi_i(\text{Plgt}_{\text{Pl}}(M, V), \text{Plgt}_{\text{Pl}}(M, V - N), \varphi_0)$. Pour $i = 1$, ce raisonnement montre que β_* est un monomorphisme d'ensembles pointés. Mais puisque c'est vrai quel que soit le plongement base φ_0 , β_* est encore une injection pour $i = 1$.

b. *Surjectivité de β_* .* — Soit $g : M \times D^i \rightarrow V \times D^i$ une application continue telle que $g(M \times \partial D^i)$ soit inclus dans $(V - N) \times \partial D^i$ et que $g|_{M \times \{\star\}} = \varphi_0$. A ce g on peut associer $\bar{g} : (M \times D^{i-1}) \times [0, 1] \rightarrow V \times D^{i-1}$, tel que

$$\bar{g}(x, y, t) = (\varphi_0(x), y) \quad \text{pour } (x, y, t) \in M \times \partial D^{i-1} \times [0, 1] \cup M \times D^{i-1} \times \{0\},$$

et que $\bar{g}(M \times D^{i-1} \times \{1\})$ soit inclus dans $(V - N) \times D^{i-1}$. Donc \bar{g} est une homotopie de disjonction. D'après le théorème 1.3, si

$$2(\nu + i - 1) - 2(m + i - 1) - (n + i - 1) - 3 > 0,$$

\bar{g} est homotope à une isotopie de disjonction, que l'on peut représenter par un plongement $F : (M \times D^{i-1}) \times [0, 1] \rightarrow V \times D^{i-1} \times [0, 1]$. De plus, l'homotopie de \bar{g} à F est triviale sur $M \times D^{i-1} \times \{0\}$ et envoie $M \times \partial D^{i-1} \times [0, 1]$ dans $(V - N) \times \partial D^{i-1}$. Le plongement F représente donc un i -simplexe relatif de $(\text{Plgt}_{\text{Pl}}(M, V), \text{Plgt}_{\text{Pl}}(M, V - N))$, dont l'image par β est homotope à g .

Remarquons que, dans ce domaine de dimension, β_* ne peut être une surjection pour $i = 0$, car il faudrait en fait démontrer que

$$\pi_0(\text{Plgt}_{\text{Pl}}(M, V)) \rightarrow \pi_0(\text{Hom}(M, V))$$

est surjectif.

C. Q. F. D.

□ *Étude de*

$$\alpha : (\text{Plgt}_1(M, V), \text{Plgt}_1(M, V - N)) \hookrightarrow (\text{Plgt}_{\text{Pl}}(M, V), \text{Plgt}_{\text{Pl}}(M, V - N)).$$

Commençons par donner une généralisation d'une proposition due à C. Morlet :

2.3. PROPOSITION. — Soient des variétés V de dimension ν , M de dimension m et N de dimension n . Soient $f_0: (M, \partial M) \rightarrow (V, \partial V)$ et $g_0: (N, \partial N) \rightarrow (V, \partial V)$ deux plongements disjoints. On suppose que $m, n \leq \nu - 3$. Alors l'application naturelle

$$\pi_i(\text{Plgt}_{\text{PI}}(M, V - g_0(N)), \text{Plgt}_i, f_0) \rightarrow \pi_i(\text{Plgt}_{\text{PI}}(M, V), \text{Plgt}_i, f_0)$$

est bijective si $1 \leq i \leq 2\nu - m - n - 5$ et surjective si $1 \leq i = 2\nu - m - n - 4$. Pour $i = 0$, si $2\nu - m - n - 5 \geq 0$, c'est un monomorphisme d'ensembles pointés. (Un élément de $\text{Plgt}(M, V)$ est un plongement de M dans V qui a même restriction au bord que f_0).

Démonstration. — Si M et N sont des disques, alors le résultat a été démontré par C. Morlet dans l'appendice de [15]. Désignons par $P(M, N, V)$ la propriété énoncée. On sait donc que $P(D^m, D^n, V)$ est vraie.

Introduisons l'espace $\widetilde{\text{Plgt}}(D^\lambda \times D^{m-\lambda}, V)$ des plongements de $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ dans V qui coïncident sur $D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda}$ avec un plongement donné f_0 mais qui plongent $\partial D^\lambda \times \text{int } D^{m-\lambda}$ dans $\text{int } V$.

