YVES MEYER

Nombres algébriques et analyse harmonique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 3, nº 1 (1970), p. 75-110
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_1_75_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, 1970, p. 75 à 110.

NOMBRES ALGÉBRIQUES ET ANALYSE HARMONIQUE

PAR YVES MEYER.

INTRODUCTION. — Une grande partie de l'analyse harmonique moderne est consacrée aux ensembles exceptionnels de nombres réels; ensembles compacts et ensembles discrets, ensembles d'unicité, ensembles de synthèse harmonique, etc.

Le but de ce travail est de montrer que très souvent les propriétés remarquables de ces ensembles E vis-à-vis de l'analyse harmonique s'interprètent en regardant la droite réelle comme un sous-groupe à un paramètre dense dans un groupe compact; l'ensemble exceptionnel devenant une partie remarquable de ce groupe compact G. On doit, dans la définition de G, tenir le plus grand compte de la nature algébrique des paramètres servant à définir E. Par cette méthode, Salem a résolu le problème de l'unicité dans le cadre des ensembles à rapport de dissection constant.

Soient θ un nombre réel supérieur à 2, Λ l'ensemble (discret) de toutes les sommes finies $\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et E l'ensemble compact de toutes les sommes $\sum_{k\geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Le chapitre 1 contient une nouvelle preuve du théorème de Salem (E est d'unicité si θ est un nombre de Pisot) ainsi qu'une généralisation de ce résultat. Le chapitre 2 résout le problème de savoir quand Λ est exactement l'ensemble des zéros d'une fonction presque-périodique. La classe de nombres de Pisot que ce problème introduit est étudiée au chapitre 3. Dans le chapitre 4 nous montrons que Λ a un compact propre si et seulement si θ est un nombre de Pisot. Dans le chapitre 5, E est encore l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k\geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, θ est un nombre de Pisot ou de Salem et A(E) est l'algèbre des restrictions à E des transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbf{R})$; une propriété importante de l'algèbre de Banach $A(E)$ est alors obtenue et c'est un premier pas en direction du problème de la synthèse. Au chapitre 6, nous montrons que si θ est un nombre de Pisot supérieur à 3 et φ une fonction d'une variable réelle, à valeurs complexes, dont le spectre est contenu dans E, on peut associer à φ une suite $(P_k)_{k\geqq 1}$ de sommes trigonométriques finies réalisant la synthèse de φ au sens suivant :

(*a*) les fréquences de P_k appartiennent à l'ensemble des sommes $\sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1;

(*b*) $\sup_{k\geqq 1} \sup_{t\in\mathbf{R}} |P_k(t)| \leqq \sup_{t\in\mathbf{R}} \operatorname{ess} |\varphi(t)|$;

(*c*) $P_k(t) \to \varphi(t)$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}$ $(k \to +\infty)$. C'est une généralisation des propriétés bien connues de l'ensemble triadique de Cantor $(\theta = 3)$.

1. Unicité du développement trigonométrique.

1.1. Soit E un ensemble compact de nombres réels; E est un ensemble de multiplicité s'il existe une distribution S, non nulle, de support contenu dans E, dont la transformée de Fourier $\hat{S}$ tend vers zéro à l'infini. Dans le cas contraire, E est un ensemble d'unicité.

Soit E un compact contenu dans l'intervalle ouvert $]\pi, \pi[$ et S une distribution portée par E. Il suffit que $\lim \hat{S}(k) = 0$ quand $k \in \mathbf{Z}$, $|k| \to +\infty$ pour que $\lim \hat{S}(t) = 0$, $t \in \mathbf{R}$, $|t| \to +\infty$. Il revient donc au même de dire que E est un ensemble de multiplicité ou qu'il existe une série trigonométrique $\sum_{k\geqq 0} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, 2π-périodique, dont les coefficients a_k et b_k ne sont pas tous nuls mais dont les sommes partielles tendent vers zéro pour tout t appartenant à $[-\pi, \pi]$ sans appartenir à E; il n'y a pas unicité du développement trigonométrique (*voir* [5], chap. V, p. 52).

Rappelons d'autre part la construction de certains ensembles parfaits de nombres réels. Soit $(\xi_k)_{k\geqq 1}$ une suite de nombres réels appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. La dissection ξ_k sur un intervalle $[a, b]$ remplace cet intervalle par deux intervalles fermés, égaux, de longueur $(b-a)\xi_k$, contenus dans $[a, b]$ et respectivement d'origine a et d'extrémité b.

Partons de l'intervalle $[0, 1]$ et opérons la dissection ξ_1. Nous obtenons un ensemble E_1. Sur chacun des deux intervalles composant E_1 nous opérons la dissection ξ_2 et nous obtenons E_2 et ainsi de suite. Le compact E_k se compose de 2^k intervalles de longueur $2^k \xi_1 \ldots \xi_k$ et E est l'intersection des E_k.

Si $\xi_k = \xi$ pour tout $k \geqq 1$ et si ξ^{-1} est un nombre de Pisot, Salem a montré que E est un ensemble d'unicité.

Nous allons voir que E est encore un ensemble d'unicité si E est construit à l'aide d'une suite $(\xi_k)_{k \geqq 1}$ de rapports de dissection dont les inverses sont des nombres de Pisot, soumis à une condition très naturelle de régularité et pris dans un même corps de nombres algébriques.

Définition 1.1. — Soit $\mathcal{K}$ un corps réel de nombres algébriques, c'est-à-dire une extension de $\mathbf{Q}$ contenue dans $\mathbf{R}$ de degré fini n. Nous appellerons $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les n $\mathbf{Q}$-isomorphismes de $\mathcal{K}$ dans $\mathbf{C}$ où σ_1 est l'application identique de $\mathcal{K}$ dans $\mathbf{R}$ ([20], chap. II).

Théorème I. — *Soit $\mathcal{K}$ un corps réel de nombres algébriques de degré n. Soient α et β deux nombres réels tels que $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 2$. Soit $(\omega_k)_{k \geqq 1}$ une suite d'entiers algébriques de $\mathcal{K}$ tels que :*

(*a*) $\omega_k \geqq \beta$;

(*b*) $|\sigma_j(\omega_k)| \leqq \alpha$ *pour* $2 \leqq j \leqq n$ *et* $k \geqq 1$.

Alors l'ensemble parfait symétrique construit à l'aide des rapports de dissection $\xi_k = \omega_k^{-1}$ est un ensemble d'unicité.

Avant de prouver ce théorème faisons quelques remarques. Le théorème ne peut comporter de réciproque; en effet, R. Schneider [21] a montré que sans faire aucune hypothèse de nature arithmétique sur les ξ_k, la seule hypothèse $\sum_1^\infty \xi_k^2 < +\infty$ suffit à assurer que E est un ensemble d'unicité (*voir* aussi [9]).

Un corollaire du théorème est la remarque suivante : soit $\mathcal{K}$ un corps réel de nombres algébriques de degré n et F un ensemble fini de nombres de Pisot de $\mathcal{K}$, de degré n et dépassant 2. Alors tout ensemble parfait symétrique E construit à l'aide de rapports de dissection ξ_k tels que $\xi_k^{-1} \in \mathrm{F}$ est un ensemble d'unicité.

1.2. Une nouvelle preuve du théorème de Salem. — Avant d'attaquer le cas général, nous allons supposer que, pour tout $k \geqq 1$, $\xi_k = \xi$ et prouver le résultat suivant :

Théorème II. — *Soit θ un nombre de Pisot, de degré n, supérieur à 2, E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geqq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et, pour tout $k \geqq 0$, h_k l'homomorphisme de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{T}^n$ défini par*

$$h_k(t) = (\exp 2\pi i \theta^k t, \ldots, \exp 2\pi i \theta^{k+n-1} t).$$

On peut trouver un compact K *de* $\mathbf{T}^n$, *de mesure nulle, tel que, pour tout* $k \geqq 0$, $h_k(\mathrm{E})$ *soit contenu dans* K.

Le résultat est frappant parce que $h_k(\mathbf{R})$ est un sous-groupe dense de $\mathbf{T}^n$ isomorphe à $\mathbf{R}$.

Nous allons introduire quelques définitions et notations.

Soit n le degré de θ, $\theta_2, \ldots, \theta_n$ les conjugués de θ autres que θ. Les θ_j qui ne sont pas réels sont deux à deux conjugués; enfin $\theta, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sont tous différents. Soit, pour tout $k \geqq 0$, H_k l'application linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\mathrm{H}_k(t) = (\theta^k t, \ldots, \theta^{k+n-1} t).$$

Soit $\mathrm{P} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{T}^n$ la projection canonique définie par

$$\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n) = (\exp 2\pi i x_1, \ldots, \exp 2\pi i x_n).$$

Alors $h_k = \mathrm{P} \circ h_{k'}$.

Soit $\mathrm{U} \subset \mathbf{R}^n$ un compact défini paramétriquement par

$$x_1 = u_2 + \ldots + u_n, \qquad x_2 = \theta_2 u_2 + \ldots + \theta_n u_n, \qquad \ldots, \qquad x_n = \theta_2^{n-1} u_2 + \ldots + \theta_n^{n-1} u_n,$$

où

$$u_2 = -\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_2^k, \qquad \ldots, \qquad u_n = -\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_n^k$$

et où les ε_k valent 0 ou 1. Alors les u_j relatifs à deux θ_j conjugués le sont. Pour cette raison les x_p, $1 \leqq p \leqq n$, dépendent linéairement de $n-1$ paramètres réels et U est contenu dans un hyperplan L de $\mathbf{R}^n$. D'autre part U est compact.

Soit $\mathrm{V} = \mathrm{H}_0(\mathrm{E})$; V est porté par une « droite » D de $\mathbf{R}^n$ qui n'est pas contenue dans L car le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \theta & \ldots & \theta^{n-1} \\ 1 & \theta_2 & \ldots & \theta_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \theta_n & \ldots & \theta_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Remarquons maintenant que $\mathrm{U} + \mathrm{V}$ est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$.

Rapportons $\mathbf{R}^n$ à un nouveau système d'axe tel que l'équation de L devienne $x_n = 0$ et que celles de la droite D deviennent $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$. Pour calculer la mesure de $\mathrm{U} + \mathrm{V}$, appliquons le théorème de Fubini en intégrant d'abord par rapport à x_n. Puisque $\mathrm{U} \subset \mathrm{L}$, $\mathrm{V} \subset \mathrm{D}$ et que la mesure de E est nulle ($\theta > 2$), on obtient mes $(\mathrm{U} + \mathrm{V}) = 0$.

Soit $\mathrm{K} = \mathrm{P}(\mathrm{U} + \mathrm{V})$. Alors K est un compact de $\mathbf{T}^n$ de mesure nulle (la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{T}^n$ diminue la mesure).

Enfin $h_k(E) \subset K$. En effet, tout élément t de E peut être écrit $t = t' + t''$ où

$$t' = \sum_{1}^{k} \varepsilon_m \theta^{-m}, \qquad t'' = \sum_{k+1}^{\infty} \varepsilon_m \theta^{-m}.$$

On a $H_k(t) = H_k(t') + H_k(t'')$. Il est évident que $H_k(t'') \in V$. D'autre part, modulo $\mathbf{Z}^n$, $H_k(t')$ appartient à U [cela résulte, par combinaison linéaire à coefficients 0 ou 1 des congruences $\theta^k = -\theta_2^k - \ldots - \theta_n^k \pmod 1$, $k \geq 0$]. Donc, modulo $\mathbf{Z}^n$, $H_k(t)$ appartient à $U + V$ et $h_k(t)$ à K.

1.3. Pour les ensembles à rapport de dissection variables, on n'a pas un résultat aussi simple; il faut généraliser la condition de Piatecki-Shapiro ([5], th. V, p. 59). Quelques notations sont nécessaires. Soit $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions à valeurs complexes continues et nulles à l'infini sur $\mathbf{R}$. Soit $M(\mathbf{R})$ l'espace dual de $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ qui s'identifie à l'espace de toutes les mesures de Radon complexes et bornées sur $\mathbf{R}$. La topologie $\sigma(M(\mathbf{R}), \mathcal{C}_0(\mathbf{R}))$ est la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ des éléments de $M(\mathbf{R})$. On a alors le résultat classique suivant.

Proposition 1.3. — *Supposons que* E *est un ensemble compact de nombres réels, qu'il existe une constante* C *et une suite* $(\mu_k)_{k \geq 1}$ *d'éléments de* $M(\mathbf{R})$ *tels que, pour tout* $k \geq 1$,

(1) $\| \mu_k \| \leq c$;

(2) $\hat{\mu}_k = 0$ *sur un voisinage* W_k *de* E;

(3) $\mu_k \to \delta(t)$ *dans* $\sigma(M(\mathbf{R}), \mathcal{C}_0(\mathbf{R}))$ $(k \to +\infty)$ *où* $\delta(t)$ *est la masse unité en* 0.

Alors E *est un ensemble d'unicité* ([5], th. III, p. 58).

Rappelons la démonstration de cette proposition : si $S(t)$ est une distribution portée par E dont la transformée de Fourier est nulle à l'infini, on a, grâce à la théorie de Wiener, $\int_{\mathbf{R}} \hat{S}(u)\, d\mu_k(u) = 0$. Mais $\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbf{R}} \hat{S}(u)\, d\mu_k(u) = \hat{S}(0)$. Ainsi $\hat{S}(0) = 0$. En appliquant cette preuve à la distribution $S(t) \exp - 2\pi i u_0 t$ on montre que $\hat{S}(u_0) = 0$ pour tout u_0 réel. Ainsi $S = 0$.

1.4. Venons-en à la notion qui remplacera celle de Piatecki-Shapiro ([5], th. V, p. 59), le compact de $\mathbf{T}^n$ sera remplacé par une suite de compacts laissant une place uniforme.

Définition 1.4. — *Soient* $n \geq 1$ *un entier et* A_k *une suite de compacts du tore n-dimensionnel* $\mathbf{T}^n$. *Nous dirons que la suite des* A_k *laisse une place uniforme si l'on peut trouver un compact* K *de* $\mathbf{T}^n$, K *distinct de* $\mathbf{T}^n$ *et une* *suite* x_k *de points de* $\mathbf{T}^n$ *tels que* $A_k + x_k$ *soit, pour tout* $k \geqq 0$, *contenu dans* K.

Le résultat suivant sera utile pour montrer qu'une suite A_k de compacts de $\mathbf{T}^n$ laisse une place uniforme.

PROPOSITION 1.4.1. — *Soient* $n \geqq 1$ *un entier,* A_k *une suite de compacts du tore n-dimensionnel* T^n, ε *un nombre réel positif,* A_k^ε *l'ensemble des points* x *de* $\mathbf{T}^n$ *dont la distance à* A_k *ne dépasse pas* ε. *Soit* dx *la mesure de Lebesgue de* $\mathbf{T}^n$ *normalisée de sorte que* $\int_{\mathbf{T}^n} dx = 1$. *Supposons que, pour tout* $k \geqq 0$, $\operatorname{mes}(A_k^\varepsilon) < 1$. *Alors la suite des compacts* A_k *laisse une place uniforme.*

En effet, le compact A_k^ε n'est pas tout $\mathbf{T}^n$. Soit donc x_k un point de $\mathbf{T}^n$ tel que $d(x_k, A_k) \geqq \varepsilon$ et K l'ensemble des x de $\mathbf{T}^n$ tels que $d(0, x) \geqq \varepsilon$. La distance d sur $\mathbf{T}^n$ est invariante par translation et l'on a alors $A_k - x_k \subset K$ pour tout $k \geqq 0$.

