YVES MEYER

Les nombres de Pisot et la synthèse harmonique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 3, no 2 (1970), p. 235-246

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_2_235_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, 1970, p. 235 à 246.

LES NOMBRES DE PISOT ET LA SYNTHÈSE HARMONIQUE

PAR YVES MEYER,
Faculté des Sciences d'Orsay et Institut Mittag-Leffler de Stockholm.

Soient $\theta > 2$ un nombre de Pisot et E l'ensemble compact de nombres réels défini par la condition : θE est la réunion de E et de $E + 1$. Alors E est un ensemble de synthèse harmonique. Ce travail est divisé en quatre parties : les théorèmes sont énoncés et commentés en les paragraphes 1, 2 et 3; la notion fondamentale d'ensemble harmonieux (une généralisation des progressions arithmétiques) est développée et utilisée en les paragraphes 4 et 5; la preuve du théorème III (duquel découlent les autres résultats) est donnée en les paragraphes 6 à 14. Enfin l'appendice contient les preuves de quelques lemmes techniques d'intérêt indépendant.

LES RÉSULTATS.

1. LES DIVERSES FORMES DU PROBLÈME DE LA SYNTHÈSE HARMONIQUE. — A un ensemble compact E de nombres réels on peut associer deux espaces fonctionnels; le premier est formé de toutes les fonctions continues et bornées f d'une variable réelle, à valeurs complexes, dont le spectre (c'est-à-dire le support de la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f au sens des distributions) est contenu dans E. Le second (contenu dans le premier) est formé de toutes les sommes trigonométriques finies $P(t) = \sum_{\lambda \in E} a_\lambda \exp 2\pi i\lambda t$ dont les fréquences appartiennent à E.

Le problème, posé de façon vague, est le suivant : en quel sens peut-on approcher les f par les P ?

Pour préciser cette question il faut maintenant préciser la notion d'approximation.

Soit L^1 l'espace de Banach des classes de fonctions $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ intégrables pour la mesure de Lebesgue dt sur $\mathbf{R}$ et $\sigma(L^\infty, L^1)$ la topologie de la convergence simple définie par la dualité entre L^1 et L^∞.

DÉFINITION 1.1. — *L'ensemble* E *possède la propriété de la synthèse étroite si toute fonction continue bornée* f *dont le spectre est contenu dans* E *est adhérente, pour la topologie* $\sigma(L^\infty, L^1)$ *à l'ensemble des sommes trigonométriques finies* $P(t) = \sum_{\lambda \in E} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$ *dont les fréquences appartiennent à* E *et qui vérifient la condition*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |P(t)| \leq \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|.$$

Il revient au même de dire que l'on peut associer à f *une suite* P_k *de telles sommes trigonométriques finies telle que :*

(*a*) $P_k(t) \to f(t)$ *uniformément sur tout ensemble compact de nombres réels* t;

(*b*) $\|P_k\|_\infty \to \|f\|_\infty$.

(*On dit alors que* P_k *tend étroitement vers* f.)

2. La propriété de la synthèse étroite et les nombres de Pisot.

2.1. Soit θ un nombre réel supérieur à 2. On dit que θ est un nombre de Pisot si θ est un entier algébrique (soit n son degré) dont tous les conjugués $\theta_2, \ldots, \theta_n$ (autres que θ) vérifient $|\theta_2| < 1, \ldots, |\theta_n| < 1$. A ce nombre θ on associe l'ensemble E de toutes les sommes $\sum_1^\infty \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 ; une suite E_k de parties finies de E dont la réunion est dense dans E est définie comme suit : E_k est l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1.

THÉORÈME I. — *Soient* θ *un nombre de Pisot et* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *une fonction continue bornée dont le spectre est contenu dans* E. *On peut alors former une suite* f_k, $k \geq 1$, *de sommes trigonométriques finies telles que :*

(*a*) *les fréquences de* f_k *appartiennent à* E_k (*donc à* E);

(*b*) $f_k(t) \to f(t)$ *uniformément sur tout compact*;

(*c*) $\|f_k\|_\infty \to \|f\|_\infty$.

3. La synthèse par une suite d'opérateurs. — Le théorème I ne fournit pas un procédé explicite pour déterminer f_k à l'aide de f. Dans le résultat ci-dessous, f_k dépend linéairement de f mais on perd un peu vis-à-vis de (*a*) et (*c*). Les notations sont celles du théorème I.

THÉORÈME II. — *Soit θ un nombre de Pisot. On peut trouver une partie finie* F *de* E, *une constante* C *et une suite* L_k *d'applications linéaires telles qu'en appelant* F_k *l'ensemble fini* $E_k + \theta^{-k}F$, *contenu dans* E, *on ait les propriétés suivantes :*

(*a*) *les fréquences de* $L_k(f)$ *appartiennent à* F_k;

(*b*) $|(L_k f)(t) - f(t)| \leqq C\,\theta^{-k}|t| \sup_{s\in\mathbf{R}} |f(s)|$;

(*c*) $\|L_k f\|_\infty \leqq C\|f\|_\infty$.