2.3.1. LEMME. — Si $P(D^{m-\lambda}, N, V)$ est vraie, alors l'application naturelle

$$\pi_i(\widetilde{\text{Plgt}}_{\text{PI}}(D^\lambda \times D^{m-\lambda}, V - g_0(N)), \widetilde{\text{Plgt}}_i, f_0) \rightarrow \pi_i(\widetilde{\text{Plgt}}_{\text{PI}}(D^\lambda \times D^{m-\lambda}, V), \widetilde{\text{Plgt}}_i, f_0)$$

est bijective si $1 \leq i \leq 2\nu - m - n - 5$ et surjective si $1 \leq i \leq 2\nu - m - n - 4$.

Preuve du lemme 2.3.1. — Par restriction à $\{0\} \times D^{m-\lambda}$, on définit une application

$$\widetilde{\text{Plgt}}(D^\lambda \times D^{m-\lambda}, V) \rightarrow \text{Plgt}(D^{m-\lambda}, V).$$

Puisque $m \leq \nu - 3$, c'est une fibration quelle que soit la catégorie DIFF ou PL et quel que soit l'indice I ou PI⁽³⁾. Soit \mathcal{F} la fibre au-dessus de $f_0 | \{0\} \times D^{m-\lambda}$.

Dans la catégorie DIFF, $\pi_i(\mathcal{F}_I) = \pi_i(\mathcal{F}_{\text{PI}}) = \pi_{i+m-\lambda}(V_\lambda(\mathbf{R}^{\nu-m+\lambda}))$; où $V_\lambda(\mathbf{R}^{\nu-m+\lambda})$ désigne la variété de Stiefel des λ -repères de $\mathbf{R}^{\nu-m+\lambda}$. Donc pour tout i , $\pi_i(\mathcal{F}_{\text{PI}}, \mathcal{F}_I, f_0) = 0$. Par le lemme des cinq, on voit que $P(D^{m-\lambda}, N, V)$ implique le résultat cherché.

⁽³⁾ Voir la thèse de C. MORLET, *Topologie des variétés semi-linéaires* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 1, 1968, p. 313-394).

Dans la catégorie PL, le raisonnement précédent est incorrect et l'on ne sait pas si $\pi_i(\mathcal{F}_{PI}, \mathcal{F}_i, f_0) = 0$ pour tout i . Cependant $\pi_i(\mathcal{F}_{VI}, \mathcal{F}_i, f_0)$ ne dépend que des entiers i, λ, m et ν et ne dépend pas de V ; en effet, avec l'indice I ou l'indice PI, \mathcal{F} a le type d'homotopie faible de son sous-espace \mathcal{F}' , constitué des plongements de $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ à image contenu dans un voisinage tubulaire de $f_0(\{0\} \times D^{m-\lambda})$. On peut donc aussi conclure dans cette catégorie.

C. Q. F. D.

a. $P(M, D^n, V)$ est vraie pour toute variété M . — On raisonne par récurrence sur une décomposition en anses de M . Supposons donc que $M = M' \bigcup_{\varphi_\lambda} D^\lambda \times D^{m-\lambda}$, où φ_λ est un plongement de $S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda}$ dans $\partial M'$.

Supposons aussi que $P(M', D^n, V')$ soit vraie quelle que soit la variété V' . Soient $f_0 : M \rightarrow V$ et $g_0 : D^n \rightarrow V$ deux plongements disjoints. Nous noterons f'_0 la restriction de f_0 à M' ; on remarque que $f'_0(M')$ est inclus dans $V - (g_0(D^n) \cup f_0(D^\lambda \times D^{m-\lambda}))$. On a le diagramme commutatif, ci-après, où les flèches horizontales sont induites par les inclusions naturelles d'espaces de plongements et où les suites verticales sont les suites exactes d'homotopie des fibrations φ_1 et φ_2 ; φ_1 (resp. φ_2) associée à un plongement de M dans $V - g_0(D^n)$ (resp. V) sa restriction à l'anse d'indice λ attachée sur le bord de M' .

