Annales scientifiques de l'É.N.S.

MICHEL DUFLO

Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 3, nº 1 (1970), p. 23-74
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_1_23_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, 1970, p. 23 à 74.

CARACTÈRES DES GROUPES ET DES ALGÈBRES DE LIE RÉSOLUBLES

PAR MICHEL DUFLO.

AVERTISSEMENT. — Ce Mémoire est en deux parties. Dans la première on établit une formule pour le caractère d'une représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie réel résoluble connexe. Celle-ci, rapprochée d'un théorème sur les orbites de dimension maximale de la représentation coadjointe, constitue une étape vers la formule de Plancherel des groupes résolubles réels unimodulaires. Dans la seconde partie on établit la formule correspondante pour le caractère d'une représentation irréductible d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique o. Celle-ci, rapprochée du théorème rappelé ci-dessus, permet de démontrer un théorème important sur le centre des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie résolubles de dimension finie sur un corps de caractéristique o. Ce théorème et la formule de Plancherel sont donc des conséquences de faits similaires.

Les deux parties sont logiquement indépendantes et peuvent être lues séparément, quoique de toute évidence le sujet soit le même.

Avant de poursuivre, je tiens à remercier J. Dixmier dont l'aide m'a été précieuse au cours de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Caractères des groupes résolubles réels.

DEUXIÈME PARTIE.

Caractères des algèbres de Lie résolubles.

PREMIÈRE PARTIE.

CARACTÈRES DES GROUPES RÉSOLUBLES RÉELS.

INTRODUCTION.

Soit G un groupe de Lie réel connexe. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et et soit $\mathfrak{g}^\star$ le dual de $\mathfrak{g}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$. On note B_f la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = \langle f, [X, Y] \rangle$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$. On note $\mathfrak{g}(f)$ le noyau de B_f. C'est le centralisateur de f dans $\mathfrak{g}$. Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^\star$ pour la représentation coadjointe, c'est-à-dire la représentation contragédiente de la représentation adjointe. On définit une 2-forme ω sur Ω de la manière suivante. Soit $f \in \Omega$. L'application tangente en 1 à l'application $g \to gf$ identifie $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ et l'espace tangent à Ω en f. On posera

$$\omega_f(X, Y) = \frac{1}{2\pi} B_f(X, Y) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)).$$

Soit $2s$ la dimension de Ω. La forme différentielle $\beta_\Omega = \frac{1}{s!}\omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (s facteurs) définit une mesure G-invariante non nulle sur Ω (*cf.* [6]).

Soit T une représentation unitaire irréductible de G. On choisit une mesure de Haar sur $\mathfrak{g}$, et si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, on pose $T(\alpha) = \int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\, T(\exp X)\, dX$. Dans beaucoup de cas (*cf.* [6], [9], [10]), il existe une orbite Ω de G dans $\mathfrak{g}^\star$, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$, G-invariant et dans lequel exp est régulière, une fonction p dans $\mathcal{V}$, analytique, ne s'annulant pas et G-invariante, tels que l'on ait la propriété $P(G, T, \Omega, \mathcal{V}, p)$:

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ une fonction telle que la fonction

$$f \to \int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\, p(X)^{-1} e^{i\langle f, X\rangle} dX$$

soit β_Ω-intégrable. Alors :

1. Si $T(\alpha)$ est traçable, on a

$$\operatorname{tr} T(\alpha) = \int_\Omega \left\{ \int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\, p(X)^{-1} e^{i\langle f, X\rangle} dX \right\} d\beta_\Omega(f).$$

2. Si $T(\alpha)$ est positif, alors $T(\alpha)$ est traçable.

Il faut remarquer que cet énoncé ne dit pas plus que ce qu'il dit, et en particulier qu'il n'affirme pas l'existence de fonctions $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$, telles que $T(\alpha)$ soit traçable. Il ne fournit donc pas en général un moyen d'associer une orbite à une représentation. D'ailleurs, tant que l'on n'a pas imposé de conditions supplémentaires à la fonction p (comme par exemple d'être positive), ceci est sans espoir. La situation n'est idéale que pour les groupes nilpotents. En effet, dans ce cas $\alpha \to \operatorname{tr} T(\alpha)$ est une distribution sur $\mathfrak{g}$, et il existe une orbite Ω telle que l'on ait la propriété $P(G, T, \Omega, \mathfrak{g}, 1)$. Dans ce cas l'orbite Ω est bien déterminée, puisque c'est le support de la transformée de Fourier de la distribution $\alpha \to \operatorname{tr} T(\alpha)$. (Pour tout ceci, *cf.* par exemple [8].) Mais dans d'autres cas où $\alpha \to \operatorname{tr} T(\alpha)$ est une distribution dans un ouvert $\mathcal{V}$ vérifiant les conditions ci-dessus, il peut arriver qu'il existe des orbites Ω et Ω' et des fonctions p et p' toutes deux positives dans $\mathcal{V}$ et vérifiant les conditions ci-dessus telles que l'on ait à la fois les propriétés $P(G, T, \Omega, \mathcal{V}, p)$ et $P(G, T, \Omega', \mathcal{V}, p')$. C'est en particulier le cas pour certaines des représentations irréductibles des groupes compacts semi-simples. (*Voir* à ce sujet la remarque 1 du chapitre V de la seconde partie.)

Pour les groupes résolubles exponentiels (i. e. tels que l'application exponentielle soit un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G) il existe une bijection de l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G sur l'ensemble des orbites de G dans $\mathfrak{g}^\star$ qui généralise la correspondance bien connue de Kirillov dans le cas nilpotent (*cf.* [2]). Soit T une représentation unitaire irréductible de G et Ω l'orbite dans $\mathfrak{g}^\star$ qui lui correspond. Il est prouvé dans [9] qu'il existe une fonction p, construite au moyen de certaines racines de $\mathfrak{g}$, telle que l'on ait la proposition $P(G, T, \Omega, \mathfrak{g}, p)$. Plus précisément, si $\lambda \in \mathfrak{g}^\star \otimes \mathbf{C}$, on pose

$$S_\lambda(X) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\lambda(X)\right)}{\frac{1}{2}\lambda(X)} \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

Il existe un sous-ensemble $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ (comptées avec leur multiplicité) tel que $p = \prod_1^n S_{\lambda_i}$.

Dans le cas des groupes résolubles ad-algébriques [i. e. tels que l'image de $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe soit une sous-algèbre algébrique de $\operatorname{End}(\mathfrak{g})$], on a un résultat analogue, basé sur la description du dual des groupes résolubles réels connexes simplement connexes de type I annoncée dans [1] (*cf.* [10]). Signalons que dans ce cas L. Pukanszky démontre que si l'orbite Ω est fermée, la transformée de Fourier de αp^{-1} est β_Ω-intégrable pour tout α dont le support est contenu dans l'ensemble des points où exp est régulière ([10], 5.5).

Le but de cette première partie est la description de l'ensemble $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans le cas des groupes résolubles exponentiels où ad-algébriques. Résumons nos résultats. Soit Ω une orbite de G (que nous ne supposons pas nécessairement résoluble pour le moment) dans $\mathfrak{g}^*$, et soit $f \in \Omega$. On remarque d'abord que si l'on a la propriété $\mathrm{P}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \Omega, \mathcal{V}, p)$, alors $\operatorname{tr} \mathrm{T}(\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{V}))$ ne dépend que de la restriction de α à l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{g}(f) = \mathfrak{m}(\Omega)$. Ceci résulte d'un lemme sur les orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ qui fait l'objet du chapitre I. Il suffit donc de connaître la restriction de p à $\mathfrak{m}(\Omega)$. Supposons maintenant que G soit résoluble. Les poids de la représentation naturelle de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ sont de la forme $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_s$; on note par les mêmes lettres des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et qui prolongent les λ_i. On pose $q_\Omega(\mathrm{X}) = \prod_1^s \mathrm{S}_{\lambda_i}(\mathrm{X})$ $(\mathrm{X} \in \mathfrak{g})$. Soit $\mathcal{W}$ l'ouvert de $\mathfrak{g}$ formé des points X tels que les valeurs propres imaginaires pures de $\operatorname{ad}(\mathrm{X})$ soient de module $< 2\pi$ (si G est exponentiel, on a $\mathfrak{g} = \mathcal{W}$). Alors $q_\Omega(\mathrm{X}) > 0$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{W} \cap \mathfrak{m}(\Omega)$. [On peut même choisir les λ_i de telle sorte que $q_\Omega(\mathrm{X}) > 0$ pour $\mathrm{X} \in \mathcal{W}$.] Nous prouvons la proposition suivante :

Soit T *une représentation unitaire irréductible d'un groupe résoluble connexe* G, *exponentiel ou* ad-*algébrique. Il existe une orbite* Ω *de* G *dans* $\mathfrak{g}^*$ *telle que l'on ait la proposition* $\mathrm{P}(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \Omega, \mathcal{W}, q_\Omega)$. [Nous avons déjà remarqué que seule la restriction de q_Ω à $\mathfrak{m}(\Omega) \cap \mathcal{W}$ était intéressante, et celle-ci est définie sans ambiguïté.]

Cette proposition, jointe au théorème de [5], a un corollaire important pour l'analyse harmonique sur G. Pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ posons

$$p(\mathrm{X}) = \det \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ad}\mathrm{X}\right)}{\frac{1}{2}\operatorname{ad}\mathrm{X}}.$$

La fonction p est positive et on note q sa racine carrée, qui est une fonction positive G-invariante dans $\mathfrak{g}$, et dont la restriction à $\mathcal{W}$ est analytique et strictement positive. Si l'on note j_d la densité de la mesure de Haar à droite sur G par rapport à la mesure euclidienne sur $\mathfrak{g}$, normalisée par la condition $j_d(0) = 1$, et j_g la fonction sur $\mathfrak{g}$ définie de manière analogue en remplaçant droite par gauche, alors $q = (j_g j_d)^{(1/4)}$. Il résulte du théorème de [5] que si Ω est une orbite de dimension maximale, alors la restriction de q à $\mathfrak{m}(\Omega) \cap \mathcal{W}$ est égale à celle de q. Donc si l'orbite Ω de la proposition est de dimension maximale, alors on a la propriété $P(G, T, \Omega, \mathcal{W}, q)$ avec la même fonction q pour toutes les orbites de dimension maximale. Ceci avait été conjecturé par Kirillov ([1]).

La démonstration de la proposition, qui suit de près [10], utilise [1]. En fait, il est très probable que lorsque les démonstrations de [1] seront connues, on pourra démontrer la propriété $P(G, T, \Omega, \mathcal{W}, q_\Omega)$ pour toutes les représentations T d'un groupe résoluble connexe (non nécessairement de type I) obtenues par induction holomorphe à partir d'une orbite entière Ω' qui se déduit de Ω comme il est indiqué dans le chapitre II.

Ces résultats ont été annoncés dans une Note (*cf.* [4]), sous une forme probablement incorrecte.

CHAPITRE I.

Un lemme sur les orbites de la représentation coadjointe.

Soit G un groupe de Lie réel connexe. Nous conservons les notations de l'introduction. Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^\star$ et soit $f \in \Omega$.

Lemme I.1. — *Soit $\mathfrak{i}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{g}(f)$. Soit $\mathfrak{k}$ le stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ de la restriction de f à $\mathfrak{i}$. Soit K le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Alors $Kf \subset \Omega$ est un ouvert de $f + \mathfrak{i}^\perp$.*

Démonstration. — La forme B_f a pour noyau $\mathfrak{g}(f)$. Par définition, $\mathfrak{k}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{i}$ par rapport à cette forme. Comme $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{i}$, on voit que $\mathfrak{i}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ par rapport à B_f, et donc que $\mathfrak{k}f = \mathfrak{i}^\perp$. Le groupe K stabilise $f|\mathfrak{i}$, et on a donc $Kf \subset f + \mathfrak{i}^\perp$. Comme l'application tangente à l'application $k \to kf$ de K dans $f + \mathfrak{i}^\perp$ est surjective, Kf est un voisinage de f dans $f + \mathfrak{i}^\perp$. Soit $f' \in Kf$. Alors $f|\mathfrak{i} = f'|\mathfrak{i}$, et donc Kf' (qui est égal à Kf) est un voisinage de tous ses points dans $f + \mathfrak{i}^\perp$, et donc est ouvert.

L'exemple du groupe résoluble non commutatif de dimension 2 avec $\mathfrak{i} = 0$ montre que l'on n'a pas toujours $f + \mathfrak{i}^\perp \subset \Omega$.

Proposition I.1. — *Soit $\mathfrak{i}$, un idéal contenant $\mathfrak{g}(f)$ et tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ soit nilpotent. Alors $f + \mathfrak{i}^\perp \subset \Omega$.*

Nous commençons par rassembler quelques lemmes utilisés dans la démonstration de la proposition.

([1]) J'apprends que M. Pukanszky a prouvé ceci lorsque les racines de $\mathfrak{g}$ sont réelles.

LEMME I.2 (*cf.* [6], § 2). — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{g}$. *Posons* $m = f|\mathfrak{a}$. *Soient* H *le centralisateur de* m *dans* G *et* $\mathfrak{h}$ *son algèbre de Lie. Soit* Ω_m *l'ensemble des points de* Ω *qui se projettent sur* m. *Alors* $f + \mathfrak{h}^{\perp}$ *est contenu dans* Ω_m.

Posons $f' = f|\mathfrak{h}$. *Soit* ω *la* H-*orbite de* f' *dans* $\mathfrak{h}^{\star}$. *Soient* $\mathfrak{t}$ *un supplémentaire de* $\mathfrak{h}$ *dans* $\mathfrak{g}$ *et* s *une section de* G/H *dans* G. *Identifions* $\mathfrak{h}^{\star}$ et $\mathfrak{t}^{\perp}$. *Alors l'application* $(f_1, f_2) \to f_1 + f_2$ *de* $\mathfrak{g}^{\star} \times \mathfrak{g}^{\star}$ *dans* $\mathfrak{g}$ *induit une bijection de* $\omega \times \mathfrak{h}^{\perp}$ *sur* Ω_m, *et l'application* $(g\mathrm{H}, f_1, f_2) \to s(g\mathrm{H})(f_1 + f_2)$ *est une bijection de* $\mathrm{G/H} \times \omega \times \mathfrak{h}^{\perp}$ *sur* Ω.

Réciproquement, si l'on se donne $m \in \mathfrak{a}^{\star}$ *et une orbite* ω *de* H *dans* $\mathfrak{h}^{\star}$ *dont la projection sur* $\mathfrak{a}^{\star}$ *est* $\{m\}$, *alors l'image réciproque de* ω *dans* $\mathfrak{g}^{\star}$ *est contenue dans une* G-*orbite*.

LEMME I.3. — *On garde les hypothèses et les notations du lemme* I.2. *On a :*

(*i*) $\mathfrak{h}(f') = \mathfrak{a} + \mathfrak{g}(f)$.

(ii) B_f *induit une forme bilinéaire non dégénérée sur* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}(f')/\mathfrak{g}(f)$.

Démonstration. — Par définition, $\mathfrak{h}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ par rapport à B_f. L'orthogonal de $\mathfrak{h}$ par rapport à B_f est donc $\mathfrak{a} + \mathfrak{g}(f)$. Mais il est aussi égal à $\mathfrak{h}(f')$, par définition de $\mathfrak{h}(f')$. On a donc prouvé (i). Le point (ii) résulte de ce que $\mathfrak{g}(f)$ est l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ par rapport à B_f et $\mathfrak{h}(f')$ celui de $\mathfrak{h}$.

LEMME I.4. — *On garde les hypothèses et les notations du lemme* I.2. *On suppose que* $\mathfrak{a}$ *contient un idéal* $\mathfrak{z}$ *contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$ *et tel que* $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ *soit un idéal non nul minimal de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ *non contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. *Soit* $\mathfrak{j}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$ *contenant* $\mathfrak{g}(f)$ *et tel que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ *soit nilpotent. Alors* $\mathfrak{j}$ *contient* $\mathfrak{a}$.

Démonstration. — Supposons que $\mathfrak{a}$ ne soit pas contenu dans $\mathfrak{j}$. On a $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{j}$, car $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}(f)$. Comme $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ est minimal, ceci prouve que $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z}$. Donc $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ s'identifie à un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$ qui est minimal et non contenu dans le centre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{j}$, car $\mathfrak{j}$ est dans le noyau de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$. Comme un idéal minimal d'une algèbre de Lie nilpotente est central, on aboutit à une contradiction.

Démonstration de la proposition I.1. — Elle se fait pas récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, le cas où la dimension de $\mathfrak{g}$ est 1 étant immédiat. On suppose donc que $\dim \mathfrak{g} > 1$ et que la proposition est démontrée pour toutes les algèbres de Lie de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$. On examine les différents cas qui peuvent se présenter.

1. On suppose que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Alors $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$, et la proposition est triviale.

2. On suppose que $f^\perp$ contient un idéal non nul $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}(f)$. En effet, si $Y \in \mathfrak{a}$, on a $[X, Y] \in \mathfrak{a}$ et donc $B_f(X, Y) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ et soit H un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Si l'on identifie $\mathfrak{h}^\star$ et $\mathfrak{a}^\perp$, alors Ω est aussi une H-orbite dans $\mathfrak{h}^\star$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à H, Ω et $\mathfrak{i}/\mathfrak{a}$, ce qui prouve que $f + \mathfrak{i}^\perp \subset \Omega$.

3. On suppose que l'on n'est pas dans le cas 2 et que $\mathfrak{g}$ contient un idéal abélien non nul minimal $\mathfrak{a}$ non contenu dans son centre.

Posons $m = f|\mathfrak{a}$. Alors $m \neq 0$, et, avec les notations du lemme I.2, $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. En effet, les hypothèses faites sur $\mathfrak{a}$ entraînent que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$ est irréductible et non triviale. Il en est donc de même de la représentation contragrédiente dans $\mathfrak{a}^\star$. Le stabilisateur d'un élément non nul de $\mathfrak{a}^\star$ ne peut donc être $\mathfrak{g}$ tout entier. Il résulte du lemme I.4, appliqué avec $\mathfrak{z} = \{0\}$, que $\mathfrak{i}$ contient $\mathfrak{a}$. Le lemme I.3 entraîne alors la relation $\mathfrak{h}(f') \subset \mathfrak{i}$. Posons $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{h}$. Il est clair que $\mathfrak{h}/\mathfrak{i}'$ est nilpotent. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{h}$, ω, $\mathfrak{i}'$. Il faut distinguer l'orthogonal de $\mathfrak{i}'$ dans $\mathfrak{h}^\star$ et dans $\mathfrak{g}^\star$. Notons le premier $\mathfrak{i}_1'^\perp$ et le second $\mathfrak{i}'^\perp$. L'hypothèse de récurrence entraîne que $\mathfrak{i}_1'^\perp + f' \subset \omega$. Le lemme I.2 entraîne alors que $\mathfrak{i}'^\perp + f \subset \Omega$. Et comme $\mathfrak{i}' \subset \mathfrak{i}$, on voit finalement que $\mathfrak{i}^\perp + f \subset \Omega$.

4. Si l'on n'est pas dans un des cas 1, 2 ou 3, le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 et $f(\mathfrak{z}) \neq \{0\}$. On suppose que $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est semi-simple. Alors on voit facilement que $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$, et donc dans ce cas la proposition est triviale.

5. On suppose que l'on n'est pas dans un des cas 1 à 4. On suppose que $\mathfrak{g}$ contient un idéal abélien $\mathfrak{a}$ contenant $\mathfrak{z}$, et tel que $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ soit un idéal minimal non central de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

Posons $m = f|\mathfrak{a}$. Avec les notations du lemme I.2, on a $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. En effet, dans le cas contraire, $f^\perp \cap \mathfrak{a}$ serait un idéal non nul contenu dans $f^\perp$. On déduit du lemme I.4 que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{i}$. Le lemme I.3 entraîne que $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{h}$ contient $\mathfrak{h}(f')$. Gardons les notations de 3. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{h}$, ω et $\mathfrak{i}'$. On en déduit que $\mathfrak{i}_1'^\perp + f' \subset \omega$ et le lemme I.2 prouve que $\mathfrak{i}'^\perp + f \subset \Omega$ et donc que $\mathfrak{i}^\perp + f \subset \Omega$.