Le théorème I est un corollaire du théorème II et du corollaire 1 du théorème II du chapitre 5 de [5]. Nous ne savons pas s'il existe un choix de la suite L_k, $k \geqq 1$, pour lequel $F = \{0\}$ et pour lequel $L_k f$ converge étroitement vers f.

Enfin le rôle joué par les nombres de Pisot dans ces deux énoncés reste mystérieux.

La condition (*c*) du théorème II suggère de faire le changement de variable $\theta^{-k}t = u$. Appelons, pour tout entier rationnel k, τ_k l'isométrie de L^∞ qui transforme f en la fonction définie par $u \to f(\theta^k u)$. Si le spectre de f est contenu dans E, celui de $\tau_k f$ est contenu dans $\theta^k E = \Lambda_k + E$, où Λ_k est l'ensemble de toutes les sommes $\sum_0^{k-1} \varepsilon_j \theta^j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1.

Appelons Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k\geqq 0} \varepsilon_k \theta^k$, où $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Si θ est un nombre de Pisot, l'ensemble Λ possède une remarquable propriété d'approximation Diophantienne que nous allons maintenant définir.

LES ENSEMBLES HARMONIEUX.

4. DÉFINITIONS. — Soit Λ un ensemble de nombres réels; appelons caractère faible sur Λ toute application χ de Λ dans le groupe $\mathbf{T}$ des nombres complexes de module 1 possédant la propriété suivante : pour tout entier $n \geqq 1$, toute suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d'éléments de Λ et toute suite $p_1, \ldots, p_n$ d'entiers rationnels, toute relation $\sum_1^n p_j\lambda_j = 0$ entraîne $\prod_1^n [\chi(\lambda_j)]^{p_j} = 1$.

DÉFINITION 4.1. — *L'ensemble* Λ *est harmonieux si à tout caractère faible* $\chi : \Lambda \to \mathbf{T}$ *et à tout* $\varepsilon > 0$ *on peut associer un nombre réel* t *tel que* $\sup_{\lambda\in\Lambda} |\chi(\lambda) - e^{i\lambda t}| \leqq \varepsilon$.

Nous dirons, suivant Besicovitch [1], qu'un ensemble M de nombres réels est *relativement dense* s'il existe un nombre réel positif A tel que tout intervalle de longueur A contienne au moins un point de M.

La propriété suivante est très utile : appelons pour tout $\varepsilon > 0$, M_ε l'ensemble des t réels tels que, pour tout λ dans Λ, $|\exp 2\pi i\lambda t - 1| \leqq \varepsilon$.

Proposition 4.2. — *L'ensemble* Λ *est harmonieux si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, M_ε *est relativement dense.*

Ces résultats sont prouvés dans ([3], th. I, p. 128).

Proposition 4.3. — *Soient* $\theta > 1$ *un nombre de Pisot,* Λ *l'ensemble des sommes finies* $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ *ou* 1. *Alors* Λ *est harmonieux.*

Il suffit de choisir pour M_ε l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq p} \varepsilon_k \theta^k$ où $\varepsilon_k \in \mathbf{Z}$, $|\varepsilon_k| \leq p$ et où $p = p(\varepsilon)$ est assez grand. Si θ n'est pas un nombre de Pisot, Λ n'est pas harmonieux [3].

5. La nouvelle forme du théorème de synthèse.

Théorème III. — *Soient* Λ *un ensemble harmonieux de nombres réels et* E *un ensemble compact de nombres réels. On peut trouver une partie finie* F *de* E, *une application linéaire* L *transformant les fonctions continues et bornées* f *à spectre dans* $\Lambda + E$ *en fonctions presque-périodiques* g *à spectre dans* $\Lambda + F$ *et une constante* C *telles que*

(*a*) $\| g \|_\infty \leq C \| f \|_\infty$;

(*b*) $| g(t) - f(t) | \leq C |t| \| f \|_\infty$;

(*c*) *pour tout* λ *dans* Λ, *si le spectre de* f *appartient à* $\lambda + E$, *celui de* g *appartient à* $\lambda + F$.

Avant de démontrer ce résultat, il est intéressant d'indiquer quelles propriétés remarquables possèdent les fonctions presque-périodiques dont le spectre est contenu dans $\Lambda' = \Lambda + F$.

En premier lieu Λ' est un ensemble harmonieux ([3], th. III, p. 130). Appelons ε-presque période d'une fonction continue bornée $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ tout nombre réel τ tel que, pour tout t réel $|g(t + \tau) - g(t)| \leq \varepsilon \| g \|_\infty$.