Soit $h_k(t) = \exp 2\pi i \omega_{1,k} t, \ldots, \exp 2\pi i \omega_{n,k} t$ une suite d'homomorphismes continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{T}^n$ tels que $h_k(\mathbf{R})$ soit dense dans $\mathbf{T}^n$. Nous dirons que cette suite est normale si pour toute suite $(p_1, \ldots, p_n)$ d'entiers relatifs non tous nuls, $|p_1\omega_{1,k} + \ldots + p_n\omega_{n,k}| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$.

PROPOSITION 1.4.2. — *Soient* E *un ensemble compact de nombres réels,* h_k *une suite normale d'homomorphismes de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{T}^n$ *et* A_k *une suite de compacts de* $\mathbf{T}^n$ *laissant une place uniforme. Supposons que, pour tout* $k \geqq 0$, $h_k(E) \subset A_k$. *Alors* E *est un ensemble d'unicité.*

La preuve de 1.4.2 est en tout point semblable à celle du théorème de Piatecki-Shapiro. On appelle $\varphi(x)$ une fonction indéfiniment dérivable, égale à 0 sur un voisinage de K (*voir* la définition 1.4) mais d'intégrale égale à 1 sur tout $\mathbf{T}^n$. Soit $\varphi_k(x) = \varphi(x + x_k)$; puisque $A_k + x_k \subset K$, $\varphi_k(x)$ est nulle sur un voisinage de A_k et l'intégrale de φ_k est 1. Les coefficients de Fourier de φ_k et de φ ont même module et l'on peut écrire

$$\varphi_k(\exp 2\pi i x_1, \ldots, \exp 2\pi i x_n) = \sum_{\mathbf{Z}^n} \lambda_k(p_1, \ldots, p_n) \exp - 2\pi i (p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n),$$

où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $|\lambda_k(p_1, \ldots, p_n)| = \lambda(p_1, \ldots, p_n) \in l^1(\mathbf{Z}^n)$. Définissons une fonction continue sur $\mathbf{R}$, f_k par $f_k = \varphi_k \circ h_k$. On a $f_k = \hat{\mu}_k$ où μ_k est la mesure discrète donnant la masse 1 au point 0 et la masse $\lambda_k(p_1, \ldots, p_n)$ au point $p_1\omega_{1,k} + \ldots + p_n\omega_{n,k}$. On vérifie alors sans difficulté que $\sup_{k \geqq 0} \|\mu_k\| < +\infty$ et que sur tout intervalle compact I ne contenant pas 0, $\int_I d|\mu_k|$ tend vers zéro. Puisque la masse de μ_k en 0 est 1, les μ_k conviennent à la proposition 1.3.

LEMME 1. — *Soit* K *un compact de* $\mathbf{T}^n$, $(F_k)_{k\geq 0}$ *une suite de parties finies de* $\mathbf{T}^n$ *telles que* $\operatorname{Card} F_k \leqq A$ *et* $A \operatorname{mes} K < 1$. *Alors* $A_k = F_k + K$ *est une suite de parties compactes de* $\mathbf{T}^n$ *laissant une place uniforme.*

Appelons encore K^ε (ou A_k^ε) l'ensemble des points de $\mathbf{T}^n$ dont la distance à K (ou A_k) ne dépasse pas ε. On a $K^\varepsilon + F_k = A_k^\varepsilon$ et donc $\operatorname{mes}(A_k^\varepsilon) \leqq A \operatorname{mes} K^\varepsilon$. Il suffit de choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $A \operatorname{mes} K^\varepsilon < 1$ (c'est possible car $\operatorname{mes} K^\varepsilon \to \operatorname{mes} K$ quand $\varepsilon \to 0$).

1.5. PREUVE DU THÉORÈME I (*suite et fin*). — Les points de E sont donnés par la formule

$$t = \varepsilon_1(1-\xi_1) + \varepsilon_2\xi_1(1-\xi_2) + \ldots + \varepsilon_k\xi_1\ldots\xi_{k-1}(1-\xi_k) + \ldots,$$

où $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Soit θ un entier fixe, arbitraire, de degré n, de $\mathcal{K}$, $\theta_2, \ldots, \theta_n$ les conjugués de θ autres que θ. Posons, si $k \geqq 1$ et $1 \leqq j \leqq n$, $\omega_{j,k} = \theta^{j-1}(\xi_1\ldots\xi_k)^{-1}$ et si $k=0$, $\omega_{j,0} = \theta^{j-1}$. Soient H_k l'homomorphisme de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ défini par $H_k(t) = (t\omega_{1,k}, \ldots, t\omega_{n,k})$ et p la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{T}^n$ définie par

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (\exp 2\pi i x_1, \ldots, \exp 2\pi i x_n).$$

Soit U l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_j = u_2\theta_2^{j-1} + \ldots + u_n\theta_n^{j-1}$, $1 \leqq j \leqq n$, où les u_m associés à des θ_m réels le sont, les u_m associés à des θ_m complexes et conjugués sont des nombres complexes conjugués et où $|u_m| \leqq (1+\alpha)(1-\alpha)^{-1}$ ($2 \leqq m \leqq n$, α est défini par les hypothèses du théorème I). Grâce à ces conditions sur les u_m, les x_j dépendent linéairement de $n-1$ paramètres réels et U est contenu dans un hyperplan L de $\mathbf{R}^n$. D'autre part U est compact.

Soit R_k l'ensemble de tous les points

$$\varepsilon_{k+1}(1-\xi_{k+1}) + \varepsilon_{k+2}\xi_{k+1}(1-\xi_{k+2}) + \ldots + \varepsilon_{k+l}\,\xi_{k+1}\ldots\xi_{k+l-1}(1-\xi_{k+l}) + \ldots,$$

où

$$\varepsilon_{k+l} \in \{0, 1\} \qquad (l \geqq 1).$$

Soit $V_k = H_0(R_k)$. Appelons N un entier qui sera fixé ultérieurement, I « l'intervalle » de $\mathbf{R}^n$ défini comme l'ensemble des points $(t, \ldots, \theta^{n-1}t)$ de $\mathbf{R}^n$ tels que $0 \leqq t \leqq \beta^{-N}$ (β est défini par le théorème I). Alors $H_0(R_k) \subset I + f_k$ où f_k est un ensemble fini de 2^N points et $U + V_k = U + I + f_k$. Le théorème de Fubini nous apprend que $\operatorname{mes}(U+I) \leqq C\beta^{-N}$ (le support de I et le compact U porté par l'hyperplan L ne dépendent pas de N; seule la longueur de I dépend de N). Choisissons N assez grand pour que $C\beta^{-N}2^N < 1$ (c'est possible car $2\beta^{-1} < 1$). Posons $K = p(U+I)$, $F_k = p(f_k)$ et $A_k = K + F_k = p(U+V_k)$. Le lemme 1 montre que la suite des compacts A_k laisse une place uniforme [car $\operatorname{mes} K \leqq \operatorname{mes}(U+I)$ et $\operatorname{card} F_k \leqq 2^N$].

Soit $h_k = p \circ H_k$; il est immédiat de vérifier que la suite des h_k est normale. Pour prouver le théorème I il suffit de montrer que $h_k(E) \subset A_k$ ou que $H_k(E)$, modulo $\mathbf{Z}^n$, est contenu dans $U + V_k$. Tout élément t de E peut être écrit $t = t' + t''$ où $t' = \varepsilon_1(1 - \xi_1) + \ldots + \varepsilon_k \xi_1 \ldots \xi_{k-1}(1 - \xi_k)$. On vérifie immédiatement que $H_k(t'') \in V_k$. D'autre part $H_k(t') = (x_1, \ldots, x_n)$ où chaque x_j est un entier algébrique du corps $\mathcal{K}$. La congruence $H_k(t') \in U$ (modulo $\mathbf{Z}^n$) est alors une conséquence immédiate des congruences

$$x_1 + \sigma_2(x_1) + \ldots + \sigma_n(x_1) \in \mathbf{Z}, \qquad \ldots, \qquad x_n + \sigma_2(x_n) + \ldots + \sigma_n(x_n) \in \mathbf{Z}.$$

Les majorations de $|\sigma_2(x_1)| \ldots |\sigma_n(x_1)|$ proviennent des hypothèses faites sur les modules des conjugués des $\omega_k (k \geq 1)$.

1.6. Pour montrer que le théorème I ne peut comporter de réciproque, prouvons le résultat suivant :

Théorème III. — *Soient $\mathcal{K}$ un corps réel de nombres algébriques, n le degré de $\mathcal{K}$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les n $\mathbf{Q}$-isomorphismes de $\mathcal{K}$ dans $\mathbf{C}$ (σ_1 est l'application identique de $\mathcal{K}$ dans $\mathbf{R}$).*

Soient $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n nombres réels tels que $0 < \alpha < \frac{1}{2}, \alpha_2 > 1, \ldots, \alpha_n > 1$ et $\alpha\alpha_2 \ldots \alpha_n = 1$. Soit C un nombre réel positif.

Appelons $(t_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers algébriques du corps $\mathcal{K}$ tels que $0 < t_k \leq \alpha^k$ et, pour $2 \leq j \leq n$, $|\sigma_j(t_k)| \leq C\alpha_j^k$.

Soit E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k t_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Alors E est un ensemble d'unicité.

Avant de démontrer le théorème III faisons quelques remarques. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base du $\mathbf{Z}$-module libre formé des entiers algébriques du corps $\mathcal{K}$. Soit D le déterminant des vecteurs $(\sigma_j(e_1), \ldots, \sigma_j(e_n))$ $(1 \leq j \leq n)$. Le théorème de Minkowski ([5], chap. VI, p. 75) nous apprend qu'il existe un entier algébrique t_k non nul tel que $0 < t_k \leq \alpha^k$ et que, pour $2 \leq j \leq n$, $|\sigma_j(t_k)| \leq C\alpha_j^k$ dès que $C \geq |D|$.

Si α est le module d'une unité θ de $\mathcal{K}$, on montre sans peine qu'il y a un ensemble fini F d'entiers algébriques du corps $\mathcal{K}$ tel que, pour tout $k \geq 1$, $t_k \in \theta^k F$.

Passons à la preuve du théorème III. Appelons Λ_k l'ensemble de toutes les sommes $\sum_1^k \varepsilon_j t_j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 et R_k l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k+1}^{\infty} \varepsilon_j t_j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1. Soit, pour tout $k \geq 1$, s_k un entier de $\mathcal{K}$ tel que $0 < s_k < \alpha^{-k}$ et, pour $2 \leq j \leq n$, $|\sigma_j(s_k)| \leq C\alpha_j^{-k}$ (s_k existe grâce au théorème de Minkowski dès que $C \geq |D|$). On a $s_k E = s_k \Lambda_k + s_k R_k$.

Tout $\lambda \in s_k \Lambda_k$ est un entier algébrique du corps $\mathcal{K}$ tel que $|\sigma_j(\lambda)| \leqq C^2 \alpha_j/\alpha_j - 1$ pour $2 \leqq j \leqq n$.

Pour tout entier p compris entre 1 et n et tout $\lambda \in s_k \Lambda_k$, on a, en posant $u_j = -\sigma_j(\lambda)$ pour $2 \leqq j \leqq n$:

$$e_p \lambda \equiv \sigma_2(e_p) u_2 + \ldots + \sigma_n(e_p) u_n \pmod 1, \tag{1.6.1}$$

où $|u_j| \leqq C^2 \alpha_j/\alpha_j - 1$, $2 \leqq j \leqq n$, et où les u_j relatifs à deux isomorphismes σ_j conjugués sont conjugués (sur le corps des complexes). Appelons U l'ensemble compact de $\mathbf{R}^n$ formé des points $x = (x_p)_{1 \leqq p \leqq n}$ tels que x_p soit donné par le second membre de (1.6.1) avec $|u_p| \leqq C^2 \alpha_j/\alpha_j - 1$. L'ensemble U est compact et est contenu dans un hyperplan L de $\mathbf{R}^n$. Soit H_0 l'homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ défini par $H_0(t) = (\alpha_1 t, \ldots, \alpha_n t)$; $H_k(t) = H_0(s_k t)$, $k \geqq 1$, P la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{T}^n$ et $h_k = P \circ H_k$, $V_k = H_k(R_k)$. Alors on montre, comme dans la preuve du théorème I que :

- $H_k(E) \subset U + V_k + \mathbf{Z}^n$;
- $V_k \subset f_{k,N} + I_N$;

où $\operatorname{Card} f_{k,N} \leqq 2^N$, I_N est l'image par H_0 de $[0, \alpha^{N+1}/1 - \alpha]$.

Soit $K_N = P(U + I_N)$, $F_{k,N} = P(f_{k,N})$. On a $\operatorname{mes}(U + I_N) \leqq C_1 \alpha^N$ et donc $\operatorname{mes} K_N \leqq C_1 \alpha^N$. Pour N assez grand, on a donc $\operatorname{Card} F_{k,N} \operatorname{mes} K_N < 1$ et la suite des compacts de $\mathbf{T}^n$, $A_k = K_N + F_{k,N}$ laisse donc une place uniforme; E est un ensemble d'unicité.

Cas des ensembles parfaits de translation.

THÉORÈME IV. — *Les notations relatives au corps $\mathcal{K}$ de nombres algébriques sont les mêmes qu'au théorème* III. *Soient q un entier positif, $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n nombres réels tels que $0 < \alpha < q^{-1}$, $\alpha_2 > 1, \ldots, \alpha_n > 1$, $\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_n = 1$ et soit C une constante positive. Soit, pour tout $k \geqq 1$, X_k un ensemble fini de q nombres réels tel que tout $t \in X_k$ soit un entier algébrique de $\mathcal{K}$ vérifiant les conditions $0 < t < \alpha^k$, $|\sigma_j(t)| \leqq C \alpha_j^k$ pour $2 \leqq j \leqq n$. Posons $E = X_1 + \ldots + X_k + \ldots$. Alors E est un ensemble d'unicité.*

La preuve du théorème IV est semblable à celle du théorème III.

2. Les nombres de Pisot et les fonctions presque-périodiques.

2.1. LE PROBLÈME DE L'UNICITÉ ET LES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES. — Soit $\tilde{\mathbf{R}}$ le compactifié de Bohr de $\mathbf{R}$ c'est-à-dire le groupe compact de tous les homomorphismes χ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{T}$. La topologie de $\tilde{\mathbf{R}}$ est celle de la convergence simple sur $\mathbf{R}$ des homomorphismes χ. Si au nombre réel u nous associons le caractère χ_u défini par $\chi_u(t) = \exp 2\pi i u t$, nous définissons une application de $\mathbf{R}$ dans $\tilde{\mathbf{R}}$, $u \to \chi_u$, dont on montre qu'elle est continue, injective et d'image dense. Désormais, par abus de langage, nous regarderons $\mathbf{R}$ comme une partie de $\tilde{\mathbf{R}}$. ([18], th. 1.8.2).