On déduit immédiatement de $P(D^{m-\lambda}, D^n, V)$ et du lemme 2.3.1 que, pour $i \leq 2\nu - m - n - 5$, la flèche (1) est surjective et (4) bijective, et que, pour $i = 2\nu - m - n - 4$, (4) est surjective. Par hypothèse sur M' on sait que, pour $i = 2\nu - m - n - 4$, (5) est bijective et (2) surjective, et que, pour $i \leq 2\nu - m - n - 5$, (2) est bijective. Pour i grand ($i \geq 4$), c'est-à-dire dans le domaine où tous les ensembles intervenant sont des groupes abéliens et où les applications sont des morphismes de groupes, alors (3) est un épimorphisme dès que (4) et (2) sont des épimorphismes et que (5) est un monomorphisme, et (3) est un monomorphisme dès que (4) et (2) sont des monomorphismes et que (1) est un épimorphisme. Hors de ce domaine on utilise le fait que les suites de fibration sont des suites exactes d'ensembles pointés avec action de monoïdes, c'est-à-dire du type $E \rightarrow F \rightarrow G$, où E est un monoïde agissant sur F de sorte que deux éléments $f_1, f_2 \in F$ ont même image dans G si et seulement s'il existe $e \in E$ avec $e(f_1) = f_2$. Dans une telle situation le lemme des cinq reste vrai, ce qui démontre que $P(M, D^n, V)$ est vrai.

b. $P(M, N, V)$ est vrai. — Le raisonnement fait en *a* montre aussi que, si $P(M', N, V)$ est vrai, alors $P(M, N, V)$ est vrai, où M est obtenu à partir de M' en attachant une anse. Il reste donc à voir que $P(D^m, N, V)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_{i+1} [\overline{\text{Plgt}}_{\text{pt}}(D^\lambda \times D^{m-\lambda}, V - g_0(D^n)), \overline{\text{Plgt}}_{\text{t}}, f_0 | D^\lambda \times D^{m-\lambda}] & \xrightarrow{(1)} & \pi_{i+1} [\overline{\text{Plgt}}_{\text{pt}}(D^\lambda \times D^{m-\lambda}, V), \overline{\text{Plgt}}_{\text{t}}, f_0 | D^\lambda \times D^{m-\lambda}] & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_i [\text{Plgt}_{\text{pt}}(M', V - g_0(D^n) \cup f_0(\hat{D}^\lambda \times D^{m-\lambda})), \text{Plgt}_{\text{t}}, f_0'] & \xrightarrow{(2)} & \pi_i [\text{Plgt}_{\text{pt}}(M', V - f_0(\hat{D}^\lambda \times D^{m-\lambda})), \text{Plgt}_{\text{t}}, f_0''] & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_i [\text{Plgt}_{\text{pt}}(M, V - g_0(D^n)), \text{Plgt}_{\text{t}}, f_0] & \xrightarrow{(3)} & \pi_i [\text{Plgt}_{\text{pt}}(M, V), \text{Plgt}_{\text{t}}, f_0] & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_i [\overline{\text{Plgt}}_{\text{pt}}(D^\lambda \times D^{m-\lambda}, V - g_0(D^n)), \overline{\text{Plgt}}_{\text{t}}, f_0 | D^\lambda \times D^{m-\lambda}] & \xrightarrow{(4)} & \pi_i [\overline{\text{Plgt}}_{\text{pt}}(D^\lambda \times D^{m-\lambda}, V), \overline{\text{Plgt}}_{\text{t}}, f_0 | D^\lambda \times D^{m-\lambda}] & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_{i-1} [\text{Plgt}_{\text{pt}}(M', V - g_0(D^n) \cup f_0(\hat{D}^\lambda \times D^{m-\lambda})), \text{Plgt}_{\text{t}}, f_0'] & \xrightarrow{(5)} & \pi_{i-1} [\text{Plgt}_{\text{pt}}(M', V - f_0(\hat{D}^\lambda \times D^{m-\lambda})), \text{Plgt}_{\text{t}}, f_0''] & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

est vrai pour toute variété N ; mais grâce au théorème d'extension des isotopies (vrai aussi en PL, avec l'indice I ou PI, puisque les codimensions sont supérieures ou égales à 3 [11]), il est facile de voir que $P(D^m, N, V)$ et $P(N, D^m, V)$ sont des propriétés équivalentes. Alors b découle de a .

C. Q. F. D.

2.4. PROPOSITION. — *Si $m, n \leq \nu - 3$, l'application*

$$\alpha_* : \pi_i(\text{Plgt}_I(M^m, V^\nu), \text{Plgt}_I(M, V - N^n), \varphi_0) \rightarrow \pi_i(\text{Plgt}_{PI}(M, V), \text{Plgt}_{PI}(M, V - N), \varphi_0)$$

est bijective si $1 \leq i \leq 2\nu - m - n - 5$. Pour $i = 0$, α_ est un monomorphisme d'ensembles pointés.*

Démonstration. — Pour $i \geq 2$, on interprète la proposition 2.3 en termes de groupes d'homotopie de triades (ce n'est qu'un ensemble pour $i = 2$) : si $i \leq 2\nu - m - n - 4$,

$$\pi_i(\text{Plgt}_{PI}(M, V), \text{Plgt}_{PI}(M, V - N), \text{Plgt}_I(M, V), \varphi_0) = 0.$$