Dans la proposition ci-dessous, Λ désigne encore un ensemble harmonieux, M_ε l'ensemble des nombres réels t tels que, pour tout λ dans Λ on ait $|\exp 2\pi i t\lambda - 1| \leq \varepsilon$ et $\gamma > 0$ est une constante absolue.

Proposition 5.1. — *Tout élément* τ *de* M_ε *est une* $\varepsilon\gamma$*-presque période de toute fonction presque-périodique à spectre dans* Λ.

C'est la même démonstration que dans ([3], p. 142).

Avant de prouver le théorème III, montrons qu'il entraîne le théorème II. Soit en effet f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ dont le spectre est contenu dans E. Avec les notations du paragraphe 3, le spectre de $\tau_k f$ est contenu dans $\Lambda_k + E$ lui-même contenu dans $\Lambda + E$. On définit $L_k(f) = (\tau_{-k} \circ L \circ \tau_k)(f)$. La condition (*a*) du théorème III assure que le spectre de $(L \circ \tau_k)(f)$ est contenu dans $\Lambda_k + F$; celui de $(\tau_{-k} \circ L \circ \tau_k)(f)$ est donc contenu dans $\theta^{-k}\Lambda_k + \theta^{-k} F = F_k$. Les conditions (*b*) et (*c*) du théorème III donnent (*b*) et (*c*) dans le théorème II.

Preuve du théorème III.

6. Le cas facile. — Pour prouver le théorème III en toute généralité, nous avons besoin d'un cas particulier important où l'on peut choisir pour F un seul point a de E. Le cas général s'obtiendra alors en découpant Λ en un nombre fini de morceaux pour lesquels F est réduit à un point.

Quelques définitions sont nécessaires.

Soit Λ un ensemble de nombres réels. Le pas $d(\Lambda)$ de Λ est la borne inférieure de l'ensemble des distances séparant deux points distincts de Λ. Si $0 < l < d(\Lambda)$, les intervalles $[\lambda, \lambda + l]$, $\lambda \in \Lambda$, sont deux à deux disjoints.

Définition 6.1. — *L'écartement* $\delta(\Lambda)$ *de* Λ *est la borne supérieure des* l *tels que* $0 < l < d(\Lambda)$ *et que le théorème* III *soit vrai avec* $E = [0, l]$ *et* $F = \{0\}$.

Nous savons minorer l'écartement d'un ensemble harmonieux.

Les notations de la proposition 6.2 sont les mêmes que celles de la proposition 5.1.

Proposition 6.2. — *Soit* $\delta > 0$ *tel que* $[0, \delta] + M_\varepsilon = \mathbf{R}$; *alors l'écartement de* Λ *dépasse* $\frac{1 - \varepsilon\gamma}{\delta}$.

La preuve de ce résultat est donnée dans l'appendice.

Proposition 6.3. — *Si le diamètre de* E *est inférieur à l'écartement de* Λ, *nous dirons que nous sommes dans le cas facile et le théorème* III *est vrai en prenant pour* F *l'ensemble réduit à un point, d'ailleurs arbitraire, de* E.

7. Résumé de la preuve dans le cas difficile. — L'idée de la preuve est d'« enrouler » Λ sur le compactifié de Bohr $\tilde{\mathbf{R}}$ de $\mathbf{R}$ et, grâce à une partition de l'unité faite sur $\tilde{\mathbf{R}}$ à l'aide de fonctions « régulières », de découper Λ en un nombre fini de morceaux dont l'écartement soit grand devant le diamètre de E. On est alors ramené au cas facile.

Rappelons que le groupe compact $\tilde{\mathbf{R}}$ est le groupe dual du groupe $\mathbf{R}$ muni de la topologie discrète; $A(\tilde{\mathbf{R}})$ désigne l'algèbre de Banach des fonctions $\psi : \tilde{\mathbf{R}} \to \mathbf{C}$ continues sur $\tilde{\mathbf{R}}$ et dont la série de Fourier est absolument convergente. Un homomorphisme continu $h : \mathbf{R} \to \tilde{\mathbf{R}}$ d'image dense est défini par la condition : pour tout $t \in \mathbf{R}$, $h(t)$ est le caractère sur $\mathbf{R}$ (muni de la topologie discrète) $s \to \exp 2\pi ist$. Si ψ est dans $A(\tilde{\mathbf{R}})$, $\psi \circ h$ est une fonction presque-périodique sur $\mathbf{R}$ dont la série de Fourier est absolument convergente.