6. On suppose que l'on n'est pas dans un des cas 1 à 5. On suppose que $\mathfrak{g}$ contient un idéal abélien $\mathfrak{a}$ de dimension 2 tel que $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ soit contenu dans le centre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

On pose $m = f|\mathfrak{a}$. Avec les notations du lemme I.2, on a $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$, car dans le cas contraire $f^\perp \cap \mathfrak{a}$ serait un idéal non trivial. Soit e_1, e_2 une base de $\mathfrak{a}$ telle que $e_1 \in \mathfrak{z}$, $f(e_1) = 1$ et $f(e_2) = 0$. L'image de G dans Aut $(\mathfrak{a})$ est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(x \in \mathbf{R})$, et donc, si $e_1^* \, e_2^*$ est la base duale de $\mathfrak{a}^*$, alors M, l'orbite de m dans $\mathfrak{a}^*$, est la droite $e_1^* + \mathbf{R} e_2^*$. Posons $\mathfrak{i}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{i}$. Si $\mathfrak{i}'$ contient $\mathfrak{a}$, alors, d'après le lemme I.3, $\mathfrak{i}'$ contient $\mathfrak{h}(f')$, et le lemme I.2 et l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{h}$, ω, $\mathfrak{i}'$ entraînent que $f + \mathfrak{i}^\perp \subset \Omega$. On suppose maintenant que $\mathfrak{i}'$ ne contient pas $\mathfrak{a}$. Dans ce cas, $\mathfrak{i}' \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z}$. Posons $\mathfrak{i}'' = \mathfrak{i}' + \mathfrak{a}$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{h}$, ω et $\mathfrak{i}''$. Il résulte alors du lemme I.2 que $f + \mathfrak{i}''^\perp \subset \Omega$. Notons P l'espace affine $f + \mathfrak{i}^\perp$. Alors P contient $\mathrm{P} \cap (f + \mathfrak{i}''^\perp)$ qui est la partie de P au-dessus de m, ou encore $\mathrm{P} \cap e_2^\perp$, et donc de codimension 1 dans P. Notons, comme dans le lemme I. 1, K le stabilisateur connexe de $f|\mathfrak{i}$ dans G. D'après le lemme I. 1, Kf est ouvert dans P, et sa projection sur M est donc ouverte. L'image de K dans Aut $(\mathfrak{a})$ est donc non triviale, et donc est le groupe $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(x \in \mathbf{R})$ tout entier. Soit $m' \in \mathrm{M}$. Il existe un élément $k \in \mathrm{K}$ tel que $km = m'$. Comme K stabilise P, l'espace $k(f + \mathfrak{i}''^\perp) \cap \mathrm{P}$ est un sous-espace affine de $\mathrm{P}_{m'}$ (la fibre de P au-dessus de m') et de même dimension. On en déduit que $\mathrm{P}_{m'}$ est contenu dans Ω et donc que P est contenu dans Ω puisque P est la réunion des $\mathrm{P}_{m'}$.

7. On suppose que l'on n'est pas dans un des cas 1 à 6.

Alors le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 et $f(\mathfrak{z}) \neq \{0\}$. Il existe un idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$, non abélien et tel que $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ soit un idéal abélien minimal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. Posons $\mathfrak{m} = f^\perp \cap \mathfrak{n}$. Soit $e_0 \in \mathfrak{z}$ un point tel que $f(e_0) = 1$. On définit une forme bilinéaire alternée σ sur $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ en posant $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \sigma(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\, e_0\, (\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{m})$. (Comme $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ est commutatif, on a bien $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \in \mathfrak{z}$.) La forme σ est non dégénérée, car sinon son noyau aurait pour image dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ un idéal non nul strictement contenu dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$. L'idéal $\mathfrak{n}$ admet donc une base $e_0, \ldots, e_{2n}$ avec la table de multiplication $[e_i, e_{j+n}] = \delta_{ij} e_0$ $(1 \leq i, j \leq n)$, les autres crochets étant nuls ou déduits des précédents par anti-symétrisation. Un tel idéal est dit nilpotent spécial. Dans cette situation, on a les résultats suivants (*cf.* [7]) :

Lemme I.5. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe simplement connexe. On suppose que* $\mathfrak{g}$ *contient un idéal nilpotent spécial* $\mathfrak{n}$ *de centre* $\mathfrak{z}$ *et que* $\mathfrak{z}$ *est contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$. *Soit* $\mathfrak{m}$ *un supplémentaire de* $\mathfrak{z}$ *dans* $\mathfrak{n}$. *Soient* G' *le stabilisateur de* $\mathfrak{m}$ *dans* G, *et* $\mathfrak{g}'$ *son algèbre de Lie. Alors* $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}'$, *de sorte que l'on peut identifier* $\mathfrak{g}^*$ *et* $\mathfrak{m}^* \oplus \mathfrak{g}'^*$. *Le groupe* G' *est connexe et simplement connexe. Soit* Ω *une orbite de* G *dans* $\mathfrak{g}^*$ *dont la projection sur* $\mathfrak{z}^*$ *n'est pas* $\{0\}$.

Alors $\Omega \cap \mathfrak{g}'^{\star} = \omega$ *est une orbite de* G′ *dans* $\mathfrak{g}'^{\star}$, *et l'application* $(X, f_1) \to \exp(\operatorname{ad} X) f_1$ *de* $\mathfrak{m} \times \omega$ *dans* $\mathfrak{g}^{\star}$ *est une bijection de* $\mathfrak{m} \times \omega$ *sur* Ω.

Revenons à la démonstration du point 7. Avec les notations du lemme I.5, on a $f \in \omega = \Omega \cap \mathfrak{g}'^{\star}$. Il suffit donc de prouver que $f + \mathfrak{i}^{\perp} \subset \omega$. Posons $\mathfrak{i}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{i}$. Alors il résulte du lemme I.5 que $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}'(f)$ et donc que $\mathfrak{i}'$ contient $\mathfrak{g}'(f)$. Il est clair que $\mathfrak{g}'/\mathfrak{i}'$ est nilpotent, et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}'$, ω et $\mathfrak{i}'$. On en déduit que $f + (\mathfrak{i}'^{\perp} \cap \mathfrak{g}'^{\star}) \subset \omega$. Remarquons maintenant que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{i}$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{i} = \mathfrak{z}$. Mais $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ est un idéal non central de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, car sinon $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ serait de dimension 1 puisque $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ est minimal non nul, ce qui contredit le fait que la dimension de $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ est paire. Donc l'image de $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ serait un idéal minimal non central de $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$, ce qui contredit le fait que $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ est nilpotent. On en déduit que $\mathfrak{i}^{\perp} = \mathfrak{i}'^{\perp} \cap \mathfrak{g}'^{\star}$, et donc que $f + \mathfrak{i}^{\perp} \subset \omega$, ce qui termine la démonstration de la proposition.

La proposition I.1 montre que Ω est fibré par des espaces affines parallèles à $\mathfrak{i}^{\perp}$, car pour tout $f' \in \Omega$, on a $\mathfrak{g}(f') \subset \mathfrak{i}$. Choisissons un supplémentaire de $\mathfrak{i}^{\perp}$ dans $\mathfrak{g}^{\star}$, ce qui permet de considérer que $\mathfrak{i}^{\star}$ est contenu dans $\mathfrak{g}^{\star}$. Soit Λ la projection de Ω sur $\mathfrak{i}^{\star}$. L'application $(f_1, f_2) \to f_1 + f_2$ de $\mathfrak{i}^{\perp} \times \Lambda$ dans Ω est un difféomorphisme.

Ceci est vrai en particulier si l'on prend pour $\mathfrak{i}$ l'idéal $\mathfrak{m}(\Omega) = \mathfrak{g}(f) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (qui ne dépend que de Ω et non du choix de $f \in \Omega$). Soit df_1 une mesure euclidienne sur $\mathfrak{m}(\Omega)^{\perp}$. Dans ce cas la proposition I.1 admet le complément suivant :

PROPOSITION I.2. — *Il existe une mesure* G-*invariante* ν *sur* Λ *telle que*

$$d\beta_{\Omega}(f_1 + f_2) = df_1\, d\nu(f_2).$$

Prouvons d'abord deux lemmes.

LEMME I.6. — *Soit* $\mathfrak{i}$ *un idéal nilpotent contenant* $\mathfrak{g}(f)$ *et soit* K *le centralisateur de* $f|\mathfrak{i}$ *dans* G. *Alors* K *stabilise* $\mathfrak{g}(f)$.

Démonstration. — Il faut montrer que si $k \in K$ et $X \in \mathfrak{g}(f)$, alors on a $\langle f, [kX, Y] \rangle = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. On a

$$\langle f, [kX, Y] \rangle = \langle k^{-1} f, [X, k^{-1} Y] \rangle = \langle f + f_1, [X, Y'] \rangle, \qquad \text{où} \quad f_1 \in \mathfrak{i}^{\perp} \quad \text{et} \quad Y' \in \mathfrak{g}.$$

On a

$$\langle f, [X, Y'] \rangle = 0 \quad \text{car } X \in \mathfrak{g}(f) \qquad \text{et} \qquad \langle f_1, [X, Y'] \rangle = 0.$$

En effet, $[X, Y'] \in \mathfrak{i}$ car $\mathfrak{i}$ est un idéal contenant $\mathfrak{g}(f)$. On a donc $\langle f, [kX, Y] \rangle = 0$, ce qui démontre le lemme.

LEMME I.7. — *Soit* $G(f)$ *le stabilisateur de* f *dans* G, *et* K *celui de* $f \mid \mathfrak{m}(\Omega)$. *Alors* G/K *possède une mesure* G-*invariante non nulle et* $K/G(f)$ *possède une mesure* K-*invariante non nulle.*

Démonstration. — Soit $k \in K$. Nous savons d'après le lemme précédent que $\operatorname{Ad} k$ stabilise $\mathfrak{g}(f)$. Nous allons prouver que $\det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)} k) = 1$. Comme B_f induit une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$, il suffit de prouver que $\operatorname{Ad} k$ laisse B_f invariante [ce qui redémontrera d'ailleurs le lemme I.6 dans le cas où $\mathfrak{j} = \mathfrak{m}(\Omega)$]. On a

$$\langle f, [kX, kY] \rangle = \langle f, k[X, Y] \rangle = \langle k^{-1} f, [X, Y] \rangle = \langle f + f_1, [X, Y] \rangle,$$

où f_1 est un élément de $\mathfrak{m}(\Omega)^\perp$. On a donc

$$\langle f_1, [X, Y] \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle f, [kX, kY] \rangle = \langle f, [X, Y] \rangle,$$

ce qui démontre notre assertion.

Remarquons maintenant que B_f induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}(\Omega) \times \mathfrak{k}/\mathfrak{g}(f)$ (ici, $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K). On en déduit que, puisque $\operatorname{Ad} k$ laisse B_f invariante, les applications $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}(\Omega)} k$ et $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{g}(f)} k$ sont transposées par rapport à B_f. Comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}(\Omega)$ est abélienne et comme K est contenu dans le groupe connexe G, on en déduit que $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}(\Omega)} k = 1$ et donc que $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{g}(f)} k = 1$.

En particulier, si $g \in G(f)$, on a $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{g}(f)} g = 1$, ce qui, d'après la théorie des espaces homogènes de groupe de Lie, entraîne que $K/G(f)$ possède une mesure K-invariante non nulle.

Soit toujours $k \in K$. Des égalités $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{g}(f)} k = 1$ et $\det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)} k) = 1$, on déduit que $\det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} k) = 1$, ce qui entraîne que G/K possède une mesure G-invariante non nulle.

Démonstration de la proposition I.2. — Soient $d'g$, $d''g$ et $d'k$ des mesures invariantes non nulles sur $G/G(f)$, G/K et $K/G(f)$ (avec les notations du lemme I.7). Si ces mesures sont convenablement normalisées, on aura, pour toute fonction φ, β_Ω-intégrable sur Ω :

$$\int_\Omega \varphi(f') = d\beta_\Omega(f') = \int_{G/G(f)} \varphi(gf)\, d'g = \int_{G/K} \int_{K/G(f)} \varphi(gkf)\, d''g\, d'k.$$

Identifions Λ et G/K, et soit ν la mesure (G-invariante) sur Λ qui correspond à $d''g$. Soit s une section de Λ dans G. On a

$$\int_\Omega \varphi(f')\, d\beta_\Omega(f') = \int_\Lambda \int_{K/G(f)} \varphi(s(f_2)\, kf)\, d\nu(f_2)\, d'k.$$

Pour prouver la proposition, il nous suffit donc d'établir le résultat suivant : il existe une constante c telle que

$$\int_{K/G(f)} \varphi(s(f_2)\,kf)\,d'k = c\int_{\mathfrak{m}(\Omega)^{\perp}} \varphi(f_2+f_1)\,df_1.$$

Montrons d'abord qu'il existe une constante c telle que

$$\int_{K/G(f)} \varphi(s(f_2)\,kf)\,d'k = c\int_{\mathfrak{m}(\Omega)^{\perp}} \varphi(s(f_2)\,(f+f_1))\,df_1.$$

Pour ceci, il suffit de prouver que l'image de $d'k$ par l'application $k\to kf$ est une mesure euclidienne sur l'espace affine $f+\mathfrak{m}(\Omega)^{\perp}$. Pour ceci on remarque que K induit dans $f+\mathfrak{m}(\Omega)^{\perp}$ le groupe des translations et donc que l'image réciproque de la mesure euclidienne sur $K/G(f)$ est une mesure invariante. Comme il existe (à un facteur constant près) au plus une mesure invariante sur un espace homogène, ceci démontre notre assertion.

Pour démontrer la proposition, il reste à prouver que

$$\int_{\mathfrak{m}(\Omega)^{\perp}} \varphi(s(f_2)\,(f+f_1))\,df_1 = \int_{\mathfrak{m}(\Omega)^{\perp}} \varphi(f_2+f_1)\,df_1,$$

ce qui résulte du fait que $\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}(\Omega)}s(f_2)) = 1$.

CHAPITRE II.

Rappel de résultats de Kirillov et de Pukanszky.

Ici, nous voulons décrire les théorèmes de réduction dont nous avons besoin au chapitre IV. Dans ce chapitre, G est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous conservons les notations de l'introduction.

Théorème II.1. — *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, et soit $m\in\mathfrak{a}^*$. Soient* H *le stabilisateur de m dans* G, *et $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Soit H_0 la composante neutre de* H, *et soit H_1 un sous-groupe tel que $H_0\subset H_1\subset H$. Soit* U *une représentation unitaire irréductible de H_1 dont la restriction U_0 à H_0 reste irréductible. Soit ω_0 une orbite de H_0 dans $\mathfrak{h}^*$ dont la projection sur $\mathfrak{a}^*$ est $\{m\}$ et dont le stabilisateur dans* H *est H_1. Soit $\mathcal{V}'$ un voisinage ouvert de* 0 *dans $\mathfrak{h}$, H_1-invariant et dans lequel* exp *est régulière. Soit p' une fonction analytique dans $\mathcal{V}'$, ne s'annulant pas et H_1-invariante. On suppose que l'on a la propriété* $P(H_0, U_0, \omega_0, \mathcal{V}', p')$.

Soit $\mathcal{V}$ *un voisinage ouvert de* o *dans* $\mathfrak{g}$, G-*invariant et tel que* exp *soit un difféomorphisme de* $\mathcal{V}$ *sur* $\exp(\mathcal{V})$ *et de* $\mathcal{V}\cap\mathfrak{h}$ *sur* $\exp(\mathcal{V})\cap H_1$, *et tel que* $\mathcal{V}\cap\mathfrak{h}\subset\mathcal{V}'$. *On suppose que la fonction*

$$p(Y) = p'(Y)\det\frac{\operatorname{sh}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\left(\frac{1}{2}Y\right)}{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\left(\frac{1}{2}Y\right)} \qquad (Y\in\mathcal{V}')$$

se prolonge en une fonction dans $\mathcal{V}$, *analytique*, G-*invariante et ne s'annulant pas. Notons encore p un tel prolongement.*

Soit Ω *la* G-*orbite dans* $\mathfrak{g}^*$ *qui contient l'image réciproque de* ω_0 *dans* $\mathfrak{g}^*$ (lemme I.2). *On suppose que la représentation* T *de* G *induite par* U *est irréductible. On a alors la propriété* $P(G, T, \Omega, \mathcal{V}, p)$.

Le théorème est démontré dans [6], sous l'hypothèse que H est connexe (et sans préciser qu'il faut en général se restreindre à des voisinages de o dans $\mathfrak{g}$) (*cf.* la démonstration du théorème 1 de [6]). Le théorème est démontré (mais non énoncé explicitement) dans [10] (*cf.* en particulier les sections 5.2 à 5.6). Pour la commodité du lecteur, nous écrivons la démonstration, du moins les points qui ne figurent pas dans [6].

Lemme II.1. — *On garde les notations du théorème* II.1. *Posons* $N = G/H_1$. *Soient dg et dh des mesures de Haar invariantes à gauche sur* G *et* H_1. *Soit s une section de* N *dans* G, *différentiable par morceaux. Soit* $\mathfrak{t}$ *un supplémentaire de* $\mathfrak{h}$ *dans* $\mathfrak{g}$. *Les mesures dg et dh déterminent des formes extérieures de degré maximal* α *et* α' *sur* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h}$. *Soit* α'' *une forme extérieure sur* $\mathfrak{t}$ *telle que* $\alpha'\wedge\alpha'' = \alpha$. *Posons* $n_0 = \{H_1\}$. *On identifie* $\mathfrak{t}$ *et l'espace tangent* T_{n_0} *à* N *en* n_0. *Si* $n\in N$, *l'application tangente à* $s(n)$ (*opérant sur* N) *définit un isomorphisme de* T_{n_0} *sur* T_n, *et donc une forme extérieure sur* T_n *dont l'image réciproque est* α''. *On définit une mesure dn sur* N *au moyen de cette forme.*

Les espaces $\mathfrak{h}^\perp$ *et* $\mathfrak{t}$ *sont en dualité. Soit* df_2 *la mesure sur* $\mathfrak{h}^\perp$ *pour laquelle on a la formule d'inversion*

$$(2\pi)^{-\dim\mathfrak{t}}\int_{\mathfrak{h}^\perp}\int_{\mathfrak{t}} v(X)\exp(i\langle f_2, X\rangle)\,d\alpha''(X)\,df_2 = v(o) \qquad (v\in\mathcal{D}(t)).$$

Identifions $\mathfrak{h}^*$ *et* $\mathfrak{t}^\perp$. *Alors l'application de* $N\times\omega_0\times\mathfrak{h}^\perp$ *dans* Ω *définie par* $(n, f_1, f_2)\to s(n)(f_1+f_2)$ *est une bijection et l'on a*

$$d\beta_\Omega(s(n)(f_1+f_2)) = (2\pi)^{-\dim\mathfrak{t}}dn\,d\beta_{\Omega_0}(f_1)\,df_2.$$

Démonstration. — Soit s_1 une section de H/H_1 dans H. On choisit une section s_2 de $M = G/H$ dans G. Si $n\in N$, et si m est l'image de n dans M, on a

$$s(n)\,\mathrm{H} = \bigcup_{h \in \mathrm{H}/\mathrm{H}_1} s_2(m)\, s_1(h)\, \mathrm{H}_1.$$

L'hypothèse faite sur H_1 entraîne que $\omega = \bigcup_{h \in \mathrm{H}/\mathrm{H}_1} s_1(h)\,\omega_0$ est l'orbite de H dans $\mathfrak{h}^\star$. Plus précisément, l'application de $\omega_0 \times \mathrm{H}/\mathrm{H}_1$ dans ω définie par $(f_1, h) \to s_1(h)\, f_1$ est une bijection. Il résulte alors du lemme I.2 que l'application $(n, f_1, f_2) \to s(n)\,(f_1 + f_2)$ est une bijection de $\mathrm{N} \times \omega_0 \times \mathfrak{h}^\perp$ sur Ω. Pour comparer les mesures, on procède exactement comme dans le lemme 7 de [6], ou la section 5.6 de [10].

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de la représentation U. D'après la définition des représentations induites, on peut supposer que T est réalisée dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur N à valeurs dans $\mathcal{H}$, de sorte que si $g \in \mathrm{G}$ et $\varphi \in \mathrm{L}^2(dn, \mathcal{H})$, on a

$$(\mathrm{T}(g)\,\varphi)\,(n) = \left(\frac{d(g^{-1}n)}{dn}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{U}(h^{-1})\,\varphi(g^{-1}n),$$

où l'on a posé $g^{-1}\,s(n) = s(g^{-1}n)\,h$.

Soit $g \in \mathrm{G}$. On pose $\delta_{\mathrm{G}}(g) = |\det \mathrm{Ad}(g)|$. Soit $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$. On pose $d(\exp \mathrm{X}) = j_{\mathrm{G}}(\mathrm{X})\, d\mathrm{X}$ et on suppose que les mesures sont normalisées de telle sorte que $j_{\mathrm{G}}(0) = 1$. De même, si $h \in \mathrm{H}$ et si $\mathrm{Y} \in \mathfrak{h}$, on définit $\delta_{\mathrm{H}}(h)$ et $j_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y})$. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$. Soit α' la fonction sur G nulle en dehors de $\exp(\mathcal{V})$ et telle que $\alpha'(\exp \mathrm{X}) = \alpha(\mathrm{X})\, j_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{X})$ pour $\mathrm{X} \in \mathcal{V}$. On a alors

$$\mathrm{T}(\alpha) = \mathrm{T}(\alpha') = \int_{\mathrm{G}} \alpha'(g)\, \mathrm{T}(g)\, dg.$$

On peut écrire $\mathrm{T}(\alpha')$ comme un opérateur intégral. Procédant comme dans la démonstration du théorème 1 de [6], on trouve que si $\mathrm{T}(\alpha)$ a une trace, alors pour presque tout $n \in \mathrm{N}$, l'opérateur

$$\mathrm{A}(n) = \int_{\mathrm{H}} \alpha'(s(n)^{-1} h s(n))\, \delta_{\mathrm{G}}(s(n)^{-1})\, \delta_{\mathrm{H}}(h)^{\frac{1}{2}} \delta_{\mathrm{G}}(h)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{U}(h)\, dh$$

a une trace, et que $\operatorname{tr} \mathrm{T}(\alpha) = \int_{\mathrm{N}} \operatorname{tr} \mathrm{A}(n)\, dn$.