Il est bien connu que les fonctions presque-périodiques sur $\mathbf{R}$ sont alors les restrictions à $\mathbf{R}$ des fonctions continues sur $\tilde{\mathbf{R}}$.

2.2. Théorème I. — *Soient* E *un ensemble compact de nombres réels,* K *une partie compacte de* $\tilde{\mathbf{R}}$ *qui n'est pas tout* $\tilde{\mathbf{R}}$, $(t_k)_{k\geq 1}$ *une suite de nombres réels tendant vers l'infini et* $(s_k)_{k\geq 1}$ *une suite arbitraire de nombres réels. Si pour tout* $k\geq 1$, $s_k+t_k \mathrm{E}$ *est contenu dans* K, E *est un ensemble d'unicité.*

Ce résultat est un corollaire de la proposition 1.4 : puisque K n'est pas tout $\tilde{\mathbf{R}}$, il y a un entier n, n nombres réels $\omega_1, \ldots, \omega_n$, $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants, tels que, en appelant h l'homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{T}^n$ défini par $h(t)=(\exp 2\pi i\omega_1 t, \ldots, \exp 2\pi i\omega_n t)$ l'image R de K par h soit un compact de $\mathbf{T}^n$ différent de $\mathbf{T}^n$. Alors $h(t_k \mathrm{E})+h(s_k)\subset \mathrm{R}$ et l'on est ramené à la proposition 1.4.

2.3. Application au théorème de Salem-Zygmund.

Théorème II. — *Soient* θ *un nombre de Pisot supérieur à* 2 *et* E *l'ensemble de toutes les sommes* $\sum_{k\geq 1}\varepsilon_k\theta^{-k}$, $\varepsilon_k=0$ *ou* 1. *Alors* E *est un ensemble d'unicité.*

Appelons, en effet, Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k\geq 0}\varepsilon_k\theta^k$, $\varepsilon_k=0$ ou 1, $\bar{\Lambda}$ la fermeture de Λ dans $\tilde{\mathbf{R}}$ et $\Lambda'=\bar{\Lambda}\cap\mathbf{R}$. Nous montrerons (théorème III) que Λ' est dénombrable. Soit $\mathrm{K}=\bar{\Lambda}+\mathrm{E}$. On a de façon évidente $\theta^k \mathrm{E}\subset \mathrm{K}$ et le compact K pas tout $\tilde{\mathbf{R}}$ sinon $\mathrm{K}\cap\mathbf{R}=\Lambda'+\mathrm{E}$ serait tout $\mathbf{R}$. Or $\Lambda'+\mathrm{E}$ est un ensemble sans intérieur de nombres réels (théorème de Baire). On applique alors le théorème I avec $s_k=0$, $t_k=\theta^k$.

2.4. Le théorème fondamental (notations préparatoires). — Soit θ un entier algébrique de degré n. Nous désignerons par $\mathbf{Z}(\theta)$ l'ensemble des nombres réels t pouvant être écrits $t=p_0+p_1\theta+\ldots+p_{n-1}\theta^{n-1}$ où les p_j, $0\leq j\leq n-1$, sont des entiers relatifs.

Définition 2.4. — *Nous écrirons un nombre réel* t *sous la forme* $\sum_0^\infty\varepsilon_k\theta^k$, $\varepsilon_k=0$ *ou* 1 *si les deux conditions suivantes sont satisfaites* :

(1) $t\in\mathbf{Z}(\theta)$;

(2) *on peut trouver deux polynômes à coefficients entiers* P(X) *et* Q(X) *tels que la fraction rationnelle* P(X)/Q(X) *soit représentée par la série formelle* $\sum_{k\geq 0}\varepsilon_k \mathrm{X}^k$, $\varepsilon_k=0$ *ou* 1 *et que* $t=\mathrm{P}(\theta)/\mathrm{Q}(\theta)$.

Remarque. — Si θ est un nombre de Pisot et si $t = \sum_0^\infty \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, alors les conjugués t_j de t, $2 \leqq j \leqq n$, autres que t s'écrivent $\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_j^k$ où la série converge cette fois dans $\mathbf{C}$.

2.5. Énoncé du théorème fondamental.

Théorème III. — *Soient θ un nombre réel supérieur à 1 et Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqq 0} \varepsilon_k \theta^k$ où $\varepsilon_k = 0$ ou 1.*

(1) *Si θ n'est pas un nombre de Pisot, toute fonction presque-périodique nulle sur Λ est identiquement nulle,*

(2) *Si θ est un nombre de Pisot, soit Λ' l'ensemble de tous les nombres réels pouvant être écrits $\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, au sens de la définition 2.4. Toute fonction presque-périodique nulle sur Λ est nulle sur Λ' mais Λ' est le plus grand ensemble de nombres réels possédant cette propriété.*

Remarque. — Il se peut, comme nous le verrons que $\Lambda = \Lambda'$ c'est le cas si, par exemple θ est un entier ordinaire supérieur ou égal à 3.

2.6. Principe de la démonstration du théorème III. — Quelques notations sont encore nécessaires : soient $\overline{\Lambda}$ la fermeture de Λ dans $\tilde{\mathbf{R}}$, $(\mu_k)_{k \geqq 0}$ la suite des mesures portées par Λ et donnant la masse 2^{-k-1} à chacun des points $\sum_0^k \varepsilon_j \theta^j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1. Nous allons voir que dans tous les cas la suite des mesures μ_k tend dans la topologie $\sigma(\mathrm{M}(\tilde{\mathbf{R}}), \mathcal{C}(\mathbf{R}))$ vers une mesure μ. On aura nécessairement $\operatorname{Sup} \mu \subset \overline{\Lambda}$ et l'inclusion en sens inverse sera évidente compte tenu de μ et $\overline{\Lambda}$. Pour déterminer μ il suffit de calculer, pour tout nombre réel t, la limite de

$$\hat{\mu}_k(t) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp 2\pi i t \theta^j \right).$$

Pour énoncer le résultat nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.6. — *Soient θ un entier algébrique de degré n, $\theta_2, \ldots, \theta_n$ les conjugués de θ, σ_j, $1 \leqq j \leqq n$, les n $\mathbf{Q}$-isomorphismes du corps de θ dans $\mathbf{C}$, $\sigma_1 = \mathrm{Id}$, et $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres réels t pour lesquels on peut trouver $n-1$ nombres complexes $t_2, \ldots, t_n$ tels que, pour tout $k \geqq 0$, $t\theta^k + t_2\theta_2^k + \ldots + t_n\theta_n^k$ soit un entier relatif. Alors $\mathcal{A}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang n dont une base sera notée $\omega_1, \ldots, \omega_n$.*

2.7. Une version du théorème de Pisot. — La limite de $\hat{\mu}_k(t)$ est donnée par le résultat suivant :

Proposition 2.7. — *Si θ n'est pas un nombre de Pisot, pour tout nombre réel t non nul, $\hat{\mu}_k(t)$ tend vers zéro. Si θ est un nombre de Pisot, $\hat{\mu}_k(t)$ tend vers zéro sauf si, pour un entier k_0, $t\theta^{k_0}$ s'écrit $p_1\omega_1 + \ldots + p_n\omega_n$, $p_j \in \mathbf{Z}$, et alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{\mu}_k(t) = \prod_0^{k_0-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp 2\pi i t\theta^j\right)\prod_{k_0}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp - 2\pi i(t_2\theta_2^j + \ldots + t_n\theta_n^j)\right)$$
$$[t \in \mathbf{Q}(\theta),\ t_2 = \sigma_2(t),\ \ldots,\ t_n = \sigma_n(t)].$$

La preuve de 2.7 se trouve dans [2], th. I et II, p. 134.

2.8. θ n'est pas un nombre de Pisot. — Nous pouvons régler le (1) du théorème. Si θ n'est pas un nombre de Pisot, $\hat{\mu}_k(0) = 1$ tandis que pour tout t non nul $\hat{\mu}_k(t)$ tend vers zéro. Les mesures μ_k convergent dans la topologie $\sigma(M(\tilde{\mathbf{R}}), \mathcal{C}(\tilde{\mathbf{R}}))$ vers la mesure de Lebesgue de $\tilde{\mathbf{R}}$ et Λ est dense dans $\tilde{\mathbf{R}}$.

2.9. θ est un nombre de Pisot (description d'un « solénoïde » G). — Si θ est un nombre de Pisot, soient $\omega_1, \ldots, \omega_n$ comme dans la proposition, soient $\omega_{i,j} = \sigma_j(\omega_i)$, $1 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n$. Chacun des nombres $\omega_1\theta, \ldots, \omega_n\theta$ appartient évidemment à $\mathcal{A}$ (par la définition même de $\mathcal{A}$). On a donc $(\omega_1\theta, \ldots, \omega_n\theta) = M(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ où M est une matrice (n, n) à coefficients entiers; M définit, par passage au quotient par $\mathbf{Z}^n$, un endomorphisme, que nous noterons encore M, de $\mathbf{T}^n$. Soit H la réunion de la suite croissante des sous-groupes $\theta^{-k}\mathcal{A}$ de $\mathbf{R}$. Le groupe dual de H (H est un groupe discret) est une limite projective de $\mathbf{T}^n$; plus précisément ce dual G est le groupe compact de toutes les suites $Z_0, \ldots, Z_k, \ldots$ d'éléments de $\mathbf{T}^n$ telles que $Z_k = M(Z_{k+1})$. On peut définir un homomorphisme continu h de $\mathbf{R}$ dans G par

$$h(t) = (Z_0(t), \ldots, Z_k(t), \ldots), \qquad \text{où} \quad Z_k(t) = (\exp 2\pi i\theta^{-k}\omega_1 t, \ldots, \exp 2\pi i\theta^{-k}\omega_n t);$$

l'image de $\mathbf{R}$ par h est dense dans G. Soit $\tilde{h}$ le prolongement à $\tilde{\mathbf{R}}$ de h; $\tilde{h}$ est une surjection de $\tilde{\mathbf{R}}$ sur G.

2.10. θ est un nombre de Pisot. Description d'un compact remarquable K de G. — Le compact K de G est l'ensemble des points de G de la forme $\varepsilon_0\xi_0 + \varepsilon_1\xi_1 + \ldots + \varepsilon_k\xi_k + \ldots$, où $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et où les ξ_k, $k \geq 0$, sont définis de la façon suivante :

$$\xi_k = (\xi_{k,0}, \ldots, \xi_{k,j}, \ldots) \qquad \text{où} \quad \xi_{k,j} \in \mathbf{T}^n$$

et

$$\xi_{k,j} = (\exp 2\pi i \varphi^1_{k,j}, \ldots, \exp 2\pi i \varphi^n_{k,j}) \qquad \text{avec} \quad \varphi^h_{k,j} = \theta^{k-j}\omega_h \quad \text{si } 0 \leqq k \leqq j$$

et

$$\varphi^h_{k,j} = -\omega_{h,2}\theta_2^{k-j} - \ldots - \omega_{h,n}\theta_n^{k-j} \quad \text{si } k > j \qquad (1 \leqq h \leqq n).$$

Appelons Ω l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, dP la mesure produit de celle donnant les masses $\frac{1}{2}$ à 0 et à 1 et $d\rho$ la mesure portée par K image de dP par l'application qui envoie la suite $(\varepsilon_k)_{k \geqq 0}$ en $\sum_{k \geqq 0} \varepsilon_k \xi_k$.

2.11. Image réciproque d'une mesure par une application continue.

Définition. — *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes abéliens compacts,* T *un homomorphisme continu et surjectif de* G_1 *sur* G_2, N *le noyau de* T *et* $d\rho_2$ *une mesure portée par* G_2. *La mesure* $d\rho_1$ *sur* G_1, *image réciproque de* ρ_2 *par* T *est définie par*

$$\int_{G_1} f(x_1)\, d\rho_1 = \int_{G_2} d\rho_2 \int_{N} f(x+y)\, dy$$

$[f \in \mathcal{C}(G_1)$, dy est la mesure de Haar de N normalisée et $x \to \int_N f(x+y)\, dy$ est une fonction continue de x, constante sur les classes modulo N; elle définit de façon canonique une fonction continue sur $G_2 \simeq G_1/N$.$]$

Soient Γ_1 et Γ_2 les groupes duaux de G_1 et G_2 et $T^\star : \Gamma_2 \to \Gamma_1$ l'homomorphisme dual de T; $T^\star$ est injectif. Les coefficients de Fourier de $d\rho_1$ sont $\hat{\rho}_1(\gamma_1) = 0$ si γ_1 n'est pas de la forme $T^\star(\gamma_2)$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$, et $\hat{\rho}_1(\gamma_1) = \hat{\rho}_2(\gamma_2)$ si $\gamma_1 = T^\star(\gamma_2)$.

2.12. Caractérisation de $\overline{\Lambda}$ et d'une mesure portée par $\overline{\Lambda}$.

Proposition 2.11. — *La fermeture* $\overline{\Lambda}$ *de* Λ *dans* $\tilde{\mathbf{R}}$ *est l'image réciproque par* $\tilde{h}$ *du compact* K *de* G *et la mesure* μ *est l'image réciproque par* $\tilde{h}$ *de la mesure* ρ.

Nous allons d'abord prouver le second point. Il suffit pour cela de montrer que si un nombre réel t ne s'écrit pour aucune valeur de k sous la forme $t = \theta^{-k}(\omega_1 p_1 + \ldots + \omega_n p_n)$ où $p_j \in \mathbf{Z}$, $1 \leqq j \leqq n$, alors $\hat{\mu}_k(t) = 0$. Si au contraire $t = \theta^{-k}(\omega_1 p_1 + \ldots + \omega_n p_n)$, il faut montrer que

$$\lim_{k \to +\infty} \hat{\mu}_k(t) = \hat{\rho}(\theta^{-k}(\omega_1 p_1 + \ldots + \omega_n p_n))$$

$$\text{si } \theta^{-k}(\omega_1 p_1 + \ldots + \omega_n p_n) \in H, \text{ groupe dual de } G.$$

Mais ces deux assertions sont des conséquences immédiates de la proposition 2.7. et de la définition de la mesure ρ.

Il en résulte que $\overline{\Lambda}$ contient l'image réciproque de K par $\tilde{h}$. Mais $h(\Lambda)$ est contenu dans K comme on le vérifie aussitôt et donc $\tilde{h}(\overline{\Lambda})$ est aussi contenu dans K. Ainsi $\overline{\Lambda}$ est $(\tilde{h})^{-1}(\mathrm{K})$.

2.13. Caractérisation de $\Lambda'' = \overline{\Lambda} \cap \mathbf{R}$. Il reste à déterminer $\overline{\Lambda} \cap \mathbf{R}$; c'est l'ensemble des nombres réels t tels que $h(t) \in \mathrm{K}$. Soit, pour une suite $(\varepsilon_k)_{k \geqq 0}$ de o et de 1,

$$(2.13.1)\quad \left\{\begin{array}{l} \omega_j t + \omega_{j,2} \sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_2^k + \ldots + \omega_{j,n} \sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_n^k \equiv 0 \pmod 1 \qquad (1 \leqq j \leqq n), \\ \theta^{-1} \omega_j t + \varepsilon_0 \omega_j \theta^{-1} + \omega_{j,2} \sum_1^\infty \varepsilon_k \theta_2^{k-1} + \ldots + \omega_{j,n} \sum_1^\infty \varepsilon_k \theta_n^{k-1} \equiv 0 \pmod 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta^{-p} \omega_j t + \varepsilon_0 \omega_j \theta^{-p} + \varepsilon_1 \omega_j \theta^{-p+1} + \ldots \\ \qquad + \varepsilon_{p-1} \omega_j \theta^{-1} + \omega_{j,2} \sum_p^\infty \varepsilon_k \theta_2^{k-p} + \ldots + \omega_{j,n} \sum_p^\infty \varepsilon_p \theta_n^{k-p} \equiv 0 \pmod 1, \end{array}\right.$$

etc. (chaque ligne est un groupe de n congruences).

