

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL KOOSIS

**Sur l'approximation pondérée par des polynomes et par des
sommes d'exponentielles imaginaires**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 81, n° 4 (1964), p. 387-408

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_4_387_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'APPROXIMATION PONDÉRÉE PAR DES POLYNOMES ET PAR DES SOMMES D'EXPONENTIELLES IMAGINAIRES

PAR M. PAUL KOOSIS,

Introduction.

Étant donnée une fonction continue $W(x)$ (qui sera désormais appelée un *poids*) satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} W(x) &\geq \text{Cte} > 0, & -\infty < x < \infty, \\ W(x) &\rightarrow \infty, & x \rightarrow \pm \infty; \end{aligned}$$

nous allons étudier le problème de l'approximation uniforme relative à $W(x)$, consistant en ceci : on se donne une famille E de fonctions continues et une autre fonction f , et l'on cherche s'il existe des $g \in E$ qui rendent

$$\sup_{-x < x < x} \frac{|f(x) - g(x)|}{W(x)}$$

arbitrairement petit. Les classes E que nous allons considérer seront composées de fonctions g telles que $\frac{g(x)}{W(x)} \rightarrow 0, x \rightarrow \pm \infty$, de sorte qu'on ne saurait approcher que des fonctions f ayant la même propriété. De ce fait la

DÉFINITION :

$$\mathcal{C}_W = \left\{ f \text{ continue sur } (-\infty, \infty); \left| \frac{f(x)}{W(x)} \right| \rightarrow 0, x \rightarrow \pm \infty \right\}.$$

Si l'on pose, pour $f \in \mathcal{C}_W$,

$$\|f\|_W = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{|f(x)|}{W(x)},$$

\mathcal{C}_W devient un espace de Banach.

Comme $W(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \pm \infty$, toute somme finie de la forme $\sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} e^{i\lambda x}$ (les λ étant réels) appartient à \mathcal{C}_W .

DÉFINITION. — Étant donné $A > 0$, $\mathcal{C}_W(A)$ est la fermeture, dans \mathcal{C}_W , de l'ensemble des sommes finies de la forme $\sum_{-A \leq \lambda \leq A} \alpha_{\lambda} e^{i\lambda x}$.

DÉFINITION. — Pour $A \geq 0$,

$$\mathcal{C}_W(A+) = \bigcap_{A' > A} \mathcal{C}_W(A').$$

DÉFINITION. — Soit $W(x)$ un poids satisfaisant à la condition supplémentaire

$$\frac{x^n}{W(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

On notera par $\mathcal{C}_W(o)$ la fermeture, dans \mathcal{C}_W , de l'ensemble des polynomes.

Dans la suite, chaque fois qu'on fera mention de $\mathcal{C}_W(o)$, il sera entendu que $W(x)$ remplit la condition qu'on vient d'écrire, sans que cela soit toujours rappelé explicitement.

Les ensembles $\mathcal{C}_W(A)$, $\mathcal{C}_W(A+)$, et $\mathcal{C}_W(o)$ qu'on vient de définir sont des sous-espaces fermés de \mathcal{C}_W , et vont jouer le rôle de la classe E. C'est à l'étude des relations d'inclusion qui peuvent avoir lieu entre $\mathcal{C}_W(o)$, $\mathcal{C}_W(o+)$ et \mathcal{C}_W , que cet article est consacré.

1. Composition des sous-espaces $\mathcal{C}_W(A+)$.

LEMME. — Soit $A \geq 0$, et soit $f(z)$ une fonction entière satisfaisant à une inégalité de la forme $|f(re^{i\theta})| \leq C_{\varepsilon} \exp(Ar|\sin \theta| + \varepsilon r)$ pour chaque $\varepsilon > 0$. Alors, si $A' > A$,

$$\int_{|\lambda| > A'} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\delta|x|} e^{i\lambda x} dx \right| d\lambda \rightarrow 0$$

lorsque δ tend vers zéro en parcourant des valeurs positives.

DÉMONSTRATION. — Étant donné $\delta > 0$ et $A' > A$, prenons un $\varepsilon > 0$ inférieur à $\frac{\delta}{2}$ et à $\frac{A' - A}{2}$. Si $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, et $\lambda \geq A'$, on aura

$$|f(z) e^{-\delta z} e^{i\lambda z}| \leq C_{\varepsilon} \exp(-\varepsilon r \sin \theta - \varepsilon r \cos \theta).$$

Cette inégalité, avec le théorème de Cauchy, montre, si l'on intègre $f(z) e^{-\delta z} e^{i\lambda z}$ le long d'un contour formé par les segments $[0, R]$, $[0, iR]$, et l'arc $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, R étant très grand, que

$$(1) \quad \int_0^\infty f(x) e^{-\delta x} e^{i\lambda x} dx = i \int_0^\infty f(iy) e^{-\lambda y} e^{-i\delta y} dy.$$

En prenant un chemin d'intégration composé des segments $[0, iR]$, $[-R, 0]$, et de l'arc $Re^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, on voit de la même façon, que

$$(2) \quad \int_{-\infty}^0 f(x) e^{\delta x} e^{i\lambda x} dx = -i \int_0^\infty f(iy) e^{-\lambda y} e^{i\delta y} dy.$$

De (1) et (2) on tire la formule

$$(3) \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-\delta|x|} e^{i\lambda x} dx = 2 \int_0^\infty f(iy) e^{-\lambda y} \sin \delta y dy,$$

valable pour chaque $\delta > 0$. Prenons maintenant un $\eta > 0$ tel que $2\eta < A' - A$. On a $|f(iy)| \leq C_\eta \exp(A + \eta)y$, $y \geq 0$, et ceci, porté dans (3), donne, après emploi de l'inégalité de Schwarz,

$$\left| \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-\delta|x|} e^{i\lambda x} dx \right| \leq \frac{2\sqrt{2} C_\eta \delta}{(\lambda - A - \eta) \sqrt{(\lambda - A - \eta)^2 + 4\delta^2}}, \quad \lambda \geq A', \quad \delta > 0.$$

Pour $\lambda \leq -A'$ on a une formule analogue, et ces deux évaluations entraînent

$$\int_{|\lambda| \geq A'} \left| \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-\delta|x|} e^{i\lambda x} dx \right| d\lambda \leq \frac{4\sqrt{2} C_\eta \delta}{\eta},$$

d'où le lemme.

THÉORÈME I. — Soit $A \geq 0$, et soit $f(z)$ une fonction entière satisfaisant aux conditions

$$(4) \quad |f(re^{i\theta})| \leq C_\varepsilon \exp(Ar |\sin \theta| + \varepsilon r) \quad \text{pour chaque } \varepsilon > 0,$$

$$(5) \quad \frac{f(x)}{W(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Alors, $f \in \mathcal{C}_w(A +)$.