Remarquons maintenant que $s(n)^{-1} h s(n) \in \exp(\mathcal{V})$ entraîne $h \in \exp(\mathcal{V})$, puisque $\mathcal{V}$ est G-invariant, et donc que h s'écrit d'une manière unique sous la forme $h = \exp \mathrm{Y}$ avec $\mathrm{Y} \in \mathcal{V}'$, à cause des hypothèses faites sur $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$. On a donc

$$\mathrm{A}(n) = \int_{\mathfrak{h}} \alpha'(\exp(\mathrm{Ad}\, s(n)^{-1} \mathrm{Y}))\, \delta_{\mathrm{G}}(s(n)^{-1})\, \delta_{\mathrm{H}}(\exp \mathrm{Y})^{\frac{1}{2}} \delta_{\mathrm{G}}(\exp \mathrm{Y})^{-\frac{1}{2}} \mathrm{U}(\exp \mathrm{Y})\, d\mathrm{Y}.$$

Raisonnant comme dans [6], p. 141 et 142, on trouve

$$\operatorname{tr} T(\alpha) = (2\pi)^{-\dim \mathfrak{t}} \int_{N} \int_{\omega_0} \int_{\mathfrak{h}^{\perp}} \int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)$$
$$\times \exp(i\langle s(n)(f_1+f_2), X\rangle)\, p(X)^{-1}\, dn\, d\beta_{\omega_0}(f_1)\, df_2\, dX$$

et, compte tenu du lemme 1,

$$\operatorname{tr} T(\alpha) = \int_{\Omega} \int_{\mathfrak{g}} \alpha(X) \exp(i\langle f, X\rangle)\, p(X)^{-1}\, dX\, d\beta_{\Omega}(f).$$

C. Q. F. D.

Théorème II.2. — *On suppose que* G *est simplement connexe et que* $\mathfrak{g}$ *contient un idéal nilpotent spécial* $\mathfrak{n}$ [*avec une base* $e_0, \ldots, e_{2n}$ *telle que* $[e_i, e_{j+n}] = \delta_{ij} e_0$ $(1 \leq i, j \leq n)$]. *On pose* $\mathfrak{z} = \mathbf{R} e_0$. *On suppose que* $\mathfrak{z}$ *est contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$. *Soit* T *une représentation unitaire irréductible de* G *dont la restriction à* $\exp(\mathfrak{z}) = Z$ *est non triviale. Elle définit un caractère* χ *de* Z. *On pose* $\mathfrak{m} = \sum_{1}^{2n} \mathbf{R} e_i$. *Soit* G′ *le stabilisateur de* $\mathfrak{m}$ *dans* G *et soit* $\mathfrak{g}'$ *son algèbre de Lie* (*cf.* le lemme I.5).

Soit V_χ *une représentation unitaire irréductible* (*déterminée à une équivalence près*) *de* $N = \exp(n)$ *dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}_1$, *dont la restriction à* Z *est* χ. *On construit de manière canonique* [*au moyen de l'application naturelle de* G′ *dans le revêtement simplement connexe de* Sp ($\mathfrak{m}$)] *une représentation* W *de* G′ *dans* $\mathcal{H}_1$ *telle que*

$$V_\chi(hnh^{-1}) = W_\chi(h)\, V_\chi(n)\, W_\chi(h^{-1}) \qquad (h \in G',\ n \in N).$$

Il existe une représentation unitaire irréductible bien déterminée (*à une équivalence près*) U *de* G′ *dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}_2$ *telle que* T *soit isomorphe à la représentation dans* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ *définie par les relations*

$$\begin{aligned} T(n) &= W_\chi(n) \otimes 1 \qquad && (n \in N),\\ T(h) &= W_\chi(h) \otimes U(h) \qquad && (h \in G'). \end{aligned}$$

On suppose qu'il existe une orbite ω *de* G′ *dans* $\mathfrak{g}'^{\star}$ *dont la projection sur* $\mathfrak{z}^{\star}$ *est le point* $\{\lambda\}$ *tel que* $\chi(\exp X) = e^{i\langle\lambda, X\rangle}$ $(X \in \mathfrak{z})$, *un voisinage ouvert* $\mathcal{V}'$ *de* 0 *dans* $\mathfrak{g}'$, G′-*invariant et dans lequel* exp *est régulière, et une fonction analytique* p' *dans* $\mathcal{V}'$, G′-*invariante et ne s'annulant pas, tels que l'on ait la propriété* P(G′, U, ω, $\mathcal{V}'$, p'). (*Rappelons que d'après le lemme* I.5, G′ *est connexe.*)

Soit $\mathcal{V}$ *l'ensemble des points de* $\mathfrak{g}$ *de la forme* X + Y, *avec* $X \in \mathfrak{m}$ *et* $Y \in \mathcal{V}''$, *où* $\mathcal{V}''$ *est l'ensemble des points* Y *de* $\mathcal{V}'$ *tels que les valeurs propres imaginaires* *pures de* $\mathrm{ad}_m(\mathrm{Y})$ *sont* $< 2\pi$ *Posons*

$$p(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = p'(\mathrm{Y}) \det \frac{\mathrm{sh}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Y}\right)}{\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Y}\right)} \qquad (\mathrm{X} \in \mathfrak{m},\ \mathrm{Y} \in \mathcal{V}'').$$

Alors $\mathcal{V}$ *est un voisinage* G-*invariant de* o *dans* $\mathfrak{g}$, *et p est une fonction analytique*, G-*invariante et ne s'annulant pas dans* $\mathcal{V}$. *Soit* Ω *l'orbite de* G *dans* $\mathfrak{g}^*$ *qui contient* ω (lemme I.5).

Alors on a la propriété P (G, T, Ω, $\mathcal{V}$, p).

Ce théorème est prouvé dans [7]. Lorsqu'on s'en tient aux groupes résolubles ad-algébriques (ce que nous ferons au chapitre IV) il suffit d'utiliser ce théorème lorsque G′ est abélien. Nous avons cependant énoncé le théorème sous sa forme générale pour deux raisons. La première est de laisser prévoir que les résultats du chapitre IV peuvent s'étendre à des groupes non résolubles. La seconde est d'expliquer notre choix de l'orbite Ω associée à la représentation T. Si G′ est abélien, il peut y avoir des choix *a priori* plus naturels d'une représentation W de G′ dans $\mathcal{H}_1$ telle que $\mathrm{W}(hnh^{-1}) = \mathrm{W}(h)\,\mathrm{V}_\chi(n)\,\mathrm{W}(h^{-1})$, d'où finalement un autre choix d'une orbite associée à T (*cf.* [10]). La nécessité d'employer W_χ se comprend mieux si l'on énonce le théorème en général.

CHAPITRE III.

La construction d'Auslander et Kostant.

Dans tout ce chapitre G est un groupe résoluble connexe simplement connexe de type I. Auslander et Kostant ont annoncé dans [1] des résultats qui, à chaque représentation unitaire irréductible T de G, permettent de faire correspondre une orbite Ω de G dans $\mathfrak{g}^*$. Lorsque G est exponentiel ou ad-algébrique, Pukanszky a montré (*cf.* [9] et [10]) qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de o dans $\mathfrak{g}$ et une fonction p ayant les propriétés décrites dans l'introduction tels que l'on ait P(G, T, Ω, $\mathcal{V}$, p). Malheureusement cette fonction p n'a pas la forme générale souhaitée, et en particulier n'est pas toujours positive, lorsque G n'est pas exponentiel. Dans ce chapitre, nous montrons comment il faut modifier la construction de [1] pour aboutir à la formule que nous avons en vue.

Décrivons d'abord les résultats dont nous avons besoin (*cf.* aussi [10], chapitre 3).

A. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. Il existe une sous-algèbre complexe $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$ ayant les propriétés suivantes :

1. $\mathfrak{h}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme bilinéaire B_f sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

2. Le centralisateur $G(f)$ de f dans G stabilise $\mathfrak{h}$.

3. $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

4. La forme $F(X, Y) = i \langle f, [X, \overline{Y}] \rangle$ sur $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ est hermitienne positive de noyau $\mathfrak{h} \cap \overline{\mathfrak{h}}$.

5. Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal de $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$ muni de la forme bilinéaire B_f.

Appelons une telle sous-algèbre une polarisation de f.

B. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des caractères unitaires χ de $G(f)$ tels que $\chi(\exp X) = e^{i\langle f, X\rangle}$ $(X \in \mathfrak{g}(f))$. Alors $\mathcal{E}$ est non vide.

On pose $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$. Soit D le sous-groupe analytique de G correspondant. Posons $A = G(f)\, D$. Alors A est fermé dans G. D'après 2, c'est un groupe dont la composante connexe est D. Soit $\chi \in \mathcal{E}$ et notons encore χ l'unique caractère de A qui prolonge χ et dont la différentielle est $X \to if(X)$ $(X \in \mathfrak{d})$.

Soit R la représentation de G induite par le caractère χ de A. On peut la décrire ainsi. Soit ρ_1 le caractère de A défini par

$$\rho_1(a) = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(a)|^{-\frac{1}{2}} \qquad (a \in A).$$

On sait que sur l'espace des fonctions continues sur G à support compact modulo A et vérifiant $\Theta(ag) = \rho_1(a)^2 \Theta(g)$ $(a \in A$ et $g \in G)$, il existe une fonctionnelle linéaire continue invariante par les translations à droite et notée $\Theta \to \oint_{A \backslash G} \Theta(g)\, dg$. Soit $\mathcal{L}'_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ l'espace des fonctions continues sur G à support compact modulo A et vérifiant $\varphi(ag) = \rho_1(a)\chi(a)\varphi(g)$, muni du produit scalaire $(\varphi, \psi) = \oint_{A \backslash G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}\, dg$. Alors R opère par translations à droite dans le séparé complété $\mathcal{L}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ de $\mathcal{L}'_1(f, \chi, \mathfrak{h})$.

Posons $\mathfrak{e}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$, et soient H et $E_{\mathbf{C}}$ les sous-groupes analytiques de $G_{\mathbf{C}}$ (le groupe simplement connexe d'algèbre $g_{\mathbf{C}}$) d'algèbres $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{e}_{\mathbf{C}}$. Posons $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_{\mathbf{C}} \cap \mathfrak{g}$, et soit E le sous-groupe analytique de G correspondant. Soit U_E un voisinage ouvert de 1 dans E tel que $U_E^{-1} = U_E$ et $H \cap U_E^2 \subset D$. Alors $U = HU_E$ est un ouvert de $E_{\mathbf{C}}$.

Soient $\tilde{\rho}_1$ un caractère holomorphe de H prolongeant ρ_1, et $\tilde{\chi}$ le caractère holomorphe de H dont la différentielle est if. Soient $\varphi \in \mathcal{L}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ et $g \in G$. Alors le nombre $\tilde{\rho}_1(h)\tilde{\chi}(h)\varphi(kg)$ $(h \in H$ et $k \in U_E)$ ne dépend que du produit $hk \in \mathrm{U}$. Soit $\mathcal{H}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ le sous-espace de $\mathcal{L}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ formé des fonctions φ telles que pour tout $g \in \mathrm{G}$ la fonction sur U définie par $hk \to \tilde{\rho}_1(h)\tilde{\chi}(h).\varphi(kg)$ soit holomorphe. C'est un sous-espace fermé G-invariant de $\mathcal{L}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ qui ne dépend pas des différents choix de $\tilde{\rho}_1$ et de U. Notons $\mathrm{T}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ la sous-représentation de G dans l'espace $\mathcal{H}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$. On a alors :

C. Toute représentation unitaire irréductible de G est équivalente à une représentation $\mathrm{T}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$. Toutes les représentations $\mathrm{T}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ sont irréductibles et si $\mathrm{T}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ et $\mathrm{T}_1(f', \chi', \mathfrak{h}')$ sont équivalentes, alors f et f' appartiennent à une même G-orbite Ω dans $\mathfrak{g}^*$. Disons que Ω correspond à $\mathrm{T}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$. Soit une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$. Choisissons $f \in \Omega$ et une polarisation $\mathfrak{h}$ de f. Alors l'application $\chi \to \mathrm{T}_1(f, \chi, \mathfrak{h})$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur l'ensemble des représentations T telles que Ω corresponde à T.

Comme nous l'avons déjà dit, l'orbite Ω qui correspond à T n'est pas adaptée à notre propos, du moins lorsque les racines de $\mathfrak{g}$ peuvent prendre des valeurs propres imaginaires pures (ce qui n'est pas le cas lorsque G est exponentiel). Nous allons maintenant définir une permutation de l'ensemble des orbites. Nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme III.1. — *Soit* V *un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée* B. *Soit* $\mathrm{X} \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ *un élément tel que* $\mathrm{B}(\mathrm{X}x, y) + \mathrm{B}(x, \mathrm{X}y) = 0$ *pour tout* x *et tout* y *appartenant à* V. *Soit* F *la forme hermitienne sur* $\mathrm{V}_{\mathbf{C}} \times \mathrm{V}_{\mathbf{C}}$ *définie par*

$$\mathrm{F}(x, y) = i\mathrm{B}(x, \bar{y}) \qquad (x, y \in \mathrm{V}_{\mathbf{C}}).$$

Soit W *un sous-espace de* $\mathrm{V}_{\mathbf{C}}$ *totalement isotrope maximal pour* B, *stable par* X *et tel que* $\mathrm{F}(x, x) \geq 0$ *si* $x \in \mathrm{W}$. *Alors la trace de* X *dans* $\mathrm{W}/\mathrm{W} \cap \overline{\mathrm{W}}$ *est imaginaire pure et ne dépend pas de* W.

Démonstration. — Remarquons d'abord que $\mathrm{W} \cap \overline{\mathrm{W}}$ est le noyau de la restriction de F à W, et donc que F induit sur $\mathrm{W}/\mathrm{W} \cap \overline{\mathrm{W}}$ une forme hermitienne positive non dégénérée. En effet, l'orthogonal de W par rapport à F est $\overline{\mathrm{W}}$, puisque l'orthogonal de W par rapport à B est W (car W est totalement isotrope maximal par rapport à B). On déduit alors de l'égalité $\mathrm{F}(\mathrm{X}x, y) + \mathrm{F}(x, \mathrm{X}y) = 0 \quad (x, y \in \mathrm{V}_{\mathbf{C}})$ que les valeurs propres de X dans $\mathrm{W}/\mathrm{W} \cap \overline{\mathrm{W}}$ sont imaginaires pures, ce qui prouve la première assertion.

Soit Y la composante semi-simple de X. Alors Y conserve B et laisse stable tout sous-espace de $\mathrm{V}_{\mathbf{C}}$ qui est stable par X. On voit donc qu'il suffit de prouver le lemme en remplaçant X par Y, i. e. qu'on peut supposer que X est semi-simple, ce que nous faisons maintenant. Soit α une valeur propre de X et soit $V_\alpha \subset V_{\mathbf{C}}$ le sous-espace propre correspondant. Posons $V^\alpha = V_\alpha + V_{\bar\alpha} + V_{-\alpha} + V_{-\bar\alpha}$. Alors les sous-espaces V^α sont mutuellement orthogonaux par rapport à B, et $V_{\mathbf{C}}$ est somme directe des espaces V^α. On en déduit que la restriction de B à V^α est non dégénérée. Posons $W^\alpha = W \cap V^\alpha$. Comme W^α est stable par X, on voit qu'il suffit de démontrer le lemme lorsque $V = V^\alpha$. Si on suppose en plus que l'on peut trouver un W tel que $W/W \cap \overline{W} \neq 0$, il résulte de ce que nous avons dit que α est imaginaire pure.

On suppose donc que X est semi-simple et que ses valeurs propres sont α et $\bar\alpha = -\alpha$. Soit U un sous-espace X-invariant supplémentaire de $W \cap \overline{W}$ dans W. Soit V′ l'orthogonal pour B de $U + \overline{U}$ dans V. Montrons que $(U + \overline{U}) \cap V' = 0$. Soit $x \in (U + \overline{U}) \cap V'$. D'une part, on a $B(x, U + \overline{U}) = 0$, et de l'autre on a $B(\overline{x}, W \cap W) = 0$. Donc on a $B(x, W + \overline{W}) = 0$, ce qui implique $x \in W \cap \overline{W}$. Mais comme on a $W \cap \overline{W} \cap (U + \overline{U}) = 0$, ceci prouve bien notre assertion. On en déduit que la restriction de B à V′ est non dégénérée et que $W \cap V$ est un sous-espace totalement isotrope maximal X-invariant de V′ par rapport à B. Comme X est semi-simple, il est bien connu qu'il existe un sous-espace D de V′ qui est totalement isotrope maximal, X-invariant et supplémentaire de $W \cap V$ dans V′. On a donc la décomposition $V_{\mathbf{C}} = (W \cap \overline{W}) \oplus U \oplus \overline{U} \oplus D_{\mathbf{C}}$ et donc aussi la décomposition $V_\alpha = (W \cap \overline{W})_\alpha \oplus U_\alpha \oplus (\overline{U})_\alpha \oplus D_\alpha$.

On peut trouver une base $e_1, \ldots, e_p$ de $(W \cap \overline{W})_\alpha$, et une base $e_{p+1}, \ldots, e_{2p}$ de D_α telles que l'on ait $B(e_i, \bar e_{j+p}) = \delta_{ij} (1 \leq i,\ j \leq p)$. On peut trouver une base $f_1, \ldots, f_n$ de U_α et une base $g_1, \ldots, g_m$ de $(\overline{U})_\alpha$ telles que l'on ait

$$F(f_i, f_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n) \qquad \text{et} \qquad D(g_i, g_j) = -\delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq m).$$

Écrivons $x \in V_\alpha$ sous la forme $x = \sum \xi_i e_i + \sum \zeta_i f_i + \sum \eta_i g_i$, avec ξ_i, ζ_i, $\eta_i \in \mathbf{C}$. Soit F_α la restriction de F à V_α. Il résulte de tout ce qui précède que si $x, x' \in V_\alpha$, alors on a

$$F_\alpha(x, x') = \sum_j i(\xi_j \bar\xi'_{j+p} - \xi_{j+p} \bar\xi'_j) + \sum_j \zeta_j \bar\zeta'_j - \sum_j \eta_j \bar\eta'_j.$$

On déduit de ceci que l'entier $n - m$ est déterminé par la restriction de F à V_α. Comme d'autre part la trace de X dans $W/W \cap \overline{W}$ est égale à $(n - m)\alpha$, ceci démontre la seconde partie du lemme.

Soit Ω une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$, et soit $f \in \Omega$. Soit $\mathfrak{h}$ une polarisation de f. Il résulte du lemme III.1 que la forme linéaire λ sur $\mathfrak{g}(f)$ définie par $\lambda(X) = -\frac{1}{2} i \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{h}}}(X)$ $(X \in \mathfrak{g}(f))$ est réelle et ne dépend pas de $\mathfrak{h}$.

Rappelons que l'on note $\mathfrak{m}(\Omega)$ l'idéal $\mathfrak{g}(f)+[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Comme λ est nulle sur $\mathfrak{g}(f)\cap[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on peut la prolonger de manière unique en une forme linéaire sur $\mathfrak{m}(\Omega)$ nulle sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Notons encore λ ce prolongement. Il est clair que λ ne dépend que de Ω et non de $f\in\Omega$. Soit λ' un élément de $\mathfrak{g}^\star$ dont la restriction à $\mathfrak{m}(\Omega)$ est λ. Comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}(\Omega)$ est commutatif, il résulte de la proposition I.1 que l'orbite Ω' du point $f'=\lambda'+f$ ne dépend que de Ω et non des divers choix faits.

LEMME III.2. — *L'application $\Omega\to\Omega'$ que nous venons de définir est une permutation de l'ensemble des orbites.*

Démonstration. — Notons λ_Ω la forme linéaire sur $\mathfrak{m}(\Omega)$ notée ci-dessus λ. On définit une application $\Omega\to\Omega''$ en associant à $f\in\Omega$ l'orbite Ω'' du point $f-\lambda'$, où λ' est n'importe quel élément de $\mathfrak{g}^\star$ prolongeant λ_Ω. Nous allons prouver que l'application $\Omega\to\Omega''$ est l'inverse de l'application $\Omega\to\Omega'$. Cela résulte de ce que si $f'=f+\lambda'$, alors $\mathfrak{g}(f)=\mathfrak{g}(f')$, $\mathfrak{m}(\Omega)=\mathfrak{m}(\Omega')$ et $\lambda_\Omega=\lambda_{\Omega'}$, car $\mathfrak{h}$ est encore une polarisation de f'. On a donc $(\Omega')''=\Omega$.

Remarque. — L'hypothèse que G est de type I est superflue. Pour définir l'application $\Omega\to\Omega'$, on a juste besoin de savoir que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble réelle de dimension finie, alors, pour tout $f\in\mathfrak{g}^\star$, il existe une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ vérifiant les conditions 1 et 4 ci-dessus, ce qui est vrai.

Nous dirons qu'une représentation unitaire irréductible de G est associée à l'orbite Ω si elle correspond à l'orbite Ω'. Nous allons en donner la construction directement en termes de l'orbite Ω. Nous aurons besoin d'un lemme.

LEMME III.3. — *Nous gardons les notations ci-dessus. Le groupe* A *induit un groupe de transformations unitaires* (*pour la forme* F) *de* $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}\cap\overline{\mathfrak{h}}$.

Démonstration. — C'est évident pour $G(f)$ qui stabilise f. Il faut le prouver pour D. Comme D est connexe, il suffit de montrer que si $Z\in\mathfrak{d}$, X et $Y\in\mathfrak{h}$, alors $i\langle f, [[Z, X], \overline{Y}]\rangle+i\langle f, [X, \overline{[Z, Y]}]\rangle=0$. Comme Z est réel, on a $\overline{[Z, Y]}=[Z, \overline{Y}]$. Il résulte alors de l'identité de Jacobi que le premier membre de l'égalité ci-dessus est égal à $i\langle f, [Z, [X, \overline{Y}]]\rangle$. Comme $\mathfrak{h}+\overline{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre et comme $\mathfrak{h}\cap\overline{\mathfrak{h}}$ et $\mathfrak{h}+\overline{\mathfrak{h}}$ sont orthogonaux par rapport à B_f, on trouve bien : $i\langle f, [Z, [X, \overline{Y}]]\rangle=0$.