8. L'ENSEMBLE F_1. — Soit Λ un ensemble harmonieux et, pour tout $\varepsilon > 0$, soit M_ε l'ensemble des nombres réels t tels que pour tout λ dans Λ on ait $|\exp 2\pi i\lambda t - 1| \leq \varepsilon$. Soit F_1 l'ensemble fini des nombres réels μ appartenant à $E-E$ et tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout t dans M_ε on ait $|\exp 2\pi i\mu t - 1| \leq 2\varepsilon$; 0 appartient donc à F_1. Soit enfin $\overline{\Lambda}$ l'ensemble des nombres réels μ tels que, pour tout t dans M_ε et tout $\varepsilon > 0$ on ait $|\exp 2\pi i\mu t - 1| \leq \varepsilon$; $\overline{\Lambda}$ est un ensemble harmonieux (prop. 4.2).

La définition ci-dessus de F_1 paraît artificielle; nous allons voir comment F_1 intervient lorsqu'on envoie Λ dans le compactifié de Bohr $\tilde{\mathbf{R}}$ de $\mathbf{R}$.

9. LE COMPACTIFIÉ DE BOHR, U, $\Lambda^\star$, $U^\star$. — Soit $h : \mathbf{R} \to \tilde{\mathbf{R}}$ l'homomorphisme canonique de $\mathbf{R}$ dans le compactifié de Bohr de $\mathbf{R}$ défini au paragraphe 7 et soit U la fermeture dans $\tilde{\mathbf{R}}$ de $h(\Lambda)$. L'ensemble U est une partie compacte de $\tilde{\mathbf{R}}$ et l'image réciproque de U par h est contenue dans l'ensemble harmonieux $\overline{\Lambda}$ comme le prouvent les deux lemmes suivants.

LEMME 1. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *tout* $t \in M_\varepsilon$ *et tout* $x \in U$, *on a* $|x(t) - 1| \leq \varepsilon$.

La valeur prise par le caractère x de $\tilde{\mathbf{R}}$ en t est $x(t)$; les inégalités $|x(t) - 1| \leq \varepsilon$, où t décrit M_ε définissent une partie fermée de $\tilde{\mathbf{R}}$ contenant $h(\Lambda)$, donc contenant U. On en déduit le lemme suivant :

LEMME 2. — *L'ensemble des nombres réels t tels que $h(t)$ appartienne à* U *est contenu dans* $\overline{\Lambda}$.

Soit $V = h(E)$; le lemme 3 ci-dessous nous montre que le nombre de décompositions d'un élément x de $\tilde{\mathbf{R}}$ en une somme $y + z$, où $y \in U$, $z \in V$ est fini; l'ensemble fini qui intervient ici est précisément F_1.

LEMME 3. — *Si x, élément de* $\tilde{\mathbf{R}}$, *peut être décrit $x = y + z = y' + z'$, où y et y' appartiennent à* U *et z et z' à* V, *alors $y - y'$, ainsi que $z - z'$ appartiennent à* $h(F_1)$.

En effet, $z' - z = h(s)$, où $s \in E - E$. D'autre part, le lemme 1 nous apprend que pour tout t dans M_ε on a $|(y - y')(t) - 1| \leq 2\varepsilon$. On en déduit $|\exp 2\pi ist - 1| \leq 2\varepsilon$, ce qui entraîne que s appartient à F_1.

Il sera important dans la suite de considérer le compact $U^\star = U + h(F_1)$ de $\tilde{\mathbf{R}}$; l'ensemble des nombres réels t tels que $h(t)$ appartienne à $U^\star$ est contenu dans l'ensemble harmonieux $\Lambda^\star = \overline{\Lambda} + F_1$ ([3], p. 130, th. III).

10. LE DÉCOUPAGE DE Λ. — Nous allons découper l'ensemble harmonieux Λ en un nombre fini de morceaux, les $\Lambda_j^\star$, $1 \leq j \leq n$, tels que l'écartement de chaque $\Lambda_j^\star$ dépasse $2l$ (l est assez grand pour que $F_1 + E$ soit contenu dans $[-l, l]$).

Voici comment on procède. Soient ε et δ deux nombres positifs assez petits pour que $\frac{1-4\gamma\varepsilon}{\delta} > 2l$ (γ est défini en 6.2). Soit $M_\varepsilon^\star$ l'ensemble des nombres réels t tels que, pour tout λ dans $\Lambda^\star$, on ait $|\exp 2\pi i\lambda t - 1| \leqq \varepsilon$ et T un ensemble fini de nombres réels tel que $[0, \delta] + T + M_\varepsilon^\star = \mathbf{R}$; ceci est possible car $M_\varepsilon^\star$ est relativement dense.

