ALAIN GUICHARDET

Caractères et représentations des produits tensoriels de C^*-algèbres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 81, nº 2 (1964), p. 189-206
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_2_189_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 81, 1964, p. 189 à 206.

CARACTÈRES ET REPRÉSENTATIONS DES PRODUITS TENSORIELS DE C*-ALGÈBRES

PAR M. ALAIN GUICHARDET.

Utilisant la définition des produits tensoriels de C*-algèbres donnée dans [12], nous définissons d'abord les produits tensoriels de traces sur les C*-algèbres (au sujet des traces, *voir* [3] ou [6]); nous étudions ensuite le quasi-dual $\tilde{A}$ (ou ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles) d'un produit tensoriel $A = A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$; le produit tensoriel des représentations définit une application Π injective, mais non surjective en général (*cf.* fin du paragraphe 6) de $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ dans $\tilde{A}$; on étudie le comportement de Π du point de vue des structures boréliennes sur les quasi-duaux définies dans [4], sans pouvoir toutefois déterminer si elle est borélienne (§ 3 et cor. 2 du th. 2); Π est surjective si A_1 ou A_2 est de type I (prop. 6); dans tous les cas, certaines représentations factorielles sont toujours des produits tensoriels, en particulier les représentations factorielles de type fini (cor. 1 du th. 2) et toute représentation irréductible π telle que $\pi(A)$ soit formée d'opérateurs compacts (th. 5).

On indique quelques relations entre les propriétés (CCR, GCR, NGCR) de A et celles de A_1 et A_2 (th. 3, 3′ et 4). On montre pour terminer que, sous certaines hypothèses, la C*-algèbre du produit direct de deux groupes localement compacts est isomorphe au produit tensoriel des C*-algèbres de ces groupes (prop. 7).

Notations. — On désigne par A_1 et A_2 deux C*-algèbres, par $A_1 \otimes A_2$ leur produit tensoriel algébrique et par $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ leur produit tensoriel

$C^\star$-algèbre. Si B est une $C^\star$-algèbre et σ une trace définie sur un idéal autoadjoint I et B, on appelle « éléments associés » à σ les éléments suivants :

N, l'idéal autoadjoint des $x \in \mathrm{I}$ tels que $\sigma(x, x) = 0$;
Λ, l'application canonique de I sur I/N;
H, l'espace hilbertien complété de I/N;
$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathrm{I/N})$, l'algèbre de von Neumann associée à gauche à l'algèbre hilbertienne I/N;
Tr, la trace naturelle sur $\mathfrak{U}$;
$\mathfrak{m}$, l'idéal de définition de Tr;
π, la représentation de B dans H définie par

$$\pi(z)\Lambda x = \Lambda(zx).$$

Profitons de l'occasion pour modifier la définition des caractères donnée dans ([6], chap. I, § 1, n° 2) : la démonstration de la proposition 3, (i)$\Rightarrow$(ii), est erronée, la conclusion véritable étant seulement que $\sigma'(x, y) = k\,\sigma(x, y)$ pour x et $y \in \mathrm{I}$, ce qui n'exclut pas que σ' soit nulle sur I (phénomène qu'on rencontre effectivement); pour conserver la proposition 3 on doit donc définir les caractères comme suit :

Une trace maximale σ définie sur un idéal I est appelée caractère si $\sigma \neq 0$ et si toute trace maximale majorée par σ est proportionelle à σ sur I.

Nous remercions M. J. Dixmier à qui nous devons la détection de cette erreur, ainsi que d'un certain nombre d'autres dans le présent article.

1. Produits tensoriels de traces.

Lemme 1. — *Soient* B *une* $C^\star$-*algèbre*, π_1 *une représentation non dégénérée de* B, $\mathcal{B}$ *l'algèbre de von Neumann engendrée par* $\pi_1(\mathrm{B})$, Tr_1 *une trace normale, semi-finie, fidèle sur* $\mathcal{B}$, $\mathfrak{m}_1$ *son idéal de définition; supposons* $\pi_1(\mathrm{B}) \cap \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ *partout dense dans* $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ *pour le produit scalaire* $(\mathrm{S}, \mathrm{T}) \to \mathrm{Tr}_1(\mathrm{ST}^\star)$*; posons* $\mathrm{I} = \pi_1^{-1}\left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}\right)$ *et, pour* $x, y \in \mathrm{I}$, $\sigma(x, y) = \mathrm{Tr}_1(\pi_1(xy^\star))$; *alors* σ *est une trace maximale et la représentation gauche canoniquement associée à* σ *est quasi-équivalente à* π_1.