DÉMONSTRATION. — Notons par \mathcal{C} l'espace de Banach consistant des fonctions continus $g(x)$ tendant vers zéro lorsque $x \rightarrow \pm \infty$. Si λ est réel, $\frac{e^{i\lambda x}}{W(x)}$ appartient à \mathcal{C} , et il suffit évidemment de montrer que, si $f(z)$ satisfait (4) et (5), $\frac{f(x)}{W(x)}$ est dans le sous-espace fermé de \mathcal{C} engendré

par les $\frac{e^{i\lambda x}}{W(x)}$ avec $-A' \leq \lambda \leq A'$, quel que soit $A' > A$. A cette fin, supposons que nous ayons une mesure finie μ sur $(-\infty, \infty)$, telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{W(x)} d\mu(x) = 0, \quad -A' \leq \lambda \leq A'.$$

Alors, si $A' > A$,

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{f(x)}}{W(x)} d\mu(x) = 0.$$

En effet, pour chaque $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{f(x)} e^{-\delta|x|}}{W(x)} d\mu(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{W(\xi)} d\mu(\xi) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\delta|x|} e^{i\lambda x} dx} \right\} d\lambda \\ &= \int_{|\lambda| \geq A'} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda \xi}}{W(\xi)} d\mu(\xi) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\delta|x|} e^{i\lambda x} dx} \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Si $A' > A$, le dernier membre de cette identité tend vers zéro avec δ , grâce au lemme, et l'on a (6). Vu la structure connue du dual de \mathcal{C} , le résultat voulu s'ensuit en vertu du théorème de Hahn-Banach.

COROLLAIRE. — Soit $A \geq 0$. Ou bien $\mathcal{C}_w(A+) = \mathcal{C}_w$, ou $\mathcal{C}_w(A+)$ consiste précisément de toutes les fonctions entières $f(z)$ satisfaisant aux conditions (4) et (5).

Preuve. — Que chaque fonction $f(z)$ satisfaisant (4) et (5) appartienne à $\mathcal{C}_w(A+)$, c'est le contenu du théorème I.

Supposons que $\mathcal{C}_w(A+) \neq \mathcal{C}_w$. Selon la définition de $\mathcal{C}_w(A+)$, il existe alors un $A_0 > A$ tel que $\mathcal{C}_w(A_0) \neq \mathcal{C}_w$. On aura donc manifestement $\mathcal{C}_w(A') \neq \mathcal{C}_w$, $A' \leq A_0$, et un théorème d'Akutowicz ([4], p. 297) nous permet d'affirmer que chaque $f \in \mathcal{C}_w(A')$, $A < A' \leq A_0$, est une fonction entière satisfaisant

$$|f(re^{i\theta})| \leq C(\varepsilon, A') \exp(A'r |\sin \theta| + \varepsilon r),$$

$C(\varepsilon, A')$ étant une constante finie, $\varepsilon > 0$. Étant donnés $f \in \mathcal{C}_w(A+)$ et $\varepsilon > 0$, on prend pour A' le plus petit des nombres $A + \varepsilon$, A_0 , et l'on voit que

$$|f(re^{i\theta})| \leq C(\varepsilon, A') \exp(Ar |\sin \theta| + 2\varepsilon r),$$

c'est la condition (4). Comme $f \in \mathcal{C}_w$, on a (5).

LEMME. — Soit $\frac{x^n}{W(x)} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Alors,

$$\mathcal{C}_w(0) \subset \mathcal{C}_w(A+) \quad \text{pour tout } A \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. — Il suffit de prouver que $\mathcal{C}_w(0) \subset \mathcal{C}_w(A)$ pour chaque $A > 0$. Il est clair que $1 \in \mathcal{C}_w(A)$, $A > 0$. Montrons que si $A > 0$, $x \in \mathcal{C}_w(A)$. Par la formule de Taylor-Lagrange :

$$\frac{\sin hx}{h} = x + x^3 \frac{h^2 \cos \xi}{3!}, \quad \xi \text{ étant entre } 0 \text{ et } hx.$$

Donc

$$\sup_x \left| \frac{x - \frac{\sin hx}{h}}{W(x)} \right| \leq \frac{h^2}{3!} \sup_x \left| \frac{x^3}{W(x)} \right| \leq Ch^2,$$

C étant indépendant de h . En faisant tendre h vers zéro, on voit que $x \in \mathcal{C}_w(A)$ pour chaque $A > 0$. La preuve de ce que $x^2 \in \mathcal{C}_w(A)$, $x^3 \in \mathcal{C}_w(A)$, etc. ($A > 0$), s'obtient en étendant ce raisonnement de façon évidente.

LEMME. — Si $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(x)}{1+x^2} dx < \infty$, $\mathcal{C}_w(A+) \neq \mathcal{C}_w$ pour chaque $A \geq 0$.

Pour la preuve de ce résultat, très connu et assez élémentaire, on consultera, entre autres, [3], [6], ou [10].

THÉORÈME II. — Soit $W(x)$ paire, et soit $\log W(x)$ une fonction convexe de $\log x$ pour $x \geq 1$. Alors :

ou bien $\mathcal{C}_w(A+) = \mathcal{C}_w$ pour tout $A \geq 0$, ou, pour chaque $A \geq 0$, $\mathcal{C}_w(A+)$ consiste précisément des fonctions entières $f(z)$ satisfaisant aux conditions (4) et (5).

DÉMONSTRATION. — Si $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(x)}{1+x^2} dx < \infty$, on a $\mathcal{C}_w(A+) \neq \mathcal{C}_w$ pour chaque $A \geq 0$, grâce au lemme précédent. Le corollaire du théorème I montre alors que la deuxième alternative a lieu.

Supposons donc que

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(x)}{1+x^2} dx = \infty.$$

Comme $\frac{d \log W(x)}{d \log x}$ croît pour $x \geq 1$, ou bien cette dérivée reste bornée pour $x \rightarrow \infty$, ou elle tend vers l'infini. Au premier cas, on aurait $\log W(x) \leq \text{Cte} \log |x|$, $|x| \geq 1$, et (7) ne serait pas vrai. C'est donc le deuxième cas qui a lieu et, sous cette condition,

$$\frac{x^n}{W(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

comme on le voit facilement. Nous sommes donc à même d'introduire l'espace $\mathcal{C}_w(0)$. Or, comme $W(x)$ satisfait les conditions de l'hypothèse et, en outre, (7), nous pouvons, selon un théorème bien connu (voir [3], ou [10], nos 19-21), conclure que $\mathcal{C}_w(0) = \mathcal{C}_w$. Comme $\mathcal{C}_w(0) \subset \mathcal{C}_w(A+)$ pour tout $A \geq 0$, c'est bien la première alternative qui a lieu.

2. Un cas où $\mathcal{C}_w(o) = \mathcal{C}_w(o +)$.

On va maintenant regarder de plus près la relation entre $\mathcal{C}_w(o)$ et $\mathcal{C}_w(o +)$. Nous allons trouver des conditions simples qui entraînent l'égalité de ces deux sous-espaces.

LEMME. — Soit $\omega(z)$ un polynome ayant tous ses zéros strictement au-dessous de l'axe réel, et soit $f(z)$ une fonction entière, de type exponentiel $\frac{h}{2} > 0$,

bornée sur l'axe réel. Posons $f_h(z) = \frac{2 \sin \frac{hz}{2}}{hz} f(z)$, et notons par a_n les zéros de $\omega(z)$. Alors, pour $-\infty < x < \infty$,

$$(8) \quad \left| \sum_n \frac{f_h(a_n) e^{-iha_n}}{\omega'(a_n)(x-a_n)} - \frac{e^{-ihx} f_h(x)}{\omega(x)} \right| \leq 2e^{\frac{3}{2}} \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \frac{f\left(t + \frac{i}{h}\right)}{\omega\left(t + \frac{i}{h}\right)} \right|.$$

DÉMONSTRATION. — Soit $b > 0$, et considérons le contour Γ_R formé du segment $[ib - R, ib + R]$ et du demi-cercle $ib + Re^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Si x réel est donné à l'avance et R est assez grand, on a, par le théorème des résidus :

$$\frac{e^{hb}}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f_h(\zeta) e^{ih(x+ib-\zeta)}}{\omega(\zeta)(x-\zeta)} d\zeta = e^{ihx} \sum_n \frac{f_h(a_n) e^{-iha_n}}{\omega'(a_n)(x-a_n)} - \frac{f_h(x)}{\omega(x)}.$$

Vu l'hypothèse faite sur $f(z)$, on a $|f_h(\zeta) e^{-ih\zeta}| \leq \frac{Cte}{R}$ pour ζ appartenant à la partie demi-circulaire de R . En faisant tendre R vers l'infini, on voit donc que

$$(9) \quad \frac{e^{hb}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_h(t+ib) e^{ih(x-t)}}{\omega(t+ib)(x-t-ib)} dt = \frac{f_h(x)}{\omega(x)} - e^{ihx} \sum_n \frac{f_h(a_n) e^{-iha_n}}{\omega'(a_n)(x-a_n)},$$

formule valable pour chaque x réel.