Les n premières congruences entraînent, par définition des $\omega_{i,j}$, que $t \in \mathbf{Z}(\theta)$ (t s'écrit $p_0 + p_1 \theta + \ldots + p_{n-1} \theta^{n-1}$) et que $\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_j^k = \sigma_j(t)$; les n suivantes que $\theta^{-1} t - \varepsilon_0 \theta^{-1} = t_1 \in \mathbf{Z}(\theta)$ et que $\sum_1^\infty \varepsilon_k \theta_2^{k-1} = \sigma_j(t_1)$, $2 \leqq j \leqq n$, etc. En d'autres termes, pour tout entier p, t s'écrit

$$t = \sum_0^p \varepsilon_k \theta^k + \theta^{p+1} t_{p+1} \quad \text{où } t_{p+1} \in \mathbf{Z}(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sigma_j(t_{p+1}) = \sum_{p+1}^\infty \varepsilon_k \theta_j^{k-p-1}.$$

Soient θ un nombre de Pisot, Λ'' l'ensemble des nombres réels t pour lesquels on peut trouver une suite $(\varepsilon_k)_{k \geqq 0}$ de o ou de 1 et une constante A telles que, pour tout entier $p \geqq 0$, les trois propriétés suivantes soient satisfaites :

(1) $t = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta + \ldots + \varepsilon_p \theta^p + \theta^{p+1} t_{p+1}$;

(2) $t_{p+1} \in \mathbf{Z}(\theta)$;

(3) $|\sigma_j(t_{p+1})| \leqq \mathrm{A}$ pour $2 \leqq j \leqq n$ et tout $p \geqq 0$.

Le théorème III découle alors du lemme suivant.

Lemme 1. — *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes, pour un nombre réel* t, (*a*) $t \in \Lambda''$;

(*b*) *il existe une suite* $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ *de* o *et de* 1 (*peut être différente de celle qui a défini* t *dans* Λ'') *telle que* $t = \sum_0^\infty \varepsilon_k \theta^k$.

Pour montrer ce lemme, remarquons que si $t \in \Lambda''$, pour $2 \leq j \leq n$,

$$\sigma_j(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta_j + \ldots + \varepsilon_p \theta_j^p + \theta_j^{p+1} \sigma_j(t_{p+1}).$$

Grâce à (3) on peut passer à la limite pour trouver $\sigma_j(t) = \sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_j^k$ et $|\sigma_j(t)| \leq \frac{1}{1 - |\theta_j|}$ pour $2 \leq j \leq n$ et tout élément t de Λ''.

D'autre part, pour tout $p \geq 0$, t_{p+1} appartient lui-même à Λ'' comme on le vérifie aussitôt en écrivant une décomposition (1) relative à un indice $q > p$. Nous allons définir pour les éléments de Λ'' une décomposition (1) où quitte à changer les ε_k, t_{p+1} ne dépende que de la valeur de t_p. Tout élément t de Λ'' peut être écrit sous l'une des deux formes $t = \theta t_1$ où $t_1 \in \Lambda''$ ou $t = 1 + \theta t_1$ avec $t_1 \in \Lambda''$. Appelons Λ_0'' l'ensemble des éléments de Λ'' que l'on ne peut écrire que sous la première forme et Λ_1'' le reste de Λ''. On écrit donc en prenant $\varepsilon_0 = 1$ chaque fois que c'est possible, $t = \varepsilon_0 + \theta t_1$ où ε_0 et t_1 ne dépendent que de la position de t dans Λ''. On peut recommencer cette opération sur t_1 et l'on obtient une décomposition (1) où chaque $p \geq 0$, t_p appartient à Λ'' et où t_{p+1} ne dépend que de la valeur de t_p.

Terminons alors la preuve du lemme. Les propriétés (2) et (3) de la suite des t_p montrent que t_p appartient à un ensemble fini F d'entiers algébriques et puisque t_{p+1} ne dépend que de la position de t_p dans F, la suite des t_p, comme celle des ε_p, $p \geq 0$, est périodique à partir d'un certain moment. Il en résulte que t appartient à Λ'.

3. Un ensemble remarquable de nombres de Pisot.

Nous allons définir une partie $\mathfrak{S}$ de l'ensemble S des nombres de Pisot; θ appartient à $\mathfrak{S}$ si et seulement si Λ est l'ensemble des zéros d'une fonction presque-périodique.

3.1. Soient θ un nombre réel supérieur à 2, Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, E l'ensemble parfait, à rapport de dissection θ^{-1}, composé de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, et si θ est un entier algébrique de degré n, $\mathbf{Z}(\theta)$ l'anneau composé de tous les nombres réels $p_0 + p_1 \theta + \ldots + p_{n-1} \theta^{n-1}$, $p_j \in \mathbf{Z}$, $0 \leq j \leq n - 1$.

Il est très curieux que le rôle joué par Λ vis-à-vis des fonctions presque-périodiques ait un lien étroit avec la nature arithmétique des éléments de E. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème I. — *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Λ *est exactement l'ensemble des zéros d'une fonction presque-périodique;*

(2) θ *est un nombre de Pisot supérieur à* 2 *et, si* θ *n'est pas une unité,* 0 *est le seul élément commun à* E *et à* $\mathbf{Z}(\theta)$; *si* θ *est une unité, les sommes finies* $\sum_{k\geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ *ou* 1, *sont les seuls éléments communs à* E *et à* $\mathbf{Z}(\theta)$.

(3) *pour aucune valeur de l'entier* p, $p \geq 1$ *et pour aucune suite* $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ *de* 0 *et de* 1 *(sauf pour la suite ne comportant que des zéros),* $\varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \ldots + \varepsilon_{p-1}\theta^{p-1}$ *n'est divisible par* $1 - \theta^p$ *dans l'anneau* $\mathbf{Z}(\theta)$.

3.2. Nous allons montrer pourquoi les nombres de Pisot θ de l'intervalle $]1, 2]$ ne permettent pas que Λ soit l'ensemble des zéros d'une fonction presque-périodique f; dans ce cas il existe un nombre réel T positif tel que tout intervalle $[t, t + T]$, $t > 0$ rencontre Λ. Soient $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et τ une ε-presque période de f, $\tau \geq T + 1$. Dans l'intervalle $[-T - 1, -1]$ il y a au moins un nombre réel t_k tel que $t_k + \tau \in \Lambda$. On a donc $|f(t_k)| \leq \frac{1}{k}$. Soit $t \in [-T - 1, -1]$ un point adhérent à la suite des t_k. On a $f(t) = 0$ et t n'appartient pas à Λ.

3.3. Démontrons maintenant le théorème I. Pour tout ensemble X de nombres réels, adoptons les deux notations suivantes : $\overline{X}$ est la fermeture de X dans le compactifié de Bohr de $\mathbf{R}$ et $X' = \overline{X} \cap \mathbf{R}$. Alors Λ' est l'ensemble de tous les nombres λ de $\mathbf{Z}(\theta)$ que l'on peut écrire, pour un entier $p \geq 1$, un entier $q \geq 1$, une suite $(\alpha_j)_{0 \leq j \leq p-1}$ de 0 et de 1 et une suite $(\varepsilon_j)_{0 \leq j \leq q-1}$ de 0 ou 1 sous la forme

$$\lambda = \alpha_0 + \ldots + \alpha_{q-1}\theta^{q-1} + \theta^q(\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{p-1}\theta^{p-1})/1 - \theta^p. \tag{1}$$

Il est tentant d'écrire que si $\lambda \in \Lambda'$ et si $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ dans l'écriture (1) ne sont pas tous nuls, alors λ n'appartient pas à Λ. En fait, ce n'est pas vrai car l'écriture (1) n'est pas nécessairement unique. On a cependant.

Lemme 1. — *Soit* θ *un nombre de Pisot. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(1) $\Lambda' = \Lambda$;

(2) *le seul élément commun à* Λ' *et* $-$ E *est* 0;

(3) *pour aucune valeur de l'entier* $p \geqq 1$ *et aucune suite* (ε_j) $0 \leqq j \leqq p-1$ *de* 0 *ou* 1 (*sauf la suite nulle*), $\varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta + \ldots + \varepsilon_{p-1}\theta^{p-1}$ *n'est divisible, dans l'anneau* $\mathbf{Z}(\theta)$, *par* $1-\theta^p$.

Montrons d'abord que $(3) \Rightarrow (1)$; en effet si, dans $\mathbf{Z}(\theta)$, $\theta^q(\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{p-1}\theta^{p-1})$ est divisible par $1-\theta^p$ il en est de même de $\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{p-1}\theta^{p-1}$. D'autre part $(1) \Rightarrow (2)$ car le seul élément commun à Λ et $-\mathrm{E}$ est 0. Enfin la négation de (3) entraîne celle de (2). Soit, en effet, $\lambda = (\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{p-1}\theta^{p-1})/1-\theta^p$ un élément de $\mathbf{Z}(\theta)$. On peut écrire, pour tout entier $m \geqq 1$,

$$\lambda = (\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{p-1}\theta^{p-1})(1 + \theta^p + \ldots + \theta^{p(m-1)}) + \lambda\theta^{mp}.$$

Tirant λ du second membre, on a $\lambda = \theta^{-mp}\lambda - s_m$ où $s_m \in \mathrm{E}$ et en passant à la limite on obtient que $\lambda \in -\mathrm{E}$.

COROLLAIRE. — *Si* $(\theta - 1)(1 - |\theta_2|)\ldots(1 - |\theta_n|) > 1$, $\theta \in \mathcal{S}$.

En effet, si $\lambda \in \Lambda'$, pour $2 \leqq j \leqq n$, $\sigma_j(\lambda) = \sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_j^k$ et donc $|\sigma_j(\lambda)| \leqq \frac{1}{1-|\theta_j|}$. Or $\prod_1^n \sigma_j(\lambda) \in \mathbf{Z}$ et donc $|\lambda| \geqq \prod_2^n (1 - |\theta_j|)$. Mais $\mathrm{E} \subset \left[0, \frac{1}{\theta - 1}\right]$. La condition du corollaire assure donc que $-\mathrm{E} \cap \Lambda' = \{0\}$.

3.4. Le lemme 1 prouve l'équivalence entre les assertions (1) et (3) du théorème II; pour montrer celle de (1) et de (2), nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit* θ *un nombre de Pisot supérieur à* 1. *Tout élément* λ *de* E *et de* $\mathbf{Q}(\theta)$ *peut s'écrire* $\sum_{k \geqq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$ *où* ε_k *vaut* 0 *ou* 1 *et où la suite de* ε_k *est à partir d'un certain moment périodique.*

En effet, pour tout élément t de E, posons $t_p = \theta^p \sum_{k \geqq p+1} \varepsilon_k \theta^{-k}$. On a $t_{p+1} = \theta t_p - \varepsilon_{p+1}$ et il est possible de définir une écriture canonique des éléments de E telle que t_{p+1} et ε_{p+1} ne dépendent que de la position de t_p dans E.

Soient λ un élément de E appartenant à $\mathbf{Q}(\theta)$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et b des entiers relatifs tels que $s\lambda = a_0 + \ldots + a_{n-1}\theta^{n-1}$; développons λ sous la forme canonique $\sum_{k \geqq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et posons $\lambda_p = s\theta^p \sum_{k \geqq p+1} \varepsilon_k \theta^{-k}$. On a également

$$\lambda_p = \theta^p(a_0 + \ldots + a_{n-1}\theta^{n-1}) - s(\varepsilon_1\theta^{p-1} + \ldots + \varepsilon_p);$$

λ_p est donc un élément de $\mathbf{Z}(\theta)$ et un calcul élémentaire montre que l'on a, pour $2 \leq j \leq n$,

$$|\sigma_j(\lambda_p)| \leq |a_0| + \ldots + |a_{n-1}| + \frac{|s|}{1 - |\sigma_j(\theta)|}.$$

Enfin $|\lambda_p| \leq \frac{|s|}{\theta - 1}$; λ_p appartient donc à un ensemble fini F de nombres réels. Mais $\lambda_{p+1} = \theta\lambda_p - s\varepsilon_{p+1}$ et λ_{p+1} ne dépend que de λ_p. La suite des λ_p, comme celle des ε_p, est donc périodique à partir d'un certain moment.

Le lemme 2 étant prouvé, soit λ un élément commun à E et à $\mathbf{Z}(\theta)$; il peut être écrit $\lambda = \sum_{1}^{q-1} \alpha_k \theta^{-k} + \theta^{-q}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1\theta^{-1} + \ldots + \varepsilon_{p-1}\theta^{-p+1})/1 - \theta^{-p}$ avec α_k, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Posons $t = (\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{p-1}\theta^{-p+1})/1 - \theta^{-p}$; en calculant t en fonction de λ, on voit que t appartient à $\mathbf{Z}(\theta)$ et donc que t appartient à Λ'. On applique alors le lemme 1.

4. Les nombres de Pisot et les compacts associés.

4.1. Soient Λ un ensemble de nombres réels et I un intervalle compact de nombres réels. Nous dirons que I est associé à Λ (*voir* [4]) s'il existe une constante C telle que, pour toute somme trigonométrique finie :

$$P(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t, \qquad a_\lambda \in \mathbf{C},$$

on a

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |P(t)| \leq C \sup_{t \in I} |P(t)|.$$

Nous dirons que Λ est un ensemble cohérent de fréquences pour exprimer qu'il existe un intervalle compact I *associé à* Λ. Tout translaté de I est alors encore associé à Λ.

Si Λ est un ensemble cohérent de fréquences, il existe un nombre positif d tel que les points de Λ soient distants d'au moins d les uns des autres. La nature arithmétique des ensembles cohérents de fréquences est très particulière comme le montre le théorème ci-dessous.

Théorème I. — *Soient θ un nombre réel supérieur à* 1 *et Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Λ est un ensemble cohérent de fréquences*;

(2) *θ est un nombre de Pisot.*

4.2. Montrons d'abord que si θ n'est pas un nombre de Pisot, Λ n'est pas un ensemble cohérent de fréquences. Appelons, pour tout entier k, $P_k(t)$ la somme trigonométrique $\exp \pi i t(1+\theta+\ldots+\theta^k) \cos \pi t \ldots \cos \pi\theta^k t$; $P_k(t)$ est bien de la forme $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i\lambda t$. Si θ n'est pas un nombre de Pisot, pour tout t non nul,

$$|P_k(t)| = |\cos \pi t| \ldots |\cos \pi\theta^k t|$$

tend en décroissant vers zéro ([5], th. I, p. 64). On déduit du théorème de Dini que, sur tout compact K ne contenant pas o, $P_k(t)$ converge uniformément vers zéro. On a cependant $P_k(0) = 1$. Cela interdit que Λ soit un ensemble cohérent de fréquences car on peut translater un intervalle I associé à Λ pour qu'il devienne un compact K ne contenant pas o.