Pour $2 \leq i \leq 2\nu - m - n - 5$, la proposition découle de ce qui précède en écrivant l'une des deux suites exactes d'homotopie de la triade. On a aussi qu'avec $1 \leq 2\nu - m - n - 5$, α_* est injective pour $i = 1$. Reste à voir que α_* est surjective pour $i = 1$ et que c'est un monomorphisme d'ensembles pointés pour $i = 0$. C'est un raisonnement pédestre à faire; il utilise essentiellement le fait que, pour $1 \leq 2\nu - m - n - 5$,

$$\pi_1(\text{Plgt}_{PI}(M, V - N), \text{Plgt}_I, f_0) \rightarrow \pi_1(\text{Plgt}_{PI}(M, V), \text{Plgt}_I, f_0)$$

est une surjection quel que soit le plongement base $f_0 : M \rightarrow V - N$.

C. Q. F. D.

En juxtaposant la proposition 2.3 et la proposition 2.4 on a le théorème 2.1.

3. Calcul de $\pi_i[\text{Plgt}_I(S^m, V^\nu), \text{Plgt}_I(S^m, V^\nu - N^n), \varphi_0]$.

Application au problème des croisements de points critiques dans une théorie de Smale à plusieurs paramètres.

D'après le théorème 2.1, le calcul de $\pi_i[\text{Plgt}_I(S^m, V), \text{Plgt}_I(S^m, V - N), \varphi_0]$ se ramène au calcul de $\pi_i[\text{Hom}(S^m, V), \text{Hom}(S^m, V - N), \varphi_0]$ si $m, n \leq \nu - 3$ et $1 \leq i \leq \inf(2\nu - 2m - n - 3, 2\nu - m - n - 5)$.

3.1. PROPOSITION. — *Soient un espace topologique pointé (X, x_0) , la sphère pointée de dimension m (S^m, s_0) et une application continue*

$\varphi_0 : (S^m, s_0) \rightarrow (X, x_0)$. Si $m \geq 1$, il existe une suite exacte

$$\rightarrow \pi_{i+m}(X, x_0) \rightarrow \pi_i(\text{Hom}(S^m, X), \varphi_0) \xrightarrow{\rho_*} \pi_i(X, x_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{i+m-1}(X, x_0) \rightarrow \dots,$$

où ρ_* est induit par la fibration de Hurewicz ρ qui, à $f \in \text{Hom}(S^m, X)$, associe $f(s_0) \in X$. De plus, si $F : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ est une application continue, F induit un morphisme de suites exactes, de celle associée à X et à φ_0 , dans celle associée à Y et à $F\varphi_0$.

Remarques. — (1) En général, δ n'est pas la flèche nulle; elle l'est si φ_0 est homotope à zéro; en effet, δ ne dépend que de la classe d'homotopie de φ_0 et, si φ_0 est constante, ρ a une section.

(2) Si $m = 0$, notons $\varphi_0(S^0) = x_0 \cup x_1$; alors

$$\pi_i(\text{Hom}(S^0, X), \varphi_0) = \pi_i(X, x_0) \times \pi_i(X, x_1).$$

Démonstration. — On sait que $\rho : \text{Hom}(S^m, X) \rightarrow \text{Hom}(s_0, X) \equiv X$ est une fibration de Hurewicz. La fibre $\rho^{-1}(x_0)$ est l'espace $\text{Hom}^0(S^m, X)$ des applications $f : S^m \rightarrow X$ telles que $f(s_0) = x_0$. Cet espace est muni d'une loi de H-espace induite par la loi de cogroupe naturelle qui existe sur S^m . Si Δ désigne la loi de composition dans $\text{Hom}^0(S^m, X)$ et si $g \in \text{Hom}^0(S^m, X)$, nous noterons

$$T_g : \text{Hom}^0(S^m, X) \rightarrow \text{Hom}^0(S^m, X)$$

l'application continue qui, à $f \in \text{Hom}^0(S^m, X)$, associe $g\Delta f$. Appelons $C_{x_0} \in \text{Hom}^0(S^m, X)$ l'application constante d'image x_0 . T_{φ_0} envoie la composante connexe de C_{x_0} dans la composante connexe de φ_0 et

$$(T_{\varphi_0})_* : \pi_i(\text{Hom}^0(S^m, X), C_{x_0}) \rightarrow \pi_i(\text{Hom}^0(S^m, X), \varphi_0)$$