Soit $X\in\mathfrak{d}$. On pose $\lambda(X)=-\frac{1}{2}i\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}\cap\overline{\mathfrak{h}}}(X)$. Il résulte du lemme III.3 que λ est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{d}$. Soit λ' un élément de $\mathfrak{g}^\star$ dont la restriction à $\mathfrak{d}$ est λ et qui est nul sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Par définition de Ω', le point $f' = f + \lambda'$ appartient à Ω'. Il est clair que $G(f') = G(f)$ et que $\mathfrak{h}$ est une polarisation de f'.

LEMME III.4. — *Soit $\mathcal{E}'$ l'ensemble des caractères unitaires de* $G(f)$ *dont la différentielle est* if'. *Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des caractères holomorphes de* $G(f)\,H$ *dont la restriction à* $G(f)$ *vérifie* $|\mu| = \rho_1$ *et dont la différentielle est* $X \to if(X) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(X)$ $(X \in h)$.

Alors l'application qui fait correspondre à μ la restriction de $\mu\rho_1^{-1}$ à $G(f)$ *est une bijection de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}'$. En particulier $\mathcal{F}$ est non vide.*

Démonstration. — Soit $\chi' \in \mathcal{E}'$. La différentielle de $\rho_1\chi'$ est

$$if'(X) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(X) = if(X) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}\cap\bar{\mathfrak{h}}}(X) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(X)$$
$$= if(X) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(X) \qquad (X \in \mathfrak{g}(f)).$$

Ceci prouve que $\rho_1\chi'$ admet un prolongement (et un seul, puisque H est connexe) à un caractère holomorphe de H dont la différentielle est $X \to if(X) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(X)$. Le lemme en résulte aussitôt.

Soit $\mu \in \mathcal{F}$. On fabrique l'espace $\mathcal{L}'(f, \mu, h)$ formé des fonctions continues sur G à support compact modulo A qui vérifient $\varphi(ag) = \mu(a)\varphi(g)$ $(a \in A$ et $g \in G)$. On le munit du produit scalaire $(\varphi, \psi) = \oint_{A\setminus G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}\,dg$, ce qui est possible car si $a \in A$, on a $|\mu(a)| = \rho_1(a)$, d'après le lemme III.3. Soit $\mathcal{L}(f, \mu, \mathfrak{h})$ l'espace séparé complété. Soit $g \in G$. Alors le nombre $\mu(h)\varphi(kg)$ $(h \in H$ et $k \in U_E)$ ne dépend que du produit $hk \in U$. Soit $\mathcal{H}(f, \mu, \mathfrak{h})$ le sous-espace de $\mathcal{L}(f, \mu, \mathfrak{h})$ formé des φ telles que la fonction $hk \to \mu(h)\varphi(kg)$ soit holomorphe sur U pour tout $g \in G$. Alors $\mathcal{H}(f, \mu, \mathfrak{h})$ est un sous-espace fermé G-invariant de $\mathcal{L}(f, \mu, \mathfrak{h})$. On note $T(f, \mu, \mathfrak{h})$ la sous-représentation de G dans $\mathcal{H}(f, \mu, \mathfrak{h})$.

Toutes ces assertions se déduisent du fait suivant : si χ' est la restriction de $\mu\rho_1^{-1}$ à $G(f)$, on a $\mathcal{H}(f, \mu, \mathfrak{h}) = \mathcal{H}_1(f', \chi', \mathfrak{h})$, ce qui provient de notre choix de λ'. Tenant compte du lemme III.4, le point C devient :

PROPOSITION III.1. — *Toute représentation unitaire irréductible de* G *est équivalente à une représentation* $T(f, \mu, \mathfrak{h})$, *où* $f \in \mathfrak{g}^\star$, $\mathfrak{h}$ *est une polarisation de f et* $\mu \in \mathcal{F}$ (*cf.* le lemme III.4). *Toutes les représentations* $T(f, \mu, \mathfrak{h})$ *sont irréductibles et si* $T(f, \mu, \mathfrak{h})$ *et* $T(f', \mu', \mathfrak{h}')$ *sont équivalentes, alors f et f' sont dans la même* G-*orbite. Étant donnés f et* $\mathfrak{h}$, *l'application* $\mu \to T(f, \mu, \mathfrak{h})$ *est une bijection de $\mathcal{F}$ sur l'ensemble des représentations associées à l'orbite de f.*

CHAPITRE IV.

LA FORMULE DU CARACTÈRE.

Nous commençons par énoncer un résultat qui est une conséquence directe du chapitre I.

PROPOSITION IV.1. — *Soit* G *un groupe de Lie réel connexe, et soit* T *une représentation unitaire irréductible de* G. *On suppose qu'il existe une* G*-orbite* Ω *dans* $\mathfrak{g}^\star$, *un voisinage ouvert* $\mathcal{V}$ *de* o *dans* $\mathfrak{g}$, *et une fonction* p *dans* $\mathcal{V}$ *ayant les propriétés énoncées dans l'introduction tels que l'on ait* $P(G, T, \Omega, \mathcal{V}, p)$. *Soit* $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ *telle que* $T(\alpha)$ *ait une trace. Alors* $\operatorname{tr} T(\alpha)$ *ne dépend que de la restriction de* α *à l'idéal* $\mathfrak{m}(\Omega) = \mathfrak{g}(f) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ [2].

Démonstration. — Par hypothèse, on a

$$\operatorname{tr} T(\alpha) = \int_\Omega \int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\, e^{i\langle f, X\rangle} p(X)^{-1}\, dX\, d\beta_\Omega(f).$$

D'après la proposition I.2, ceci vaut

$$\int_\Lambda \int_{\mathfrak{m}(\Omega)^\perp} \int_{\mathfrak{g}} \alpha(X) \exp(i\langle f_1 + f_2, X\rangle)\, p(X)^{-1}\, dX\, df_2\, d\nu(f_1).$$

Utilisant la formule d'inversion de Fourier, on trouve

$$(2\pi)^{-k} \int_\Lambda \int_{\mathfrak{m}(\Omega)^\perp} \alpha(X) \exp(i\langle f_1, X\rangle)\, p(X)^{-1}\, dX\, d\nu(f_1)$$

[où $k = \dim \mathfrak{m}(\Omega)^\perp$], ce qui prouve la proposition.

La proposition IV.1 peut encore s'énoncer de la manière suivante. Soit p' une fonction analytique, G-invariante et ne s'annulant pas dans $\mathcal{V}$. On suppose que p et p' ont mêmes restrictions à $\mathfrak{m}(\Omega) \cap \mathcal{V}$. Alors on a la propriété $P(G, T, \Omega, \mathcal{V}, p')$.

Ceci permet de définir la proposition $P(G, T, \Omega, \mathcal{V}, p)$ lorsque $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert G-invariant de o dans $\mathfrak{g}$ dans lequel exp est régulière et p une fonction dans $\mathfrak{m}(\Omega) \cap \mathcal{V}$, analytique, G-invariante et ne s'annulant pas. On dira que l'on a la propriété $P(G, T, \Omega, \mathcal{V}, p)$ s'il existe une fonction $\tilde{p}$ dans $\mathcal{V}$, analytique, G-invariante et ne s'annulant pas qui prolonge p telle que l'on ait la propriété $P(G, T, \Omega, \mathcal{V}, \tilde{p})$.

Nous supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ est résoluble. Nous allons, pour chaque orbite Ω définir des fonctions sur $\mathfrak{m}(\Omega)$, construites au moyen des racines

---

(2) Dans [4], j'ai annoncé la proposition IV. 1 pour un idéal j vérifiant les hypothèses de la proposition I.1. En fait je n'ai fait la démonstration que lorsque $j = \mathfrak{m}(\Omega)$.

de $\mathfrak{g}$. Rappelons que si V est un espace vectoriel réel et si $\lambda \in V^{\star} \otimes \mathbf{C}$, on note S_λ la fonction sur V définie par

$$S_\lambda(X) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\lambda(X)\right)}{\frac{1}{2}\lambda(X)} \qquad (X \in V).$$

Soit donc Ω une G-orbite dans $\mathfrak{g}^{\star}$ et soit $f \in \Omega$. Comme $\mathfrak{g}(f)$ est le noyau de la forme bilinéaire B_f, et comme $\mathfrak{g}(f)$ stabilise f, les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ sont de la forme $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_s$ [où $2s = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$]. Prolongeons ces poids en des formes linéaires sur $\mathfrak{m}(\Omega)$ nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Ces prolongements existent car les λ_i sont nuls sur $\mathfrak{g}(f) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Posons $q_f = \prod_1^s S_{\lambda_i}$. C'est une fonction sur $\mathfrak{m}(\Omega)$ définie sans ambiguïté, car $S_{-\lambda} = S_\lambda$. Il est clair qu'elle est analytique et G-invariante.

Lemme IV.1. — *Soient f et f' deux points de Ω. Alors $q_f = q_{f'}$.*

Démonstration. — Soient $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_s$ les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$. Soit $g \in G$ tel que $gf = f'$. Posons $\mu_i = g\lambda_i$. Les formes $\pm\mu_i (1 \leq i \leq s)$ sont les poids de $\mathfrak{g}(f')$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f')$. Notons $\tilde{\lambda}_i$ le prolongement de λ_i à $\mathfrak{m}(\Omega)$ nul sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et notons $\tilde{\mu}_i$ celui de μ_i. Comme $\tilde{\lambda}_i$ est nul sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on a $g\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i$. Comme d'autre part on a $\tilde{\mu}_i = g\tilde{\lambda}_i$, on voit que $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\mu}_i$, ce qui donne finalement $q_f = q_{f'}$.

On peut donc poser $q_\Omega = q_f$.

Rappelons que l'on note $\mathcal{W}$ l'ensemble des points X de $\mathfrak{g}$ tels que les valeurs propres imaginaires pures de ad(X) soient de module $< 2\pi$.

Lemme IV.2. — *Si $X \in \mathcal{W} \cap \mathfrak{m}(\Omega)$, alors $q_\Omega(X) > 0$.*

Démonstration. — Soit $X \in \mathfrak{m}(\Omega)$. Les nombres $\pm\lambda_i(X)$ $(1 \leq i \leq s)$ sont des valeurs propres de ad X. Soit i tel que $1 \leq i \leq s$. Si $\lambda_i(X)$ n'est pas imaginaire pur, on a $\overline{\lambda_i(X)} \neq -\lambda_i(X)$. Alors, ou bien $\lambda_i(X)$ est réel, et dans ce cas $S_{\lambda_i}(X) > 0$, ou bien $S_{\lambda_i}(X)\overline{S_{\lambda_i}(X)} > 0$. Si $\lambda_i(X)$ est imaginaire pur, posons $\lambda_i(X) = ix$ (avec $x \in \mathbf{R}$). On a alors $S_{\lambda_i}(X) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x}$. Lorsqu'on suppose en plus que $X \in \mathcal{W}$, on a $|x| < 2\pi$, et donc encore $S_{\lambda_i}(X) > 0$.

Lemme IV.3. — *La fonction q a été définie dans l'introduction. Supposons que $\mathfrak{g}(f)$ soit nilpotente. Alors la restriction de q_Ω à $\mathcal{W} \cap \mathfrak{m}(\Omega)$ est égale à celle de q.*

Cela résulte immédiatement du lemme IV.2.

Corollaire. — *Si* Ω *est une orbite de dimension maximale, alors la restriction de* q_Ω *à* $\mathfrak{m}(\Omega) \cap \mathscr{V}$ *est égale à celle de* q.

En effet, $\mathfrak{g}(f)$ est commutative (*cf.* [5]).

Soit maintenant G un groupe résoluble connexe simplement connexe, que nous supposons en plus exponentiel ou ad-algébrique. Dans ce cas G est de type I (*cf.* [9] et [10]) et si T est une représentation unitaire irréductible de G, on peut parler de l'orbite Ω associée à T (*cf.* la proposition III.1). On a alors le résultat suivant :

Théorème IV.1. — *Soit* T *une représentation unitaire irréductible de* G, *et soit* Ω *l'orbite associée à* T. *On a la propriété* $P(G, T, \Omega, \mathscr{V}, q_\Omega)$.

Remarque. — Soient $\tilde{\lambda}_i (1 \leq i \leq s)$ des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ dont les restrictions à $\mathfrak{m}(\Omega)$ soient les λ_i. On pose $\tilde{q}_\Omega = \prod_1^s S_{\tilde{\lambda}_i}$. Il suffit de prouver que l'on a la proposition $P(G, T, \Omega, \mathscr{V}, \tilde{q}_\Omega)$ pour un choix convenable des prolongements $\tilde{\lambda}_i$.

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la dimension de G. Le cas où la dimension de G est 1 est trivial. On suppose donc que $\dim(G) > 1$. La démonstration est presque faite dans [9] pour les groupes exponentiels, et dans [10] pour les groupes résolubles ad-algébriques. Nous supposerons dans la suite que G est ad-algébrique, les démonstrations quand G est exponentiel étant les mêmes, mais plus simples. En particulier, lorsque G est exponentiel, le cas 3 ci-dessous n'intervient pas et le chapitre III est inutile.

Soit $f \in \Omega$. On examine les différents cas possibles.

1. On suppose que $f^\perp$ contient un idéal minimal non nul $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{a}$ est contenu dans le nilradical de $\mathfrak{g}$. Soit A le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathfrak{a}$, et posons $H = G/A$. Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de H. On identifie $\mathfrak{h}^*$ et $\mathfrak{a}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$. Alors Ω est aussi une H-orbite. La représentation T est triviale sur A. Soit U la représentation de H déduite par passage au quotient. Alors U est associée à T.

[La démonstration de ces faits peut se faire exactement comme dans [10], section 4.1, les modifications apportées par le fait que nous n'utilisons pas exactement la même correspondance entre représentations et orbites étant triviales. On peut aussi déduire ces assertions de [10], section 4.1 : soit Ω' l'orbite qui correspond à T (*cf.* chapitre III, point C). Alors Ω'

contient un point $f' = f + \lambda$ où λ est une forme linéaire nulle sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et dont la restriction à $\mathfrak{g}(f)$ est égale à $-\frac{1}{2} i \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{h}}}$ (*cf.* chapitre III). Montrons que λ est nulle sur $\mathfrak{a}$. En effet, ou bien $\mathfrak{a}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$, et dans ce cas c'est évident, ou bien on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$ car $\mathfrak{a}$ est minimal, et c'est encore évident. Donc $\mathfrak{a}$ est contenu dans $f'^{\perp}$. Il résulte alors de [10], 4.1, que T est triviale sur A et que la représentation U de H obtenue par passage au quotient correspond à la H-orbite Ω'. On en déduit que U est associée à la H-orbite Ω.]

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à H, U et Ω. Soit θ la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$. Ajoutons une prime pour distinguer les notions dans H. Par exemple $\mathcal{W}'$ est l'ouvert de $\mathfrak{h}$ formé des points X tels que les valeurs propres imaginaires pures de $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}}(X)$ soient de module $< 2\pi$. On voit facilement que $\theta^{-1}(\mathfrak{m}(\Omega)') = \mathfrak{m}(\Omega)$, et que l'on a $q_\Omega = q'_\Omega \circ \theta$. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$, et posons $\alpha''(X) = \int_{\mathfrak{a}} \alpha(X + Y)\, dY$. Soit α' la fonction sur $\mathfrak{h}$ déduite par passage au quotient. On voit que $\alpha' \in \mathcal{D}(\mathcal{W}')$, et que, si les mesures sont convenablement normalisées, $T(\alpha) = U(\alpha')$. Soit $\tilde{q}'_\Omega$ une fonction prolongeant q'_Ω comme dans la remarque. Posons $\tilde{q}_\Omega = \tilde{q}'_\Omega \circ \theta$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} T(\alpha) &= \int_\Omega \int_{\mathfrak{h}} \alpha'(X')\, e^{i\langle f, X'\rangle}\, \tilde{q}'_\Omega(X')^{-1}\, dX'\, d\beta_\Omega(f) \\ &= \int_\Omega \int_{\mathfrak{g}} \alpha(X)\, e^{i\langle f, X\rangle}\, \tilde{q}_\Omega(X)^{-1}\, dX\, d\beta_\Omega(f). \end{aligned}$$

(Il faut remarquer que la mesure canonique sur Ω est la même, que Ω soit considérée comme G-orbite ou comme H-orbite.) Ceci démontre le théorème dans ce cas.

2. On suppose que $f^{\perp}$ ne contient pas d'idéal non nul de $\mathfrak{g}$ [et donc $\dim(\mathfrak{z}) = 0$ ou 1, en notant $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$]. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$. On suppose ou bien que $\mathfrak{z} = \{0\}$ et $\mathfrak{a}$ est minimal, ou bien que $\dim(\mathfrak{z}) = 1$ [et donc $f(\mathfrak{z}) \neq \{0\}$], $\mathfrak{a}$ contient $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ est un idéal minimal non nul de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. Soient $m = f|\mathfrak{a}$, H le centralisateur de m dans G, et $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H. Soit H_0 la composante neutre de H. Posons $f' = f|\mathfrak{h}$. Soit ω_0 la H_0-orbite de f' dans $\mathfrak{h}^*$. Soit H_1 le stabilisateur de ω_0 dans H. On a alors les résultats suivants.

On a $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Le groupe H_0 est ad-algébrique. Il existe une représentation unitaire irréductible U de H_1 dont la restriction U_0 à H_0 est irréductible et associée à l'orbite ω_0, et telle que T soit équivalente à la représentation induite par U. La démonstration de ces assertions fait l'objet des sections 4.2

à 4.9 de [10]. Voyez à ce propos la parenthèse dans la démonstration du cas 1.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à H_0, U_0 et ω_0. Nous voulons utiliser le théorème II.1. Soit $\mathcal{W}'$ l'ouvert de $\mathfrak{h}$ formé des points Y tels que les valeurs propres imaginaires pures de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(Y)$ soient de module $< 2\pi$. Il est clair que $\mathcal{W} \cap \mathfrak{h} \subset \mathcal{W}'$. Soient $\pm \mu_i$ $(1 \leq i \leq n)$ les poids de $\mathfrak{h}(f')$ dans $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(f')$. Soient λ_i $(1 \leq i \leq p)$ les poids de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Notons avec un tilda des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ qui prolongent les précédentes. D'après le lemme I.3, $\mathfrak{g}(f)$ est contenu dans $\mathfrak{h}(f')$ et B_f met $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}(f')/\mathfrak{g}(f)$ en dualité. Il est clair que les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ sont les restrictions des formes $\pm \mu_1, \ldots, \pm \mu_n, \pm \lambda_1, \ldots, \pm \lambda_p$. Posons $\tilde{q}_\Omega = \prod_1^n S_{\tilde{\mu}_i} \prod_1^p S_{\tilde{\lambda}_i}$ et notons $\tilde{q}_{\omega_0}$ la restriction de $\prod_1^n S_{\tilde{\mu}_i}$ à $\mathfrak{h}$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $P(H_0, U_0, \omega_0, \mathcal{W}', q_{\omega_0})$ et donc $P(H_0, U_0, \omega_0, \mathcal{W}', \tilde{q}_{\omega_0})$. Comme $\tilde{q}_\Omega$ prolonge la fonction $\tilde{q}_{\omega_0} \prod_1^p S_{\tilde{\mu}_i}$, il résulte du théorème II.1 que pour démontrer la proposition $P(G, T, \Omega, \mathcal{W}, q_\Omega)$ (et donc le théorème IV.1 dans ce cas), il suffit d'établir la proposition suivante :

(Q) *L'application exponentielle est un difféomorphisme de* $\mathcal{W}$ *sur* $\exp(\mathcal{W})$ *et de* $\mathcal{W} \cap \mathfrak{h}$ *sur* $\exp(\mathcal{W}) \cap H_1$.

Démonstration de (Q). — Elle est basée sur [3]. Soit $\mathfrak{n}$ le nilradical de $\mathfrak{g}$ et soit N le sous-groupe analytique de G correspondant. Posons $V = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. L'application exponentielle permet d'identifier V et G/N. Soit η l'application canonique de G dans V, et soit θ l'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans V. Les racines de $\mathfrak{g}$ sont des formes linéaires nulles sur $\mathfrak{n}$, et on peut donc les considérer comme des éléments de $V^*_{\mathbf{C}}$. Si λ est une racine, et si $n \in \mathbf{Z}$, on note $V_{\lambda, n}$ l'ensemble des points ν de V tels que $\lambda(\nu) = 2i\pi n$. On pose $V_e = \bigcup V_{\lambda, n}$ (où λ parcourt l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$, et n l'ensemble $\mathbf{Z} - \{0\}$). On pose $\mathcal{V} = \theta^{-1}(V - V_e)$ et $\tilde{\mathcal{V}} = \eta^{-1}(V - V_e)$. Alors le résultat central de [3] est le suivant : l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\tilde{\mathcal{V}}$.