4.3. Pour montrer la réciproque, nous avons besoin du lemme diophantien suivant :

Lemme 1. — *Soient* $L_1, L_2, \ldots, L_n$ *n formes linéaires* **R**-*indépendantes sur* $\mathbf{R}^n$ *telles que pour toute forme linéaire* L *non nulle à coefficients entiers,* $L_2, \ldots, L_n$ *et* L *soient* **R**-*indépendantes. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *on peut trouver un* $T > 0$ *tel que, pour tout point* $(x_2, \ldots, x_n)$ *de* $\mathbf{R}^{n-1}$ *les inégalités diophantiennes ci-dessous soient simultanément résolubles*

$$\begin{aligned}
&|L_1(p_1, \ldots, p_n)| \leq T,\\
&|L_2(p_1, \ldots, p_n) - x_2| \leq \varepsilon,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&|L_n(p_1, \ldots, p_n) - x_n| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

La démonstration de ce résultat est laissée au lecteur.

Définition. — *Nous dirons qu'une partie* A *de* $\mathbf{R}^p$, $p \geq 1$, *est* ε-*dense pour exprimer que toute boule de* $\mathbf{R}^p$ *de rayon* ε *rencontre* A (ε *est un nombre réel positif et cette définition dépend de la distance choisie sur* $\mathbf{R}^p$).

Nous pouvons énoncer la conclusion du lemme sous la forme suivante :

pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe un* $T > 0$ *tel que l'ensemble* A_T *des points de* $\mathbf{R}^{n-1}$ *de la forme* $(x_2, \ldots, x_n)$ *où* $x_j = L_j(p_1, \ldots, p_n)$, $p_k \in \mathbf{Z}$, $|L_1(p_1, \ldots, p_n)| \leq T$ $(2 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n)$ *soit* ε-*dense.*

4.4. Si θ est un nombre de Pisot, appelons H l'homomorphisme de **R** dans $\mathbf{R}^n$ défini par $H(t) = (t, \theta t, \ldots, \theta^{n-1} t)$ (n est le degré de θ). Soient $\theta_2, \ldots, \theta_n$ les conjugués de θ, U le compact de $\mathbf{R}^n$ composé de tous les points $(x_1, \ldots, x_n)$ où

$$x_1 = u_2 + \ldots + u_n, \qquad \ldots, \qquad x_n = u_2\theta_2^{n-1} + \ldots + u_n\theta_n^{n-1}$$

et où

$$u_2 = -\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_2^k, \quad \ldots, \quad u_n = -\sum_0^\infty \varepsilon_k \theta_n^k, \quad \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1,$$

les u_j relatifs à deux θ_j conjugués dans $\mathbf{C}$ sont eux-mêmes conjugués et, pour cette raison les points de U dépendent linéairement de $n-1$ paramètres réels et U est contenu dans un hyperplan L de $\mathbf{R}^{n-1}$. D'autre part U est compact. Soit p la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{T}^n$ défini par

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (\exp 2\pi i x_1, \ldots, \exp 2\pi i x_n).$$

Soit $\mathrm{N} = p(\mathrm{U})$.

L'inclusion $h(\Lambda) \subset \mathrm{N}$ est une conséquence immédiate des congruences

$$\theta^k + \theta_2^k + \ldots + \theta_n^k \equiv 0 \pmod 1, \qquad k \geq 0.$$

Soit $\mathrm{P}(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$ une somme trigonométrique, $\Gamma \subset \mathbf{R}$ le sous-groupe dense $\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z} + \ldots + \theta^{n-1}\mathbf{Z}$ et I un intervalle compact, non réduit à un point qui n'est pas encore précisé. On a évidemment

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} |\mathrm{P}(t)| = \sup_{t\in\Gamma} |\mathrm{P}(t)| \quad \text{et} \quad \sup_{t\in\mathrm{I}} |\mathrm{P}(t)| = \sup_{t\in\mathrm{I}\cap\Gamma} |\mathrm{P}(t)|.$$

On supposera dorénavant que

$$t = p_1 + p_2\theta + \ldots + p_n\theta^{n-1} \quad \text{où } p_j \in \mathbf{Z}, \qquad 0 \leq j \leq n-1.$$

Mais alors

$$\exp 2\pi i \lambda t = z_1(\lambda)^{p_1} z_2(\lambda)^{p_2} \ldots z_n(\lambda)^{p_n} = \exp 2\pi i \sum_1^n p_j x_j(\lambda),$$

où $(z_1, \ldots, z_n) = h(\lambda) \in \mathrm{N}$ et $(x_1(\lambda), \ldots, x_n(\lambda))$ est un point $x(\lambda)$ de $\mathbf{R}^n$ tel que

$$p(x(\lambda)) = h(\lambda) \qquad [z_1(\lambda) = \exp 2\pi i \lambda, \ \ldots, \ z_n(\lambda) = \exp 2\pi i \theta^{n-1}\lambda].$$

Définissons, sur $\mathbf{R}^n$, un polynôme trigonométrique, $\mathrm{Q}(y_1, \ldots, y_n)$ par

$$\mathrm{Q}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i (y_1 x_1(\lambda) + \ldots + y_n x_n(\lambda)) \qquad \text{où} \quad (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Soit B(I) la partie de $\mathbf{Z}^n$ définie par la condition $p_1 + p_2\theta + \ldots + p_n\theta^{n-1} \in \mathrm{I}$ On a alors

$$\sup_{t\in\mathrm{I}} |\mathrm{P}(t)| = \sup_{(p_1, \ldots, p_n)\in \mathrm{B(I)}} |\mathrm{Q}(p_1, \ldots, p_n)|$$

et

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} |\mathrm{P}(t)| = \sup_{(p_1, \ldots, p_n)\in \mathbf{Z}^n} |\mathrm{Q}(p_1, \ldots, p_n)|.$$

Écrivons l'équation de l'hyperplan L contenant U sous la forme $\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n = 0$. Un calcul immédiat montre que ω_n est différent de zéro. On a alors

$$Q(y_1+\omega_1 t, \ldots, y_n+\omega_n t) = Q(y_1, \ldots, y_n) \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R} \text{ et tout } (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$$

parce que les fréquences de Q appartiennent à U.

Cherchons I sous la forme $[-T, T]$. Soit $b(T)$ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^{n-1}$ de la forme $v = (v_1, \ldots, v_{n-1})$ où $v_j = p_j - \frac{\omega_j}{\omega_n} p_n$, $1 \leqq j \leqq n-1$ et où $|p_1 + p_2\theta + \ldots + p_n\theta^{n-1}| \leqq T$. Soit

$$R(v_1, \ldots, v_{n-1}) = Q(v_1, \ldots, v_{n-1}, 0).$$

On a donc

$$\sup_{(p_1, \ldots, p_n) \in B(T)} |Q(p_1, \ldots, p_n)| = \sup_{v \in b(T)} |R(v)|, \qquad \sup_{\mathbf{Z}^n} |Q(p_1, \ldots, p_n)| = \sup_{\mathbf{R}^{n-1}} |R(v)|.$$

La fonction $R(v)$ est une somme trigonométrique finie

$$\sum c(x_1, \ldots, x_n) \exp 2\pi i (v_1 x_1 + \ldots + v_{n-1} x_{n-1})$$

dont les fréquences $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ appartiennent au compact K de $\mathbf{R}^{n-1}$ qui est la projection de U sur $x_n = 0$. On utilise alors le lemme suivant :

Lemme. — *Pour tout entier* $p \geqq 1$ *et tout compact* K *de* $\mathbf{R}^p$ *il existe un* $\varepsilon > 0$ *et une constante* C *tels que pour toute partie* A ε*-dense de* $\mathbf{R}^p$ *et toute somme trigonométrique* $R(v)$ *définie sur* $\mathbf{R}^p$ *et dont les fréquences appartiennent à* K *on ait*

$$\sup_{v \in \mathbf{R}^p} |R(v)| \leqq C \sup_{v \in A} |R(v)|$$

(*voir* par exemple [5], lemme 7, p. 146).

Grâce à ce lemme appliqué à $A = b(I)$, I est un intervalle associé à Λ dès que $b(I)$ est ε-dense. Compte tenu de la définition de $b(I)$ cette dernière condition est satisfaite dès que la longueur $2T$ de I est assez grande (lemme 1).

Par la même méthode on prouve le résultat suivant :

Théorème II. — *Soient* θ *un nombre de Pisot,* Λ *l'ensemble de toutes les sommes finies* $\sum_{k \geqq 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ *ou* 1. *Pour tout* $\eta > 0$ *il existe un intervalle compact* I *de nombres réels tels que, pour toute somme trigonométrique finie,*

$$P(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$$

on ait

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |P(t)| \leqq (1+\eta) \sup_{t \in I} |P(t)|.$$

5. La synthèse des fonctions bornées.

5.1. Définitions et énoncés des problèmes. — A un ensemble compact E de nombres réels nous associons deux sous-espaces fermés de $L^\infty(\mathbf{R})$, invariants par translation, que nous noterons $\overline{L}(E)$ et $\underline{L}(E)$: $\overline{L}(E)$ est l'ensemble de tous les éléments $g(t)$ de $L^\infty(\mathbf{R})$ tels que, pour tout élément $f(t)$ de $L^1(\mathbf{R})$ l'implication suivante ait lieu

$$\hat{f} = 0 \text{ sur } E \Rightarrow \int_{\mathbf{R}} g(t) f(-t)\, dt = 0$$

et $\overline{L}(E)$ est défini de façon tout à fait semblable à l'exception que $\hat{f} = 0$ sur E est remplacé par $\hat{f} = 0$ au voisinage de E.

Le problème de la synthèse spectrale est de savoir si $\overline{L}(E) = \underline{L}(E)$. On montre que si $L^\infty(\mathbf{R})$ est muni de la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ de la convergence simple sur $L^1(\mathbf{R})$, dire que $g \in \underline{L}(E)$ revient à dire que g est adhérent, dans $\sigma(L^\infty, L^1)$ à l'ensemble PT(E) des sommes trigonométriques $\sum_{\lambda \in E} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$. Se peut-il que tout élément g de $\underline{L}(E)$ soit, en fait, limite dans $\sigma(L^\infty, L^1)$, d'une suite $g_k(t)$ de sommes trigonométriques à fréquences dans E ? Nous allons voir que les nombres de Pisot et de Salem interviennent de façon remarquable dans ces deux problèmes quand on se restreint, pour E, à la classe des ensembles construits à l'aide d'un rapport de dissection constant.

5.2. Théorème I. — *Soit θ un entier algébrique supérieur à 2 dont les conjugués (autres que θ), $\theta_2, \ldots, \theta_n$ ont un module inférieur ou égal à 1. Soit* E *l'ensemble de toutes les sommes* $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ (E *est un ensemble à rapport de dissection* θ^{-1}). *Soit* Λ [1] *l'ensemble de toutes les sommes finies* $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$. (On a $\Lambda \subset E$.) *Pour toute fonction* $f(t)$ *continue sur* E *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\left| \int_E f(t)\, d\mu(t) \right| \leq A \, \| \hat{\mu} \|_\infty$ *pour une constante* A *et toute mesure* μ *à support fini contenu dans* Λ ;

(2) *il existe une mesure de Radon sur* $\mathbf{R}$, *bornée, à valeurs complexes,* ν, *de norme au plus* A *dont la transformée de Fourier est égale à* $f(t)$ *sur* E ;

---

(1) Attention ! Λ n'a pas le même sens qu'aux chapitres 2 et 3.

(3) *pour tout* $\varepsilon > 0$ *on peut trouver un élément* g *de* $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ *de norme au plus* $\mathrm{A} + \varepsilon$ *dont la transformée de Fourier est égale à* $f(t)$ *sur* E.

Le nombre réel θ est donc un nombre de Pisot ou de Salem. Avant de prouver le théorème I, indiquons quelques autres résultats frappants; leur énoncé nécessite quelques définitions supplémentaires.

5.3. Soit $\mathrm{A}(\mathbf{R})$ l'algèbre de Banach de toutes les transformées de Fourier des éléments f de $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, $\mathrm{I}(\mathrm{E})$ l'ensemble des éléments de $\mathrm{A}(\mathbf{R})$ nuls sur E et $\mathrm{A}(\mathrm{E})$ l'algèbre quotient $\mathrm{A}(\mathbf{R})/\mathrm{I}(\mathrm{E})$. L'algèbre $\mathrm{A}(\mathrm{E})$ est semi-simple, son spectre est E et $\mathrm{A}(\mathrm{E})$ s'identifie donc à une sous-algèbre de $\mathrm{C}(\mathrm{E})$ [$\mathrm{C}(\mathrm{E})$ est l'algèbre de toutes les fonctions continues sur E à valeurs complexes]. Soit $\mathrm{N}(\mathrm{E})$ [resp. $\mathrm{PM}(\mathrm{E})$] l'ensemble de toutes les distributions S de support contenu dans E dont la transformée de Fourier appartient à $\underline{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ [resp. $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})$], $\| \mathrm{S} \|_{(\mathrm{N\,E})} = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |\hat{\mathrm{S}}(t)|$ et de même pour $\mathrm{PM}(\mathrm{E})$. Le problème de la synthèse spectrale pour E est de savoir si $\mathrm{N}(\mathrm{E}) = \mathrm{PM}(\mathrm{E})$. Les espaces $\mathrm{N}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{A}(\mathrm{E})$ peuvent être mis en dualité par

$$\langle \mathrm{S}, \hat{f} \rangle = \langle \hat{\mathrm{S}}, f \rangle = \int_{\mathbf{R}} \hat{\mathrm{S}}(t) f(t)\, dt$$

[f est un élément de $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier, restreinte à E, définit un élément de $\mathrm{A}(\mathrm{E})$]. L'espace de Banach $\mathrm{N}(\mathrm{E})$ est alors le dual de $\mathrm{A}(\mathrm{E})$. On a, avec ces notations,

Théorème II. — *Soit* θ *un entier algébrique dont tous les conjugués ont un module inférieur ou égal à* 1. *Soient* E *l'ensemble de toutes les sommes* $\sum\limits_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ *ou* 1 *et* Λ *l'ensemble de toutes les sommes finies* $\sum\limits_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ *ou* 1. *Soit* B *l'ensemble de toutes les mesures* μ *à valeurs complexes, dont le support est une partie finie de* Λ *et telles que* $\| \hat{\mu} \|_\infty \leq 1$. *Alors pour tout élément* f *de* $\mathrm{A}(\mathrm{E})$ *on a*

$$\| f \|_{\mathrm{A}(\mathrm{E})} = \sup \left\{ \int_{\mathrm{E}} f\, d\mu;\ \mu \in \mathrm{B} \right\}.$$

Corollaire 1. — *Si le compact* E *est de la forme décrite par le théorème et si* $g(t)$ *est un élément de* $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})$ *adhérent pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ *à l'ensemble des sommes trigonométriques* $\mathrm{P}(t) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{E}} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$, *on peut trouver en fait une suite* $g_k(t)$ *de sommes trigonométriques dont les fréquences* *appartiennent à* Λ ($\Lambda \subset E$) *vérifiant*

(a) $\sup_{t \in \mathbf{R}} | g_k(t) | \leq \sup_{t \in \mathbf{R}} \operatorname{ess} | g(t) |$;

(b) $g_k \to g_k$ *uniformément sur tout compact de* $\mathbf{R}$.