(Ce lemme pourrait se déduire de [3], lemme 4; nous en donnons une démonstration utilisant les notations de [6].)

Les axiomes (i), (ii) et (iii) des traces ([6], chap. I, § 1) sont trivialement vérifiés; l'axiome (iv) résulte de la continuité ultrafaible de $\mathrm{Tr}_1(\pi_1(zxx^\star))$ par rapport à $\pi_1(z)$ et du fait que $\pi_1(z)$ tend ultrafortement vers 1 suivant toute unité approchée de B. Axiome (v) : il faut vérifier que tout élément $\pi_1(x) \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ est limite, pour le produit scalaire $\mathrm{Tr}_1(\mathrm{ST}^\star)$, d'éléments

$\pi_1(y)\,\pi_1(z)$, où $\pi_1(y)$ et $\pi_1(z) \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$; or $\pi_1(x)$ est limite d'éléments ST, où S et $T \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ et ST à son tour est limite d'éléments $\pi_1(y)\,\pi_1(z)$, où $\pi_1(y)$ et $\pi_1(z) \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$.

Soient maintenant H′ l'espace hilbertien complété de l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$ et Φ l'isomorphisme de $\mathcal{B}$ sur $\mathfrak{U}\left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}\right)$ transformant un élément quelconque R de $\mathcal{B}$ en l'opérateur de multiplication à gauche par R; soient, d'autre part, N, Λ, H, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{m}$, les éléments associés à σ; N est le noyau de π_1 et l'application $\Lambda x \to \pi_1(x)$ est un isomorphisme de l'algèbre hilbertienne I/N sur $\pi_1(\mathrm{B}) \cap \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$, sous-algèbre hilbertienne partout dense de $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$; elle se prolonge en un isomorphisme de H sur H′ qui transforme $\mathfrak{U}$ en $\mathfrak{U}\left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}\right)$ et, pour tout $a \in \mathrm{B}$, $\pi(a)$ en l'opérateur de multiplication par $\pi_1(a)$; d'où, en combinant avec Φ^{-1}, un isomorphisme de $\mathfrak{U}$ sur $\mathcal{B}$ qui transforme $\pi(a)$ en $\pi_1(a)$, ce qui prouve que π et π_1 sont quasi équivalentes.

Enfin pour montrer que σ est maximale, il suffit ([6], chap. I, § 1, prop. 2) de montrer que si $a \in \mathrm{B}$ et $\pi(a) \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, on a $a \in \mathrm{I}$; or, dans ce cas,

$$\pi_1(a) \in \mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{donc} \quad a \in \mathrm{I}.$$

Définition des produits tensoriels de traces. — Soient A_1 et A_2 deux C*-algèbres, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \overset{\star}{\otimes} \mathrm{A}_2$, $\sigma_i (i = 1, 2)$ une trace maximale définie sur un idéal autoadjoint I_i de A_i, N_i, Λ_i, H_i, $\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{m}_i$, π_i les éléments associés; soient $\mathcal{O}$ l'algèbre hilbertienne $\mathrm{I}_1/\mathrm{N}_1 \otimes \mathrm{I}_2/\mathrm{N}_2$, $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \otimes \mathrm{H}_2$ l'espace hilbertien complété,

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathcal{O}) = \mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2, \qquad \pi = \pi_1 \otimes \pi_2,$$

Tr la trace naturelle sur $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{m}$ son idéal de définition; $\mathfrak{U}$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(\mathrm{A})$; π est non dégénérée, puisque π_1 et π_2 le sont. On va montrer que $\pi(\mathrm{A}) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ est partout dense dans $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ pour le produit scalaire $\mathrm{Tr}(\mathrm{ST}^\star)$; les éléments U_ξ, où $\xi \in \mathcal{O}$ sont partout denses dans $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ et, d'autre part, tout élément ξ de $\mathcal{O}$ est de la forme

$$\xi = \sum_{n=1}^{m} \xi_{1,n} \otimes \xi_{2,n} \qquad (\xi_{i,n} \in \mathrm{I}_i/\mathrm{N}_i),$$

donc de la forme

$$\xi = \sum_{n=1}^{m} \Lambda_1 x_{1,n} \otimes \Lambda_2 x_{2,n} \qquad (x_{i,n} \in \mathrm{I}_i);$$

alors,

$$U_\xi = \sum_{n=1}^{m} U_{\Lambda_1 x_{1,n} \otimes \Lambda_2 x_{2,n}} = \sum_{n=1}^{m} U_{\Lambda_1 x_{1,n}} \otimes U_{\Lambda_2 x_{2,n}}$$
$$= \sum_{n=1}^{m} \pi_1(x_{1,n}) \otimes \pi_2(x_{2,n}) = \pi\left(\sum_{n=1}^{m} x_{1,n} \otimes x_{2,n}\right) \in \pi(A).$$

D'après le lemme 1, on définit une trace maximale sur l'idéal $I = \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$ en posant $\sigma(x, y) = \mathrm{Tr}(\pi(xy^\star))$ et la représentation gauche canoniquement associée à π est quasi équivalente à $\pi_1 \otimes \pi_2$.