En remplaçant Γ_R par son image symétrique relative à la droite $\Im z = b$ on obtient, par le même raisonnement,

$$(10) \quad \frac{e^{hb}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_h(t+ib) e^{-ih(x-t)}}{\omega(t+ib)(x-t-ib)} dt = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

La soustraction de (10) de (9) donne

$$(11) \quad \begin{aligned} & \frac{f_h(x)}{\omega(x)} - e^{ihx} \sum_n \frac{f_h(a_n) e^{-iha_n}}{\omega'(a_n)(x-a_n)} \\ &= \frac{e^{hb}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+ib) \cdot 2 \sin \frac{h(t+ib)}{2} \sinh(x-t)}{\omega(t+ib) h(t+ib)(x-t-ib)} dt. \end{aligned}$$

Dans (11), faisons $b = \frac{1}{h}$, et posons, pour simplifier les écritures,

$$M = \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \frac{f\left(t + \frac{i}{h}\right)}{\omega\left(t + \frac{i}{h}\right)} \right|;$$

il vient alors,

$$(12) \quad \left| \sum_n \frac{f_h(a_n) e^{-ih a_n}}{\omega'(a_n)(x - a_n)} - \frac{e^{-ihx} f_h(x)}{\omega(x)} \right| \leq \frac{eM}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2 \sin \frac{ht+i}{2}}{ht+i} \frac{\sin h(x-t)}{x-t-\frac{i}{h}} \right| dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Après les changements de variable $\frac{ht}{2} = \tau$, $\frac{hx}{2} = \xi$, l'intégrale de droite devient

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(\tau + \frac{i}{2}\right)}{\tau + \frac{i}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\sin 2(\tau - \xi)}{2(\tau - \xi) + i} \right| d\tau \leq \sqrt{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \sin\left(\tau + \frac{i}{2}\right) \right|^2}{\tau^2 + \frac{1}{4}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 2(\tau - \xi)}{2(\tau - \xi)^2} d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \leq 2\pi\sqrt{e} \text{ indépendamment de } x;$$

en portant cette évaluation dans (12), l'inégalité (8) s'ensuit.

COROLLAIRE. — Soient $\omega(z)$ et $f(z)$ comme dans l'énoncé du lemme. Il existe un polynôme $P(x)$ [de degré inférieur à celui de $\omega(z)$] tel que

$$\left| \frac{P(x) - e^{-ihx} \frac{2}{hx} \left(\sin \frac{hx}{2}\right) f(x)}{\omega(x)} \right| \leq 2e^{\frac{3}{2}} \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \frac{f\left(t + \frac{i}{h}\right)}{\omega\left(t + \frac{i}{h}\right)} \right|, \quad -\infty < x < \infty.$$

Preuve. — Selon (8), la formule en question a lieu avec

$$P(x) = \sum_n \frac{f_h(a_n) e^{-ih a_n} \omega(x)}{\omega'(a_n)(x - a_n)}.$$

THÉORÈME III. — Soit $W(x)$ une fonction entière de la forme

$$(13) \quad W(x) = \sum_0^{\infty} \alpha_{2n} x^{2n}, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_{2n} \geq 0$$

[un nombre infini des α_{2n} étant positifs, pour qu'on puisse parler de $\mathcal{C}_W(0)$].

Alors, $\mathcal{C}_W(0) = \mathcal{C}_W(0+)$.

DÉMONSTRATION. — Soit $F \in \mathcal{C}_w(o+)$. Alors, $\frac{F(x)}{W(x)} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm \infty$, et il existe une suite de sommes finies

$$\sum_{-(2n)^{-1} \leq \lambda \leq (2n)^{-1}} \alpha_\lambda(n) e^{i\lambda x} = f_n(x)$$

telles que $\frac{f_n(x)}{W(x)} - \frac{F(x)}{W(x)} \rightarrow 0$ uniformément sur $(-\infty, \infty)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Posons

$$g_n(x) = \frac{2n}{x} \sin \frac{x}{2n} e^{-\frac{ix}{n}} f_n(x).$$

Comme $|g_n(x)| \leq |f_n(x)|$, $F(x) = o(W(x))$, $x \rightarrow \pm \infty$, et $|f_n(x) - g_n(x)| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, uniformément sur chaque intervalle fini, on voit que

$$\frac{g_n(x)}{W(x)} - \frac{F(x)}{W(x)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

uniformément sur $(-\infty, \infty)$. Le théorème sera donc établi dès qu'on montrera l'existence d'une suite de polynômes $P_n(x)$ telle que

$$(14) \quad \frac{P_n(x) - g_n(x)}{W(x)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \text{ uniformément sur } (-\infty, \infty).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe M et N tels que pour $n > N$,

$$(15) \quad \frac{|f_n(x)|}{W(x)} < \|F\|_w + \varepsilon, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$(16) \quad \frac{|f_n(x)|}{W(x)} < \varepsilon, \quad |x| \geq M.$$

Prenons un n quelconque $> N$ qui, une fois choisi, restera fixe lors du raisonnement qui va suivre. Par sa forme même, $f_n(x)$ est bornée pour $-\infty < x < \infty$. De là, et des formules (13), (15) et (16) résulte l'existence d'un K fini tel que, si

$$V(x) = \sum_0^K \alpha_{2n} x^{2n},$$

on ait

$$(17) \quad \frac{|f_n(x)|}{V(x)} < \|F\|_w + 2\varepsilon, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$(18) \quad \frac{|f_n(x)|}{V(x)} < 2\varepsilon, \quad |x| \geq M.$$

Comme $V(x) \geq \alpha_0 > 0$, $-\infty < x < \infty$, il existe un polynôme $\omega(x)$ ayant tous ses zéros strictement dans le demi-plan inférieur, et tel que $|\omega(x)| = V(x)$, $-\infty < x < \infty$.

La fonction $f_n(z)$ est entière, de type exponentiel $\frac{1}{2n}$, et bornée sur l'axe réel. On peut donc appliquer le corollaire ci-dessus avec $f(x) = f_n(x)$,

$h = \frac{1}{n}$; le rôle de $e^{-ihx} f_h(x)$ est ici joué par $g_n(x)$. Selon ce corollaire, il existe un polynôme $P_n(x)$, tel que

$$(19) \quad \left| \frac{P_n(x) - g_n(x)}{\omega(x)} \right| \leq 2e^{\frac{3}{2}} \sup_{-x < t < \infty} \left| \frac{f_n(t+in)}{\omega(t+in)} \right|, \quad -\infty < x < \infty.$$

Dans l'inégalité (19), nous allons estimer le membre de droite. Étant données les propriétés de $f_n(z)$ et la construction de $\omega(z)$, la valeur de $\exp\left(\frac{iz}{2n}\right) \frac{f_n(z)}{\omega(z)}$ pour $\Im z > 0$ se trouve moyennant la formule de Poisson.