Pour tout x de $\tilde{\mathbf{R}}$, soit ω_x (resp. $\omega_x^\star$) l'ensemble des y appartenant à $\tilde{\mathbf{R}}$ tels que, pour tout t dans T, on ait $|y(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (resp. $|y(t) - x(t)| \leqq \varepsilon$). Soit enfin ω l'ensemble des $y \in \tilde{\mathbf{R}}$ tels que, pour tout t dans T, on ait $|y(t) - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Quand x décrit U, les ω_x forment un recouvrement ouvert de U. On peut trouver un entier n et un sous-recouvrement fini de U par $\omega_1, \ldots, \omega_n$ correspondant aux points $x_1, \ldots, x_n$ de U. On appelle $U_j^\star$ l'ensemble fermé $U^\star \cap \omega_j^\star$ et l'on définit $\Lambda_j^\star$ comme l'ensemble des nombres réels λ tels que $h(\lambda)$ appartienne à $U_j^\star$. L'ensemble $\Lambda_j^\star$ est contenu dans $\Lambda^\star$ et la réunion $\bigcup_{1 \leqq j \leqq n} \Lambda_j^\star$ contient Λ.

Lemme 4. — *L'écartement de $\Lambda_j^\star$ dépasse $2l$.*

En effet, $\Lambda_j^\star$ étant contenu dans $\Lambda^\star$, on a, pour tout λ dans $\Lambda_j^\star$ et tout t dans $M_\varepsilon^\star$, $|\exp 2\pi i\lambda t - 1| \leqq \varepsilon$. D'autre part, soit a_j un point arbitraire de $\Lambda_j^\star$ mais qui reste fixe dans la suite. Pour tous les y et y' de $\omega_j^\star$ et tout t dans T, on a

$$|y(t) - x_j(t)| \leqq \varepsilon \quad \text{et} \quad |y'(t) - x_j(t)| \leqq \varepsilon$$

et donc $|y(t) - y'(t)| \leqq 2\varepsilon$. En particulier, $|\exp 2\pi i(\lambda - a_j)t - 1| \leqq 2\varepsilon$ pour tout λ dans $\Lambda_j^\star$ et tout t dans T. Finalement, pour tout t dans $T + M_\varepsilon^\star$ et tout λ dans $\Lambda_j^\star$, on a $|\exp 2\pi i(\lambda - a_j)t - 1| \leqq 4\varepsilon$. La proposition 6.2 montre alors que l'écartement de $\Lambda_j^\star - a_j$ (qui est celui de $\Lambda_j^\star$) dépasse $2l$.

11. Les fonctions φ_j, $1 \leqq j \leqq n$. — Soient $V = h(E)$, U_j la fermeture dans $\tilde{\mathbf{R}}$ de $U \cap \omega_j$; alors U_j est contenu dans U et tout x de U_j vérifie les inégalités $|x(t) - x_j(t)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ ($t \in T$). Soit Ω_j une partie ouverte de $\tilde{\mathbf{R}}$ contenant l'ensemble fermé $U_j + V$ et assez petite pour que, pour tout k entre 1 et n, si $U_j + V$ ne rencontre pas $U_k + V$, alors Ω_j ne rencontre pas Ω_k. Les Ω_j forment un recouvrement ouvert de $U + V$.

Soit $\psi_1, \ldots, \psi_n$ une suite de fonctions continues sur $\tilde{\mathbf{R}}$, dont la série de Fourier est absolument convergente et telles que :

(1) le support de ψ_j est contenu dans Ω_j;

(2) $\psi_1 + \ldots + \psi_n = 1$ au voisinage de $U + V$.

Posons $\varphi_j = \psi_j \circ h (1 \leqq j \leqq n)$. Les φ_j sont des fonctions presque-périodiques à série de Fourier absolument convergente; ce sont donc des transformées de Fourier de mesures atomiques bornées σ_j. On a $\varphi_1 + \ldots + \varphi_n = 1$ au voisinage de $\Lambda + E$ et donc, grâce à la théorie de Wiener, pour toute fonction continue bornée f dont le spectre est contenu dans $\Lambda + E$, on a $f = f \star \sigma_1 + \ldots + f \star \sigma_n$.

LEMME 5. — *Dans ces conditions, le spectre de $f \star \sigma_j$ est contenu dans $\Lambda_j^\star + [-l, l]$.*

Soit en effet t un nombre réel dans $\Lambda + E$ appartenant au support de φ_j. Si nous montrons que t appartient à $\Lambda_j^\star + [-l, l]$, le lemme 5 sera prouvé grâce à la théorie de Wiener.

Dans ces conditions $h(t) = x$ peut être écrit $x = u + v$, où $u \in U_k$ et $v \in V$. Mais, d'autre part, x appartient à Ω_j qui contient $U_j + V$.