Le produit tensoriel $I_1 \otimes I_2$ est contenu et partout dense dans I [pour le produit scalaire $\sigma(x, y)$] d'après le calcul fait ci-dessus; de plus si x et $y_i \in I_i$, on a

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) &= \mathrm{Tr}(\pi(x_1 \otimes x_2)\, \pi(y_1 \otimes y_2)^\star) \\
&= \mathrm{Tr}((\pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2))\, (\pi_1(y_1) \otimes \pi_2(y_2))^\star) \\
&= \mathrm{Tr}(U_{\Lambda_1 x_1} \otimes U_{\Lambda_2 x_2})\, (U_{\Lambda_1 y_1} \otimes U_{\Lambda_2 y_2})^\star) \\
&= \mathrm{Tr}(U_{\Lambda_1 x_1 \otimes \Lambda_2 x_2}\, U_{\Lambda_1 y_1 \otimes \Lambda_2 y_2}) \\
&= (\Lambda_1 x_1 \otimes \Lambda_2 x_2 \mid \Lambda_1 y_1 \otimes \Lambda_2 y_2)) \\
&= (\Lambda_1 x_1 \mid \Lambda_1 y_1)\, (\Lambda_2 x_2 \mid \Lambda_2 y_2) \\
&= \sigma_1(x_1, y_1)\, \sigma_2(x_2, y_2).
\end{aligned}$$

On notera $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ la trace σ et in l'appellera *produit tensoriel* de σ_1 et σ_2. En résumé :

Théorème 1. — *Étant données deux traces maximales σ_1 et σ_2 sur A_1 et A_2 on peut définir canoniquement une trace maximale $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ sur $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) *Le produit tensoriel algébrique des idéaux de définition I_1 et I_2 de σ_1 et σ_2 est contenu et partout dense dans l'idéal de définition de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ pour sa structure préhilbertienne;*

(ii) *Si x_i et $y_i \in I_i$ $(i = 1, 2)$, on a*

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)\, (x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = \sigma_1(x_1, y_1)\, \sigma_2(x_2, y_2);$$

(iii) *La représentation gauche de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ canoniquement associée à $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ est quasi équivalente au produit tensoriel des représentations gauches canoniquement associées à σ_1 et σ_2; en particulier, $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ est un caractère si et seulement si σ_1 et σ_2 sont des caractères.*

Remarque. — Adoptant la terminologie de ([3], chap. I, § 4) appelons φ, φ_1, φ_2 les traces semi-finies semi-continues inférieurement associées à σ, σ_1 et σ_2; on a

$$\varphi(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \tag{1}$$

pour tout $x_1 \in A_1^+$ et tout $x_2 \otimes A_2^+$, en convenant que $0 . \infty = \infty . 0 = 0$.

En effet, si $\varphi_1(x_1)$ et $\varphi_2(x_2)$ sont finis, (1) résulte du théorème 1 (ii) supposons maintenant x_1 et x_2 quelconques : on a

$$\varphi_i(x_i) = \sup \varphi_i(y_i) \quad \text{pour} \quad y_i \leqq x_i \quad \text{et} \quad \varphi_i(y_i) < +\infty;$$

alors

$$\varphi(x_1 \otimes x_2) \geqq \varphi(y_1 \otimes y_2) = \varphi_1(y_1)\, \varphi_2(y_2),$$

ce qui entraîne immédiatement (1) dans le cas où $\varphi_1(x_1)$ et $\varphi_2(x_2) > 0$; supposons enfin $\varphi_1(x_1) = 0$: on a $\pi_1(x_1) = 0$ et

$$\varphi(x_1 \otimes x_2) = \mathrm{Tr}(\pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2)) = 0.$$

2. Restrictions à A_1 et A_2 des représentations de A.

Proposition 1. — *A toute représentation π de A dans un espace hilbertien H on peut associer canoniquement des représentations π_1 et π_2 de A_1 et A_2 dans H de façon que :*

(i) *$\pi(u_s \otimes x_2)$ converge fortement vers $\pi_2(x_2)$ pour tout $x_2 \in A_2$ et toute unité approchée (u_s) de A_1;*