est une bijection pour tout i . Enfin un élément de $\pi_i(\text{Hom}^0(S^m, X), C_{x_0})$ est représenté par une application $F : S^i \times S^m \rightarrow X$ telle que

$$F(\{ \star \} \times S^m \cup S^i \times \{ s_0 \}) = x_0,$$

où $\{ \star \}$ est le point base de S^i . Donc F se factorise par $\bar{F} : S^i \times S^m / S^i \vee S^m \rightarrow X$; mais on sait que $S^i \times S^m / S^i \vee S^m$ est homéomorphe à S^{m+i} . On voit facilement que par ce procédé on peut identifier $\pi_i(\text{Hom}^0(S^m, X), C_{x_0})$ et $\pi_{m+i}(X, x_0)$ avec leurs lois de composition. Pour obtenir la suite exacte annoncée, il suffit maintenant de prendre la suite exacte de la fibration ρ et d'y substituer $\pi_i(\text{Hom}^0(S^m, X), \varphi_0)$ par $\pi_{m+i}(X, x_0)$, grâce à l'isomorphisme $(T_{\varphi_0})_*^{-1}$. La functorialité de la suite exacte ainsi obtenue est évidente.

Considérons maintenant un sous-espace Y de X et supposons que $\varphi_0(S^m)$ soit inclus dans Y . L'application de restriction au point base

$$\rho : (\text{Hom}(S^m, X), \text{Hom}(S^m, Y)) \rightarrow (X, Y)$$

est une fibration de paires; comme précédemment, il existe un isomorphisme naturel

$$\pi_i(\text{Hom}^0(S^m, X), \text{Hom}^0(S^m, Y), \varphi_0) \xrightarrow{\cong} \pi_{i+m}(X, Y, x_0).$$

On a donc une forme relative de la proposition 3.1 :

3.2. PROPOSITION. — *Avec les notations définies plus haut, si $m \geq 1$, il existe une suite exacte*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{i+m}(X, Y, x_0) \rightarrow \pi_i[\text{Hom}(S^m, X), \text{Hom}(S^m, Y), \varphi_0] \\ \xrightarrow{\rho_*} \pi_i(X, Y, x_0) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \pi_{i+m-1}(X, Y, x_0) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Cette suite dépend fonctoriellement des données (X, Y, φ_0) . Enfin, si $m = 0$, $\pi_i[\text{Hom}(S^0, X), \text{Hom}(S^0, Y), \varphi_0] = \pi_i(X, Y, x_0) \times \pi_i(X, Y, x_1)$, où $x_0 \cup x_1 = \varphi_0(S^0)$.

En vue de travaux ultérieurs, nous plaçons ici une proposition dont la démonstration est immédiate après la description que nous avons donnée de la flèche

$$\pi_{i+m}(X, Y, x_0) \rightarrow \pi_i(\text{Hom}(S^m, X), \text{Hom}(S^m, Y), \varphi_0).$$

PROPOSITION 3.2 bis. — *Le diagramme ci-dessous, dont les suites horizontales sont les suites exactes établies dans les propositions 3.1 et 3.2 et dont les fibres verticales sont les flèches bord des suites exactes d'homotopie de paires, est commutatif,*

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow \pi_{i+m}(X, Y, x_0) & \rightarrow & \pi_i(\text{Hom}(S^m, X), \text{Hom}(S^m, Y), \varphi_0) & \rightarrow & \pi_i(X, Y, x_0) & \rightarrow & \pi_{i+m-1}(X, Y, x_0) \rightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \rightarrow \pi_{i+m-1}(Y, x_0) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(\text{Hom}(S^m, Y), \varphi_0) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(Y, x_0) & \longrightarrow & \pi_{i+m-2}(Y, x_0) \rightarrow \end{array}$$

De l'étude homotopique qui précède et du théorème 2.1, on déduit immédiatement le résultat suivant :

3.3. THÉORÈME. — *Soient une variété V de dimension ν et une sous-variété N de dimension n ; soient (S^m, s_0) une m -sphère pointée et $\varphi_0 : S^m \rightarrow V$ un plongement disjoint de N ; on note $x_0 = \varphi_0(s_0)$. On suppose $m \leq \nu - 3$, $n \leq \nu - 3$. Pour*

$$1 \leq i \leq \inf(2\nu - 2m - n - 3, 2\nu - m - n - 5),$$

on a le résultat suivant :