[Cependant on ne sait pas si E est un ensemble de synthèse (*voir* chap. 6).]

COROLLAIRE 2. — *Soient* ξ *un nombre quelconque pris dans l'intervalle* $]0, \frac{1}{2}[$ *et* E *un ensemble parfait, du type Cantor, construit à l'aide du rapport de dissection* ξ. *Pour toute fonction* $f(t)$, *à valeurs complexes, continue sur* E *les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\left| \int_E f(t)\, d\mu(t) \right| \leq A \sup_{t \in \mathbf{R}} | \hat{\mu}(t) |$ *pour toute mesure* μ *portée par* E;

(2) *il existe une mesure* ν, *à valeurs complexes, sur* $\mathbf{R}$, *de masse totale ne dépassant pas* A *telle que* $f(t) = \hat{\nu}(t)$ *pour tout* $t \in E$.

Le lien entre le théorème II et le corollaire 1 est clairement indiqué par le lemme de Banach ci-dessous.

LEMME. — *Soient* X *un espace de Banach,* $X^\star$ *son dual et* Y *un sous-espace vectoriel de* $X^\star$. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *il existe une constante* C *telle que pour tout élément* x *de* X *on ait*

$$\| x \| \geq C \sup \{ | \langle x, y \rangle | ; y \in Y, \| y \| \leq 1 \};$$

(2) *il existe une constante* C *telle que, pour tout élément* $x^\star$ *de* $X^\star$, *on puisse trouver une suite* y_k *d'éléments de* Y *telle que* $\| y_k \| \leq C \| x^\star \|$ *et, pour tout* x *de* E,

$$\langle x, y_k \rangle \to \langle x, x^\star \rangle \qquad (k \to +\infty);$$

(3) *tout élément de* $X^\star$ *est limite dans la topologie* $\sigma(X^\star, X)$ *d'une suite d'éléments de* Y.

Dans notre situation, $X = A(E)$, $X^\star = N(E)$ et Y est l'ensemble des mesures à valeurs complexes dont le support est une partie finie de Λ.

Pour montrer le corollaire 2 on peut examiner les deux cas : θ est un nombre de Pisot et θ n'est pas un nombre de Pisot. Le premier cas est réglé par les théorèmes I et II et le second est classique ([6], § 5).

5.4. La preuve du théorème I est une généralisation de celle que m'a indiquée Y. Katznelson dans le cas où $\theta = 3$. L'idée est d'utiliser un groupe métrisable compact G, adapté au nombre algébrique θ, dans lequel $\mathbf{R}$ s'enroule de façon dense. Plus précisément, soit $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$ le polynôme minimal du nombre algébrique θ : $P(X)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ (nous appellerons quelquefois a_0 le coefficient de X^n; en fait $a_0 = 1$).

Appelons $\mathbf{T}$ le groupe des nombres complexes de module 1, $\mathbf{T}^\infty$ le produit d'une infinité dénombrable d'exemplaires de $\mathbf{T}$ et G le sous-groupe compact de $\mathbf{T}^\infty$ formé de toutes les suites $(z_k)_{k\geqq 0}$ telles que, pour tout $k \geqq 0$, $z_k^{a_0}\ldots z_{k+n}^{a_n} = 1$. Nous écrirons souvent un nombre complexe de module 1 sous la forme $z = \exp 2\pi i \varphi$ où φ est un élément de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et par abus de langage nous appellerons encore G le groupe de toutes les suites $\omega = (\varphi_0, \ldots, \varphi_k, \ldots)$ d'éléments de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ telles que, pour tout $k \geqq 0$,

$$a_0\varphi_k + \ldots + a_n\varphi_{k+n} \equiv 0 \pmod 1.$$

Soit h l'homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans G défini par

$$h(t) = (\exp 2\pi i t, \ldots, \exp 2\pi i \theta^{-k} t, \ldots).$$

On montre que $h(\mathbf{R})$ est dense dans G. Soient j l'injection canonique de G dans $\mathbf{T}^\infty$, $\sum_{k\geqq 0} \mathbf{Z}_k$ le groupe dual de $\mathbf{T}^\infty$ (somme directe dénombrable d'exemplaires de $\mathbf{Z}$) et $j^\star$ l'homomorphisme dual de j; $j^\star$ est une projection de $\sum_{k\geqq 0} \mathbf{Z}_k$ sur le groupe dual Γ de G et le noyau de $j^\star$ est l'ensemble de toutes les suites finies d'entiers relatifs, $(p_k)_{k\geqq 0}$ telles que $\sum_{k\geqq 0} p_k\theta^{-k} = 0$. Soit $h^\star$ l'homomorphisme dual de h; $h^\star$ est injectif et $h^\star(\Gamma)$ est un sous-groupe de $\mathbf{R}$ isomorphe à Γ; $h^\star(\Gamma)$ est le sous-groupe de $\mathbf{R}$ formé de tous les nombres réels t pouvant s'écrire comme des sommes finies $t = \sum_{k\geqq 0} p_k\theta^{-k}$ où $p_k \in \mathbf{Z}$.

Soient $\mathcal{E}' \subset \sum_{k\geqq 0} \mathbf{Z}_k$ l'ensemble des suites $(\varepsilon_k)_{k\geqq 0}$ de 0 et de 1 nulles à partir d'un certain rang et $\mathcal{E} = j^\star(\mathcal{E}')$.

LEMME 1. — *L'application $j^\star$ restreinte à $\mathcal{E}'$ est injective.*

En effet, si $(\varepsilon_k)_{k\geqq 0} \in \mathcal{E}'$,

$$h^\star \circ j^\star (\varepsilon_k)_{k\geqq 0} = \sum_{k\geqq 0} \varepsilon_k \theta^{-k};$$

puisque $\theta > 2$, $h^\star \circ j^\star$ et donc $j^\star$ sont injectives.

Le groupe G est adapté au problème parce que si μ est une mesure dont le support est contenu dans Λ, $\hat{\mu}$ se prolonge par continuité sur G ($\mathbf{R}$ est regardé comme une partie dense dans G grâce à l'injection continue h).

Nous avons besoin de deux lemmes techniques avant d'aborder la preuve des théorèmes I et II.

Lemme 2. — *Soient $q \geqq p \geqq 0$ deux entiers et $\mu_{p,q}$ la mesure portée par Λ et définie par le produit de convolution*

$$\mu_{p,q} = \left(\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-\theta^{-p})\right) \star \ldots \star \left(\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-\theta^{-q})\right).$$

Si p tend vers l'infini, $\mu_{p,q}$ tend faiblement sur C(E) *vers la mesure de Dirac en* $0 (= \delta(t))$.

[C(E) est l'espace de toutes les fonctions continues sur E.]

La vérification de ce résultat est immédiate.

Pour tout nombre réel t,

$$\hat{\mu}_{p,q}(t) = 2^{p-q-1}(1 + \exp 2\pi i t\theta^{-p}) \ldots (1 + \exp 2\pi i t\theta^{-q}).$$

Définissons sur G une fonction $M_{p,q}$ par

$$M_{p,q}(\omega) = 2^{p-q-1}(1 + \exp 2\pi i\varphi_p) \ldots (1 + \exp 2\pi i\varphi_q) \qquad \text{si} \quad \omega = (\varphi_k)_{k \geqq 0}.$$

On a $M_{p,q} \circ h = \hat{\mu}_{p,q}$ ou, de façon plus imagée, $M_{p,q}$ est le prolongement par continuité de $\hat{\mu}_{p,q}$. On a

$$|M_{p,q}(\omega)| = |\cos \pi\varphi_p| \ldots |\cos \pi\varphi_q|.$$

Lemme 3. — *Pour tout entier $p \geqq 0$ et pour tout élément ω de* G *n'appartenant pas au sous-groupe $h(\mathbf{R})$, $\lim\limits_{q \to +\infty} |M_{p,q}(\omega)| = 0$.*

On remarque d'abord que p étant fixé, $|M_{p,q}|$ est une suite décroissante $(q \geqq p)$ et a donc une limite. Si cette limite n'est pas nulle, on a nécessairement $|\cos \pi\varphi_k| \to 0$ $(k \to +\infty)$ et donc $\varphi_k = p_k + \eta_k$ où $p_k \in \mathbf{Z}$, $\eta_k \in \mathbf{R}$ et $\eta_k \to 0$ $(k \to +\infty)$. Mais, pour tout $k \geqq 0$, on a

$$a_0\varphi_k + \ldots + a_n\varphi_{n+k} \equiv 0 \pmod 1;$$

posant $t_k = a_0\eta_k + \ldots + a_n\eta_{n+k}$, on a donc $t_k \in \mathbf{Z}$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = 0$. Cela entraîne $t_k = 0$ si $k \geqq k_0$. Soient $\theta_2, \ldots, \theta_n$ les conjugués de θ; les relations de récurrence linéaire $a_0\eta_k + \ldots + a_n\eta_{n+k} = 0$ $(k \geqq k_0)$ entraînent

$$\eta_k = t\theta^{-k} + t_2\theta_2^{-k} + \ldots + t_n\theta_n^{-k} \quad (t \in \mathbf{R},\ t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{C}).$$

Mais, par hypothèse, on a $|\theta_j| \leqq 1$ pour $2 \leqq j \leqq n$; η_k ne peut tendre vers zéro quand k tend vers l'infini que si $\eta_k = t\theta^{-k}$ $(k \geqq k_0)$. On a donc $\varphi_k \equiv t\theta^{-k} \pmod 1$ pour $k \geqq k_0$. Mais les congruences vérifiées par les φ_k entraînent alors que $\varphi_k \equiv t\theta^{-k} \pmod 1$ pour tout $k \geqq 0$ (θ est un entier algébrique et $a_0 = 1$). Ainsi $\omega = (\varphi_k)_{k \geqq 0} \in h(\mathbf{R})$.

La preuve du théorème I est maintenant aisée. Soit $f(t)$ une fonction continue sur E et telle que, pour toute mesure μ portée par Λ, on ait

$$\left|\int_E f(t)\, d\mu(t)\right| \leqq A \|\hat{\mu}\|_\infty. \tag{1}$$

Soit A_f le inf des constantes A que l'on peut mettre au second membre de (1). Appelons $P(\mathcal{E})$ l'espace vectoriel normé composé de tous les polynômes trigonométriques P sur G dont le spectre est contenu dans $\mathcal{E}$; la norme d'un élément P de $P(\mathcal{E})$ est $\sup\limits_{\omega \in G} |P(\omega)|$. Les éléments de $P(\mathcal{E})$ et les mesures μ dont le support est une partie finie de Λ peuvent être mis en correspondance biunivoque par la relation $P \circ h = \hat{\mu}$. On a alors

$$\sup_{\omega \in G} |P(\omega)| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{\mu}(t)|$$

car $h(\mathbf{R})$ est dense dans G. Grâce à ces remarques, on peut définir une forme linéaire sur $P(\mathcal{E})$, notée L_f, continue, de norme A_f par

$$L_f(P) = \sum_{\mathcal{E}} a_{(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k, \ldots)} f\left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^{-k}\right) \qquad \text{si} \quad P(\omega) = \sum_{\mathcal{E}} a_{(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k, \ldots)} \exp 2\pi i \left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \varphi_k\right).$$

Rappelons que $(\varepsilon_k)_{k \geq 0} \in \mathcal{E}$ signifie que $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et que la suite des ε_k est nulle à partir d'un certain rang. En utilisant la correspondance $P \circ h = \hat{\mu}$, $L_f(P)$ devient $\int_E f(t)\, d\mu(t)$.

Grâce au théorème de Hahn-Banach on peut prolonger L_f en une forme linéaire, de norme A_f sur tout $C(G)$ et il existe une mesure σ portée par G, telle que

$$\|\sigma\| = A_f \text{ et } \hat{\sigma}\left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^{-k}\right) = f\left(\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^{-k}\right) \quad \text{pour tout } (\varepsilon_k)_{k \geq 0} \in \mathcal{E}.$$

(Pour écrire cette relation nous avons identifié un élément de $\mathcal{E}$ et son image par $h^\star$ ce qui revient à considérer $\mathbf{R}$ comme plongé dans G.) Décomposons σ en $\sigma_1 + \sigma_2$ où σ_1 est portée par $h(\mathbf{R})$ et σ_2 étrangère à $h(\mathbf{R})$; on a $\|\sigma\| = A_f = \|\sigma_1\| + \|\sigma_2\|$; le théorème I sera prouvé si nous montrons que $\sigma_2 = 0$. C'est là qu'intervient l'idée d'Y. Katznelson.

Revenant à la définition de A_f, soient ε un nombre réel positif, μ une mesure portée par Λ telle que $\|\hat{\mu}\|_\infty = 1$ et que $\left|\int_E f\, d\mu\right| \geq (1 - \varepsilon) A_f$. Grâce au lemme 1, dès que p est assez grand et quel que soit $q \geq p$, on a

$$\left|\int_E f\, d(\mu \star \mu_{p,q})\right| \geq (1 - 2\varepsilon) A_f.$$

Transportant cette inégalité sur G, on obtient

$$\left|\int_G P(\omega) M_{p,q}(\omega)\, d\sigma(\omega)\right| \geq (1 - 2\varepsilon) A_f \qquad \text{avec } \hat{\mu} = P \circ h, \qquad \hat{\mu}_{p,q} = M_{p,q} \circ h.$$

Soient $G_1 = h(\mathbf{R})$, G_2 le complémentaire de G_1 dans G. On a

$$\int_G PM_{p,q}\, d\sigma = \int_{G_1} PM_{p,q}\, d\sigma_1 + \int_{G_2} PM_{p,q}\, d\sigma_2 = I + J \qquad \text{et} \qquad |I| \leq \|\sigma_1\|$$

[car $\sup_{\omega \in G} |P(\omega)| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{\mu}(t)| = 1$ et $|M_{p,q}(\omega)| \leqq 1$], $|J| \leqq \int_{G_2} |M_{p,q}|\, d|\sigma_2|$. Par conséquent

$$(1-2\varepsilon)\Lambda_f = (1-2\varepsilon)\|\sigma_1\| + (1-2\varepsilon)\|\sigma_2\| \leqq \|\sigma_1\| + \int_{G_2} |M_{p,q}|\, d|\sigma_2|.$$

Le premier membre de cette inégalité ne dépend pas de q. Si q tend vers l'infini, pour tout $\omega \in G_2$, $|M_{p,q}(\omega)|$ tend, en décroissant vers zéro. On a donc

$$\lim \int_{G_2} |M_{p,q}|\, d|\sigma_2| = 0 \quad (q \to +\infty) \quad \text{et} \quad (1-2\varepsilon)\|\sigma_1\| + (1-2\varepsilon)\|\sigma_2\| \leqq \|\sigma_1\|.$$

On fait alors tendre ε vers zéro pour obtenir $\sigma_2 = 0$.