(ii) *$\pi(x_1 \otimes v_t)$ converge fortement vers $\pi_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in A_1$ et toute unité approchée (v_t) de A_2;*

(iii) *$\pi(x_1 \otimes x_2) = \pi_1(x_1)\, \pi_2(x_2) = \pi_2(x_2)\, \pi_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in A_1$ et tout $x_2 \in A_2$.*

Choisissons une unité approchée (u_s) de A_1 et montrons que pour tout $x_2 \in A_2$, $\pi(u_s \otimes x_2)$ converge fortement vers un opérateur linéaire continu; soit H_0 le sous-espace $\pi(A_1 \otimes A_2).H$, ensemble des vecteurs de la forme

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \pi(x_j)\, \xi_j, \quad \text{où} \quad x_j \in A_1 \otimes A_2 \quad \text{et} \quad \xi_j \in H;$$

$\pi(u_s \otimes x_2)$ laisse stable H_0 et est nul dans son supplémentaire orthogonal; il nous suffit donc de montrer que $\pi(u_s \otimes x_2).\xi$ converge pour tout $\xi \in \overline{H}_0$, puis pour $\xi \in H_0$ puisque les $\pi(u_s \otimes x_2)$ sont de normes bornées, et enfin pour tout ξ de la forme $\pi(y_1 \otimes y_2).\eta$ par linéarité; on a alors

$$\pi(u_s \otimes x_2).\xi = \pi(u_s y_1 \otimes x_2 y_2).\eta \to \pi(y_1 \otimes x_2 y_2).\eta.$$

L'assertion est donc démontrée et l'on voit que la limite de $\pi(u_s \otimes x_2)$ est indépendante de l'unité approchée (u_s); notons-la $\pi_2(x_2)$.

L'application π_2 est une représentation de A_2 : d'abord il est clair que π_2 est linéaire; ensuite

$$\begin{aligned}\pi_2(x_2)\, \pi_2(y_2) &= \lim \pi(u_s \otimes x_2) \lim \pi(u_s \otimes y_2) \\ &= \lim \pi(u_s^2 \otimes x_2 y_2) = \pi_2(x_2 y_2),\end{aligned}$$

car on sait que (u_s^2) est une unité approchée de A_1; enfin

$$\pi_2(x_2^\star) = \lim \pi(u_s \otimes x_2^\star),$$
$$\pi_2(x_2) = \lim \pi(u_s^\star \otimes x_2),$$

puisque $(u_s^\star)$ est une unité approchée de A_1, d'où

$$\pi_2(x_2^\star) = \pi_2(x_2)^\star.$$

Prouvons enfin (iii)

$$\begin{aligned}\pi_1(x_1)\,\pi_2(x_2) &= \lim \pi(x_1 \otimes v_t) \lim \pi(u_s \otimes x_2)\\ &= \lim(\pi(x_1 \otimes v_t)\,\pi(u_s \otimes x_2)) = \lim \pi(x_1 u_s \otimes v_t x_2)\\ &= \pi(x_1 \otimes x_2);\end{aligned}$$

même chose pour $\pi_2(x_2)\,\pi_1(x_1)$.

C. Q. F. D.

Si A_1 admet un élément unité 1 on a $\pi_2(x_2) = \pi(1 \otimes x_2)$ et π_2 se déduit de π par restriction à la sous-algèbre $1 \otimes A_2$; on dira encore dans le cas général que π_2 est la *restriction* de π à A_2; même chose pour A_1. Notons encore ceci : si ρ_1 est une représentation *non dégénérée* de A_2 et ρ_2 une représentation quelconque de A_2, la restriction de $\rho_1 \otimes \rho_2$ à A_2 est un multiple de ρ_2; en effet,

$$\begin{aligned}\lim(\rho_1 \otimes \rho_2)\,(u_s \otimes x_2) &= \lim(\rho_1(u_s) \otimes \rho_2(x_2))\\ &= 1 \otimes \rho_2(x_2).\end{aligned}$$

Remarque analogue pour A_1.

Enfin supposons π *factorielle;* soit $\mathcal{A}$ le facteur engendré par $\pi(A)$; les algèbres de von Neumann engendrées resp. par $\pi_1(\mathcal{A}_1)$ et $\pi_2(\mathcal{A}_2)$ commutent et engendrent l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$, donc sont des facteurs et π_1 et π_2 sont *factorielles.*

3. Relations entre $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ et $\tilde{A}$.

Dans tout ce paragraphe, on suppose A_1 et A_2 à bases dénombrables; on pose toujours $A = A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$.