On a donc, pour t réel,

$$\pi \exp\left(\frac{i(t+in)}{2n}\right) \frac{f_n(t+in)}{\omega(t+in)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n e^{\frac{ix}{2n}} f_n(x)}{[(x-t)^2 + n^2] \omega(x)} dx,$$

d'où, puisque $|\omega(x)| = V(x)$:

$$(20) \quad \left| \frac{f_n(t+in)}{\omega(t+in)} \right| \leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{(x-t)^2 + n^2} \frac{|f_n(x)|}{V(x)} dx \\ \leq 2e^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\pi} (\|F\|_w + 2\varepsilon) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{M}{n} + \varepsilon \right],$$

grâce à (17) et à (18). Comme $|\omega(x)| = V(x) \leq W(x)$, $-\infty < x < \infty$, on voit, en portant l'évaluation (20) dans (19), qu'il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que

$$\frac{|P_n(x) - g_n(x)|}{W(x)} \leq 4e^2 \left[\frac{1}{\pi} (\|F\|_w + 2\varepsilon) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{M}{n} + \varepsilon \right], \quad -\infty < x < \infty.$$

Or, la démonstration de cette formule-ci est valable pour n'importe quel $n > N$. En prenant n assez grand par rapport à M , il vient $\|P_n - g_n\|_w < 8e^2 \varepsilon$, et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on aura (14).

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Soit $W(x)$ un poids de la forme (13) :

ou bien $\mathcal{C}_w(0) = \mathcal{C}_w$,

ou $\mathcal{C}_w(0)$ consiste précisément de toutes les fonctions entières $f(z)$, de type exponentiel zéro, telles que $f(x) = o(W(x))$, $x \rightarrow \pm \infty$.

Preuve. — Par le théorème III, $\mathcal{C}_w(0) = \mathcal{C}_w(0+)$. Or, la caractérisation de $\mathcal{C}_w(0+)$ est fournie par le corollaire du théorème I (n° 1).

Nous aimerions pouvoir énoncer un analogue du théorème III pour les poids $W(x)$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème II (n° 1). Malheureusement, nous n'y sommes pas parvenus. On a, toutefois, le

THÉORÈME IV. — Soit $W(x)$ un poids pair, tel que $\log W(x)$ soit une fonction convexe de $\log x$ pour $x \geq 1$. Supposons en outre qu'à chaque $\theta > 1$ corresponde une constante C_θ telle que $x^2 W(x) \leq C_\theta W(\theta x)$. Alors, $\mathcal{C}_w(0) = \mathcal{C}_w(0+)$.

DÉMONSTRATION. — Pour $n = 0, 1, 2, \dots$, posons $s_n = \sup_{x \geq 1} \frac{x^n}{W(x)}$. Si $\log W(x)$ est une fonction convexe de $\log x$, $x \geq 1$, il est bien connu que

$$(21) \quad W(x) \leq x^2 \sup_n \frac{x^{2n}}{s_{2n}}, \quad |x| \geq 1.$$

[Ce fait rentre dans la théorie de la régularisation, due à Mandelbrojt, voir, par exemple, [9], p. 33-40. Pour une dérivation rapide de (21), on pourra consulter [3], p. 30-31 ou [10], n° 20.] On a d'autre part

$$(22) \quad \sup_n \frac{x^{2n}}{s_{2n}} \leq W(x), \quad |x| \geq 1.$$

Écrivons

$$\Omega(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{s_{2n}}.$$

Si $W(x)$ satisfait aux conditions de l'hypothèse, on peut trouver, correspondant à chaque $\theta > 1$, une constante K_θ telle que

$$(23) \quad W(x) \leq \Omega(x) \leq K_\theta W(\theta x), \quad |x| \geq 1,$$

grâce aux inégalités (21) et (22).

Supposons que $f \in \mathcal{C}_w(0+)$. Alors, $f \in \mathcal{C}_\Omega(0+)$ selon (23). Comme le poids $\Omega(x)$ satisfait à l'hypothèse du théorème III, cela entraîne que $f \in \mathcal{C}_\Omega(0)$. Donc, pour chaque $\theta > 1$ on a, par (23), $f \in \mathcal{C}_{W_\theta}(0)$, où nous avons noté par $W_\theta(x)$ le poids $W(\theta x)$. De là, nous allons déduire que $f \in \mathcal{C}_w(0)$. Pour cela, il suffit de montrer que, si μ est une mesure finie telle que

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{W(x)} d\mu(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

on a,

$$(25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{W(x)} d\mu(x) = 0.$$

De (24), il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{W(\theta x)} d\mu(\theta x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \theta > 1,$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{W(\theta x)} d\mu(\theta x) = 0, \quad \theta > 1,$$

vu le fait que $f \in \mathcal{C}_{W_\theta}(0)$, $\theta > 1$. Donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{W(x)} d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{W(x)} (d\mu(x) - d\mu(\theta x)) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f(x)}{W(x)} - \frac{f(x)}{W(\theta x)} \right) d\mu(\theta x),$$

quel que soit $\theta > 1$. Lorsque $\theta \rightarrow 1$, $d\mu(\theta x) \rightarrow d\mu(x)$ faiblement, et la première intégrale de droite tend vers zéro. En même temps, puisque $f(x) = o(W(x))$, $x \rightarrow \pm \infty$, et $W(\theta x) \geq W(x)$, $\theta > 1$, la différence $\frac{f(x)}{W(x)} - \frac{f(x)}{W(\theta x)}$ tend uniformément vers zéro. La deuxième intégrale de droite tend donc elle aussi vers zéro lorsque $\theta \rightarrow 1$, et (25) est établi, comme il le fallait.

Le théorème III peut être appliqué au problème des moments.

THÉORÈME V. — *Étant donnée la suite de nombres réels s_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, supposons qu'il y ait une mesure positive μ telle que $s_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Soit $\{\alpha_n\}$ une suite quelconque de nombres positifs telle que $\sum_0^{\infty} \alpha_n < \infty$.*

Alors, si ν est n'importe quelle mesure positive, le fait que $s_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\nu(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ entraîne l'égalité de $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) d\nu(x)$ et de $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) d\mu(x)$ pour toute fonction entière $F(z)$, de type exponentiel zéro, telle que

$$(26) \quad |F(x)| \leq \sup_n \left(\frac{\alpha_n x^{2n}}{s_{2n}} \right), \quad -\infty < x < \infty.$$

DÉMONSTRATION. — Sans restreindre la généralité, on peut supposer que α_0 , et un nombre infini des α_n , soient > 0 . Posons $W(x) = \sum_0^{\infty} \alpha'_n \frac{x^{2n}}{s_{2n}}$, où $\{\alpha'_n\}$ est une suite de nombres positifs telle que $\sum_0^{\infty} \alpha'_n < \infty$ et $\frac{\alpha'_n}{\alpha_n} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$.