Si $U_j + V$ et $U_k + V$ ne se rencontraient pas, Ω_j ne rencontrerait pas $U_k + V$ et x n'existerait pas. Donc $U_j + V$ rencontre $U_k + V$. Le lemme 3 montre que l'on peut trouver un $y \in U_j$, $y' \in U_k$ tels que $y - y' \in h(F_1)$. Posons $u^\star = u + y - y'$ et montrons que $u^\star$ appartient à $U_j^\star$. Comme $u^\star$ appartient visiblement à $U^\star = U + h(F_1)$, il suffit de montrer que $u^\star$ appartient à l'ensemble fermé $\omega_j^\star$. Mais $u - y'$ appartient à $\overline{\omega} - \overline{\omega}$ ($\overline{\omega}$ est la fermeture de ω) et y à $\overline{\omega}_j$; $u^\star$ appartient donc à $\omega_j^\star$. Enfin u appartient à $h(\mathbf{R})$; il en est de même pour $y - y'$ et cela prouve que $u^\star = h(\lambda^\star)$, où $\lambda^\star$ appartient à $\Lambda_j^\star$. On a alors $x = u^\star + y' - y + v$ et donc t appartient à $\Lambda_j^\star + F_1 + E$ contenu dans $\Lambda_j^\star + [-l, l]$.

12. L'ENSEMBLE F. — L'introduction de F et une partition de $[-l, l]$ permettront de préciser ce qui arrive si, pour un $\lambda^\star$ dans $\Lambda^\star$ et un λ dans Λ, l'intervalle $[\lambda^\star - l, \lambda^\star + l]$ rencontre $\lambda + E$. Tout d'abord $\lambda - \lambda^\star$ appartient à $\Lambda^\star - \Lambda^\star$, autre ensemble harmonieux, et à $[-l, l] - E$; donc $\lambda - \lambda^\star$ appartient à un ensemble fini A. Considérons les translatés E_α de E par tous les éléments α de A. Pour tout s dans $[-l, l]$ on peut trouver un intervalle ouvert J_s, de centre s, assez petit pour que, si J_s rencontre E_α, $\alpha \in A$, alors s appartienne à E_α. On recouvre $[-l, l]$ à l'aide d'un nombre fini $J_1, \ldots, J_q$ de ces intervalles ouverts de centres $s_1, \ldots, s_q$ et l'on appelle F l'ensemble fini des différences $s_k - \alpha$, $1 \leqq k \leqq q$, $\alpha \in A$, qui appartiennent à E. On peut alors énoncer le lemme

LEMME 6. — *Soient $\lambda^\star \in \Lambda^\star$, $1 \leqq k \leqq q$ et $\lambda \in \Lambda$; si $\lambda^\star + J_k$ rencontre $\lambda + E$, alors $\lambda^\star + s_k$ appartient à $\lambda + F$.*

Appelons $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$ des fonctions indéfiniment dérivables telles que $\zeta_1 + \ldots + \zeta_q = 1$ sur $[-l, l]$ et telles que le support de chaque ζ_k soit contenu dans J_k.

13. Les fonctions $Z_{j,k}$. — Définissons sur $\Lambda_j^* + [-l, l]$, la fonction continue $Z_{j,k}$, à valeurs complexes, par $Z_{j,k}(t) = \zeta_k(s)$ si $t = \lambda^* + s$, $\lambda^* \in \Lambda_j^*$ et $|s| \leq l$. Le lemme suivant est prouvé dans l'appendice (lemme 3 de l'appendice).

Lemme 7. — *Il existe une mesure de Radon bornée $\mu_{j,k}$ dont la transformée de Fourier restreinte à $\Lambda_j^* + [-l, l]$ est $Z_{j,k}$.*

14. L'opérateur L. — L'écartement de Λ_j^* dépasse $2l$. Il existe donc (proposition 6.3), pour tout j et tout k, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq q$, une application $L_{j,k}$ linéaire continue transformant les fonctions continues bornées à spectre dans $\Lambda_j^* + J'_k$ ($J'_k = J_k \cap [-l, l]$) en fonctions presque-périodiques à spectre dans $\Lambda_j^* + s_k$ et ayant les propriétés suivantes :

(1) $\sup_{t \in \mathbf{R}} |L_{j,k}(f)| \leq C \|f\|_\infty$;

(2) $|(L_{j,k}f)(t) - f(t)| \leq C|t| \|f\|_\infty$;

(3) si le spectre de f est contenu dans $[\lambda^* - l, \lambda^* + l]$, $\lambda^* \in \Lambda_j^*$, celui de $L_{j,k}(f)$ est $\lambda^* + s_k$.

Partons de f dont le spectre est contenu dans $\Lambda + E$. On définit f_j par $f_j = f \star \sigma_j$ le spectre de f_j est contenu dans $\Lambda_j^* + [-l, l]$. On définit alors $f_{j,k}$ par $f_j \star \mu_{j,k}$. On a $f_j = \sum_{1 \leq k \leq q} f_{j,k}$ et donc $f = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq q}} f_{j,k}$.