Pour tout $n = 1, 2, \ldots, \infty$ (infini dénombrable), soit H_n un espace hilbertien de dimension n; pour tout espace hilbertien H on note $A_{1,\mathrm{fac},H}$, $A_{2,\mathrm{fac},H}$, $A_{\mathrm{fac},H}$ les ensembles de représentations factorielles de A_1, A_2, A dans H; $A_{1,\mathrm{fac}}$, $A_{2,\mathrm{fac}}$, A_{fac} les ensembles sommes des ensembles A_{1,fac,H_n}, A_{2,fac,H_n}, A_{fac,H_n} pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$; $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}$ les relations de quasi-équivalence dans $A_{1,\mathrm{fac}}$, $A_{2,\mathrm{fac}}$, A_{fac}; Θ_1, Θ_2, Θ les applications canoniques de $A_{1,\mathrm{fac}}$, $A_{2,\mathrm{fac}}$, A_{fac} sur $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, $\tilde{A}$; on identifie $H_n \otimes H_m$ et H_{nm} au moyen d'un isomorphisme fixé; on munit les ensembles A_{1,fac,H_n}, A_{2,fac,H_n}, A_{fac,H_n} des topologies simples fortes et des structures boréliennes sous-jacentes;

$A_{1,\mathrm{fac}}$, $A_{2,\mathrm{fac}}$, A_{fac} des structures boréliennes sommes; $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, $\tilde{A}$ des structures boréliennes quotients (*cf.* [4], n° 2); on considérera aussi l'espace $(A_{1,\mathrm{fac}} \times A_{2,\mathrm{fac}})/(\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$ muni de la structure borélienne quotient de la structure borélienne produit et l'espace $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ muni de la structure borélienne produit; il est immédiat que la bijection canonique de $(A_{1,\mathrm{fac}} \times A_{2,\mathrm{fac}})/(\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$ sur $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ est *borélienne.*

LEMME 2. — *Pour tout n et tout m l'application* $(\pi_1, \pi_2) \to \pi_1 \otimes \pi_2$ *de* $A_{1,\mathrm{fac},H_n} \times A_{2,\mathrm{fac},H_m}$ *dans* $A_{\mathrm{fac},H_n \otimes H_m}$ *est continue.*

Il faut montrer que sont continues les applications

$$(\pi_1, \pi_2) \to (\pi_1 \otimes \pi_2)\,(x)\,.\,\xi, \qquad \text{où} \quad x \in A \quad \text{et} \quad \xi \in H_n \otimes H_m$$

ou encore les applications

$$(\pi_1, \pi_2) \to (\pi_1 \otimes \pi_2)\,(x_1 \otimes x_2)\,.\,\xi_1 \otimes \xi_2,$$

où $x_i \in A_i$, $\xi_1 \in H_n$ et $\xi_2 \in H_m$; or le second membre est égal à

$$\pi_1(x_1)\,.\,\xi_1 \otimes \pi_2(x_2)\,.\,\xi_2$$

et l'application en question est composée de

$$(\pi_1, \pi_2) \to (\pi_1(x_1)\,\xi_1,\ \pi_2(x_2)\,\xi_2)$$

et de

$$(\eta_1, \eta_2) \to \eta_1 \otimes \eta_2, \qquad \text{où} \quad \eta_1 \in H_n \quad \text{et} \quad \eta_2 \in H_m.$$

C. Q. F. D.

Le produit tensoriel des représentations définit donc une application borélienne de $A_{1,\mathrm{fac}} \times A_{2,\mathrm{fac}}$ dans A_{fac}; celle-ci passe au quotient en une application borélienne de $(A_{1,\mathrm{fac}} \times A_{2,\mathrm{fac}})/(\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$ dans $\tilde{A}$; on notera Π l'application correspondante, *a priori non nécessairement borélienne,* de $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ dans $\tilde{A}$.

LEMME 3. — *Pour toute représentation* π *de* A *on note* π_1 *et* π_2 *les restrictions de* π *à* A_1 *et* A_2*; alors pour tout n l'application* $\pi \to (\pi_1, \pi_2)$ *de* A_{fac,H_n} *dans* $A_{1,\mathrm{fac},H_n} \times A_{2,\mathrm{fac},H_n}$ *est borélienne.*

Il suffit de voir que les applications

$$\pi \to \pi_1(x_1)\,.\,\xi, \qquad \text{où} \quad x_1 \in A_1 \quad \text{et} \quad \xi \in H_n$$

sont boréliennes; or une telle application est limite simple des applications

$$\pi \to \pi(x_1 \otimes v_t)\,.\,\xi$$

et, comme on le sait, on peut choisir l'unité approchée (v_t) dénombrable.