(1) Si $m \geq 1$, il existe une suite exacte

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{i+m}(\mathbb{V}, \mathbb{V} - \mathbb{N}, x_0) \rightarrow \pi_i(\text{Plgt}_1(S^m, \mathbb{V}), \text{Plgt}_1(S^m, \mathbb{V} - \mathbb{N}), \varphi_0) \\ \xrightarrow{\rho^*} \pi_i(\mathbb{V}, \mathbb{V} - \mathbb{N}, x_0) \xrightarrow{\hat{\rho}} \pi_{i+m-1}(\mathbb{V}, \mathbb{V} - \mathbb{N}, x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(\mathbb{V}, \mathbb{V} - \mathbb{N}, x_0). \end{aligned}$$

De plus, cette suite est fonctorielle par rapport aux plongements de \mathbb{V} dans une autre variété \mathbb{V}' de dimension au moins égale à ν .

(2) Si $m = 0$ et si on note $\varphi_0(S^0) = x_0 \cup x_1$, on a une bijection

$$\pi_i(\text{Plgt}_1(S^0, \mathbb{V}), \text{Plgt}_1(S^0, \mathbb{V} - \mathbb{N}), \varphi_0) \rightarrow \pi_i(\mathbb{V}, \mathbb{V} - \mathbb{N}, x_0) \times \pi_i(\mathbb{V}, \mathbb{V} - \mathbb{N}, x_1).$$

Remarques. — (1) Dans le domaine stable $2m + i + 1 \leq \nu$, la condition $n \leq \nu - 3$ n'est plus nécessaire.

(2) Les plongements de S^0 dans \mathbb{V} sont habituellement étudiés en considérant la fibration $\text{Plgt}(S^0, \mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{V}$ dont la fibre est homéomorphe à $\mathbb{V} - 1$ point. Cependant, il semble que cette façon de voir ne permette pas d'établir directement le (2).

Considérons, à titre d'exemple, le cas où $\nu \geq 5$, $m \leq \nu - 3$, $n \leq \nu - 3$ et $k \geq 1$ avec $k = \nu - (m + n)$. Alors l'application

$$\pi_{k+m}(\mathbb{V}, \mathbb{V} - \mathbb{N}, x_0) \rightarrow \pi_k(\text{Plgt}_1(S^m, \mathbb{V}), \text{Plgt}_1(S^m, \mathbb{V} - \mathbb{N}), \varphi_0)$$

est une bijection si $m \geq 2$ et une surjection si $m = 1$. Mais, \mathbb{N} étant de codimension $m + k$, $\pi_{k+m}(\mathbb{V}, \mathbb{V} - \mathbb{N}, x_0)$ est isomorphe à $H_{k+m}(\tilde{\mathbb{V}}, \overline{\mathbb{V} - \mathbb{N}})$, où $\tilde{\mathbb{V}}$ est le revêtement universel de \mathbb{V} et où $\overline{\mathbb{V} - \mathbb{N}}$ est la préimage de $\mathbb{V} - \mathbb{N}$ dans $\tilde{\mathbb{V}}$; en effet, puisque \mathbb{N} est de codimension supérieure à 3, $\overline{\mathbb{V} - \mathbb{N}}$ est simplement connexe. Or $H_{m+k}(\tilde{\mathbb{V}}, \overline{\mathbb{V} - \mathbb{N}})$ est isomorphe à $H_0(\tilde{\mathbb{N}})$, où $\tilde{\mathbb{N}}$ est la préimage de \mathbb{N} dans $\tilde{\mathbb{V}}$, et $H_0(\tilde{\mathbb{N}}) = \mathbf{Z}^{[(\pi_1(\mathbb{V})/j_* \pi_1(\mathbb{N})) \times \pi_0(\mathbb{N})]}$, où j est l'inclusion $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{V}$. On a ainsi calculé le premier groupe d'homotopie non nul de la paire $(\text{Plgt}_1(S^m, \mathbb{V}), \text{Plgt}_1(S^m, \mathbb{V} - \mathbb{N}))$:

3.4. COROLLAIRE. — Si $2 \leq m \leq \nu - 3$, $n \leq \nu - 3$ et $\nu > m + n$, il existe un isomorphisme naturel

$$\pi_{\nu-m-n}(\text{Plgt}_1(S^m, \mathbb{V}), \text{Plgt}_1(S^m, \mathbb{V} - \mathbb{N}), \varphi_0) \rightarrow \mathbf{Z}^{[(\pi_1(\mathbb{V})/j_* \pi_1(\mathbb{N})) \times \pi_0(\mathbb{N})]}$$

fonctoriel par rapport aux plongements de \mathbb{V} dans une autre variété de même dimension.