Si $F(z)$ est une fonction entière, de type exponentiel zéro, satisfaisant en outre (26), on a $F \in \mathcal{C}_w(o+)$ par le théorème I (n° 1). Donc, par le théorème III, $F \in \mathcal{C}_w(o)$. Ainsi existe-t-il une suite de polynômes $P_n(x)$ tels que

$$(27) \quad |P_n(x) - F(x)| \leq \frac{1}{n} W(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Si les mesures μ et ν sont comme dans l'hypothèse, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) d\nu(x),$$

d'où, en vertu de (27),

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(x) d\mu(x) - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) d\nu(x) \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} W(x) d(\mu + \nu)(x) = \frac{2}{n} \sum_0^{\infty} \alpha'_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

REMARQUE. — Un résultat analogue au théorème III est valable pour l'approximation dans la norme

$$\|f\|_{W,p} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(x)}{W(x)} \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Au cas où $1 < p < \infty$, on peut en faire une démonstration, très facile par rapport à la nôtre, fondée sur la dualité des espaces L_p et L_q ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), et sur le théorème de M. Riesz concernant la transformée de Hilbert. Pour $p = 2$, le fait en question a été établi par Akhiezer [2].

3. Premier contre-exemple.

Dans ce numéro, nous allons construire un poids $W(x)$ tel que toutes les inclusions $\mathcal{C}_W(0) \subset \mathcal{C}_W(0+) \subset \mathcal{C}_W$ soient propres, mais qui ne s'écarte que peu d'un autre, satisfaisant à l'hypothèse du théorème III (n° 2).

LEMME. — Soit $\varphi(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{4^n}\right)$. Si $x = 2^m \alpha$, $2^{-\frac{1}{2}} \leq \alpha \leq 2^{\frac{1}{2}}$, m étant un entier positif, on a

$$(28) \quad \varphi(x) = C(m, \alpha) (-1)^{m-1} (1 - \alpha^2) (2^m \alpha^2)^{m-1} \varphi(\alpha) \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$(29) \quad \varphi'(2^m) = C(m, 1) (-1)^m 2^{(m-1)^2} (\varphi(1))^2,$$

où $C(m, \alpha) \rightarrow 1$ uniformément pour $2^{-\frac{1}{2}} \leq \alpha \leq 2^{\frac{1}{2}}$ lorsque $m \rightarrow \infty$.

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned} \varphi(2^m \alpha) &= (1 - \alpha^2) \prod_1^{m-1} \left(1 - \frac{4^m \alpha^2}{4^n}\right) \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{4^m \alpha^2}{4^n}\right) \\ &= (1 - \alpha^2) (-1)^{m-1} \prod_1^{m-1} \left(\frac{4^m \alpha^2}{4^k}\right) \prod_1^{m-1} \left(1 - \frac{4^n \alpha^{-2}}{4^m}\right) \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{4^m \alpha^2}{4^n}\right) \\ &= (-1)^{m-1} (1 - \alpha^2) (2^m \alpha^2)^{m-1} \varphi(\alpha) \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right) C(m, \alpha), \end{aligned}$$

où

$$C(m, \alpha) = \prod_m^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4^k \alpha^2}\right)^{-1},$$

ce qui démontre (28). On prouve (29) de la même façon.

THÉORÈME VI. — Il existe un poids pair $W(x)$ tel que $\frac{x^n}{W(x)} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$ mais $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W(0+) \neq \mathcal{C}_W$.

DÉMONSTRATION. — Soient $1 < \lambda_1 < 2$, $\lambda_{-1} = -\lambda_1$ et $\lambda_n = 2^{|n|} \operatorname{sgn} n$ pour $n = \pm 2, \pm 3, \dots$

Posons

$$(30) \quad \varphi(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{4^n}\right),$$

$$(31) \quad C(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Il est

$$(32) \quad C'(\lambda_n) \sim \frac{4}{\lambda_1^2} \varphi'(2^{|n|} \operatorname{sgn} n), \quad n \rightarrow \pm \infty,$$

d'où

$$(33) \quad \sum_n' \left| \frac{\lambda_n^K}{C'(\lambda_n)} \right| < \infty \quad (K = 0, 1, 2, \dots),$$

grâce à (29). (Ici, et dans ce qui suit, la prime sur le signe de sommation indique que la valeur $n = 0$ doit être *omise*.)

Les formules (31) et (33) entraînent, comme il est bien connu ([5], p. 829; [7], p. 65-67), que

$$(34) \quad \sum_n' \frac{\lambda_n^K}{C'(\lambda_n)} = 0 \quad (K = 0, 1, 2, \dots).$$

[Je dois à J. P. Kahane l'idée d'employer $C(z)$ et la propriété (34) dans la construction faite ici.]

Écrivons

$$F(z) = z \varphi(z).$$

La fonction $F(z)$ est entière, de type exponentiel zéro. Par le choix des λ_n , nous avons

$$(35) \quad \sum_n' \frac{F(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)} = 2 \frac{F(\lambda_1)}{C'(\lambda_1)} < 0.$$

Définissons maintenant une fonction $W(x)$ de la façon suivante :

$$(36) \quad W(x) = \varphi(1), \quad |x| \leq 1,$$

$$(37) \quad W(x) = |x^2 \varphi(x)| \quad \text{si } |x| > 1 \quad \text{et} \quad |x| \notin \bigcup_1^{\infty} [2^n - 2^{-3n}, 2^n + 2^{-3n}],$$

$$(38) \quad \begin{cases} W(x) = \sup \{|y^2 \varphi(y)|; 2^n - 2^{-3n} \leq y \leq 2^n + 2^{-3n}\} \\ \text{si } 2^n - 2^{-3n} \leq |x| \leq 2^n + 2^{-3n}. \end{cases}$$

Il est alors clair que

$$(39) \quad \frac{F(x)}{W(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Je dis que

$$(40) \quad W(x) \geq Cte > 0, \quad \frac{x^K}{W(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm \infty \quad (K = 0, 1, 2, \dots)$$

et que

$$(41) \quad \sum_n' \left| \frac{W(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)} \right| < \infty.$$

Les formules (38) et (28) donnent

$$(42) \quad W(x) \equiv C_n (\varphi(1))^2 2^{n^2-3n+1}, \quad 2^n - 2^{-3n} \leq |x| \leq 2^n + 2^{-3n},$$

où

$$C_n \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Aussi, si $|x|$ est grand, et se trouve en dehors de tous les intervalles $[2^n - 2^{-3n}, 2^n + 2^{-3n}]$, on a, selon (37) et (28),

$$(43) \quad A |x|^{\left(\frac{\log |x|}{\log 2} - B\right)} \leq W(x) \leq A |x|^{\left(\frac{\log |x|}{\log 2} + B\right)},$$

A et B étant des constantes positives. Les évaluations (42) et (43) entraînent (40), et l'inégalité (41) est conséquence de (42), (32), et (29).

Comme la fonction $F(z)$ est entière, de type exponentiel zéro, $F \in \mathcal{C}_w(o+)$ grâce à (39) et le théorème I (n° 1). Cependant, $F \notin \mathcal{C}_w(o)$. En effet, soit μ la mesure, portée par la suite $\{\lambda_n, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, qui attribue à chaque point λ_n la masse $\frac{W(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)}$. En vertu de (41), μ est finie. Par (34), $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^K}{W(x)} d\mu(x) = 0$, $K = 0, 1, 2, \dots$. Or, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{W(x)} d\mu(x) \neq 0$ selon (35), donc $F \notin \mathcal{C}_w(o)$. Cela montre que $\mathcal{C}_w(o) \neq \mathcal{C}_w(o+)$.