C. Q. F. D.

Les opérations de restriction définissent donc une application borélienne de A_{fac} dans $A_{1,fac} \times A_{2,fac}$; celle-ci passe au quotient en une application borélienne de $\tilde{A}$ dans $(A_{1,fac} \times A_{2,fac})/(\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$; on notera $\overline{\Pi}$ l'application correspondante, *borélienne*, de $\tilde{A}$ dans $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$.

L'application $\overline{\Pi} \circ \Pi$ est l'*identité* sur $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$: en effet, soient $(\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2)$ un élément de $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ et π_i un élément non dégénéré de $\dot{\pi}_i$; la restriction de $\pi_1 \otimes \pi_2$ à A_i est quasi équivalente à π_i d'après la remarque qui suit la proposition 1. Il en résulte que Π est *injective* et $\overline{\Pi}$ *surjective*.

On peut tracer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_{fac} \arrow[r, "\text{restriction}"] \arrow[d, "\Theta"'] & A_{1,fac} \times A_{2,fac} \arrow[r, "\text{produit tensoriel}"] \arrow[d] & A_{fac} \arrow[d, "\Theta"] \\
\tilde{A} \arrow[r] \arrow[dr, "\overline{\Pi}"'] & (A_{1,fac} \times A_{2,fac})/(\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{A} \\
& \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \arrow[ur, "\Pi"'] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2. — $\Pi(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2)$ *est une partie borélienne de* $\tilde{A}$.

On va montrer que $\mathcal{E} = \Theta^{-1}(\overline{\Pi}(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2))$ est borélien dans A_{fac}; notons encore π_i la restriction à A_i d'un élément quelconque π de A_{fac}; $\mathcal{E}$ est l'ensemble des $\pi \in A_{fac}$ tels que $\pi_1 \otimes \pi_2$ soit quasi équivalente à π; soit f l'application de A_{fac} dans lui-même qui consiste, à partir d'un élément π, à construire

$$(\pi_1, \pi_2) \in A_{1,fac} \times A_{2,fac}, \qquad \text{puis} \quad \pi_1 \otimes \pi_2 \in A_{fac};$$

f est borélienne et, d'autre part, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des $\pi \in A_{fac}$ tels qu'on ait $\mathcal{R}(\pi, f(\pi))$, i. e. que le couple $(\pi, f(\pi))$ appartienne au graphe de $\mathcal{R}$ dans $A_{fac} \times A_{fac}$; comme ce graphe est borélien (*cf.* par exemple [4], démonstration de la proposition 2), $\mathcal{E}$ est borélien.

La proposition suivante assure la possibilité d'associer à deux mesures boréliennes standard sur $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ une mesure « produit » sur $\tilde{A}$.

PROPOSITION 3. — *Soient* μ_1 *et* μ_2 *des mesures boréliennes standard sur* $\tilde{A}_1$ *et* $\tilde{A}_2$*; il existe des parties boréliennes standard* E_1 *et* E_2 *de* $\tilde{A}_1$ *et* $\tilde{A}_2$ *portant* μ_1 *et* μ_2 *et telles que* Π *induise un isomorphisme borélien de* $E_1 \times E_2$ *sur une partie borélienne standard de* $\tilde{A}$*; si l'on choisit* E_1 *et* E_2 *avec ces propriétés et si l'on pose* $\mu = \Pi(\mu_1 \otimes \mu_2)$, *la classe de quasi-équivalence* $\int^{\oplus} \pi \, d\mu(\pi)$

(sur ce point, *cf.* [7], n° 2) *est le produit tensoriel des classes de quasi-équivalence*

$$\int^{\oplus} \pi_1 \, d\mu_1(\pi_1) \qquad \text{et} \qquad \int^{\oplus} \pi_2 \, d\mu_2(\pi_2)\,;$$

en outre, la décomposition $\int^{\oplus} \pi \, d\mu(\pi)$ *est centrale si et seulement si les deux autres le sont.*

D'après ([8], th. 6.3), il existe, pour $i = 1, 2$, une partie borélienne standard E_i de $\tilde{A}_i$ portant μ_i et une application borélienne Γ_i de E_i dans $A_{i,\text{fac}}$ telle que $\Theta_i \circ \Gamma_i =$ identité; considérons les applications boréliennes

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{(1)} A_{1,\text{fac}} \times A_{2,\text{fac}} \xrightarrow{(2)} A_{\text{fac}} \xrightarrow{(3)} \tilde{A},$$

où (1) est l'application (Γ_1, Γ_2), (2) l'application du produit tensoriel et (3) la restriction de Θ. On a

$$(3) \circ (2) \circ (1) = \text{restriction de } \Pi \text{ à } E_1 \times E_2,$$

donc $(2) \circ (1)$ est injective et son image rencontre chaque classe de quasi-équivalence en un point au plus; cette image est borélienne standard et $(2) \circ (1)$ est un isomorphisme borélien ([8], th. 3.2); la restriction de (3) est un isomorphisme borélien et son image $\Pi(E_1 \times E_2)$ est borélienne standard ([2], prop. 2); d'où la première assertion.