Notons avec une prime les ensembles correspondants relatifs à $\mathfrak{h}$ et H_0 (rappelons que H_0 est simplement connexe). Nous allons prouver que $\tilde{\mathcal{V}} \cap H$ est contenu dans $\tilde{\mathcal{V}}'$. Montrons d'abord que $\tilde{\mathcal{V}} \cap H \subset H_0$. C'est évident si $H = H_0$. Si H n'est pas connexe, alors $\mathfrak{a}$ est un idéal minimal non central de dimension 2 de $\mathfrak{g}$ (*cf.* la liste de tous les cas possibles dans [10]). Les racines de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$ sont de la forme $\varphi = \varphi' + i\varphi''$ et $\bar{\varphi} = \varphi' - i\varphi''$. Soient ψ' et ψ'' les caractères de G correspondant. Alors H est l'intersection des noyaux de ψ' et ψ''. On voit donc que H est l'image réciproque dans G de $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} V_{\varphi,n}$. Posons $H' = \eta^{-1}(V_{\varphi,0})$. Alors H' est connexe. En effet, $G/H' = V/V_{\varphi,0}$ est simplement connexe. Il en résulte que $H' = H_0$ et donc que $H - H_0$ est contenu dans $\eta^{-1}(V_e)$. Ceci prouve que $\tilde{\mathcal{V}} \cap H \subset H_0$. Il reste à prouver que $\tilde{\mathcal{V}} \cap H_0 \subset \tilde{\mathcal{V}}'$. Ceci résulte de l'inclusion $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}'$ et du fait que les racines de $\mathfrak{h}$ sont les restrictions de racines de $\mathfrak{g}$. En effet, si on a $\lambda(\eta(h)) \in 2\pi i(\mathbf{Z} - \{0\})$ pour toute racine λ de $\mathfrak{g}$ $(h \in H_0)$, alors on aura $\lambda(\eta'(h)) \in 2\pi i(\mathbf{Z} - \{0\})$ pour toute racine λ de $\mathfrak{h}$.

Prouvons (Q). Comme $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, il est clair que exp est un difféomorphisme de $\mathcal{W}$ sur $\exp(\mathcal{W})$ et de $\mathcal{W} \cap \mathfrak{h}$ sur $\exp(\mathcal{W} \cap \mathfrak{h})$. Il nous suffit donc de prouver que $\exp(\mathcal{W}) \cap H_1 \subset \exp(\mathcal{W} \cap \mathfrak{h})$. D'après ce qui précède, on peut écrire $h \in \exp(\mathcal{W}) \cap H_1$ sous la forme $h = \exp(Y)$ avec $Y \in \mathcal{V}'$. Comme l'exponentielle est une bijection de $\mathcal{V}$ sur $\exp(\mathcal{V})$ et comme $\exp(\theta^{-1}(V_e)) \subset \eta^{-1}(V_e)$ (*cf.* [3]), on en déduit que $Y \in \mathcal{W}$.

3. Si l'on n'est pas dans un des cas 1 ou 2, l'algèbre $\mathfrak{g}$ est spéciale (*cf.* [10], 4.10). C'est-à-dire que $\mathfrak{g}$ est produit semi-direct d'une sous-algèbre abélienne $\mathfrak{a}$ par un idéal nilpotent spécial $\mathfrak{n}$, l'action de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$ étant semi-simple et les poids de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$ étant imaginaires purs. Autrement dit, on peut trouver une base $e_0, \ldots, e_{2n}$ de $\mathfrak{n}$ et des formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sur $\mathfrak{a}$ imaginaires pures telles que l'on ait $[e_i, e_{j+n}] = \delta_{ij}\, e_0$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ et $[a, e_j + ie_{j+n}] = \varphi_j(a)(e_j + ie_{j+n})$ $(a \in \mathfrak{a}$ et $1 \leqq j \leqq n)$. On pose $\mathfrak{z} = \mathbf{R}e_0$ et $\mathfrak{m} = \sum_1^{2n} \mathbf{R}e_j$. On pose $\mathfrak{g}' = \mathfrak{z} + \mathfrak{a}$. Soit G' le stabilisateur de $\mathfrak{m}$ dans G. Il résulte du lemme I.5 que G' est connexe et simplement connexe, et donc est le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathfrak{g}'$. Identifions $\mathfrak{g}^\star$ et $\mathfrak{m}^\star \oplus \mathfrak{g}'^\star$. La projection de Ω sur $\mathfrak{z}^\star$ n'est pas nulle (car on n'est pas dans le cas 1). En modifiant au besoin la base de $\mathfrak{n}$, on peut supposer que cette projection est le point $e_0^\star$ de $\mathfrak{z}^\star$ tel que $\langle e_0^\star, e_0 \rangle = 1$. Il résulte du lemme I.5 que $\Omega \cap \mathfrak{g}'^\star$ est une orbite de G' dans $\mathfrak{g}'^\star$. Comme G' est abélien, cette orbite est réduite à un point. Posons $\{f\} = \Omega \cap \mathfrak{g}'^\star$. Il résulte du lemme I.5 que $G(f) = G'$, et donc que $G(f)$ est connexe. [Rappelons que $G(f)$ est le centralisateur de f dans G.]

L'algèbre $\mathfrak{h} = g'_{\mathbf{C}} + \sum_1^n \mathbf{C}(e_j + e_{j+n})$ est une polarisation de f (*cf.* [10], 6.2). Reprenons les notations du chapitre III. Comme $G(f)$ est connexe, l'ensemble $\mathcal{F}$ (lemme III.4) est réduit à un élément μ. Il résulte alors de la proposition III.1 que T est équivalente à la représentation $T(f, \mu, \mathfrak{h})$. Posons $\lambda = -\frac{1}{2} i \sum_{1}^{n} \varphi_j$. Prolongeons λ à g en posant $\lambda(X) = 0$ $(X \in \mathfrak{n})$. Soit χ' le caractère de $G(f)$ dont la différentielle est $i(f + \lambda) = if'$. On a (avec les notations du chapitre III) : $T = T_1(f', \chi', h)$. Posons $f = e_0^\star + a^\star$ (avec $a^\star \in \mathfrak{a}^\star$). Il résulte de [10], 6.2 que l'on peut réaliser T de la manière suivante.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ qui sont de carré intégrable pour la mesure $\exp(-|z|^2)\, dx_1\, dy_1 \ldots dx_n\, dy_n$, où l'on a posé $z = (z_1, \ldots, z_n)$ et $z_j = x_j + iy_j$. Alors T opère dans $\mathcal{H}$ d'après les formules suivantes :

$$T(\exp(t e_0)) = e^{it} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$
$$T(\exp a)\, \psi(z) = e^{i\langle a^\star, a\rangle} e^{i\langle \lambda, a\rangle} \psi(e^{\varphi_1(a)} z_1, \ldots, e^{\varphi_n(a)} z_n) \qquad (a \in \mathfrak{a},\ \psi \in \mathcal{H},\ z \in \mathbf{C}^n),$$
$$T(\exp(\alpha_j e_j + \beta_j e_{j+n}))\, \psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{4} |v_j|^2 - \frac{1}{2} z_j \bar{v}_j\right) \psi(z_1, \ldots, z_j + v_j, \ldots, z_n)$$

(où $1 \leq j \leq n$, et où l'on a posé $\alpha_j + i\beta_j = v_j$).

Soit U la représentation de dimension 1 de G' qui a pour différentielle $i(e_0^\star + a^\star)$. On voit que la restriction de T à G' est égale au produit tensoriel $U \otimes W$, où W opère dans $\mathcal{H}$ de la manière suivante :

$$W(\exp(t e_0)) = 1 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$
$$W(\exp a)\, \psi(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{1}^{n} \varphi_j(a)\right) \psi(e^{\varphi_1(a)} z_1, \ldots, e^{\varphi_n(a)} z_n).$$

Comparant avec les formules de [7] [formule (10)], on voit que $W = W_\chi$, où χ est le caractère de $\exp(\mathfrak{z})$ défini par $\chi(\exp(te_0)) = e^{it}$, et W_χ la représentation du théorème II.2.

Comme G' est abélien, on a la propriété $P(G', U, \{f\}, \mathfrak{g}', 1)$. Nous utilisons le théorème II.2 et ses notations. Il est clair que $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, et que $p = q_\Omega$. On a donc la propriété $P(G, T, \Omega, \mathcal{W}, q_\Omega)$, ce qui termine la démonstration du théorème.

Le lemme IV.3 et le théorème IV.1 ont la conséquence suivante :

Proposition IV.2. — *Soit* T *une représentation unitaire irréductible de* G, *et soit* Ω *l'orbite associée à* T. *Soit* $f \in \Omega$. *On suppose que* $\mathfrak{g}(f)$ *est nilpotente. Alors on a la propriété* $P(G, T, \Omega, \mathcal{W}, q)$.

Corollaire. — *Si* Ω *est de dimension maximale, on a la propriété* $P(G, T, \Omega, \mathcal{W}, q)$.

Le fait que pour toutes les orbites « en position générale » on puisse prendre la même fonction q avait été conjecturé par Kirillov en vue des applications à la formule de Plancherel.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. Auslander and B. Kostant, *Quantization and representations of solvable Lie groups* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, 1967, p. 692-695).
[2] P. Bernat, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 82, 1965, p. 37-99).
[3] J. Dixmier, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 113-121).
[4] M. Duflo, *Caractères des groupes résolubles réels* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 184-185).
[5] M. Duflo et M. Vergne, *Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 583-585).
[6] A. A. Kirillov, *The characters of unitary representations of Lie groups* (*Functional Analysis and its applications*, vol. 2, n° 2, 1968, p. 133-146) (traduit du russe par Consultant Bureau).
[7] A. A. Kirillov, *Functionalnyi Analis*, t. 3, vol. 1, 1969, p. 36-47 (en russe).
[8] L. Pukanszky. — *Lecons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.
[9] L. Pukanszky. — *On the unitary representations of exponential groups* (*J. Funct. Analysis*, vol. 2, 1968, p. 73-113).
[10] L. Pusanszky, *Characters of algebraic solvable groups* (*J. Funct. Analysis*, vol. 3, 1969, p. 435-494).

DEUXIÈME PARTIE.

CARACTÈRES DES ALGÈBRES DE LIE RÉSOLUBLES.

INTRODUCTION.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k de caractéristique o. Soit $S(\mathfrak{g})$ son algèbre symétrique et soit $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante universelle. Si $X \in \mathfrak{g}$, on note d_X la dérivation de $S(\mathfrak{g})$ ou de $U(\mathfrak{g})$ qui prolonge $\mathrm{ad}(X)$. D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, il existe un isomorphisme β d'espaces vectoriels de $S(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g})$ qui commute avec les $d_X (X \in \mathfrak{g})$. En particulier, β induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $S(\mathfrak{g})^I$ [le sous-espace de $S(\mathfrak{g})$ annulé par toutes les dérivations $d_X(X \in \mathfrak{g})$] sur $Z(\mathfrak{g})$ [le centre de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$]. Mais en général, β n'est pas un isomorphisme d'algèbres. Suivant une suggestion de J. Dixmier, nous avons étudié le problème de trouver un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{g})^I$ sur $Z(\mathfrak{g})$.

Soit $S(\mathfrak{g}^\star)$ l'algèbre symétrique du dual $\mathfrak{g}^\star$ de $\mathfrak{g}$, et soit $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$ l'algèbre complétée de $S(\mathfrak{g}^\star)$, pour la filtration définie par les puissances de l'idéal maximal de $S(\mathfrak{g}^\star)$. Le dual topologique de $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$ s'identifie à $S(\mathfrak{g})$. Si $p \in \hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$, nous noterons $D(p)$ l'endomorphisme de $S(\mathfrak{g})$ qui est l'application transposée de la multiplication par p dans $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$. Lorsque le corps de base est $\mathbf{C}$, le germe en o de la fonction qui prend la valeur 1 en o et qui est définie dans un voisinage convenable de o dans $\mathfrak{g}$ par

$$X \to \left(\det \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ad} X\right)}{\frac{1}{2}\operatorname{ad} X} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

détermine un élément q de $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$. On peut aussi définir q dans le cas général.

Notre résultat principal est le suivant : l'application $\beta \circ D(q)$ induit un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{g})^I$ sur $Z(\mathfrak{g})$ lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble et lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, il est bien connu que $S(\mathfrak{g})^I$ et $Z(\mathfrak{g})$ sont isomorphes, et l'isomorphisme induit par $\beta \circ D(q)$ coïncide avec celui qui est obtenu en identifiant $S(\mathfrak{g})^I$ et $Z(\mathfrak{g})$ à des sous-algèbres de l'algèbre symétrique d'une algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. La théorie repose donc essentiellement sur la formule de Weyl pour le caractère des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$, et sur le fait qu'il y a « assez » de telles représentations (*cf.* le chapitre V).

Lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble et non abélienne, il est indispensable de se servir des représentations de dimension infinie de $\mathfrak{g}$. Grâce à l'article de J. Dixmier [1], elles commencent à être bien connues. Supposons le corps de base algébriquement clos. A tout élément f de $\mathfrak{g}^\star$, on sait associer un idéal bilatère primitif de $U(\mathfrak{g})$ et donc un caractère χ_f de $Z(\mathfrak{g})$. Nous calculons $\chi_f(\beta(X))$ lorsque $X \in S(\mathfrak{g})^I$. Les résultats sont ceux que l'on obtient en différentiant les résultats établis dans la première partie de ce Mémoire, et entrent donc toujours dans le cadre de la « méthode des orbites » de Kirillov (*cf.* [6]). Soit $\mathfrak{g}(f)$ le centralisateur de f dans $\mathfrak{g}$. Les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ sont de la forme $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_s$ $\left[\text{où } s = \frac{1}{2}\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)\right]$. Prolongeons $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ en des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Posons, si $\lambda \in \mathfrak{g}^\star$,

$$S_\lambda = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\lambda\right)}{\frac{1}{2}\lambda}.$$

C'est un élément de $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$. Posons $q_f = \prod_1^s S_\lambda$. Alors la forme linéaire $X \to D(q_f)^{-1} X(f)$ sur $S(\mathfrak{g})^I$ ne dépend pas du choix des prolongements des λ_i, et l'on a $\chi_f(\beta(X)) = D(q_f)^{-1} X(f)$, pour tout $X \in S(\mathfrak{g})^I$. La démonstration de cette formule se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

On sait que si $\mathfrak{g}(f)$ est de dimension minimale, alors $\mathfrak{g}(f)$ est commutative (*cf.* [3]). Il en résulte facilement que pour presque tout $f \in \mathfrak{g}^\star$, on a

$$\chi_f(\beta(X)) = D(q)^{-1} X(f) \qquad (X \in S(\mathfrak{g})^I).$$

Le théorème en résulte aussitôt.

Ces résultats ont été annoncés dans une Note (*cf.* [2]).

CHAPITRE I.

Représentations induites.

Nous reproduisons ici les définitions et les lemmes de [1] dont nous allons faire un usage constant (*cf.* en particulier [1], chap. 4 et 7).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps k de caractéristique o. On suppose que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et W un $U(\mathfrak{h})$-module à gauche [$U(\mathfrak{h})$ est l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{h}$]. Notons σ la représentation correspondante de $\mathfrak{h}$. L'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g})$, est munie naturellement d'une structure de $U(\mathfrak{h})$-module à droite. Nous allons modifier cette structure. Soit $\theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ définie par $\theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(X) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(X)$ $(X \in \mathfrak{h})$. Soient $u \in U(\mathfrak{g})$ et $X \in \mathfrak{h}$. On pose $u_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} X = uX + \theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(X)u$. Ceci définit une nouvelle structure de $U(\mathfrak{h})$-module à droite sur $U(\mathfrak{g})$. On forme le produit tensoriel $V = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} W$. La représentation naturelle ρ de $\mathfrak{g}$ dans V est dite représentation induite et est notée $\operatorname{Ind}(\sigma, \mathfrak{g})$.

Notons les lemmes suivants :

Lemme I.1 ([1], 4.9). — *L'espace* W *est naturellement plongé dans* V, *et si* $X \in \mathfrak{h}$ *et* $w \in W$, *alors on a*

$$\rho(X)\,w = \sigma(X)\,w - \theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(X)\,w.$$

Lemme I.2 ([1], 4.12). — *Soient* $\mathfrak{k}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{h}$, τ *une représentation de* $\mathfrak{k}$, $\sigma = \operatorname{Ind}(\tau, \mathfrak{h})$, $\rho = \operatorname{Ind}(\sigma, \mathfrak{g})$. *Alors* ρ *est équivalente à* $\operatorname{Ind}(\tau, \mathfrak{g})$.

Lemme I.3 ([1], 4.13). — *Soient* $\mathfrak{n}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$ *contenu dans* $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}/\mathfrak{n}$, σ_1 *une représentation de* $\mathfrak{h}_1$, σ *la représentation correspondante de* $\mathfrak{h}$, $\rho_1 = \operatorname{Ind}(\sigma_1, \mathfrak{g}_1)$ *et* $\rho = \operatorname{Ind}(\sigma, \mathfrak{g})$. *Alors* ρ *se déduit de* ρ_1 *grâce au morphisme* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$.

Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$. Soit $\mathrm{Sub}(f)$ l'ensemble des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ subordonnées à f, c'est-à-dire des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ telles que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = \{0\}$. Alors $f|\mathfrak{h}$ est une représentation de dimension 1 de $\mathfrak{h}$, et on peut former $\mathrm{Ind}(f|\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Notons B_f la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = \langle f, [X, Y]\rangle (X, Y \in \mathfrak{g})$. On note $\mathfrak{g}(f)$ le noyau de B_f. Soit $\mathrm{Mxl}(f)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Sub}(f)$ formé des éléments qui sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{g}$ par rapport à B_f, c'est-à-dire dont la dimension est $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f))$.

Pour la suite, il est commode d'énoncer le lemme suivant :

LEMME I.4. — *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}_1$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ par rapport à B_f. Posons $f_1 = f|\mathfrak{g}_1$. Soit W un sous-espace totalement isotrope maximal de $\mathfrak{g}_1$ par rapport à B_{f_1}. Alors c'est un sous-espace totalement isotrope maximal de $\mathfrak{g}$ par rapport à B_f.*

Démonstration. — On a $\dim W = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}_1 + \dim \mathfrak{g}_1(f_1))$ et il faut prouver que $\dim W = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f))$. Mais $\mathfrak{g}(f)$ est l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ par rapport à B_f et $\mathfrak{g}_1(f_1)$ celui de $\mathfrak{g}_1$, de sorte que $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}_1(f_1)$ et que B_f induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1(f_1)/\mathfrak{g}(f)$. On en déduit $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 = \dim \mathfrak{g}_1(f_1)/\mathfrak{g}(f)$, d'où le lemme.

Le point de départ de notre travail est le théorème suivant ([1], 7.5 et 7.9) :

THÉORÈME I.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique* 0. *Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$.*

1° $\mathrm{Mxl}(f)$ *est non vide, et il existe $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f)$ tel que* $\mathrm{Ind}(f|\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ *soit irréductible.*

2° *Soient $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2 \in \mathrm{Mxl}(f)$. Alors* $\mathrm{Ind}(f|\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g})$ *et* $\mathrm{Ind}(f|\mathfrak{h}_2, \mathfrak{g})$ *ont le même noyau dans* $U(\mathfrak{g})$ [*qui est donc un idéal bilatère primitif de* $U(\mathfrak{g})$, *d'après* 1°].

A chaque point f de $\mathfrak{g}^\star$ on sait donc faire correspondre un idéal bilatère primitif I_f de $U(\mathfrak{g})$. Le centre de $U(\mathfrak{g})/I_f$ est réduit aux scalaires (*cf.* [7]). En particulier, si $Z(\mathfrak{g})$ est le centre de $U(\mathfrak{g})$, alors notons $\chi_f(u)$ l'image de $u \in Z(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})/I_f$. C'est un élément de k et on a donc défini pour chaque $f \in \mathfrak{g}^\star$ un caractère χ_f de $Z(\mathfrak{g})$.

Soit $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$, et soit β la symétrisation $S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$. D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, β est une bijection et induit une bijection de $S(\mathfrak{g})^I$ sur $Z(\mathfrak{g})$. Notre but est de calculer $\chi_f \circ \beta$: c'est une certaine forme linéaire sur $S(\mathfrak{g})^I$. Nous exhiberons explicitement un élément du dual de $S(\mathfrak{g})$ dont la restriction à $S(\mathfrak{g})^I$ est $\chi_f \circ \beta$.

CHAPITRE II.

La formule du caractère.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k de caractéristique o. Soient $S(V)$ et $S(V^\star)$ les algèbres symétriques de V et $V^\star$. On peut identifier $S(V)$ et l'algèbre des fonctions polynômes sur $V^\star$, et $S(V^\star)$ et l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $V^\star$. Si $p \in S(V^\star)$, notons $D(p)$ l'opérateur différentiel correspondant. C'est un endomorphisme de $S(V)$.

On munit $S(V^\star)$ de la topologie pour laquelle un système fondamental de voisinages de o est formé des puissances de l'idéal maximal. Soit $\hat{S}(V^\star)$ l'algèbre complétée de $S(V^\star)$, qu'on peut appeler l'algèbre des séries formelles sur V. Soit $X \in S(V)$. Comme on a $D(p)\,X = 0$ si l'ordre de $p \in S(V^\star)$ est assez grand, on peut définir $D(p)X$ pour $p \in \hat{S}(V^\star)$ par continuité. Posons $\langle p, X\rangle = D(p)\,X(0)\,\big(p \in \hat{S}(V^\star),\ X \in S(V)\big)$. On sait que cette forme bilinéaire permet d'identifier $\hat{S}(V^\star)$ au dual de $S(V)$ et $S(V)$ au dual topologique de $\hat{S}(V^\star)$ (c'est-à-dire à l'ensemble des formes linéaires nulles sur tous les éléments dont l'ordre est assez grand). On a alors :

Lemme II.1. — *Soit* $p \in \hat{S}(V^\star)$. *L'application transposée de la multiplication par* P *dans* $S(V^\star)$ *est égale à* $D(p)$.