Les formules (42), (43) montrent que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log W(x)}{1+x^2} dx < \infty$. Il en résulte que $\mathcal{C}_w(o+) \neq \mathcal{C}_w$, selon un lemme du n° 1.

Le théorème est démontré.

REMARQUE. — Posons $\Omega(x) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{4^n}\right)$, $-\infty < x < \infty$. Le théo-

rème III (n° 2) a alors pour conséquence, que $\mathcal{C}_\Omega(o) = \mathcal{C}_\Omega(o+)$. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme, on voit que

$$\Omega(|2^n \alpha|) = D(n, \alpha) (1 + \alpha^2) (2^n \alpha^2)^{n-1} \Omega(\alpha) \Omega\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

où $D(n, \alpha) \rightarrow 1$ uniformément pour $2^{-\frac{1}{2}} \leq \alpha \leq 2^{\frac{1}{2}}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. En comparant ceci avec les formules (42), (43), on voit que le poids $W(x)$ construit ci-dessus satisfait, pour $|x| \geq 1$, la condition

$$W(x) = |x|^{\psi(x)} \Omega(x),$$

$\psi(x)$ étant une fonction paire qui oscille entre deux constantes finies lorsque $x \rightarrow \pm \infty$. Cependant, $\mathcal{C}_w(o) \neq \mathcal{C}_w(o+)$, quoique $\mathcal{C}_\Omega(o) = \mathcal{C}_\Omega(o+)$.

4. Deuxième contre-exemple.

Dans ce numéro, nous mettons en évidence un poids $W(x)$ tel que $\mathcal{C}_W(0) \neq \mathcal{C}_W(0+) = \mathcal{C}_W$. Notre construction est fondée sur les propriétés élémentaires de la *mesure harmonique*, dont la théorie est exposée dans [11], chap. II.

LEMME. — Soit E un ensemble fermé sur la droite, réunion dénombrable d'intervalles disjoints et fermés, jouissant, en outre, des propriétés suivantes :

$$1^\circ [-1, 1] \subset E, E = -E.$$

2° A l'intérieur de chaque cercle de rayon fini, E ne possède qu'un nombre fini de composants connexes.

3° Il existe des R arbitrairement grands tels que $[\sqrt{R}, R] \subset E$. Sous ces conditions, il existe une fonction $\rho(t)$, définie sur E , telle que :

(i) $\rho(t)$ soit paire, et constante sur chaque composant connexe de E ;

(ii) $\rho(t)$ croisse vers l'infini lorsque $t > 0$ croît vers l'infini en parcourant l'ensemble E ;

(iii) on ait $|P(i)| \leq K < \infty$ pour chaque polynôme P satisfaisant $|P(t)| \leq (t^2 + 5)^{\rho(t)}$ sur E , K étant indépendant de P .

Démonstration. — Notons par \mathcal{O} le complément de E dans le plan complexe. Montrons d'abord que, correspondant à chaque $z \in \mathcal{O}$ il existe une mesure positive ω_z sur E telle que

$$(44) \quad \int_E d\omega_z(t) \leq 1,$$

$$(45) \quad \int_E \log |t + \sqrt{t^2 - 1}| d\omega_z(t) < \infty,$$

$$(46) \quad \log |P(z)| \leq \int_E \log^+ |P(t)| d\omega_z(t) \quad \text{pour tout polynôme } P.$$

Considérons, pour $R > 0$, le domaine $\mathcal{O}_R = \mathcal{O} \cap \{|z| < R\}$ ayant pour frontière l'ensemble $E_R = E \cap \{|z| < R\}$ et le cercle $\Gamma_R = \{|z| = R\}$. \mathcal{O}_R est de connexité finie, et à chaque $z \in \mathcal{O}_R$ correspond une mesure harmonique ω_z^R portée par $E_R \cup \Gamma_R$. On étend la définition de ω_z^R à E en la mettant $\equiv 0$ sur $E \setminus E_R$, et si $z \notin \mathcal{O}_R$ on entendra par ω_z^R la mesure qui est identiquement nulle. Les ω_z^R sont positives.

Le principe du maximum montre que pour chaque $z \in \mathcal{O}$, les mesures ω_z^R , restreintes à E , forment une famille monotone, croissante par rapport

au paramètre R . Puisque $\int_E d\omega_z^R(t) < 1$ pour chaque R , à tout $z \in \mathcal{O}$ correspond une mesure positive ω_z , portée par E , telle que

$$(47) \quad d\omega_z^R(t) \rightarrow d\omega_z(t) \text{ faiblement sur } E \text{ pour } R \rightarrow \infty,$$

et que (44) soit satisfait.

Grâce à la propriété 1^o, la fonction $H(z) = \log |z + \sqrt{z^2 - 1}|$ (détermination positive de la racine carrée) est *harmonique* et *positive* dans \mathcal{O} , et continue jusqu'à sa frontière. Donc, si $z \in \mathcal{O}$ et $|z| < S \leq R$,

$$H(z) = \int_{E_R \cup \Gamma_R} H(\zeta) d\omega_z^R(\zeta) \cong \int_{E_S} H(t) d\omega_z^R(t).$$

Si l'on tient S fixe, et fait tendre R vers l'infini, ceci, joint à (47), donne $\int_{E_S} H(t) d\omega_z(t) \leq H(z)$, d'où (45) s'obtient en faisant $S \rightarrow \infty$.

Reste à établir (46). Si $P(z)$ est un polynome, l'expression $\log(|P(z)|^2 + \varepsilon^2)$ est *sous-harmonique* dans \mathcal{O}_R et *continue* jusqu'à sa frontière, pourvu que $\varepsilon > 0$. Donc, si $z \in \mathcal{O}_R$, et $\varepsilon > 0$,

$$(48) \quad \log(|P(z)|^2 + \varepsilon^2) \leq \int_{E_R \cup \Gamma_R} \log(|P(\zeta)|^2 + \varepsilon^2) d\omega_z^R(\zeta).$$

Lorsque ε tend vers zéro en décroissant, les fonctions $\log(|P(\zeta)|^2 + \varepsilon^2)$ forment une famille décroissante, bornée au-dessus sur l'ensemble $E_R \cup \Gamma_R$. On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue à l'intégrale de droite dans (48), et l'on trouve à la limite $\varepsilon = 0$,

$$(49) \quad \log |P(z)| \leq \int_{E_R \cup \Gamma_R} \log |P(\zeta)| d\omega_z^R(\zeta).$$

Vu que la famille des mesures ω_z^R est croissante sur E par rapport au paramètre R , on a par (49) et (47),

$$\log |P(z)| \leq \int_E \log^+ |P(t)| d\omega_z(t) + \int_{\Gamma_R} \log |P(\zeta)| d\omega_z^R(\zeta).$$

Or, P est un polynome. La formule (46) sera donc prouvée dès qu'on montrera que, si $R \rightarrow \infty$ en parcourant une certaine suite de valeurs, la quantité $\omega_z^R(\Gamma_R) \log R$ tend vers zéro pour chaque z fixe $\in \mathcal{O}$.