Remarque. — Si E est un ensemble parfait construit à l'aide d'un rapport de dissection égal à l'inverse d'un nombre de Pisot ou de Salem, tout élément S du dual de A(E) est limite simple sur A(E) d'une suite S_k d'éléments du dual de A(E) à supports finis. Une telle propriété est invariante par isomorphisme entre algèbres de Banach. Soit F l'ensemble aléatoire de Salem construit avec des rapports de dissection tendant vers zéro (théorème I, chap. VIII, [5]). Alors pour presque tous les choix des paramètres aléatoires définissant F, l'algèbre de Banach A(F) n'a pas cette propriété ([14]). Ainsi les algèbres de Banach A(E) et A(F) ne sont pas isomorphes. H. P. Rosenthal a montré que si E est un ensemble compact de mesure de Lebesgue positive au voisinage de chacun de ses éléments, A(E) a la propriété décrite par le théorème II.

6. La propriété de la synthèse parfaite.

6.1. Soit E un ensemble parfait, sans intérieur de nombres réels. Supposons que la mesure de Lebesgue de E est nulle. Soient, pour tout $k \geqq 1$, Λ_k une partie finie de E, Ω_λ, $\lambda \in \Lambda_k$, une suite finie de parties ouvertes de $\mathbf{R}$ telles que, pour tout $k \geqq 1$,

(1) $\lambda \in \Omega_\lambda$, $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_k} \Omega_\lambda$;

(2) $\lambda \in \Lambda_k$ et $\lambda' \in \Lambda_k$, $\lambda \neq \lambda' \Rightarrow \Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda'} = \emptyset$;

(3) $\sup_{\lambda \in \Lambda_k} \operatorname{diam} \Omega_\lambda \to 0$ $(k \to +\infty)$.

(Si X est un ensemble de nombres réels, diam X est le diamètre de X.)

Définition 6.1. — *Nous dirons que* E *a la propriété de la synthèse parfaite s'il existe une constante* C *telle que, pour tout élément f de* A($\mathbf{R}$) *on puisse* *trouver une suite* f_k, $k \geqq 1$, *d'éléments de* $A(\mathbf{R})$ *satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

— *pour tout* $\lambda \in \Lambda_k$ *et tout* $t \in \Omega_\lambda$ *on a* $f_k(t) = f(\lambda)$;

(6.1.1.) $$\sup_{k \geqq 1} \|f_k\|_{A(\mathbf{R})} \leqq C \|f\|_{A(\mathbf{R})}.$$

6.2. Théorème I. — *Soit* E *un ensemble de nombre réel ayant la propriété de la synthèse parfaite. Pour toute pseudomesure* S *portée par* E, *soit* S_k, $k \geqq 1$ *la suite des mesures portées par* Λ_k *et définies par* $S_k\{\lambda\} = \int_{\Omega_\lambda} dS(t)$, $\lambda \in \Lambda_k$. *Alors :*

(6.2.1) $\sup_{k \geqq 1} \| \hat{S}_k \|_\infty \leqq C \| \hat{S} \|_\infty$ *où* C *ne dépend que de* E;

(6.2.2) $\langle S_k, f \rangle \to \langle S, f \rangle$ $(k \to +\infty)$ *pour tout élément* f *de* $A(\mathbf{R})$.

Nous allons d'abord montrer que (6.2.1) est satisfait. En effet, puisque Λ_k est un ensemble fini, Λ_k est un ensemble de synthèse et le dual de $A(\Lambda_k)$ est $PM(\Lambda_k)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut donc trouver un élément f de $A(\mathbf{R})$ tel que $\|f\|_{A(\mathbf{R})} = 1$ et $|\langle S_k, f \rangle| \geqq (1 - \varepsilon) \| \hat{S}_k \|_\infty$. Soit f_k un élément de $A(\mathbf{R})$ tel que $f_k(t) = f(\lambda)$ si $\lambda \in \Lambda_k$, $t \in \Omega_\lambda$ et que $\|f_k\|_{A(\mathbf{R})} \leqq C$. On a $\langle S_k, f \rangle = \langle S_k, f_k \rangle$ car f et f_k coïncident sur Λ_k et $\langle S_k, f_k \rangle = \langle S, f_k \rangle$ parce que f_k est constante sur Ω_λ. Donc

$$|\langle S_k, f \rangle| \leqq \| \hat{S} \|_\infty \|f_k\|_{A(\mathbf{R})} \leqq C \| \hat{S} \| \qquad \text{et} \qquad \sup_{k \geqq 1} \| \hat{S}_k \|_\infty \leqq C \| \hat{S} \|_\infty$$

Maintenant soit à prouver (6.2.2). Puisque (6.2.1) est vérifié, il suffit de montrer (6.2.2) pour une partie dense dans $A(\mathbf{R})$, par exemple pour les fonctions de $A(\mathbf{R})$ qui sont localement constantes au voisinage de E ([7], 1.3, p. 256). Soient f une telle fonction, $I_1, \ldots, I_N$ des intervalles ouverts dont la réunion contient E, dont les fermetures sont deux à deux disjointes et tels que f soit constante sur chacun d'eux. Grâce à la condition (3) portant sur les Ω_λ, on peut trouver un entier p tel que pour tout $k \geqq p$ et tout $\lambda \in \Lambda_k$, Ω_λ soit contenu dans l'un des I_j, $1 \leqq j \leqq N$; f est constante sur chaque Ω_λ. On a alors, grâce à la théorie de Wiener, $\langle S_k, f \rangle = \langle S, f \rangle$ dès que $k \geqq p$ et ceci termine la preuve du théorème I.

6.3. Nous allons maintenant donner un critère assurant qu'un ensemble compact E de nombres réels a la propriété de la synthèse parfaite. Ce critère, semblable à celui donné par Piatecki-Shapiro ([5], th. V, p. 59) dans le cas de l'unicité, est cependant plus exigeant. Il s'appliquera aux ensembles parfaits de nombres réels construits à l'aide d'un rapport de dissection constant θ^{-1} dès que θ est un nombre de Pisot supérieur à 3.

ÉNONCÉ DU CRITÈRE :

a. Description d'un compact remarquable du tore n-dimensionnel. — Soient :

- n un entier, $n \geqq 1$;
- $\mathbf{T}^n$ le tore n-dimensionnel;
- P l'homomorphisme canonique de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{T}^n$ ($\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$);
- B une partie compacte de $\mathbf{R}^n$ telle que P, restreint à B soit un homéomorphisme de B sur $K = P(B)$;
- m un entier, $m \geqq 1$;
- $B_1, \ldots, B_m$ m compacts deux à deux disjoints formant une partition de B;
- L une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$, $a_1, \ldots, a_m$ m nombres réels différents deux à deux;
- pour $1 \leqq j \leqq m$, U_j l'ensemble des éléments x de B_j tels que $L(x) = a_j$, $U = \bigcup\limits_{1 \leqq j \leqq m} U_j$;
- $N_j = P(U_j)$ et $N = \bigcup\limits_{1 \leqq j \leqq m} N_j$.

b. Description d'une suite d'« enroulements » de $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{T}^n$. — Soient :

- $(h_k)_{k \geqq 1}$ une suite d'homomorphismes continus, injectifs de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{T}^n$ tels que, pour tout $k \geqq 1$;
- $h_k(\mathbf{R})$ soit dense dans $\mathbf{T}^n$;
- h_k soit défini par $h_k(t) = P(\omega_{1,k}t, \ldots, \omega_{n,k}t)$, $t \in \mathbf{R}$;
- pour toute suite $p_1, \ldots, p_n$ d'entiers rationnels non tous nuls,

$$\lim_{k \to +\infty} |p_1\omega_{1,k} + \ldots + p_n\omega_{n,k}| = +\infty.$$

Posons $\omega_k = (\omega_{1,k}, \ldots, \omega_{n,k})$ et supposons que, pour tout $k \geqq 1$, $L(\omega_k) \neq 0$.

c. Définition des fibres de K *découpées par* h_k. — Soit

- $X_0 = P(x_0)$ un point de N, $x_0 \in U$.

La fibre de K, contenant X_0 et découpée par h_k, est l'image par P de l'ensemble des points x de B_j de la forme $x = x_0 + \omega_k t$, $t \in \mathbf{R}$, $x_0 \in U_j$ (j est déterminé par x_0 car les B_j sont deux à deux disjoints).

THÉORÈME II. — *Soient* E *un ensemble parfait de mesure nulle de nombres réels et* $(\Lambda_k)_{k \geqq 1}$ *une suite de parties finies de* E. *Supposons qu'il existe un entier* n, *un compact* K *de* $\mathbf{T}^n$ *vérifiant* (*a*) *et une suite* $(h_k)_{k \geqq 1}$ *d'homomor-*

phismes de $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{T}^n$ *vérifiant* (*b*) *et tels que, pour tout* $k \geq 1$:

- $h_k(\Lambda_k)$ *soit contenu dans* N;
- $h_k(\mathrm{E})$ *soit contenu dans* K *et recouvert par la réunion* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_k} \mathrm{F}_{\lambda,k}$ *des*

fibres $\mathrm{F}_{\lambda,k}$ *découpées par* h_k *et contenant* $h_k(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_k$. *Alors* E *a la propriété de la synthèse parfaite.*

6.4. Pour simplifier nous présenterons la preuve si $m = 1$. Le cas général se traite de façon analogue.

Il y a un compact B′ de $\mathbf{R}^n$, dont l'intérieur contient B et tel que P restreint à B′ soit encore un homéomorphisme de B′ sur $\mathrm{K}' = \mathrm{P}(\mathrm{B}')$. Soient $\mathrm{F}'_{\lambda,k}$ les fibres découpées par h_k dans l'intérieur de K′ et Ω_λ, $\lambda \in \Lambda_k$ l'image réciproque par h_k de $\mathrm{F}'_{\lambda,k}$. Les Ω_λ possèdent les propriétés (1), (2) et (3) car h_k est injective, P est un homéomorphisme de B′ sur K′ et $|\omega_k| \to +\infty$ avec k.

Nous allons montrer que E a la propriété de la synthèse parfaite. Soit H_k le sous-groupe $\mathbf{Z}\omega_{1,k} + \ldots + \mathbf{Z}\omega_{n,k}$ de $\mathbf{R}$, H_k est dense dans $\mathbf{R}$ et soit I un intervalle compact de $\mathbf{R}$ dont l'intérieur contient E. Il suffit, pour prouver (6.1.1), de se restreindre à A(I). Mais si $f \in \mathrm{A}(\mathbf{R})$ on peut trouver une mesure discrète σ portée par H_k telle que $\hat{\sigma} = f$ sur I et $\|\sigma\| \leq 2\|f\|_{\mathrm{A(I)}}$. On a donc $f = g_k \circ h_k$ où $g_k \in \mathrm{A}(\mathrm{T}^n)$, $\|g_k\|_{\mathrm{A}(\mathbf{T}^n)} \leq 2\|f\|_{\mathrm{A(I)}}$. Soit γ_k la fonction $\mathbf{Z}^n$-périodique sur $\mathbf{R}^n$, définie par $\gamma_k = g_k \circ \mathrm{P}$, U_k l'ensemble des x de U dont l'image par P appartient à $h_k(\Lambda_k)$ et enfin B_k (resp. B'_k) l'ensemble des points $x \in \mathrm{B}$ (resp. B′) de la forme $x = t\omega_k + y$ où $y \in \mathrm{U}_k$ et $t \in \mathbf{R}$. Alors $\mathrm{P}(\mathrm{B}_k)$ est la réunion des fibres $\mathrm{F}_{\lambda,k}$ relatives à $\lambda \in \Lambda_k$.

Appelons $\mathrm{B}(\mathbf{R}^n)$ (ne pas confondre avec le compact B) l'algèbre de Banach de toutes les transformées de Fourier $\hat{\mu}$ des mesures complexes bornées μ sur $\mathbf{R}^n$. On pose $\|\hat{\mu}\|_{\mathrm{B}(\mathbf{R}^n)} = \|\mu\|$. Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soient* L *une forme linéaire sur* $\mathbf{R}^n$, ω *un élément de* $\mathbf{R}^n$ *tel que* $\mathrm{L}(\omega) \neq 0$ *et a un nombre réel.*

Pour tout élément γ *de* $\mathrm{B}(\mathbf{R}^n)$ *définissons une fonction* δ *sur* $\mathbf{R}^n$ *continue, à valeurs complexes par les deux conditions : pour tout* $x \in \mathbf{R}^n$,

$\delta(x + \omega t)$ *ne dépend pas du nombre réel* t;

$\delta(x) = \gamma(x)$ *si* $\mathrm{L}(x) = a$.

Alors φ *appartient à* $\mathrm{B}(\mathbf{R}^n)$ *et* $\|\delta\|_{\mathrm{B}(\mathbf{R}^n)} \leq \|\gamma\|_{\mathrm{A}(\mathbf{R}^n)}$.

La preuve très simple de ce résultat est laissée au lecteur.

Appelons donc δ_k l'élément de $\mathrm{B}(\mathbf{R}^n)$ défini à partir de γ_k comme il est dit au lemme 1. L'application P est un homéomorphisme de B′ sur K′ et un isomorphisme local entre $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{T}^n$. On peut donc trouver une suite G_k

d'éléments de $A(\mathbf{T}^n)$ tels que si $x \in B'$, $G_k(P(x)) = \delta_k(x)$ et que $\| G_k \|_{A(\mathbf{T}^n)} \leq C \| \delta_k \|_{B(\mathbf{R}^n)}$. On a $G_k(x) = g_k(x)$ pour tout $x \in N$ et $G_k(x)$ est constante sur les fibres $F'_{\lambda,k}$, $\lambda \in \Lambda_k$. Posons $f_k = g_k \circ h_k$; on a

$$\|f_k\|_{B(\mathbf{R})} = \|g_k\|_{A(\mathbf{T}^n)} \leq C \|f\|_{A(I)} \quad \text{et} \quad f_k(t) = f(\lambda) \quad \text{si } t \in \Omega_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda_k.$$

6.5. Cas général d'un nombre de Pisot θ supérieur à 3. — Soient toujours E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, Λ l'ensemble des sommes finies $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$ et Λ_k l'ensemble des sommes finies $\sum^{k} \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1.

Théorème IV. — *Soient θ un nombre de Pisot supérieur à 3, E comme ci-dessus et L_E^∞ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $\varphi \in L^\infty(\mathbf{R})$, à valeurs complexes, essentiellement bornées et dont le spectre est contenu dans E.*

Alors pour tout $\varphi \in L_E^\infty$ on peut trouver une suite P_k de sommes trigonométriques finies, $P_k(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_k} a_{\lambda,k} \exp 2\pi i \lambda t$, $a_{\lambda,k} \in \mathbf{C}$ telle que :

(*a*) *les fréquences de P_k sont de la forme* $\sum_1 \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ *ou* 1 $(1 \leq j \leq k)$;

(*b*) $\sup_{k \geq 1} \sup_{t \in \mathbf{R}} |P_k(t)| \leq \sup_{t \in \mathbf{R}} \text{ess}\, |\varphi(t)|$;

(*c*) *uniformément sur tout compact de* $\mathbf{R}$, *les P_k convergent vers φ.*

L'intérêt du théorème IV est de caractériser la boule unité de L_E^∞; (*c*) n'est pas étonnant car une fonction de $L^\infty(\mathbf{R})$ dont le spectre est compact est une fonction continue.