On transforme la fonction continue bornée $f_{j,k}$ en $g_{j,k}$ par l'application $L_{j,k}$. Enfin g est, par définition, la somme des $g_{j,k}$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq q$. On pose $g = L(f)$. Il est immédiat que L est linéaire, continue et que g est presque-périodique.

Quel est le spectre de g? Si le spectre de f est contenu dans $\Lambda + E$, il en est de même pour celui de $f_{j,k}$ (déduite de f par convolution). Mais le spectre de $f_{j,k}$ est aussi contenu dans le support de $\hat{\sigma}_j \hat{\mu}_{j,k}$ c'est-à-dire dans $\Lambda_j^* + \bar{J}_k$. Le spectre de $f_{j,k}$ est donc contenu dans la réunion des intervalles $\lambda^* + \bar{J}_k$, $\lambda^* \in \Lambda_j^*$, rencontrant $\Lambda + E$; notons que, dans ce cas, $\lambda^* + s_k$ appartient à $\Lambda + F$ et le spectre de $g_{j,k}$ est donc contenu dans $\Lambda + F$. De la même façon on montre que si le spectre de f est contenu dans $\lambda + E$, $\lambda \in \Lambda$, celui de g est contenu dans $\lambda + F$.

L'inégalité (b) du théorème III s'obtient en additionnant les inégalités (ii) appliquées à $f_{j,k}$ et $g_{j,k}$.

Le théorème III est donc démontré.

APPENDICE.

15. Calcul de l'écartement d'un ensemble harmonieux.

Proposition 15.1. — *Dans l'énoncé ci-dessous* γ *désigne une constante absolue,* ε *un nombre réel positif inférieur à* $\frac{1}{\gamma}$, Λ *un ensemble harmonieux,* M_ε *l'ensemble des nombres réels* t *tels que, pour tout* λ *dans* Λ, *on ait* $|\exp 2\pi i\lambda t - 1| \leqq \varepsilon$. *Enfin* $\delta > 0$ *est tel que* $[0, \delta] + M_\varepsilon = \mathbf{R}$.

Si $0 < l < \frac{1-\varepsilon\gamma}{\delta}$, *il existe une application linéaire* L *transformant les fonctions continues bornées* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, *à spectre dans* $\Lambda + [0, l]$ *en fonctions presque-périodiques* g *à spectre dans* Λ. *On a, de plus,*

(*a*) $\sup_{t\in\mathbf{R}} |g(t)| \leqq C \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$;

(*b*) $|g(t) - f(t)| \leqq |t| C \|f\|_\infty$;

(*c*) *si le spectre de* f *est contenu dans* $\lambda + [0, l]$, $\lambda \in \Lambda$, *celui de* g *est* $\{\lambda\}$;

(*d*) *si une suite* f_k *tend vers* f *au sens de la convergence étroite* (§ 1), g_k *tend vers* g *uniformément sur* $\mathbf{R}$.

Pour prouver ce résultat nous avons besoin d'une série de lemmes dont les hypothèses sont les mêmes que ci-dessus.

Lemme 1. — *Soit* P *une somme trigonométrique finie dont les fréquences appartiennent à* Λ. *On a* $\sup_{0\leqq t\leqq\delta} |P(t)| \geqq (1-\varepsilon\gamma) \|P\|_\infty$.

En effet, tout élément τ de M_ε est une $\gamma\varepsilon$ presque période de P (propos. 5.1). Soit $\eta > 0$, s tel que $|P(s)| \geqq \|P\|_\infty - \eta$, t tel que $0 \leqq t \leqq \delta$ et $s = t + \tau$, $\tau \in M_\varepsilon$. On a

$$|P(s+\tau) - P(s)| \leqq \gamma\varepsilon \|P\|_\infty; \qquad \text{d'où} \qquad |P(t)| \geqq (1-\gamma\varepsilon)\|P\|_\infty - \eta.$$

En faisant tendre η vers zéro on obtient le lemme 1.

Lemme 2. — *Soit* $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une suite finie mais arbitrairement longue de fonctions continues et bornées de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$ *dont le spectre est contenu dans* $[0, l]$. *Alors*

$$\sup_{(s,t)\in\mathbf{R}^2} \left| \sum_{\lambda\in\Lambda} \exp 2\pi i\lambda s f_\lambda(t) \right| \leqq (1-\varepsilon\gamma-l\delta)^{-1} \sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \sum_{\lambda\in\Lambda} \exp 2\pi i\lambda t f_\lambda(t) \right|.$$

Le lemme 2 est un corollaire du lemme 1 et du « principe des soucoupes » ([2], propos. 1.2.3, p. 75).