Selon la propriété 3^o, il existe des R arbitrairement grands tels que

$$[-R, -\sqrt{R}] \cup [\sqrt{R}, R] \subset E_R.$$

Prenons un tel R , et notons par $H_R(z)$ la fonction, harmonique dans le domaine obtenu en enlevant du cercle $\{|z| < R\}$ les intervalles

$(-R, -\sqrt{R}]$, $[\sqrt{R}, R)$, qui vaut 1 sur Γ_R et 0 sur ces deux intervalles. Si $z \in \mathcal{D}_R$, on a, par le principe du maximum,

$$(50) \quad \omega_z^R(\Gamma_R) \leq H_R(z).$$

On va estimer $H_R(z)$. La chaîne des transformations

$$z \rightarrow \frac{z}{R} = \zeta \rightarrow \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \omega \rightarrow \omega^2 = w \rightarrow \frac{4}{\sqrt{R}(w-1)} = \sigma$$

engendre une application conforme $z \rightarrow \sigma$ du domaine de définition de $H_R(z)$ sur l'extérieur du segment $\left[-\left(1 + \frac{1}{\sqrt{R}}\right)^2, \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R}}\right)^2\right]$. Cette application conforme fait correspondre au point $z = 0$ le point $\sigma = \infty$, et à Γ_R le sous-segment $\left[-\frac{4}{\sqrt{R}}, 0\right]$ de la frontière du domaine des σ . Si z est fixe, et \sqrt{R} est très grand par rapport à $|z|$, on peut donc dire que $H_R(z) \leq \text{Cte } R^{-\frac{1}{2}}$ avec une constante indépendante de R . Si l'on donne maintenant des valeurs arbitrairement grandes à R , mais de façon que la condition 3° soit toujours remplie, on voit, que pour z fixe $\in \mathcal{D}$, on peut rendre $H_R(z) \log R$ aussi petit qu'on veut. Ce fait, joint à (50), établit (46).

Une fois vérifiées les propriétés (44), (45), et (46), la démonstration s'achève rapidement. De (44) et (45) vient l'existence d'une fonction $\rho(t)$ ayant les propriétés (i) et (ii), et telle que

$$(51) \quad \int_E \rho(t) \log(t^2 + 5) d\omega_i(t) < \infty.$$

La propriété (iii) est alors conséquence de (51) et (46).

LEMME. — Il existe une fonction continue et paire, $F(x) \geq 1$ ($-\infty < x < \infty$), jouissant des propriétés suivantes :

1° $F(x) \leq 5$ pour tout x appartenant à un certain ensemble E satisfaisant l'hypothèse du lemme précédent;

2° étant donné $\delta > 0$, on peut trouver une suite de fonctions entières $\varphi_n(z)$, de type exponentiel δ , bornées sur l'axe réel, telle que $|\varphi_n(x)| \leq F(x)$, $-\infty < x < \infty$, tandis que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |\varphi_n(x)|}{1+x^2} dx \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

DÉMONSTRATION. — Pour chaque $A \geq 10$, posons

$$(52) \quad f_A(z) = \prod_{\frac{a}{\sqrt{2}} \leq n \leq A} \prod_{n \geq e^A} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

La fonction entière $f_A(z)$ est égale à $\sin \pi z$ divisé par un polynôme; elle est donc de type exponentiel π , et bornée sur l'axe réel.

On a les inégalités suivantes :

$$(53) \quad |f_A(x)| \leq 1, \quad |x| \leq A,$$

$$(54) \quad |f_A(x)| \geq \left(1 - O\left(e^{-\frac{A}{3}}\right)\right) e^{\frac{A}{4}}, \quad \sqrt{e+1}A \leq |x| \leq e^{\frac{A}{3}},$$

$$(55) \quad |f_A(x)| \leq 1, \quad |x| \geq \sqrt{2}e^A,$$

$$(56) \quad |f_A(x)| \leq \exp(-2^A), \quad |x| \geq \sqrt{e+1}e^A,$$

En effet, (53) est évident, (54) résulte de

$$\prod_{\frac{A}{\sqrt{2}} \leq n \leq A} \left(\frac{x^2}{n^2} - 1\right) \geq e^{\frac{A}{4}}, \quad |x| \geq \sqrt{e+1}A$$

joint à

$$\log \left[\prod_{n \geq e^A} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \right] = -O(1)x^2 \sum_{n \geq e^A} n^{-2} \geq -O\left(e^{-\frac{A}{3}}\right), \quad |x| \leq e^{\frac{A}{3}},$$

et (55), (56) s'obtiennent au moyen de l'identité

$$f_A(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x \prod_{1 \leq n < \frac{A}{\sqrt{2}}} \prod_{A < n < e^A} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)}.$$

On prend maintenant une suite $\{A_n\}$ tendant très rapidement vers l'infini, l'ajustement exact de sa vitesse de croissance étant remis à plus tard. On exige toutefois, dès le début, que

$$(57) \quad \frac{1000A_n^3}{n^2} < n e^{\frac{A_n}{n}} < e^{A_n},$$

et que

$$(58) \quad A_{n+1} > e^3 A_n.$$

Posons $\alpha_n = \frac{\pi}{4A_n}$. Si $\{A_n\}$ croît assez vite, on a

$$(59) \quad 1 - \left(\frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n x}\right)^2 \geq \frac{1}{2}, \quad |x| \geq A_n,$$

$$(60) \quad \sum_n \left(1 - \left(\frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k x}\right)^2\right) \leq 2, \quad |x| \leq A_n.$$

De ces inégalités, (59) est manifeste; quant à (60), on a, par la formule de Taylor-Lagrange,

$$1 - \left(\frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k x}\right)^2 \leq \text{Cte} (\alpha_k x)^2,$$

donc, si $|x| \leq A_n$, la somme dans (60) est majorée par

$$1 + \text{Cte} A_n^2 \sum_{n+1}^{\infty} A_k^{-2} \leq 1 + 2 \text{Cte} A_n^2 A_{n+1}^{-2} \leq 2,$$

si $\{A_n\}$ est assez rapidement croissante.

On va prendre

$$(61) \quad F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n x} \right)^2 \right) \left\{ f_{\frac{A_n}{n}} \left(\frac{x}{n} \right) \right\}.$$

Si $A_n \leq |x| \leq A_{n+1}$ on a, par (56) et (57),

$$(62) \quad \left| f_{\frac{A_k}{k}} \left(\frac{x}{k} \right) \right| \leq \exp \left(-2 \frac{A_k}{k} \right), \quad k < n;$$

et par (53),

$$(63) \quad \left| f_{\frac{A_k}{k}} \left(\frac{x}{k} \right) \right| \leq 1, \quad k \geq n+1.$$

Nous prenons les A_n assez rapidement croissants pour que

$$\sum_1^{\infty} \exp \left(-2 \frac{A_k}{k} \right) \leq 1.$$

Alors, de (59), (60), (61), (62) et (63) il vient

$$(64) \quad 1 + \frac{1}{2} \left(f_{\frac{A_n}{n}} \left(\frac{x}{n} \right) \right)^2 \leq F(x) \leq 4 + \left(f_{\frac{A_n}{n}} \left(\frac{x}{n} \right) \right)^2, \quad A_n \leq |x| \leq A_{n+1}.$$

On voit de même que

$$(65) \quad F(x) \leq 3, \quad |x| \leq A_1.$$

Soit

$$(66) \quad E = [-A_1, A_1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [-A_{n+1}, -\sqrt{2} e^{A_n}] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [\sqrt{2} e^{A_n}, A_{n+1}].$$

Vu la condition (58), E satisfait à l'hypothèse du lemme précédent. Mais aussi $F(x) \leq 5$, $x \in E$, en vertu de (64) et de (55) joint à (57). La propriété 1^o de $F(x)$ est donc vérifiée.