Démonstration. — Soient $x \in S(V)$ *et* $q \in \hat{S}(V^\star)$. On a

$$\langle D(p)\,X,\, q\rangle = D(q)\,D(p)\,X(0) = D(pq)\,X(0) = \langle X,\, pq\rangle.$$

On peut aussi considérer $S(V)$ comme l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur V. Si $X \in S(V)$, on note $D^\star(X)$ l'opérateur différentiel correspondant. C'est un endomorphisme de $\hat{S}(V^\star)$. Si $p \in \hat{S}(V^\star)$, on note $p(0)$ le terme constant de p. Il est connu et facile à calculer que l'on a $D^\star(X)\,p(0) = D(p)\,X(0) = \langle p, X\rangle$ pour tout $X \in S(V)$ et tout $p \in \hat{S}(V^\star)$.

Lemme II.2. — *Soient* f *et* $f' \in V^\star$. *On a* $D(e^{f'})\,X(f') = X(f + f')$ *pour tout* $X \in S(V)$. *En particulier,* $X(f) = \langle e^f, X\rangle$.

Démonstration. — Prouvons d'abord que $D^\star(X)\,e^f = X(f)\,e^f$ pour tout $X \in S(V)$. Il suffit en fait de le prouver pour $X \in V$, et dans ce cas ceci résulte de la relation $D^\star(X)\,f^n = n\langle X, f\rangle f^{n-1}$. On a donc $\langle X, e^f\rangle = D^\star(X)\,e^f(0) = X(f)$ et donc

$$(\star) \qquad D(e^f)\,X(0) = X(f).$$

Soit $f' \in V^\star$. La relation $(\bigstar)$ entraîne $D(e^f)\,X(f') = D(e^f)\,D(e^{f'})\,X(o)$. Comme on a $D(e^{f'})\,D(e^f) = D(e^{f'}\,e^f)$ et $e^{f'}e^f = e^{f'+f}$ (d'après les propriétés bien connues des exponentielles) on voit qu'en appliquant encore une fois la relation $(\bigstar)$, on obtient $D(e^f)\,X(f') = X(f+f')$,

C. Q. F. D.

Tout ceci s'applique en particulier à l'espace vectoriel sous-jacent d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur k. Si $Y \in \mathfrak{g}$, posons $a_Y = -{}^t\mathrm{ad}(Y)$. Notons encore a_Y l'unique dérivation continue de $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$ qui prolonge a_Y. On a le résultat suivant :

Lemme II.3. — *Soient* $Y \in \mathfrak{g}$, $X \in S(\mathfrak{g})$, $p \in \hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$. *On a*

$$d_Y(D(p)\,X) = D(p)\,(d_Y X) + D(a_Y p)\,X.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver que ceci est vrai lorsque p est de la forme f^r avec $f \in \mathfrak{g}^\star$ et $r \in \mathbf{N}$. Lorsque $r = o$, la formule est facile à établir. Supposons que $r = 1$. Nous allons démontrer que la formule est vraie dans ce cas en montrant qu'elle est vraie pour les X de la forme Z^n avec $Z \in \mathfrak{g}$ et $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned} D(f)\,(d_Y X) + D(a_Y f)\,X &= D(f)\,(n[Y, Z]\,Z^{n-1}) + n\langle a_Y f, Z\rangle Z^{n-1} \\ &= n\langle f, [Y, Z]\rangle Z^{n-1} + n[Y, Z]\,(n-1)\langle f, Z\rangle Z^{n-2} + n\langle a_Y f, Z\rangle Z^{n-1} \\ &= n(n-1)\,[Y, Z]\langle f, Z\rangle Z^{n-2}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$d_Y(D(f)\,X) = d_Y(n\langle f, Z\rangle Z^{n-1}) = n(n-1) = \langle f, Z\rangle\,[Y, Z]\,Z^{n-2},$$

ce qui établit notre assertion.

On achève la démonstration du lemme par récurrence sur r. On suppose que $r > 1$, et que la formule est démontrée pour tous les p de la forme $f^{r'}$ avec $r' < r$. Posons $q = f^{r-1}$. On a

$$\begin{aligned} d_Y(D(f^r)X) = d_Y(D(f)\,D(q)\,X) &= D(f)\,d_Y(D(q)X) + D(a_Y f)\,D(q)X \\ &= D(f)\,D(q)\,d_Y X + D(f)\,D(a_Y q)\,X + D(a_Y f)\,D(q)X \\ &= D(f)\,D(q)\,d_Y X + D(a_Y(fq))X \\ &= D(f^r)\,d_Y X + D(a_Y f^r)X. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

On note $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)^I$ l'ensemble des éléments de $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$ qui sont $\mathfrak{g}$-invariants, c'est-à-dire annulés par tous les $a_Y (Y \in \mathfrak{g})$. Par exemple, $\mu \in \mathfrak{g}^\star$ est $\mathfrak{g}$-invariante si et seulement si $\langle \mu, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\rangle = \{o\}$. Notons le résultat suivant :

Lemme II.4. — *Soit* $p \in \hat{S}(\mathfrak{g}^\star)^I$. *Alors* $D(p)$ *laisse stable* $S(\mathfrak{g})^I$. *En particulier, si on suppose en plus que* p *est inversible, alors* $D(p)$ *induit une bijection linéaire de* $S(\mathfrak{g})^I$ *sur lui-même.*

Démonstration. — Soient $X \in S(\mathfrak{g})^I$ et $Y \in \mathfrak{g}$. Il résulte du lemme II.3 que l'on a

$$d_Y(D(p)X) = D(a_Y p)X + D(p)\, d_Y X = 0 + 0 = 0,$$

ce qui démontre la première assertion. Supposons de plus que p soit inversible. Alors p^{-1} est $\mathfrak{g}$-invariante car $d_Y(p^{-1}) = -p^{-2} d_Y p = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Donc $D(p^{-1})$ induit dans $S(\mathfrak{g})^I$ l'application inverse de celle induite par $D(p)$.

Lemme II.5. — *Soient* $X \in S(\mathfrak{g})$, $Y \in \mathfrak{g}$ *et* $f \in \mathfrak{g}^\star$. *On a*

$$(d_Y X)(f) = -(D(a_Y f)X)(f).$$

Démonstration. — Si $g \in \mathfrak{g}^\star$, l'application $X \to D(g)\,X(f)$ est une forme linéaire F sur $S(\mathfrak{g})$ telle que

$$F(XZ) = X(f)\,F(Z) + F(X)\,Z(f) \qquad (X,\ Z \in S(\mathfrak{g}))$$

et il en est de même de $X \to d_Y X(f)$. Il suffit donc de vérifier le lemme lorsque $X \in \mathfrak{g}$, ce qui s'écrit dans ce cas : $\langle f, [Y, X]\rangle = -\langle a_Y f, X\rangle$, ce qui est la définition de a_Y.

Le lemme suivant joue dans la suite le même rôle que la proposition IV.1 dans la première partie.

Lemme II.6. — *Soit* $f \in \mathfrak{g}^\star$. *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ *des formes linéaires sur* $\mathfrak{g}$ *nulles sur* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Soit* P *une série formelle en* l *variables telles que la projection de* $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ *sur* $\hat{S}(\mathfrak{g}(f)^\star)$ *soit nulle. Alors* $(D(P(\lambda_1, \ldots, \lambda_1))\,X)(f) = 0$ *pour tout* $X \in S(\mathfrak{g})^I$.

Démonstration. — Soit $\mu_1, \ldots, \mu_n$ une base de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$. On suppose que $\mu_1, \ldots, \mu_m\, (m \leq n)$ est une base de $([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{g}(f))^\perp$. On peut écrire $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) = Q(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, où Q est une série formelle en n variables. L'hypothèse entraîne qu'il existe m séries formelles de n variables, $Q_1, \ldots, Q_m$, telles que $Q = \sum_1^m \mu_j Q_j$. Comme $\mu_i\ (1 \leq i \leq n)$ est nulle sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $Q_j(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est $\mathfrak{g}$-invariante pour chaque j, et donc, si $X \in S(\mathfrak{g})^I$, alors $D(Q_j(\mu_1, \ldots, \mu_n))\,X \in S(\mathfrak{g})^I$.

On est donc ramené à prouver le résultat suivant : soit μ une forme linéaire nulle sur $\mathfrak{g}(f)$. Alors $(D(\mu)\,X)(f) = 0$ pour tout $X \in S(\mathfrak{g})^I$.

Il résulte du lemme II.5 que si $X \in S(\mathfrak{g})^I$, on a $(D(a_Y f)\,X)(f) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Pour prouver que l'on a $(D(\mu)\,X)(f) = 0$, il suffit de prouver que $\mu \in a_{\mathfrak{g}} f$. Mais $a_{\mathfrak{g}} f$ est égal à l'orthogonal de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}^\star$, car $\mathfrak{g}(f)$ est l'orthogonal de $a_{\mathfrak{g}} f$ dans $\mathfrak{g}$. Le lemme est donc prouvé.

Nous supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique o. Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$. La forme bilinéaire B_f induit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée. Si $X \in \mathfrak{g}(f)$ et Y, $Z \in \mathfrak{g}$, alors on a

$$B_f([X, Y], Z) + B_f(Y, [X, Z]) = 0$$

(identité de Jacobi), et donc les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ sont de la forme $\pm \mu_1, \ldots, \pm \mu_s \left[\text{où } s = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)\right]$. Les μ_i sont nuls sur $\mathfrak{g}(f) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Notons encore $\mu_1, \ldots, \mu_s$ des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et qui prolongent les précédentes. Si V est un espace vectoriel de dimension finie sur k et si $\lambda \in V^\star$, on pose

$$S_\lambda = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\lambda\right)}{\frac{1}{2}\lambda}.$$

C'est un élément de $\hat{S}(V^\star)$. On pose $q_f = \prod_1^s S_{\mu_i}$. Il est clair que q_f est inversible et appartient à $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)^I$. On a alors :

LEMME II.7. — *La forme linéaire* $X \to D(q_f)^{-1} X(f)$ *sur* $S(\mathfrak{g})^I$ *ne dépend pas des différents choix faits ci-dessus.*

Démonstration. — Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s \in \{\pm 1\}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et dont les restrictions à $\mathfrak{g}(f)$ sont $\varepsilon_1 \mu_1, \ldots, \varepsilon_s \mu_s$. Posons $q'_f = \prod_1^s S_{\lambda_i}$. Comme $S_{-\lambda} = S_\lambda$, on a $q'_f = \prod_1^s S_{\lambda'_i}$, où $\lambda'_i = \varepsilon_i \lambda_i$. Le lemme II.7 résulte alors immédiatement du lemme II.6.

Nous pouvons maintenir énoncer le :

THÉORÈME II.1. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique* o. *Alors* $\chi_f(\beta(X)) = D(q_f)^{-1} X(f)$ *pour tout* $f \in \mathfrak{g}^\star$ *et tout* $X \in S(\mathfrak{g})^I$.

Ceci peut encore s'énoncer en disant que $\chi_f \circ \beta$ est la restriction de $e^f q_f^{-1}$ à $S(\mathfrak{g})^I$ (*cf.* le lemme II.2).

La démonstration fait l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE III.

Démonstration de la formule du caractère.

Elle se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ suivant un schéma bien classique. Lorsque $\dim \mathfrak{g} = 1$, le théorème est trivial. On suppose que $\dim \mathfrak{g} > 1$ et que le théorème est vrai pour toutes les algèbres de Lie résolubles de dimension $< \dim \mathfrak{g}$. On fixe $f \in \mathfrak{g}^\star$.

Premier cas. — On suppose qu'il existe un idéal non nul $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans $f^\perp$.

On pose $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ et on note f_1 l'élément de $\mathfrak{g}_1^\star$ obtenu à partir de f par passage au quotient. Soit π l'application canonique $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$. Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f)$. Il est clair que $\mathfrak{a}$ est contenu dans le noyau $\mathfrak{g}(f)$ de B_f et donc que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$. Posons $\rho_1 = \mathrm{Ind}(f_1 | \mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}_1)$ et $\rho = \mathrm{Ind}(f | \mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Alors $\rho = \rho_1 \circ \pi$ (lemme I.3). Soit $u \in Z(\mathfrak{g})$. Alors $\pi(u) \in Z(\mathfrak{g}_1)$ et l'on a

$$\chi_f(u) = \rho(u) = \rho_1(\pi(u)) = \chi_{f_1}(\pi(u)).$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour calculer χ_{f_1}.

Soient $\pm \mu_1, \ldots, \pm \mu_s$ des formes linéaires sur $\mathfrak{g}_1$ nulles sur $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ et dont les restrictions à $\mathfrak{g}_1(f_1)$ sont les poids de $\mathfrak{g}_1(f_1)$ dans $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1(f_1)$. Alors les formes linéaires $\pm \mu_1 \circ \pi, \ldots, \pm \mu_s \circ \pi$ sont nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et ont pour restrictions à $\mathfrak{g}(f)$ les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$. On peut donc choisir q_f et q_{f_1} de telle sorte que $q_{f_1} \circ \pi = q_f$.

Soit $X \in S(\mathfrak{g})^I$. On a

$$\chi_f(\beta(X)) = \chi_{f_1}(\pi(\beta(X))) = \chi_{f_1}(\beta(\pi(X))) = D(q_{f_1})^{-1}\, \pi(X)\,(f_1) = D(q_f)^{-1} X(f).$$

C. Q. F. D.

Deuxième cas. — On suppose que $f^\perp$ ne contient pas d'idéal non nul de $\mathfrak{g}$ (ce qui entraîne $\dim \mathfrak{z} = 0$ ou 1, en notant $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$), mais que $\mathfrak{g}$ contient un idéal $\mathfrak{a}$ de dimension 1 non central.

Alors la racine μ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}$ est non nulle et l'idéal $\mathfrak{g}_1 = \ker \mu$ est égal à l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ par rapport à B_f. On pose $f_1 = f | \mathfrak{g}_1$. Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f_1)$. Alors $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f)$ (lemme I.4). Posons $\rho_1 = \mathrm{Ind}(f | \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1)$ et $\rho = \mathrm{Ind}(f | \mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Alors ρ est équivalente à $\mathrm{Ind}(\rho_1, \mathfrak{g}_1)$ lemme I.2).

Nous allons prouver que $Z(\mathfrak{g}) \subset Z(\mathfrak{g}_1)$ et que $S(\mathfrak{g})^I \subset S(\mathfrak{g}_1)^I$. En fait la première assertion résulte de la seconde, puisque $\beta(S(\mathfrak{g})^I) = Z(\mathfrak{g})$ et $\beta(S(\mathfrak{g}_1)^I) = Z(\mathfrak{g}_1)$. Soient $X \in S(\mathfrak{g})^I$ et $Y \in \mathfrak{a}$ tel que $Y \neq 0$. D'après le lemme II.5, on a $D(a_Y g)\, X(g) = 0$ pour tout $g \in \mathfrak{g}^\star$. Si $g(Y) \neq 0$, alors $a_Y g$ est un élément non nul de $\mathfrak{g}_1^\perp$. En effet, si $Z \in \mathfrak{g}$, on a

$$\langle a_Y g, Z\rangle = -\langle g, [Y, Z]\rangle = \mu(Z) g(Y).$$

Soit g_0 un élément non nul de $\mathfrak{g}_1^\perp$. On a donc $D(g_0) X(g) = 0$ dès que $g(Y) \neq 0$, et donc $D(g_0) X = 0$. Mais ceci signifie que $X \in S(\mathfrak{g}_1)$. Comme on a évidemment $S(\mathfrak{g})^I \cap S(\mathfrak{g}_1) \subset S(\mathfrak{g}_1)^I$, notre assertion est démontrée.

Soit $X \in S(\mathfrak{g})^I$. Nous voulons calculer $\rho(\beta(X))$. Comme $\mathfrak{g}_1$ est un idéal, on a, avec les notations du chapitre I, $\theta_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1} = 0$. Compte tenu du lemme I.1, on a donc $\rho(\beta(X)) = \rho_1(\beta(X))$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour calculer $\rho_1(\beta(X)) = \chi_{f_1}(\beta(X))$.

Soient $\pm\mu_1, \ldots, \pm\mu_d$ les poids de $\mathfrak{g}_1(f_1)$ dans $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1(f_1)$. Comme B_f induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1(f_1)/\mathfrak{g}(f)$, le poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ est l'opposé de celui dans $\mathfrak{g}_1(f_1)/\mathfrak{g}(f)$, et tous les deux sont nuls puisque $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}_1 = \ker\mu$. Il en résulte que l'on peut supposer que q_{f_1} est la restriction de q_f à $\mathfrak{g}_1$. Soit j l'injection $S(\mathfrak{g}_1) \to S(\mathfrak{g})$. On voit que l'on a $j(D(q_{f_1}) X) = D(q_f) j(X)$ pour tout $X \in S(\mathfrak{g}_1)$. Soit alors $X \in S(\mathfrak{g})^I$. On a

$$\chi_f(\beta(X)) = \chi_{f_1}(\beta(X)) = D(q_{f_1})^{-1} X(f_1)$$

par l'hypothèse de récurrence, et $D(q_{f_1})^{-1} X(f_1) = D(q_f)^{-1} X(f)$, comme nous venons de le voir, ce qui démontre le théorème dans ce cas.

Troisième cas. — On suppose que $f^\perp$ ne contient pas d'idéal non nul de $\mathfrak{g}$ et que tout idéal minimal non nul de $\mathfrak{g}$ est central, ce qui entraîne $\dim \mathfrak{z} = 1$ et $f(\mathfrak{z}) \neq \{0\}$, en notant $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. On suppose que le centre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est non nul.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de dimension 2 contenant $\mathfrak{z}$ et tel que $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ soit contenu dans le centre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. Soit $e_0 \in \mathfrak{z}$ tel que $e_0 \neq 0$, et soit $e_1 \in \mathfrak{a}$ tel que $f(e_1) = 0$ et $e_1 \neq 0$. Alors e_0, e_1 est une base de $\mathfrak{a}$ et il existe $\lambda \in \mathfrak{g}^\star$ telle que $[X, e_1] = \lambda(X) e_0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Posons $\mathfrak{g}_1 = \ker\lambda$. Alors $\mathfrak{g}_1$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ et donc est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$. On pose $f_1 = f|\mathfrak{g}_1$. Comme on a $\langle f, [X, e_1]\rangle = \lambda(X) f(e_0)$, on voit que $\mathfrak{g}_1$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ par rapport à B_f. Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f_1)$. D'après le lemme I.4, on a $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f)$. Posons $\rho_1 = \mathrm{Ind}(f|\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1)$ et $\rho = \mathrm{Ind}(f|\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. D'après le lemme I.2, ρ est équivalente à $\mathrm{Ind}(\rho_1, \mathfrak{g})$.

Nous allons montrer que $S(\mathfrak{g})^I \subset S(\mathfrak{g}_1)^I$. Soit $X \in S(\mathfrak{g})^I$. Pour tout $g \in \mathfrak{g}^\star$ on a $D(a_{e_1} g) X(g) = 0$. Comme on a $\langle a_{e_1} g, Z\rangle = \lambda(Z) g(e_1)$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$, on voit que si $g(e_1) \neq 0$, alors $a_{e_1} g$ est un élément non nul de $\mathfrak{g}_1^\perp$. Soit $g_0 \in \mathfrak{g}_1^\perp$ tel que $g_0 \neq 0$. On a $D(g_0) X(g) = 0$ dès que $g(e_1) \neq 0$, c'est-à-dire $D(g_0) X = 0$, et donc $X \in S(\mathfrak{g}_1)$.

La situation est tout à fait semblable à celle du deuxième cas, et on montre comme dans le deuxième cas que si $X \in S(\mathfrak{g})^I$, on a

$$\chi_f(\beta(X)) = \chi_{f_1}(\beta(X)) = D(q_{f_1})^{-1}X(f_1) = D(q_f)^{-1}X(f).$$

Quatrième cas. — C'est le cas crucial. On suppose que l'on n'est dans aucun des trois premiers cas.

Alors le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 et $f(\mathfrak{z}) \neq \{0\}$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de dimension 2 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{z}$. Soit e_0, e_1 une base de $\mathfrak{a}$ telle que $e_0 \in \mathfrak{z}$ et $f(e_1) = 0$. Il existe des formes linéaires λ et μ telles que $[X, e_1] = \mu(X)e_1 + \lambda(X)e_0 (X \in \mathfrak{g})$. Alors μ est une racine de $\mathfrak{g}$ non nulle car sinon on serait dans le troisième cas. Les formes λ et μ ne sont pas proportionnelles, car s'il existait $\alpha \in k$ tel que $\alpha\mu = \lambda$, alors $k(e_1 + \alpha e_0)$ serait un idéal non central de $\mathfrak{g}$. En effet,

$$[X, e_1 + \alpha e_0] = [X, e_1] = \mu(X)\, e_1 + \alpha\mu(X)\, e_0 = \mu(X)\,(e_1 + \alpha e_0).$$

Il existe donc $e_2 \in \mathfrak{g}$ tel que $[e_2, e_1] = e_0$.