L'énoncé définit une mesure borélienne standard μ sur $\tilde{A}$, concentrée sur $\Pi(E_1 \times E_2)$; soient $E = \Pi(E_1 \times E_2)$ et Γ l'application de E dans A_{fac} réciproque de (3); soient ρ, ρ_i les éléments des classes de quasi-équivalence

$$\int^{\oplus} \pi \, d\mu(\pi), \qquad \int^{\oplus} \pi_i \, d\mu_i(\pi_i)$$

définis respectivement, par

$$\rho(x) = \int^{\oplus} \Gamma(\pi)(x) \, d\mu(\pi),$$

représentation dans l'espace $L^2_{H \otimes H}(E, \mu)$;

$$\rho_i(x) = \int^{\oplus} \Gamma_i(\pi_i)(x) \, d\mu_i(\pi_i),$$

représentation dans l'espace $L^2_H(E_i, \mu_i)$ (on suppose que toutes les représentations $\Gamma_i(\pi_i)$ ont lieu dans un même espace hilbertien H); on va montrer que ρ est équivalente à $\rho_1 \otimes \rho_2$, ce qui entraînera la deuxième assertion. On a aussi

$$\rho(x) = \int^{\oplus} (\Gamma_1(\pi_1) \otimes \Gamma_2(\pi_2))(x) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(\pi_1, \pi_2),$$

on définit un isomorphisme Φ de $L^2_H(E_1, \mu_1) \otimes L^2_H(E_2, \mu_2)$ sur l'espace $L^2_{H\otimes H}(E_1 \times E_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ en posant, pour toute suite finie $F_{i,n} \in L^2_H(E_i, \mu_i)$,

$$\Phi\left(\sum_n F_{1,n} \otimes F_{2,n}\right) = \text{fonction } (\pi_1, \pi_2) \to \sum_n F_{1,n}(\pi_1) \otimes F_{2,n}(\pi_2);$$

(le second membre signifie : application qui associe à tout couple $(\pi_1, \pi_2) \otimes E_1 \times E_2$ l'élément

$$\sum_n F_{1,n}(\pi_1) \otimes F_{2,n}(\pi_2) \in H \otimes H);$$

Φ transforme $\rho_1 \otimes \rho_2$ en ρ puisque, quels que soient

$$x_i \in A_i \qquad \text{et} \qquad F_i \in L^2_H(E_i, \mu_i),$$

on a

$$\begin{aligned}
&\Phi(\rho_1 \otimes \rho_2)(x_1 \otimes x_2).F_1 \otimes F_2 \\
&\quad = \Phi(\rho_1(x_1).F_1 \otimes \rho_2(x_2).F_2) \\
&\quad = \text{fonction } (\pi_1, \pi_2) \to (\rho_1(x_1).F_1)(\pi_1) \otimes (\rho_2(x_2).F_2)(\pi_2) \\
&\quad = \text{fonction } (\pi_1, \pi_2) \to \Gamma_1(\pi_1)(x_1).F_1(\pi_1) \otimes \Gamma_2(\pi_2)(x_2).F_2(\pi_2) \\
&\quad = \text{fonction } (\pi_1, \pi_2) \to (\Gamma_1(\pi_1) \otimes \Gamma_2(\pi_2))(x_1 \otimes x_2).(F_1(\pi_1) \otimes F_2(\pi_2)) \\
&\quad = \rho(x_1 \otimes x_2)\, \Phi(F_1 \otimes F_2).
\end{aligned}$$

Dernière assertion : appelons $\mathcal{A}(\pi)$ et $\mathcal{A}(\pi_i)$ les algèbres de von Neumann engendrées respectivement par $\Gamma(\pi)(A)$ et $\Gamma_i(\pi_i)(A_i)$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_i$ les algèbres de von Neumann engendrées respectivement par $\rho(A)$ et $\rho_i(A_i)$; dire que la décomposition

$$\int^{\oplus} \pi\, d\mu(\pi) \quad \text{ou} \quad \int^{\oplus} \pi_i\, d\mu_i(\pi_i)$$