Le théorème 3.3 a de l'intérêt pour une théorie d'attachement d'anses (ou théorie de Smale) à plusieurs paramètres; le problème peut être formulé

de la façon suivante : quelle est la topologie de l'espace des fonctions de Morse excellentes (fonctions dont tous les points critiques sont quadratiques non dégénérés à valeurs distinctes) définies sur une variété W ? On sait que sur l'espace de toutes les fonctions on peut définir une stratification dont les strates de codimension 0 sont formées des fonctions excellentes; les fonctions de Morse ayant exactement deux valeurs critiques égales forment des strates de codimension 1, dites *strates de croisement* [3]. Soient une strate ⁽⁴⁾ Σ de codimension 0 et une fonction $f \in \Sigma$. Soient c_1 et c_2 deux points critiques de f , d'indices respectifs λ_1 et λ_2 , et tels que $f(c_1) > f(c_2)$; on suppose que c_1 et c_2 sont consécutifs, c'est-à-dire que f n'a pas de point critique sur $f^{-1}(]f(c_2), f(c_1)[)$. Pour toute fonction $f' \in \Sigma$, il existe un difféomorphisme G appartenant à la composante neutre de $\text{Diff}(W)$ et $g \in \text{Diff}(\mathbf{R})$, tels que $f' = gfG^{-1}$ [3]; autrement dit, en se déplaçant dans Σ , on peut suivre les points critiques c_1 et c_2 ; ils restent évidemment consécutifs et dans le même ordre. Maintenant on peut parler des strates de codimension 1 qui se trouvent dans l'adhérence de Σ et qui sont des strates de croisement des points c_1 et c_2 ; nous noterons σ la réunion de ces strates. Le problème est celui de savoir si σ n'est pas vide et ensuite de calculer $\pi_*(\Sigma, \sigma)$. Smale a démontré que, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, σ n'est pas vide [4].

Soit V une variété de niveau pour la fonction f , de telle sorte que $f(V) \in]f(c_2), f(c_1)[$; posons $n = \dim V$. Soit $\varphi_0 : S^{\lambda_1-1} \rightarrow V$ un plongement, bord d'une nappe descendante de c_1 jusqu'à V , et soit $\psi_0 : S^{n-\lambda_2} \rightarrow V$ un plongement, bord d'une nappe montante de c_2 jusqu'à V . Si σ n'est pas vide, c'est que l'on peut choisir φ_0 et ψ_0 d'images disjointes. Cerf a démontré qu'une fois fixée une métrique riemannienne sur W , il existe une bijection naturelle

$$\pi_k(\Sigma, \sigma) \cong \pi_k[\text{Plgt}_1(S^{\lambda_1-1}, V), \text{Plgt}_1(S^{\lambda_1-1}, V - \psi_0(S^{n-\lambda_2})), \varphi_0] \quad (\text{cf. [3]}).$$

Dans cette situation le théorème 3.3 et le corollaire 3.4 deviennent donc

3.5. THÉORÈME (les notations sont celles que nous venons de définir).

On suppose

$$n \geq \lambda_1 + 2, \quad \lambda_2 \geq 3 \quad \text{et} \quad 1 \leq k \leq \inf(n - 2\lambda_1 + \lambda_2 - 1, n - \lambda_1 + \lambda_2 - 4).$$

Si $\lambda_1 \geq 2$, il existe une suite exacte :

$$\begin{aligned} &\rightarrow \pi_{k+1}(V, V - \psi_0(S^{n-\lambda_2})) \rightarrow \pi_{k+\lambda_1-1}(V, V - \psi_0(S^{n-\lambda_2})) \rightarrow \pi_k(\Sigma, \sigma) \\ &\rightarrow \pi_k(V, V - \psi_0(S^{n-\lambda_2})) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(V, V - \psi_0(S^{n-\lambda_2})). \end{aligned}$$

⁽⁴⁾ Pour nous, une strate est toujours une composante connexe par arcs.

Si $\lambda_1 = 1$,

$$\pi_k(\Sigma, \sigma) = \pi_k(V, V - \psi_0(S^{n-\lambda_2}), x_0) \times \pi_k(V, V - \psi_0(S^{n-\lambda_2}), x_1),$$

où $x_0 \cup x_1 = \varphi_0(S^0)$.