Soit $\mathfrak{g}_1 = \ker\lambda$. C'est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de codimension 1, égale à l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ par rapport à B_f. Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f_1)$ (où $f_1 = f \mid g_1$). Le lemme I.4 entraîne que $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f)$. On pose $\rho_1 = \mathrm{Ind}(f \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1)$ et $\rho = \mathrm{Ind}(f \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, de sorte que ρ est équivalente à $\mathrm{Ind}(\rho_1, \mathfrak{g})$ (lemme I.2). On remarque que ke_1 est un idéal de $\mathfrak{g}_1$ contenu dans $f_1^{\perp}$, d'où $ke_1 \subset \mathfrak{g}_1(f_1)$. On a donc $ke_1 \subset \mathfrak{h}$. Posons $\mathfrak{g}'_1 = \mathfrak{g}_1/ke_1$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}/e_1$, et soit f'_1 l'élément de $\mathfrak{g}'^{*}_1$ déduit de f_1 par passage au quotient. Soit $\rho'_1 = \mathrm{Ind}(f'_1 \mid \mathfrak{h}' \mathfrak{g}'_1)$. Soit π la projection $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}'_1$. Le lemme I.3 entraîne $\rho_1 = \rho'_1 \circ \pi$.

Indiquons le principe de la démonstration. Soit $X \in S(\mathfrak{g})^I$. Soit w dans l'espace de ρ_1. Si $v \in U(\mathfrak{g})e_1$, on a $\rho(v)w = 0$. Pour calculer $\rho(\beta(X))w$, il nous suffit donc de connaître $\beta(X) \bmod U(\mathfrak{g})e_1$. Nous allonx montrer qu'il existe un élément $u \in U(\mathfrak{g}_1)$ tel que $\beta(X) - u \in U(\mathfrak{g})e_1$, et tel que $\pi(u) \in Z(\mathfrak{g}'_1)$. On aura donc $\chi_f(\beta(X)) = \chi_{f'_1}(\pi(u))$. On applique alors l'hypothèse de récurrence pour calculer $\chi_{f'_1}(\pi(u))$ et comme on exhibe d'autre part une formule explicite pour calculer $\beta^{-1}(\pi(u))$ en fonction de X, ceci permet d'achever la démonstration du théorème. Avant d'aller plus loin, citons comme exemple typique de notre situation l'algèbre « résoluble spéciale » qui admet la base e_0, e_1, e_2, e_3 avec la table de multiplication : $[e_2, e_1] = e_0$, $[e_3, e_1] = e_1$, $[e_3, e_2] = -e_2$, les autres crochets étant soit nuls, soit déduits des précédents par antisymétrisation. Ici $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} = ke_0 + ke_1 + ke_3$, et $\mathfrak{g}'_1$ est commutative de dimension 2.

Lemmes préliminaires. — Comme $\mathfrak{g} = ke_2 \oplus \mathfrak{g}_1$, on peut écrire tout $X \in S(\mathfrak{g})$ d'une manière unique sous la forme $X = \sum_{p \geq 0} e_2^p v_p(X)$ avec

$\varphi_p(X) \in S(\mathfrak{g}_1)$. Notons $d_1 = d_{e_1}$ la dérivation de $S(\mathfrak{g})$ [ou de $U(\mathfrak{g})$ suivant les cas] qui prolonge $\mathrm{ad}\, e_1$. Nous nous intéressons pour commencer aux éléments annulés par d_1.

LEMME III. 1. — *Soit* $X \in S(\mathfrak{g})$ *un élément annulé par* d_1. *Pour tout entier* $p \geqq 0$, $D(\mu)^p \varphi_0(X)$ *est divisible par* e_0^p *et l'on a*

$$X = \sum_{p \geqq 0} (-1)^p (p!)^{-1} (e_1 e_2)^p e_0{}^{-p} (D(\mu)^p \varphi_0(X)).$$

En particulier $X - \varphi_0(X) \in S(\mathfrak{g}) e_1$.

Démonstration. — On a

$$d_1(e_2^p \varphi_p(X)) = p\, d_1(e_2) e_2^{p-1} \varphi_p(X) + e_2^p d_1(\varphi_p(X)).$$

D'autre part, $d_1(e_2) = [e_1, e_2] = -e_0$. Calculons $d_1(\varphi_p(X))$. Nous allons montrer que l'on a $d_1(Y) = -e_1(D(\mu)Y)$ pour tout $Y \in S(\mathfrak{g}_1)$. En fait, d_1 et $-e_1 D(\mu)$ sont des dérivations de $S(\mathfrak{g}_1)$. Il suffit donc de prouver l'égalité lorsque $Y \in \mathfrak{g}_1$. Dans ce cas :

$$D(\mu)\, Y = \langle \mu, Y \rangle \qquad \text{et} \qquad d_1(Y) = [e_1, Y] = -\mu(Y) e_1 = -e_1(D(\mu)\, Y).$$

Écrivons que $d_1(X)$ est nul. On écrit que le coefficient de e_2^{p-1} est nul, ce qui donne, pour tout $p \geqq 1$, la relation

$$-p e_0 \varphi_p(X) - e_1(D(\mu)\, \varphi_{p-1}(X)) = 0.$$

On en déduit par récurrence sur p que

$$\varphi_p(X) = (-1)^p (p!)^{-1} e_1^p e_0^{-p} (D(\mu)^p \varphi_0(X)).$$

C. Q. F. D.

L'image de $\varphi_0(X)$ dans $S(\mathfrak{g}'_1)$ sera notée $\varphi(X)$.

Le lemme suivant est classique. Pour la commodité du lecteur, nous en donnons une démonstration.

LEMME III.2. — *Soit* $\mathfrak{h}$ *une algèbre de Lie complexe et soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{h}$. *Soit* H *un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$. *Soient* $X \in \mathfrak{h}$ *et* $Y \in \mathfrak{a}$. *On a*

$$\exp(X + Y) = \exp\left(\frac{e^{\mathrm{ad}\, X} - 1}{\mathrm{ad}\, X}\, Y\right) \exp X.$$

Démonstration. — La formule est vraie si $Y = 0$. Il suffit donc de montrer que l'application de $\mathfrak{a}$ dans H :

$$Y \to \exp\left(-\frac{e^{\mathrm{ad}\, X} - 1}{\mathrm{ad}\, X}\, Y\right) \exp(X + Y)$$

est constante. Soit T_Y son application tangente au point Y. Il suffit de prouver que $T_Y = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{a}$.

Soit L_1 l'application tangente en 1 de la multiplication à droite par $\exp(X + Y)$, et L_2 celle de la multiplication à gauche par $\exp\left(-\frac{e^{\operatorname{ad} X} - 1}{\operatorname{ad} X} Y\right)$. L'application tangente en Y de l'application $Y \to \exp(X + Y)$ envoie $Y' \in \mathfrak{a}$ sur $L_1\left(\frac{e^{\operatorname{ad}(X+Y)} - 1}{\operatorname{ad}(X+Y)} Y'\right)$ (*cf.* [5], p. 95). Comme $\mathfrak{a}$ est abélienne, on a

$$\frac{e^{\operatorname{ad}(X+Y)} - 1}{\operatorname{ad}(X+Y)} Y' = \frac{e^{\operatorname{ad} X} - 1}{\operatorname{ad} X} Y'.$$

La différentielle en Y de l'application $Y \to \exp\left(-\frac{e^{\operatorname{ad} X} - 1}{\operatorname{ad} X} Y\right)$ envoie $Y' \in \mathfrak{a}$ sur $L_2\left(-\frac{e^{\operatorname{ad} X} - 1}{\operatorname{ad} X} Y'\right)$, car $\mathfrak{a}$ est abélienne. Il en résulte que

$$T_Y(Y') = L_1 L_2\left(-\frac{e^{\operatorname{ad} X} - 1}{\operatorname{ad} X} Y' + \frac{e^{\operatorname{ad} X} - 1}{\operatorname{ad} X} Y'\right) = 0.$$

C. Q. F. D.

LEMME III.3. — *On suppose que le corps de base est* $\mathbf{C}$. *Soit* G *un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *Soient* $t_1, t_2 \in \mathbf{C}$ *et* $Z \in \mathfrak{g}_1$. *On a*

$$\exp(t_1 e_1 + t_2 e_2 + Z) = \exp\left(\frac{e^{\mu(Z)} - 1}{\mu(Z)} t_1 e_1\right) \exp\left(t_2 e_2 + Z + \frac{e^{\mu(Z)} - 1 - \mu(Z)}{\mu(Z)^2} t_1 t_2 e_0\right).$$

Démonstration. — Posons $X = t_2 e_2 + Z$. Dans la base e_0, e_1, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}}(X)$ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & t_2 \\ 0 & \mu(Z) \end{pmatrix}.$$

Un calcul facile montre que la restriction de $\frac{e^{\operatorname{ad} X} - 1}{\operatorname{ad} X}$ à $\mathfrak{a}$ est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{e^{\mu(Z)} - 1 - \mu(Z)}{\mu(Z)^2} t_2 \\ 0 & \dfrac{e^{\mu(Z)} - 1}{\mu(Z)} \end{pmatrix}.$$

Le lemme III.3 résulte alors du lemme III.2 où l'on fait $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ et $Y = t_1 e_1$.

LEMME III.4. — *Soit* $Y \in S(\mathfrak{g}_1)$ *et soit* p *un entier* ≥ 0. *On a*

$$\beta((e_1 e_2)^p Y) - p!(-1)^p \beta\left(e_0^p\left(D\left(\frac{e^{-\mu} - 1 + \mu}{\mu^2}\right)^p Y\right)\right) \in U(\mathfrak{g}) e_1.$$

Démonstration. — Nous choisissons une base $e_0, e_1, \ldots, e_n$ de $\mathfrak{g}$. Les vecteurs e_0, e_1, e_2 sont déjà connus. On demande que $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ soit une base de $\ker \mu$, que $\mu(e_n) = 1$, et que $e_0, e_1, e_3, \ldots, e_n$ soit une base de $\mathfrak{g}_1$.

Soit k' le corps engendré par les constantes de structure de $\mathfrak{g}$ par rapport à cette base, et soit $\mathfrak{g}_{k'}$ l'algèbre de Lie sur k' engendrée par $e_0, \ldots, e_n$, de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{k'} \otimes_{k'} k$. On choisit un plongement de k' dans $\mathbf{C}$, et on pose $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_{k'} \otimes_{k'} \mathbf{C}$. Ceci étant posé, il est clair qu'il suffit de démontrer le lemme lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, c'est-à-dire lorsque le corps de base est le corps des complexes, ce que nous faisons désormais.

Soit G un groupe de Lie complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit φ une fonction holomorphe dans un ouvert de G et soit $X \in \mathfrak{g}$. On pose

$$\Delta(X)\varphi(g) = \frac{d}{dt}\varphi(\exp(-tX)g)\Big|_{t=0},$$

et on prolonge Δ en un homomorphisme de $U(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels sur G invariants à droite. De même, si ψ est une fonction holomorphe sur $\mathfrak{g}$, on pose

$$\partial(X)\psi(Y) = \frac{d}{dt}\psi(Y - tX)\Big|_{t=0},$$

et on prolonge ∂ en un homomorphisme de $S(\mathfrak{g})$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{g}$ à coefficients constants. Remarquez que si p est un polynôme sur $\mathfrak{g}$, on a $\partial(X)p = D^\star(\tilde{X})p$, où $D^\star$ est défini comme dans le chapitre II, et où $X \to \tilde{X}$ est l'homomorphisme de $S(\mathfrak{g})$ qui prolonge l'application $Y \to -Y$ de $\mathfrak{g}$.

Si $u \in U(\mathfrak{g})$, on pose $(u, \varphi) = \Delta(u)\varphi(o)$, et si $X \in S(\mathfrak{g})$, on pose $(X, \psi) = \partial(X)\psi(o)$. On a alors $(\beta(X), \varphi) = (X, \varphi \circ \exp)$. Si $p \in \hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$ est le germe en o d'une fonction holomorphe, on a $(X, p\psi) = (D(\tilde{p})X, \psi)$, où $\tilde{p}$ est défini par $p(-Z) = \tilde{p}(Z)$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$. En effet, on a

$$\langle X, p\rangle = D^\star(X)p(o) = \partial(X)\tilde{p}(o) = (X, \tilde{p}),$$

et donc

$$(X, p\psi) = \langle X, \tilde{p}\tilde{\psi}\rangle = \langle D(\tilde{p})X, \tilde{\psi}\rangle = (D(\tilde{p})X, \psi),$$

d'après le lemme II.1. [On a noté par la même lettre des fonctions holomorphes définies dans un voisinage de l'origine et l'élément de $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$ qu'elles définissent.]

Pour prouver le lemme III.4, il suffit de prouver l'assertion suivante. Soit φ une fonction holomorphe dans un voisinage de l'élément neutre de G telle que $\varphi(\exp(te_1)g) = \varphi(g)$ dès que $(t, g) \in \mathbf{C} \times G$ est assez voisin de (o, 1). Soit $X \in S(\mathfrak{g})$ un élément annulé par d_1. On a

$$(\beta(e_1^p e_2^p Y), \varphi) = (-1)^p p!\left(\beta\left(e_0^p\left(D\left(\frac{e^{-\mu} - 1 + \mu}{\mu^2}\right)^p Y\right)\right), \varphi\right).$$

Posons $\psi = \varphi \circ \exp$. Il faut donc prouver la formule

$$(1) \qquad (e_1^p e_2^p Y, \psi) = (-1)^p p!\left(e_0^p Y, \left(\frac{e^{\mu} - 1 - \mu}{\mu^2}\right)^p \psi\right),$$

et pour cela il suffit de montrer que l'on a

$$(2) \qquad \partial(e_1^p e_2^p)\psi(Z) = (-1)^p p!\left(\frac{e^{\mu(Z)} - 1 - \mu(Z)}{\mu(Z)^2}\right)^p \partial(e_0^p)\psi(Z)$$

pour tout Z dans un voisinage de l'origine de $\mathfrak{g}_1$.

Par définition de ∂, on a

$$(\partial(e_1^p e_2^p)\psi)(Z) = \left(\frac{d}{dt_1}\right)^p \left(\frac{d}{dt_2}\right)^p \psi(Z - t_1 e_1 - t_2 e_2)\Big|_{t_1=0,\ t_2=0}.$$

D'après le lemme III.3, on a

$$\begin{aligned}\psi(Z - t_1 e_1 - t_2 e_2) &= \varphi(\exp(Z - t_1 e_1 - t_2 e_2)) \\ &= \varphi\left(\exp\left(-t_2 e_2 + Z + \frac{e^{\mu(Z)} - 1 - \mu(Z)}{\mu(Z)^2} t_1 t_2 e_0\right)\right) \\ &= \psi\left(-t_2 e_2 + Z + \frac{e^{\mu(Z)} - 1 - \mu(Z)}{\mu(Z)^2} t_1 t_2 e_0\right),\end{aligned}$$

car φ est invariante à gauche par $\exp(te_1)$. On en déduit

$$(3) \qquad \begin{aligned}&\left(\frac{d}{dt_1}\right)^p \psi(Z - t_1 e_1 - t_2 e_2)\Big|_{t_1=0} \\ &= (-1)^p \left(\frac{e^{\mu(Z)} - 1 - \mu(Z)}{\mu(Z)^2}\right)^p t_2^p (\partial(e_0^p)\psi)(-t_2 e_2 + Z),\end{aligned}$$

car on a

$$\partial(e_0^p)\psi(-t_2 e_2 + Z) = (-1)^p \left(\frac{d}{dt}\right)^p \psi(-t_2 e_2 + Z + te_0)\Big|_{t=0}.$$

Appliquons $\left(\frac{d}{dt_2}\right)^p$ à (3). Prenant la valeur pour $t_2 = 0$, on obtient (2), ce qui démontre le lemme III.4.

Lemme III.5. — *Soit* $X \in S(\mathfrak{g})$ *un élément annulé par* d_1. *Alors*

$$\beta(X) - \beta\left(D\left(\frac{e^{-\mu} - 1}{-\mu}\right)^{-1} v_0(X)\right) \in U(\mathfrak{g})e_1.$$

Démonstration. — On a (lemme III.1) :

$$\beta(X) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p (p!)^{-1} \beta(e_1^p e_2^p e_0^{-p}(D(\mu)^p v_0(X))).$$

D'après le lemme III.4, on a

$$(-1)^p (p!)^{-1} \beta(e_1^p e_2^p e_0^{-p}(D(\mu)^p v_0(X))) \equiv \beta\left(D\left(\frac{e^{-\mu} - 1 + \mu}{\mu}\right)^p v_0(X)\right) \bmod U(\mathfrak{g})e_1.$$

Il en résulte que $\beta(X) \equiv \beta(D(r)v_0(X)) \bmod U(\mathfrak{g})e_1$, où l'on a posé

$$r = \sum_{p \geq 0} \left(\frac{e^{-\mu} - 1 + \mu}{\mu}\right)^p = \left(1 - \frac{e^{-\mu} - 1 + \mu}{\mu}\right)^{-1} = \left(\frac{e^{-\mu} - 1}{-\mu}\right)^{-1}.$$

Ceci démontre le lemme III.5.

Le lemme suivant est l'équivalent dans $U(\mathfrak{g})$ du lemme III.1.

LEMME III.6. — *Soit* $u \in U(\mathfrak{g})$ *un élément annulé par* d_1. *Alors* $u \in U(\mathfrak{g}_1) + U(\mathfrak{g})e_1$.

Étant donné un élément $u \in U(\mathfrak{g})$ annulé par d_1, le lemme III.6 permet de définir un élément $V(u) \in U(\mathfrak{g}'_1)$ qui est l'image dans $U(\mathfrak{g}'_1)$ de n'importe quel élément $u' \in U(\mathfrak{g}_1)$ tel que $u - u' \in U(\mathfrak{g})e_1$.

La démonstration du lemme III.6, de même que celle du lemme suivant, résulte immédiatement du lemme III.5.

LEMME III.7. — *Soit* $X \in S(\mathfrak{g})$ *un élément annulé par* d_1. *On a*

$$V(\beta(X)) = \beta\left(D\left(\frac{e^{-\mu}-1}{-\mu}\right)^{-1} \varphi(X)\right).$$

(*On a noté par la même lettre la forme linéaire sur* $\mathfrak{g}'_1$ *déduite de* μ *par passage au quotient.*)

On remarquera que le lemme III.7, qui fournit la clef de la démonstration du théorème II.1, ne dépend pas d'un choix de l'élément e_2.

LEMME III.8. — *Soit* $X \in S(\mathfrak{g})$ *un élément annulé par toutes les dérivations* d_Y *avec* $Y \in \mathfrak{g}_1$. *Alors* $\varphi(X) \in S(\mathfrak{g}'_1)^I$. *Soit* $u \in U(\mathfrak{g})$ *un élément annulé par toutes les dérivations* d_Y *avec* $Y \in \mathfrak{g}_1$. *Alors* $V(u) \in Z(\mathfrak{g}'_1)$.

Démonstration. — Compte tenu du lemme III.7, il suffit de prouver l'assertion relative à X. Pour cela, il suffit de montrer que $d_Y(\varphi_0(X)) \in S(\mathfrak{g})e_1$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}_1$. Il existe $Z \in S(\mathfrak{g})$ tel que $\varphi_0(X) = X + Ze_1$. On a donc

$$d_Y(\varphi_0(X)) = d_Y(X) + d_Y(Z)e_1 + Z d_Y(e_1) = 0 + d_Y(Z)e_1 + Z\mu(Y)e_1,$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME III.9. — *Soit* $X \in S(\mathfrak{g})$ *un élément annulé par* d_1. *Soit* ν *une forme linéaire sur* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\nu(e_1) = 0$. *On a* $\varphi(D(\nu)X) = D(\nu)\varphi(X)$ (*où, dans le second membre, on a noté par la même lettre la forme linéaire sur* $\mathfrak{g}'_1$ *obtenue à partir de* ν *par restriction et passage au quotient*).

Démonstration. — Il suffit de prouver que $D(\nu)X - D(\nu)\varphi_0(X) \in S(\mathfrak{g})e_1$. Il suffit donc de prouver que $D(\nu)$ laisse stable $S(\mathfrak{g})e_1$. Soit $Z \in S(\mathfrak{g})$. On a

$$D(\nu)(Ze_1) = D(\nu)(Z)e_1 + ZD(\nu)(e_1) = D(\nu)(Z)e_1,$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME III.10. — *On a, avec les notations du chapitre* II : $\theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1} = \frac{1}{2}\mu|\mathfrak{g}_1$.

Démonstration. — Il résulte de la relation $[e_2, e_1] = e_0$ que l'on a

$$(\star) \qquad [[Y, e_2], e_1] + [e_2, [Y, e_1]] = 0 \quad \text{pour tout } Y \in \mathfrak{g}.$$

Soit $\mu' \in \mathfrak{g}^\star$ un élément tel que $Y' = [Y, e_2] + \mu'(Y) e_2 \in \mathfrak{g}_1$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Comme $\ker\mu$ est un idéal, on a $Y' \in \ker\mu$. Pour $Y \in \mathfrak{g}_1$, la relation $(\star)$ entraîne $-\mu'(Y)e_0 + \mu(Y)e_0 = 0$, d'où l'on déduit $\mu(Y) = \mu'(Y)$, et donc le lemme.