Le théorème IV résulte immédiatement de ce que E est un ensemble de synthèse et du corollaire 1 au théorème II, chapitre 5. En fait nous allons montrer que, lorsque θ est un nombre de Pisot supérieur à 3, E a la propriété de la synthèse parfaite. Plus précisément :

Théorème V. — *Soient θ un nombre de Pisot supérieur à 3, et E comme ci-dessus. Soient $K_1, \ldots, K_m$ une partition de E en compacts ouverts, $t_1 \in K_1, \ldots, t_m \in K_m$ et pour tout entier k, Λ_k la partie finie de E qui est l'ensemble de toutes les sommes* $\sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j} + t_l \theta^{-k}$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq l \leq m$, $\varepsilon_j = 0$ *ou* 1.

Il est possible de trouver une constante C, un entier m, une partition de E en $K_1, \ldots, K_m$ et des éléments $t_1, \ldots, t_m$ appartenant respectivement *à* $K_1, \ldots, K_m$ *tels que, pour toute distribution* $S(t)$ *portée par* E, *en posant*

$$S_k(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_k} a_\lambda \delta(t-\lambda),$$

où $\delta(t)$ *est la masse de Dirac en* o *et où*

$$a_\lambda = \int_{s+\theta^{-k}K_l} dS(t), \qquad s = \sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j}, \qquad \lambda = s + \theta^{-k} t_l,$$

on ait

(*a*) $\sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{S}_k(t)| \leqq C \sup_{t \in \mathbf{R}} |\hat{S}(t)|$;

(*b*) $\hat{S}_k$ *tend uniformément vers* $\hat{S}(t)$ *sur tout ensemble compact de nombres réels si le second membre de* (*a*) *est fini.*

6.6. Nous reconnaissons ici la propriété de la synthèse parfaite. Pour démontrer le théorème V nous emploierons évidemment le théorème II. Nous aurons, en outre, besoin du fait suivant :

PROPOSITION 1. — *Soient* θ *un nombre réel dépassant* 3, E *l'ensemble de toutes les sommes* $\sum_{k \geqq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ *ou* 1 *et* F *un ensemble fini contenant* o. *Il est possible de trouver un entier* M *et une partition de* E *en compacts ouverts* $E_1, \ldots, E_M$ *et pour chaque entier* j *un* $t_j \in E_j$ *tels que, pour tous* t, t', j, k, *on ait* $t \in E_j$, $t' \in E_k$ *et* $t' - t \in F \Rightarrow t' - t = t_k - t_j$.

Nous allons simplement esquisser la preuve de la proposition 1 en indiquant quel rôle joue la condition $\theta > 3$.

Soient K le corps $\mathbf{Z}/3\,\mathbf{Z}$, -1, 0 et 1 les éléments de K, K^∞ le produit $\prod_{j \geqq 1} K_j$ d'une suite d'exemplaires de K et $L \subset K^\infty$ l'ensemble des points de K^∞ dont les coordonnées valent 0 ou 1. Les seuls éléments de F intervenant dans la proposition sont les différences $\sum_{k \geqq 1} \alpha_k \theta^{-k}$, $\alpha_k = -1$, 0 ou 1 entre deux éléments de E. La condition $\theta > 3$ assure que cette écriture est unique. Ainsi si $t = \sum_{k \geqq 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, $t' = \sum_{k \geqq 1} \varepsilon'_k \theta^{-k}$, $\varepsilon'_k = 0$ ou 1 et si $t' - t \in F$, on a, pour tout $k \geqq 1$, $\varepsilon'_k - \varepsilon_k = \alpha_k$ pour une des suites $(\alpha_k)_{k \geqq 1}$ apparaissant dans l'écriture d'un élément de F. Soit alors φ l'application de E — E dans K^∞ définie par $\varphi\left(\sum_{k \geqq 1} \alpha_k \theta^{-k}\right) = (\alpha_k)_{k \geqq 1}$ ($\alpha_k = -1$, 0 ou 1 est, par abus de langage, identifié à son reste mod 3). Si $t \in E$, $t' \in E$ et $t' - t \in F$, alors $T = \varphi(t) \in L$, $T' = \varphi(t') \in L$ et $T' - T \in \mathcal{F} = \varphi(F)$. Soit $\mathcal{G}$ l'espace vectoriel sur K engendré par l'ensemble fini $\mathcal{F}$; $\mathcal{G}$ est fini. On commence par prouver la proposition 1 avec $\mathcal{G}$ au lieu de F et L au lieu de E ce qui simplifie beaucoup la question car la relation $T' - T \in \mathcal{G}$, $T \in K^{\infty}$, $T' \in K^{\infty}$ est une relation d'équivalence définissant la congruence modulo un espace vectoriel fini et ensuite il est immédiat de passer de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{F}$; à ce dernier stade la situation est isomorphe à celle considérée sur E.

Corollaire. — *On peut, avec les notations de la proposition* 1, *trouver une partie finie* J *de* $\mathbf{N}^2$, *une partition de* E *par des compacts ouverts* $C_{i,j}$ $(i, j) \in J$ *et pour tout* $(i, j) \in J$ *trouver un point* $t_{i,j} \in C_{i,j}$ *tel que :*

(*a*) $t \in C_{i,j}$, $t' \in C_{k,l}$ *et* $t' - t \in F$ *entraîne* $k = i$;

(*b*) $t \in C_{i,j}$, $t' \in C_{i,k}$ *et* $t' - t \in F$ *entraîne* $t' - t = t_{i,k} - t_{i,j}$;

(*c*) *pour tout* $i \geqq 1$, *tout* j *et tout* k *tels que* $(i, j) \in J$ *et* $(i, k) \in J$, *on peut trouver une suite* $(k_p)_{0 \leq p \leq n}$ *telle que* $k_0 = j$, $k_n = k$ *et que, si* $s_p = t_{i,k_p}$, *on ait* $s_{p+1} - s_p \in F$.

Le corollaire exprime simplement que l'on peut regrouper les compacts E_j de la proposition 1 qui ont des relations entre eux et les réordonner en les $C_{i,j}$.

6.7. Passons maintenant à la preuve du théorème V.

Soient θ un nombre de Pisot de degré n, $\theta > 3$, $\theta_2, \ldots, \theta_n$ les conjugués de θ autres que θ, U le compact de $\mathbf{R}^n$ défini comme l'ensemble des points

$$x_1 = u_2 + \ldots + u_n, \qquad x_2 = \theta_2 u_2 + \ldots + \theta_n u_n, \qquad \ldots, \qquad x_n = \theta_2^{n-1} u_2 + \ldots + \theta_n^{n-1} u_n,$$

où $u_2 = -\sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta_2^k$, $\ldots$, $u_n = -\sum_0^{\infty} \varepsilon_k \theta_n^k$ pour une même suite ε_k de 0 et de 1.

Le compact U est contenu dans un hyperplan $\mathcal{L}$ de $\mathbf{R}^n$. Soient $H_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ défini par $H_0(t) = (t, \ldots, \theta^{n-1} t)$, $V = H_0(E)$, $H_k(t) = H_0(\theta^k t)$, P la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ et $h_k = P \circ H_k$.

Proposition 2. — *On peut trouver une partie finie* J *de* $\mathbf{N}^2$, *une partition de* V *en compacts ouverts* $V_{i,j}$ $(i, j) \in J$ *et pour chaque* $(i, j) \in J$, *un point* $v_{i,j} \in V_{i,j}$ *et un vecteur* $x_{i,j}$ *de* $\mathbf{Z}^n$ *tels qu'en posant*

$$W_{i,j} = V_{i,j} + U$$

toute congruence $x' - x \in \mathbf{Z}^n$ *où* $x \in W_{i,j}$, $x' \in W_{i',j'}$ *entraîne* $i' = i$ *et* $x' - x = x_{i,j'} - x_{i,j}$ *et que réciproquement pour tout* $(i, j) \in J$ *et* $(i, j') \in J$ *on ait*

$$(v_{i,j'} - v_{i,j} - x_{i,j'} - x_{i,j}) \in \mathcal{L}.$$

Posons, en effet, $W = U + V$ et pour chaque $x \in W$ appelons $v(x)$ l'élément de V, $u(x)$ celui de U tels que $u(x) + v(x) = x$. Si $x' - x \in \mathbf{Z}^n$, cela n'offre à la différence $x' - x$ qu'un nombre fini de possibilités parce que $x' - x \in W - W$ (qui est compact); ainsi $\varphi(x') - \varphi(x)$ appartient à un ensemble fini F. Par ailleurs deux points distincts de l'hyperplan $\mathcal{L}$ ne sont jamais congrus modulo $\mathbf{Z}^n$; le vecteur $x' - x$ de $\mathbf{Z}^n$ est donc parfaitement déterminé par la différence $\varphi(x') - \varphi(x)$. On applique alors le corollaire de la proposition 1 en choisissant pour tout entier $i \geq 1$ un entier particulier j_0 tel que $(i, j_0) \in J$ (à supposer qu'il y en ait un) et en appelant $x_{i,j}$ le vecteur de $\mathbf{Z}^n$ associé à la différence $\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j_0}$; en posant $\mathcal{L}_{i,j} = \varphi_{i,j} + \mathcal{L}$, $x_{i,j}$ est défini par la condition $\mathcal{L}_{i,j_0} + x_{i,j} = \mathcal{L}_{i,j}$ et $x_{i,j} \in \mathbf{Z}^n$.

Nous allons maintenant pouvoir montrer que les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites mais quelques notations sont encore nécessaires.

Soient, pour tout $(i, j) \in J$, $B_{i,j} = W_{i,j} - x_{i,j}$, B_i la réunion des $B_{i,j}$, $(i, j) \in J$, et B la réunion des B_i, $1 \leq i \leq m$; enfin pour alléger nous écrirons $\mathcal{L}_i$ au lieu de $\mathcal{L}_{i,j_0}$ et $\mathcal{L}_i$ est défini par la condition $L(x) = a_i$, $a_i \in \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq m$.

Remarquons que deux points de B ne sont jamais congrus modulo $\mathbf{Z}^n$ et que les B_i sont deux à deux disjoints.

En effet si $y \in B$, $y' \in B$ et $y' - y \in \mathbf{Z}^n$, alors $y = x - x_{i,j}$ où $x \in W_{i,j}$, $y' = x' - x_{i',j'}$ où $x' \in W_{i',j'}$; cela entraîne $x' - x \in \mathbf{Z}^n$ et donc, par la proposition $i' = i$ et $x' - x = x_{i,j'} - x_{i,j}$; soit $y' = y$. De façon analogue, on prouve que les B_i sont deux à deux disjoints.

Il reste à définir Λ_k; soit $t_{i,j}$, $(i, j) \in J$, le nombre réel défini par $H_0(t_{i,j}) = \varphi_{i,j}$ $[H_0(t) = (t, \ldots, \theta^{n-1} t)$, $H_k(t) = H_0(\theta^k t)$ et $h_k = P \circ H_k]$. On appelle Λ_k l'ensemble fini des nombres réels s'écrivant

$$\lambda = \varepsilon_1 \theta^{-1} + \ldots + \varepsilon_k \theta^{-k} + \theta^{-k} t_{i,j},$$

$\varepsilon_p = 0$ ou 1, $(i, j) \in J$, $1 \leq p \leq k$. Il suffit de vérifier maintenant que $H_k(E)$ est recouvert par les fibres $F_{\lambda,k}$, $\lambda \in \Lambda_k$, issues de $h_k(\lambda)$ et découpées dans K. Que sont ces fibres ? Pour tout λ ci-dessus, soit x_λ l'élément de U défini à l'aide des paramètres $u_2, \ldots, u_n$ comme il est expliqué dans la définition de U avec $u_2 = -\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}\theta_2 - \ldots - \varepsilon_1 \theta_2^{k-1}$, etc. Soit $x = x_\lambda + \varphi_{i,j} - x_{i,j}$; x appartient à $\mathcal{L}_i$ définie par $L(x) = a_i$, $P(x) = X = h_k(\lambda)$ et la fibre $F_{\lambda,k}$ issue de $h_k(\lambda)$ et découpée dans K par h_k contient l'image par P de $x_\lambda + V_{i,j} - x_{i,j}$ ou de $x_\lambda + V_{i,j}$.

Soit $C_{i,j}$ l'ensemble des t tels que $H_0(t) \in V_{i,j}$ et

$$\Omega_\lambda = \varepsilon_1 \theta^{-1} + \ldots + \varepsilon_k \theta^{-k} + \theta^{-k} C_{i,j}.$$

Les Ω_λ, $\lambda \in \Lambda_k$, forment une partition de E en compacts ouverts, $h_k(\Omega_\lambda) = F_{\lambda,k}$, les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. S. BESICOVITCH, *Almost periodic functions*, Cambridge University Press.
[2] J. W. S. CASSELS, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge University Press, 1957.
[3] J.-P. KAHANE, *Lectures on mean-periodic functions*, Tata Inst. Fund. Research, 1959.
[4] J.-P. KAHANE, *Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 7, 1957, p. 293-314).
[5] J.-P. KAHANE et R. SALEM, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, 1962.
[6] Y. KATZNELSON et C. MC GEHEE, *Measures and pseudomeasures on compact subsets of the line* (à paraître dans *Math. Scand.*).
[7] Y. KATZNELSON et W. RUDIN, *The Stone Weierstrass property in Banach algebras* (*Pacific J. Math.*, vol. 11, 1961, p. 253-265).
[8] H. J. LANDAU, *Necessary density conditions*... (*Acta Math.*, vol. 117, 1967, p. 37-52).
[9] C. MC GEHEE, *Sets of Uniqueness and sets of multiplicity* (*Israël J. Math.*, vol. 4, nº 2, 1966).
[10] Y. MEYER, *Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions* (*Ann. Inst. Fourier*, 18, nº 2, 1968, p. 73-86).
[11] Séminaire Bourbaki, février 1968, exposé nº 341.
[12] Y. MEYER, *Une caractérisation des nombres de Pisot* (*C. R. Acad. Sc.*, 267, série A, 1968, p. 196-198).
[13] Y. MEYER, *Les problèmes de l'unicité et de la synthèse harmonique et la répartition modulo* 1 (*C. R. Acad. Sc.*, 269, série A, 1969, p. 320-322).
[14] Y. MEYER, *Algèbres de restrictions non isomorphes* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 19, nº 1, 1969, p. 117-124).
[15] Y. MEYER, *Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique* (à paraître aux *Studia Math.*).
[16] R. E. A. C. PALEY et N. WIENER, *Fourier transforms in the complex domain*, A. M. S. Coll., Publ. XIX.
[17] H. P. ROSENTHAL, *A characterization of restrictions of Fourier-Stieltjes transforms* (*Pacific J. Math.*, vol. 23, nº 2, 1967).
[18] W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*, Intersc. Tracts, 1962.
[19] R. SALEM, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath Math. Monographs, 1961.
[20] P. SAMUEL, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, 1967.
[21] R. SCHNEIDER, *Thèse*, University of California, Berkeley, California.
[22] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, 2nd ed., vol. I et II, Cambridge University Press, 1959.

(Manuscrit reçu le 8 décembre 1969.)

Yves MEYER,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.