3.6. COROLLAIRE. — Si $\lambda_1, \lambda_2 \in [3, n-2]$ et si

$$1 \leq k \leq \inf(n - 2\lambda_1 + \lambda_2 - 1, n - \lambda_1 + \lambda_2 - 4),$$

on a

$$\pi_k(\Sigma, \sigma) = 0 \quad \text{si } k < \lambda_2 - \lambda_1 + 1 \quad \text{et} \quad \pi_{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}(\Sigma, \sigma) = \mathbf{Z}[\pi_1(V)].$$

Compléments. — (1) Si on est dans le domaine stable, $2(\lambda_1 - 1) + k + 1 \leq n$, la condition $\lambda_2 \geq 3$ n'est pas nécessaire.

(2) Supposons maintenant que f ait plusieurs points critiques c_2, \dots, c_{q+1} , d'indices λ_2 et tous au même niveau, V désigne encore une variété intermédiaire entre les niveaux de c_1 et celui de c_2 . Notons N la réunion des sphères de dimension $n - \lambda_2$, bord des nappes montantes des points c_2, \dots, c_{q+1} . La strate Σ , à laquelle appartient f , n'est plus une strate de fonctions excellentes; elle est formée de fonctions ayant q points critiques au même niveau. Ici σ est la réunion des stratés adhérentes à Σ et correspondant au croisement de c_1 avec tous les points c_2, \dots, c_{q+1} . Le théorème 3.5 est encore valable en remplaçant $\psi_0(S^{n-\lambda_2})$ par N . On en déduit par exemple que $\pi_{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}(\Sigma, \sigma) = (\mathbf{Z}[\pi_1(V)])^q$, lorsque toutes les inégalités dimensionnelles du corollaire 3.6 sont satisfaites.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. CERF, *Topologie de certains espaces de plongements* (Bull. Soc. math. Fr., t. 89, 1961, p. 227-380; Thèse, Paris, 1960).
- [2] J. CERF, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension 3* ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Math. 53, Springer, 1968.
- [3] J. CERF, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Publications Mathématiques I. H. E. S. (à paraître).
- [4] J. CERF et A. GRAMAIN, *Le théorème du h-cobordisme*, Secrétariat mathématique de l'École Normale Supérieure.
- [5] R. FOX, *Topology of 3-manifolds*, ed. M. K. Fort, Prentice Hall, 1962.
- [6] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables dans le domaine stable* (Comm. Math. Helv., vol. 37, 1963, p. 155-176).
- [7] A. HAEFLIGER, *Enlacements de sphères en codimension supérieure à 2* (Comm. Math. Helv., vol. 41, 1966).
- [8] A. HAEFLIGER et V. POENARU, *Classification des immersions combinatoires*, Publications mathématiques, n° 23, I. H. E. S., Paris, 1965.
- [9] P. J. HILTON, *On the homotopy group of the union of spheres* (J. London Math. Soc., vol. 30, 1955, p. 154-171).

- [10] M. HIRSCH, *Immersions of manifolds* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 93, 1959, p. 242-276).
- [11] J. F. P. HUDSON, *Piecewise linear topology*, Benjamin, 1969.
- [12] F. LAUDENBACH, *C. R. Acad. Sc.*, 268, série A, 1969, p. 1320.
- [13] J. MILNOR, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, 1965.
- [14] C. MORLET, *C. R. Acad. Sc.*, 268, série A, 1969, p. 1080.
- [15] C. MORLET, *Plongements et automorphismes de variétés*, Cours Peccot, Collège de France, Paris, 1969.
- [16] L. SIEBENMANN, *Le fibré tangent*, Cours donné à la Faculté des Sciences d'Orsay (1966-1967), notes de A. CHENCINER, M. HERMAN et F. LAUDENBACH, Publication du Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique.
- [17] S. SMALE, *The classification of immersions* (*Ann. of Math.*, vol. 69, 1959, p. 327-344).
- [18] J. STALLINGS, *The piecewise linear structure of Euclidian space* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 58, 1962, p. 481-488).
- [19] E. ZEEMAN, *Unknotting combinatorial balls* (*Ann. of Math.*, vol. 78, 1963, p. 501-526).
- [20] E. ZEEMAN, *Seminar on combinatorial topology*, Notes minéographiées, I. H. E. S., Paris, 1963.
- [21] R. WELLS, *Modifying intersections* (*Ill. J. Math.*, vol. 11, 1967, p. 389-403).
- [22] J. H. C. WHITEHEAD, *On C_1 -complexes* (*Ann. of Math.*, vol. 41, 1940, p. 809-824).

(Manuscrit reçu le 13 août 1970.)

François LAUDENBACH,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75-Paris, 5^e.