Venons-en à la propriété 2^o. Soit $\delta > 0$, et prenons N assez grand pour que

$$2 \alpha_n + \frac{2\pi}{n} \leq \delta, \quad n \geq N.$$

Alors, si $l \geq N$, chacune des fonctions

$$\varphi_l(z) = 1 + \sum_{n=N}^l \left(1 - \left(\frac{\sin \alpha_n z}{\alpha_n z} \right)^2 \right) \left(f_{\frac{A_n}{n}} \left(\frac{z}{n} \right) \right)^2$$

est entière, de type exponentiel δ , et bornée sur l'axe réel. Il est clair que $1 \leq \varphi_l(x) \leq F(x)$ pour $-\infty < x < \infty$. Or, on a par (59),

$$(67) \quad \varphi_l(x) \geq 1 + \frac{1}{2} \left(f_{\frac{A_n}{n}} \left(\frac{x}{n} \right) \right)^2, \quad |x| \geq A_n, \quad N \leq n \leq l.$$

Et pour $\sqrt{e+1}A_n \leq |x| \leq 10A_n$, le membre de droite dans (67) vaut au moins $\exp\left(\frac{A_n}{5n}\right)$, selon (54) et (57). Donc, si $N \leq n \leq l$,

$$\int_{A_n}^{A_{n+1}} \frac{\log \varphi_l(x)}{x^2} dx \geq \frac{C}{n},$$

C étant une constante numérique. De là tire-t-on enfin

$$\int_1^\infty \frac{\log \varphi_l(x)}{x^2} dx \geq C \log \frac{l}{N} \rightarrow \infty, \quad l \rightarrow \infty.$$

Cela démontre la propriété 2^o.

THÉORÈME VII. — *Il existe un poids pair $W(x)$ tel que $\frac{x^n}{W(x)} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$ et tel que $\mathcal{C}_w(0) \neq \mathcal{C}_w(0+) = \mathcal{C}_w$.*

DÉMONSTRATION. — Soit $F(x)$ la fonction définie par la formule (61), et soit E l'ensemble donné par (66). Soit $\rho(t)$ la fonction associée à l'ensemble E , dont l'existence est garantie par le premier lemme de ce numéro. On étend la définition de $\rho(t)$ à toute la droite réelle par interpolation linéaire sur les intervalles contigus de E . Ainsi obtient-on une fonction $\rho(x) \geq 1$, paire, et croissante vers l'infini sur la demi-droite positive.

Posons

$$(68) \quad W(x) = \max(F(x), (x^2 + 5)^{\rho(x)})$$

Puisque $W(x) \geq (x^2 + 5)^{\rho(x)}$, $W(x) \geq 1$ et

$$(69) \quad \frac{x^n}{W(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

Je dis que $\mathcal{C}_w(0) \neq \mathcal{C}_w$. En effet, puisque $F(x) \leq 5$, $x \in E$,

$$W(x) = (x^2 + 5)^{\rho(x)} \quad \text{sur } E.$$

Donc, selon le premier lemme de ce numéro, il existe une constante $K < \infty$ telle que $|P(i)| \leq K$ pour chaque polynôme P satisfaisant $|P(x)| \leq W(x)$, $-\infty < x < \infty$. Le poids $W(x)$ étant continu, cela entraîne $\mathcal{C}_w(0) \neq \mathcal{C}_w$, grâce à un théorème bien connu d'Akhiezer ([13]).

Cependant, $\mathcal{C}_w(0+) = \mathcal{C}_w$. Ceci sera établi dès qu'on montrera que $\mathcal{C}_w(\delta+) = \mathcal{C}_w$ pour chaque $\delta > 0$. Si $\delta > 0$ est donné on peut, par le

lemme précédent, trouver une suite de fonctions entières $\varphi_n(z)$, de type exponentiel δ , bornées sur l'axe réel, telle que

$$(70) \quad |\varphi_n(x)| \leq F(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

tandis que

$$(71) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |\varphi_n(x)|}{1+x^2} dx \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

De (69) et du fait que chaque φ_n est bornée sur l'axe réel, vient $\varphi_n \in \mathcal{C}_w$, $n = 1, 2, \dots$. De (70) et (68) on a

$$(72) \quad \|\varphi_n\|_w \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Or, selon un théorème d'Akhiezer ([1]), l'existence d'une suite de fonctions entières $\varphi_n \in \mathcal{C}_w$, de type exponentiel δ , telle que (71) et (72) aient lieu simultanément, implique que les fonctions entières de type exponentiel δ appartenant à \mathcal{C}_w y sont *denses*. Toutes ces fonctions-là sont dans $\mathcal{C}_w(\delta +)$, par le théorème I (n° 1). Donc $\mathcal{C}_w(\delta +)$ est dense dans \mathcal{C}_w , c'est-à-dire, $\mathcal{C}_w(\delta +) = \mathcal{C}_w$, comme il nous fallait.

REMARQUE. — En raffinant certains détails de la construction ci-dessus, on peut obtenir un poids $W(x)$ *croissant* sur $(0, \infty)$, tel que $\mathcal{C}_w(0) \neq \mathcal{C}_w(0+) = \mathcal{C}_w$. Comme cela mène à des calculs plus longs, bien qu'étant les mêmes en principe, on ne le fera pas ici.

NOTE. — Lorsque je terminais la première rédaction de cet article, j'ai reçu dans mon courrier le fascicule courant du *Bulletin of the American Mathematical Society*. Là se trouve une Note de Levinson et McKean ([8]) où sont énoncés, sans indication des démonstrations, des résultats analogues à certains exposés ici, mais ayant trait à l'approximation pondérée en norme quadratique.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. I. AKHIEZER, *O slabo vesovykh founktsiakh (Doklady A. N., t. 93, n° 6, 1953, p. 949-952).*
- [2] N. I. AKHIEZER, *Ob odnom obobchtchenii preobrazovania Fourie i teoremy Viner-Palei (Doklady A. N., t. 94, n° 5, 1954, p. 889-892).*
- [3] N. I. AKHIEZER, *O vzechonnom priblizhenii niepreryvnykh founktsii mnogotchlenami na vsej tchislovoi osi [Ouspekhi Mat. Naouk, t. 11, fasc. 4 (70) 1956, p. 3-43].*
- [4] E. J. AKUTOWICZ, *Sur l'approximation par certaines fonctions entières (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 77, 1960, p. 281-301).*
- [5] LOUIS DE BRANGES, *The Bernstein Problem (Proc. Amer. Math. Soc., vol. 10, n° 5, 1959, p. 825-832).*
- [6] T. HALL, *Sur l'approximation polynomiale des fonctions continues d'une variable (IX^e Congrès des Mathématiciens scandinaves, 1939).*

- [7] J.-P. KAHANE, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles* (Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1953-1954, p. 39-130).
 - [8] N. LEVINSON, et H. P. MC KEAN, *Weighted Trigonometric Approximation on \mathbb{R}^1 with Application to the Germ Field of a Stationary Gaussian Process* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 70, n° 1, 1964, p. 128-129).
 - [9] S. MANDELBROJT, *Analytic Functions and Classes of Infinitely Differentiable Functions* [Rice Inst. Pamphlet, vol. 29, n° 1, 1942 (Houston)].
 - [10] S. N. MÉRGUÉLIANE, *Vesoye priblizhenia mnogotchenami* [Ouspekhi Mat. Naouk, t. 11, fasc. 5 (71), 1956, p. 107-152]. (Une traduction anglaise de cet article a paru dans la série *Translations of the American Mathematical Society*.)
 - [11] R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen*, 2^e éd., Springer, Berlin, 1953.
-