Lemme 3. — *Soit* $\zeta : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *une fonction continue bornée qui est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon bornée* μ *sur* $\mathbf{R}$. *Appelons* Z *la* *fonction définie sur* $\Lambda + [0, l]$ *par* $Z(t) = \zeta(s)$ *si* $t = \lambda + s$, $\lambda \in \Lambda$, $0 \leqq s \leqq l$. *On peut trouver une mesure de Radon complexe bornée* ν *sur* **R** *telle que*

$$\|\nu\| \leqq (1 - \varepsilon\gamma - l\delta)^{-1} \|\mu\|$$

et $\hat{\mu} = Z$ *sur* $\Lambda + [0, l]$.

Le lemme 3 est une conséquence du lemme 2 ([2], th. 1, p. 76).

Il reste à prouver la proposition 15.1. Les conditions (b) et (c) permettent d'expliciter L si, avec les notations du lemme 2, f peut être écrite $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(t) \exp 2\pi i \lambda t$. Alors $L(f)$ est $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(0) \exp 2\pi i \lambda t$. La continuité de L est prouvée par le lemme 2. Soit, pour montrer (b), t_0 un nombre réel, ξ la fonction définie sur $\Lambda + [0, l]$ par $\xi(\lambda + s) = \exp 2\pi i \lambda t_0$ $(\lambda \in \Lambda, 0 \leqq s \leqq l)$, χ le caractère $t \to \exp 2\pi i t t_0$ et Z la fonction définie sur $\Lambda + [0, l]$ par $Z(\lambda + s) = \exp(-2\pi i s t_0) - 1$ $(\lambda \in \Lambda, 0 \leqq s \leqq l)$. La fonction Z est bien de la forme intervenant au lemme 3. On a même, en vertu de l'inégalité de S. Bernstein ([8], chap. III, lemma 13.16) $\|\mu\| \leqq 2\pi |t_0| l$. La fonction $\xi - \chi$ s'écrit $(Z - 1)\chi$ et, pour cette raison est la transformée de Fourier d'une mesure ν de norme inférieure à $|t_0| C(l)$. Enfin le produit scalaire entre $\xi - \chi$ et $\hat{f}$ vaut $g(t_0) - f(t_0)$; on a donc

$$g(t_0) - f(t_0) = \int_{\mathbf{R}} f(-t)\, d\nu(t) \qquad \text{et} \qquad |g(t_0) - f(t_0)| \leqq \|f\|_\infty \|\nu\| \leqq |t_0| C(l) \|f\|_\infty.$$

Pour étendre la définition et les propriétés de L à toute fonction continue et bornée sur **R** dont le spectre est contenu dans $\Lambda + [0, l]$, il suffira de prouver (d). Soit $0 < l < l' < \frac{1 - \varepsilon\gamma}{\delta}$ et soit φ une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est nulle hors de $\left[\frac{l - l'}{2}, \frac{l' - l}{2}\right]$ et vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(t)\, dt = 1$.

Soit L′ l'opérateur associé à l'intervalle $I = \left[\frac{l - l'}{2}, \frac{l + l'}{2}\right]$, c'est-à-dire transformant les fonctions continues bornées à spectre dans $\Lambda + I$ en fonctions presque-périodiques à spectre dans Λ et vérifiant (a), (b), (c).

Soit f_λ, $\lambda \in \Lambda$, une suite finie de fonctions continues et bornées dont le spectre est contenu dans $[0, l]$; $f(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(t) \exp 2\pi i \lambda t$. On a alors $L(f) = L'(f\varphi)$, car le spectre de $f\varphi$ est contenu dans la somme de celui de f et celui de φ donc dans $\Lambda + I$ et sur tout intervalle $\lambda + I$, $\lambda \in \Lambda$, l'intégrale de la distribution $\hat{f}_\lambda$ est égale à celle de $\hat{f}_\lambda \star \hat{\varphi}$ (car l'intégrale de $\hat{\varphi}$ vaut 1).

Si f_k tend étroitement vers f, les $f_k\varphi$ tendent uniformément sur tout **R** vers $f\varphi$ et la continuité de L′ fournit la preuve de (d).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge University Press.
[2] Y. Meyer, *Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 18, n° 2, 1968, p. 73-86).
[3] Y. Meyer, *Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique* (*Studia Math.*, vol. 34, 1970, p. 127-147).
[4] Y. Meyer, *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 117.
[5] Y. Meyer, *Nombres algébriques et analyse harmonique* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 3, 1970, fasc. 1, p. 75-110).
[6] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath Math. Monographs, 1961.
[7] N. Wiener, *The Fourier Integral and certain of its applications*, Cambridge University Press, 1933.
[8] A. Zygmund, *Trigonometric series*, vol. I et II, Cambridge University, Press, 1968.

(Manuscrit reçu le 20 mai 1970.)

Yves MEYER,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.