Démonstration du quatrième cas. — A. Nous commençons par prouver que si $Y \in S(\mathfrak{g}_1)$ et si w est dans l'espace de la représentation ρ_1, on a

$$\rho(\beta(Y))\, w - \rho_1\Big(\beta\Big(D\big(e^{-\frac{1}{2}\mu}\big)Y\Big)\Big)\, w.$$

Il suffit de le prouver lorsque Y est de la forme Z^n, avec $Z \in \mathfrak{g}_1$. Il résulte des lemmes I.1 et III.10 que l'on a

$$\rho(Z^n)\, w = \Big(\rho_1(Z) - \frac{1}{2}\mu(Z)\Big)^n w = \rho_1\Big(\Big(Z - \frac{1}{2}\mu(Z)\Big)^n\Big) w.$$

Il résulte du lemme II.2 que $\left(Z - \frac{1}{2}\mu(Z)\right)^n = D\left(e^{-\frac{1}{2}\mu}\right) Z^n$, ce qui prouve notre assertion.

B. On remarque ensuite que $\rho(e_1)\, w = 0$.

En effet, $\rho_1(e_1)\, w = 0$ car $\rho_1 = \operatorname{Ind}(f \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1)$ et car $f(e_1) = 0$ (*cf.* le premier cas). D'autre part, $D\left(e^{-\frac{1}{2}\mu}\right) e_1 = e_1$, car $\mu(e_1) = 0$. On a donc $\rho(e_1)\, w = \rho_1(e_1)\, w = 0$, d'après A.

C. Soit $X \in S(\mathfrak{g})^I$. On a

$$\begin{aligned}
\rho(\beta(X))\, w &= \rho\left(\beta\left(D\left(\frac{e^{-\mu} - 1}{-\mu}\right)^{-1} v_0(X)\right)\right) w && \text{(d'après B et le lemme I.5)}\\
&= \rho_1\left(\beta\left(D\big(e^{-\frac{1}{2}\mu}\big) D\left(\frac{e^{-\mu} - 1}{-\mu}\right)^{-1} v_0(X)\right)\right) w && \text{(d'après A)}\\
&= \rho_1(\beta(D(S_\mu)^{-1} v_0(X)))\, w && \text{(d'après la définition de } S_\mu\text{).}
\end{aligned}$$

Utilisant maintenant le fait que $\rho_1 = \rho_1' \circ \pi$, on trouve

$$\rho_1(\beta(D(S_\mu)^{-1} v_0(X))) = \rho_1'(\beta(D(S_\mu)^{-1} v(X))).$$

D'après le lemme III.8, $v(X)$ est dans $S(\mathfrak{g}_1')^I$, et il en est donc de même de $D(S_\mu)^{-1} v(X)$ (lemme II.4). On a donc finalement prouvé la formule

$$(\star) \qquad \chi_f(\beta(X)) = \chi_{f_1'}(\beta(D(S_\mu)^{-1} v(X))).$$

D. Soient $\pm\mu_i\ (1 \leq i \leq d)$ les poids de $\mathfrak{g}_1(f_1)$ dans $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1(f_1)$. On les prolonge en des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Alors les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ sont les restrictions à $\mathfrak{g}(f)$ des formes $\pm\mu, \pm\mu_1, \ldots, \pm\mu_d$.

En effet, $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}_1(f_1)$, et il suffit de voir que les restrictions des formes μ et $-\mu$ à $\mathfrak{g}(f)$ sont les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}_1(f_1)/\mathfrak{g}(f)$ et dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$. Pour la seconde cela résulte du lemme IV.10, et la première résulte du fait que B_f est $\mathfrak{g}(f)$-invariante et induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1(f_1)/\mathfrak{g}(f)$.

E. Posons $p = \prod_1^d S_{\mu_i}$. Alors p est un élément de $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$ dont la projection sur $\hat{S}(\mathfrak{g}_1^\star)$ peut être prise comme élément q_{f_1}. Si l'on identifie $\mathfrak{g}_1'^\star$ à un sous-espace de $\mathfrak{g}_1^\star$, on a en fait $q_{f_1} \in \hat{S}(\mathfrak{g}_1'^\star)$ et on peut supposer que $q_{f_1} = q_{f_1'}$. D'autre part, on peut supposer que $q_f = p S_\mu$, comme il résulte facilement de D.

F. L'hypothèse de récurrence entraîne que

$$\chi_{f_1'}(\beta(D(S_\mu)^{-1} \nu(X))) = D(S_\mu q_{f_1})^{-1} \nu(X)(f_1).$$

Il résulte du lemme III.9 que l'on a

$$D(S_\mu q_{f_1})^{-1} \nu(X) = \nu(D(S_\mu p)^{-1} X) = \nu(D(q_f)^{-1} X).$$

Enfin on a

$$\nu(D(q_f)^{-1} X)(f_1) = D(q_f)^{-1} X(f) \qquad \text{car} \quad f(e_1) = 0.$$

Tout ceci, rapproché de $(\star)$ donne finalement

$$\chi_f(\beta(X)) = D(q_f)^{-1} X(f),$$

ce qui termine la démonstration du quatrième cas et du théorème II.1.

CHAPITRE IV.

Le centre de l'algèbre enveloppante universelle ($\mathfrak{g}$ résoluble).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0. Notons

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ad}\right)}{\frac{1}{2}\operatorname{ad}}$$

l'élément de $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star) \otimes \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ dont la composante homogène de degré $2n (n \geqq 0)$ est l'application polynomiale $X \to \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ad} X\right)^{2n}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\operatorname{End}(\mathfrak{g})$, et dont les composantes homogènes de degré impair sont nulles.

On peut définir

$$p = \det\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ad}\right)}{\frac{1}{2}\operatorname{ad}}\right) \in \hat{S}(\mathfrak{g}^\star),$$

en prenant une base de $\mathfrak{g}$ par exemple. Le terme constant de p est 1. Il existe donc un unique élément q de $\hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$ dont le terme constant est 1 et tel que $q^2 = p$.

On suppose maintenant que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0. Il est clair alors que $p = \prod S_\mu$, où le produit est pris sur l'ensemble de toutes les racines de $\mathfrak{g}$, comptées avec leur multiplicité.

Lemme IV.1. — *Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$ un point tel que $\mathfrak{g}(f)$ soit nilpotente. Alors, pour tout $X \in S(\mathfrak{g})^I$, on a $D(q_f)^{-1} X(f) = D(q)^{-1} X(f)$.*

Démonstration. — D'après le lemme II.6, il suffit de vérifier que q et q_f ont la même projection sur $\hat{S}(\mathfrak{g}(f)^\star)$. La projection de q est $\left(\prod S_\mu\right)^{\frac{1}{2}}$, où le produit est pris sur l'ensemble des poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}$. Les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}(f)$ sont nuls par hypothèse. Les poids de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ sont de la forme $\pm \mu_1, \ldots, \pm \mu_d$ et comme $S_\mu = S_{-\mu}$, on voit que $q = \prod_1^d S_{\mu_i} = q_f$.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$ un point tel que $\mathfrak{g}(f)$ soit nilpotente. Alors $\chi_f(\beta(X)) = D(q)^{-1} X(f)$ pour tout $X \in S(\mathfrak{g})^I$* (1).

Démonstration. — Ceci résulte du lemme IV.1 et du théorème II.1.

Ce corollaire est utilisable à cause du résultat suivant :

Lemme IV.2. — *Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$ un point tel que $\dim \mathfrak{g}(f)$ soit minimale. Alors $\mathfrak{g}(f)$ est commutative.*

Démonstration. — Le lemme est démontré dans [3] lorsque le corps de base est **C**, ou lorsque $\mathfrak{g}$ est algébrique. Dans le cas général, on va se ramener au cas où le corps de base est **C**. Pour cela on considère une base $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathfrak{g}$ telle que la base duale contienne f, et on note k' le sous-corps de k

(1) L'hypothèse « $\mathfrak{g}(f)$ nilpotente » est superflue (cf. un texte de N. Conze et M. Duflo, à paraître au Bull. Sci. Math.).

engendré par les constantes de structures de $\mathfrak{g}$. On choisit une injection de k' dans $\mathbf{C}$. Soit $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie sur k' engendrée par les e_i, de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \otimes_{k'} k$. On pose $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}' \otimes_{k'} \mathbf{C}$.

Soit $r(\mathfrak{g})$ le nombre minimal pour $\dim \mathfrak{g}(f)$ lorsque f parcourt $\mathfrak{g}$. Alors on a $r(\mathfrak{g}) = r(\mathfrak{g}') = r(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, car $n - r(\mathfrak{g}) = n - r(\mathfrak{g}') = n - r(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est égal au rang de la matrice $([e_i, e_j])$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ à coefficients dans $S(\mathfrak{g}')$.

Comme on a $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}'(f) \otimes k$ et $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(f) = \mathfrak{g}'(f) \otimes \mathbf{C}$, on voit que $\dim \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(f) = r(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ et donc que $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(f)$ est commutative. Il en est donc de même de $\mathfrak{g}(f)$.

Lemme IV.3. — *L'ensemble des éléments f de $\mathfrak{g}^\star$ tels que* $\dim \mathfrak{g}(f)$ *soit minimale est un ouvert (pour la topologie de Zariski) non vide de $\mathfrak{g}^\star$.*

Démonstration. — Soit r la dimension minimale des $\mathfrak{g}(f)$. Alors $\dim \mathfrak{g}(f) = r$ si et seulement s'il existe un mineur d'ordre $n - r$ de la matrice $(\langle f, [e_i, e_j] \rangle)$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ dont le déterminant est non nul, ce qui prouve le lemme.

Il résulte du corollaire au lemme IV.1 et des lemmes IV.2 et IV.3 que pour tous les éléments f d'un ouvert non vide de $\mathfrak{g}^\star$, l'application $u \to D(q)^{-1} \beta^{-1}(u)(f)$ est un caractère de $Z(\mathfrak{g})$. Il en résulte que l'application $D(q)^{-1} \circ \beta^{-1}$ induit un homomorphisme d'algèbres de $Z(\mathfrak{g})$ dans $S(\mathfrak{g})^I$. Comme, d'après le lemme II.4, cette application est bijective, on en déduit, lorsque le corps k est algébriquement clos, le théorème suivant :

Théorème IV.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique* o. *L'application* $\beta \circ D(q)$ *induit un isomorphisme d'algèbres de* $S(\mathfrak{g})^I$ *sur* $Z(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — Le théorème est déjà prouvé si le corps de base est algébriquement clos. Soit k' la clôture algébrique de k et soit $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes k'$. Il est connu que $S(\mathfrak{g}')^I = S(\mathfrak{g})^I \otimes k'$ et $Z(\mathfrak{g}') = Z(\mathfrak{g}) \otimes k'$, d'où le résultat dans le cas général.

CHAPITRE V.

Le centre de l'algèbre enveloppante universelle ($\mathfrak{g}$ semi-simple).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique o. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit P un système de racines positives de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$; on pose $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P} \alpha$.

La forme de Killing permet d'identifier $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^\star$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}^\star$. On peut donc considérer $\mathfrak{h}^\star$ comme un sous-espace de $\mathfrak{g}^\star$.

Soit T une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$, et soit λ son poids dominant. On pose $f = \rho + \lambda$. Si $u \in Z(\mathfrak{g})$, alors $T(u)$ est un scalaire que nous noterons $\chi_f(u)$. L'élément $q \in \hat{S}(\mathfrak{g}^\star)$ a été défini au début du chapitre IV. Le théorème suivant est l'équivalent infinitésimal de la formule pour les caractères des groupes compacts qui se trouve dans [6].

Théorème V.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique* o. *Soit χ_f le caractère de la représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}$ de poids dominant $f - \rho$. On a* $\chi_f(\beta(X)) = D(q)^{-1} X(f)$ *pour tout* $X \in S(\mathfrak{g})^I$.

Démonstration. — En procédant comme dans le lemme IV.2, on se ramène au cas où le corps de base est $\mathbf{C}$ ce que nous supposons désormais. Soit G un groupe de Lie complexe connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors T est la différentielle d'une représentation de G que nous notons par la même lettre. On note φ_f la fonction sur G définie par $\varphi_f(g) = (\dim T)^{-1} \operatorname{tr} T(g)$.

Employons les mêmes notations pour les opérateurs différentiels que dans la démonstration du lemme III.4. On sait que si $u \in Z(\mathfrak{g})$ et si l'on note $u \to \tilde{u}$ l'anti-automorphisme de $U(\mathfrak{g})$ qui prolonge l'application $X \to -X$ de $\mathfrak{g}$, on a $\Delta(u)\varphi_f = \chi_f(\tilde{u})\varphi_f$, et donc, puisque $\varphi_f(1) = 1$, $\chi_f(u) = (\tilde{u}, \varphi_f)$. Si $X \in S(\mathfrak{g})^I$, on a donc $\chi_f(\beta(X)) = (\tilde{X}, \varphi_f \circ \exp)$.

Pour calculer $\varphi_f \circ \exp$, on emploie la formule de Weyl. Soit $Y \in \mathfrak{h}$. On a (*cf.* [8], exp. 19) :

$$\varphi_f(\exp Y) = (\dim T)^{-1} \frac{\sum_w \varepsilon(w) \exp(\langle wf, Y \rangle)}{\sum_w \varepsilon(w) \exp(\langle w\rho, Y \rangle)},$$

où les sommes sont prises sur tous les éléments du groupe de Weyl W et où $\varepsilon(w)$ désigne la signature de $w \in W$.

Il est facile de voir que l'on a

$$q(Y) = \prod_{\alpha \in P} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\alpha(Y)\right)}{\frac{1}{2}\alpha(Y)} \qquad (Y \in \mathfrak{h}).$$

Posons $\pi = \prod_{\alpha \in P} \alpha$. C'est un élément de $S(\mathfrak{g}^\star)$. D'après [8], exp. 19, p. 04, on a

$$\prod_{\alpha \in P} e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha} = \sum_{w} \varepsilon(w)\, \varepsilon^{w\rho}.$$

On trouve donc

$$\varphi_f(\exp Y) = q(Y)^{-1} (\dim T)^{-1} \frac{\sum_{w} \varepsilon(w) \exp(\langle wf, Y\rangle)}{\pi(Y)}.$$

Posons $\psi_f = q\varphi_f \circ \exp$. On a

$$(\tilde{X}, \varphi_f \circ \exp) = (\tilde{X}, q^{-1}\psi_f) = (D(\tilde{q})^{-1}\tilde{X}, \psi_f)$$

(on utilise les mêmes notations que dans la démonstration du lemme III.4).

Le théorème 1 de [4] permet de calculer la restriction de $\partial(Z)\psi_f$ à $\mathfrak{h}$ lorsque $Z \in S(\mathfrak{g})^I$. Notons Z_r l'élément de $S(\mathfrak{h})$ obtenu en restreignant Z à $\mathfrak{h}^\star$. Notons $\psi_{f,r}$ la restriction de ψ_f à $\mathfrak{h}$. Le théorème cité donne

$$(\partial(Z)\psi_f)_r = \pi^{-1}\partial(Z_r)\,(\pi\psi_{f,r}).$$

Il en résulte que

$$\partial(Z)\psi_f(Y) = \pi^{-1}(Y)(\dim T)^{-1} \sum_{w} \varepsilon(w)\, (\partial(Z_r) e^{wf})\,(Y) = \tilde{Z}(f)\,\psi_f(Y)$$

pour tout $Y \in \mathfrak{h}$, car on a $\partial(Z_r)e^{wf} = \tilde{Z}(wf) = \tilde{Z}(f)$.

On a donc $(Z, \psi_f) = \tilde{Z}(f)\ \psi_f(o) = \tilde{Z}(f)$. Appliquant ceci à $Z = D(q)^{-1}X$, on en déduit le théorème.

Remarque 1. — Si le poids dominant λ n'est pas régulier, on peut trouver d'autre $f \in \mathfrak{h}^\star$ de la forme $\lambda + \rho'$, où ρ' est la demi-somme des racines de $\mathfrak{g}$ contenues dans le nilradical d'une sous-algèbre parabolique contenant la sous-algèbre de Borel définie par P, et des éléments $q_f \in S(\mathfrak{g}^\star)$ construits comme dans le chapitre II, tels que $T(\beta(X)) = D(q_f)^{-1}X(f)$. Par exemple, si $\lambda = o$, on a $T(\beta(X)) = X(o)$. Cela est à relier au fait que T peut être contenue dans plusieurs représentations induites de $\mathfrak{g}$.

THÉORÈME V.2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi simple sur un corps k de caractéristique* o. *L'application $\beta \circ D(q)$ induit un isomorphisme d'algèbres de* $S(\mathfrak{g})^I$ *sur* $Z(\mathfrak{g})$.

Démonstration. — En procédant comme dans la démonstration du théorème IV.1, on voit que l'on peut supposer que k est algébriquement clos. Les f de la forme $\lambda + \rho$, où λ est un poids dominant d'une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, forment un sous-ensemble dense de $\mathfrak{h}^\star$ (pour la topologie de Zariski) (*cf.* [8], exp. 17, th. 2.*c*). Il résulte du théorème V.1 que l'application $u \to D(q)^{-1}\beta^{-1}(u)(f)$ est un caractère de $Z(\mathfrak{g})$ pour de tels f, et donc pour tous les $f \in \mathfrak{h}^\star$. Comme tout élément semi-simple de $\mathfrak{g}^\star$ (on identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^\star$ au moyen de la forme de Killing) est conjugué d'un élément de $\mathfrak{h}^\star$ ([8], exp. 15), on voit qu'il en est encore de même pour tous les éléments f semi-simples de $\mathfrak{g}^\star$, et finalement pour tous les éléments f de $\mathfrak{g}^\star$, puisque les éléments semi-simples forment un sous-ensemble dense de $\mathfrak{g}^\star$. Le théorème en résulte aussitôt.

Remarque 2. — Pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$, notons χ_f le caractère $u \to D(q)^{-1}\beta^{-1}(u)(f)$ de $Z(\mathfrak{g})$. Alors, si f' est la composante semi-simple de f, on a $\chi_f = \chi_{f'}$. En effet, f' est dans l'adhérence de l'orbite de f.

Le fait que $S(\mathfrak{g})^I$ et $Z(\mathfrak{g})$ soient isomorphes n'est naturellement pas nouveau. Indiquons comment on décrit habituellement un isomorphisme entre ces deux algèbres. On note $\mathfrak{g}_\alpha$ le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ correspondant à la racine α. On pose $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{g}_\alpha$. On sait que si $X \in S(\mathfrak{g})^I$, il existe un unique $\varphi(X) \in S(\mathfrak{h})$ tel que $X - \varphi(X) \in S(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$ (c'est la restriction de X à $\mathfrak{h}^\star$). Si $u \in Z(\mathfrak{g})$, il existe un unique $V(u) \in U(\mathfrak{h})$ tel que $u - V(u) \in U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$. On pose $V' = D(e^{-\rho}) \circ V$. Alors on sait que φ est un isomorphisme de $S(\mathfrak{g})^I$ sur $S(\mathfrak{h})^{W}$ [l'ensemble des invariants de $S(\mathfrak{h})$ sous W], et V′ un isomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{h})^{W}$ (*cf.* [8], exp. 19). L'isomorphisme $V'^{-1} \circ \varphi$ de $S(\mathfrak{g})^I$ sur $Z(\mathfrak{g})$ n'est autre que celui qui est décrit dans le théorème V.2. Cela résulte immédiatement du lemme suivant :

LEMME V.1. — *Soit* $X \in S(\mathfrak{g})^I$. *On a* $V(\beta(X)) = D(e^{\rho})\,\varphi(D(q)^{-1}X)$.

Démonstration. — Il suffit de prouver que pour les $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$ qui sont des poids dominants on $V(\beta(X))(\lambda) = (D(q)^{-1}(X))(\lambda + \rho)$, c'est-à-dire $\chi_f(\beta(X)) = V(\beta(X))(\lambda)$. Soit $\mathfrak{w}$ un vecteur dominant dans l'espace d'une représentation irréductible de dimension finie T de poids dominant λ. On a $T(\beta(X))\mathfrak{w} = V(\beta(X))(\lambda)\mathfrak{w}$, ce qui termine la démonstration.

Remarque 3. — Le lemme V.1 s'écrit $V'(\beta(D(q)X)) = \varphi(X)$. Il en résulte immédiatement que V′ est injectif [car φ l'est en vertu du théorème de conjugaison des algèbres de Cartan], et que $V'(Z(\mathfrak{g})) = \varphi(S(\mathfrak{g})^I)$. On n'a donc pas en fait à se servir du fait plus difficile que l'image est exactement $S(\mathfrak{h})^W$.

Remarque 4. — Notez l'analogie du lemme V.1 et du lemme III.7.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. DIXMIER, *Représentations irréductibles des algèbres de Lie résolubles* (*J. Math. pures et appl.*, t. 45, 1966, p. 1-68).
[2] M. DUFLO, *Caractères des algèbres de Lie résolubles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 437-438).
[3] M. DUFLO et M. VERGNE, *Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 583-585).
[4] HARISH-CHANDRA, *Differential operators on a semi-simple Lie algebra* (*Amer. J. Math.*, vol. 79, 1957, p. 87-120).
[5] S. HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New-York, 1962.
[6] A. A. KIRILLOV, *The characters of unitary representations of Lie groups* (*Functional Analysis and its applications*, vol. 2, nº 2, 1968, p. 133-146) (traduit du russe par Consultant Bureau).
[7] P. QUILLEN, *On the endomorphism ring of a simple module over an envelopping algebra* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 21, 1969, p. 171-172).
[8] Séminaire Sophus Lie, I. H. P., Paris, 1955.

(Manuscrit reçu le 9 octobre 1969.)

Michel DUFLO,
109, boulevard de la République,
92-Saint-Cloud.