est centrale équivaut à dire qu'on a

$$\mathcal{A} = \int^{\oplus} \mathcal{A}(\pi)\, d\mu(\pi)$$

ou

$$\mathcal{A}_i = \int^{\oplus} \mathcal{A}(\pi_i)\, d\mu_i(\pi_i);$$

or Φ transforme $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ en $\mathcal{A}$ et

$$\int^{\oplus} \mathcal{A}(\pi_1)\, d\mu_1(\pi_1) \otimes \int^{\oplus} \mathcal{A}(\pi_2)\, d\mu_2(\pi_2) \quad \text{en} \quad \int^{\oplus} \mathcal{A}(\pi)\, d\mu(\pi);$$

comme on a toujours

$$\mathcal{A} \subset \int^{\oplus} \mathcal{A}(\pi)\, d\mu(\pi),$$

$$\mathcal{A}_i \subset \int^{\oplus} \mathcal{A}(\pi_i)\, d\mu_i(\pi_i),$$

on a

$$\mathcal{A} = \int^{\oplus} \mathcal{A}(\pi)\, d\mu(\pi)$$

si et seulement si

$$\mathcal{A}_i = \int^{\oplus} \mathcal{A}(\pi_i)\, d\mu_i(\pi_i) \qquad (i = 1, 2).$$

4. Caractères de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$.

Proposition 4. — *Soient* $\mathcal{A}$ *un facteur*, Tr *une trace normale, semi-finie, fidèle sur* $\mathcal{A}^+$, $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *deux facteurs contenus dans* $\mathcal{A}$, *permutant élément par élément et engendrant* $\mathcal{A}$; *on suppose* $0 < \mathrm{Tr}(T_1 T_2) < +\infty$ *pour au moins un couple* $(T_1 T_2) \in \mathcal{A}_1^+ \times \mathcal{A}_2^+$; *alors* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *sont semi-finis et il existe un isomorphisme de* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *sur* $\mathcal{A}$ *transformant* $T_1 \otimes T_2$ *en* $T_1 T_2$ *quels que soient* $T_1 \in \mathcal{A}_1$ *et* $T_2 \in \mathcal{A}_2$.

Soit B_1 (resp. B_2) l'ensemble non vide des $T_1 \in \mathcal{A}_1^+$ (resp. $T_2 \in \mathcal{A}_2^+$) *tels qu'on ait* $0 < \mathrm{Tr}(T_1 S_2) < +\infty$ [resp. $0 < \mathrm{Tr}(S_1 T_2) < +\infty$] pour au moins un $S_2 \in \mathcal{A}_2^+$ (resp. $S_1 \in \mathcal{A}_1^+$). Soit $T_2 \in B_2$; la fonction sur $\mathcal{A}_1^+ : S_1 \to \mathrm{Tr}(S_1 T_2)$ est une trace normale (vérification immédiate), semi-finie (puisqu'elle prend une valeur qui n'est ni nulle ni infinie) et fidèle, car

$$\mathrm{Tr}(S_1 T_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = 0,$$

la dernière implication résultant de ([1], chap. I, § 2, ex. 6 *b*); désignons par Tr_1 une trace normale semi-finie fidèle arbitraire sur $\mathcal{A}_1^+$ et par $\mathfrak{m}_1$ son idéal de définition; on a pour tout $S_1 \in \mathcal{A}_1^+$,

$$(1) \qquad \mathrm{Tr}(S_1 T_2) = \lambda_2(T_2)\, \mathrm{Tr}_1(S_1),$$

où $\lambda_2(T_2)$ est un nombre positif non nul.

De la même façon, si $T_1 \in B_1$ et $S_2 \in \mathcal{A}_2^+$, on a

$$\mathrm{Tr}(T_1 S_2) = \lambda_1(T_1)\, \mathrm{Tr}'_2(S_2),$$

où Tr'_2 est une trace normale semi-finie fidèle arbitraire sur $\mathcal{A}_2^+$ (on notera $\mathfrak{m}_2$ son idéal de définition) et $\lambda_1(T_1)$ un nombre positif non nul.

Soient $T_1 \in \mathfrak{m}_1^+ - 0$ et $T_2 \in B_2$; on a $0 < \mathrm{Tr}_1(T_1) < +\infty$, donc, d'après (1),

$$0 < \mathrm{Tr}(T_1 T_2) < +\infty, \qquad \text{d'où} \qquad T_1 \in B_1;$$

ce qui prouve que $\mathfrak{m}_1^+ \subset B_1$; de la même façon, $\mathfrak{m}_2^+ \subset B_2$. Prenons T_1 non nul $\in \mathfrak{m}_1^+$ et T_2 non nul $\in \mathfrak{m}_2^+$; comme $T_1 \in B_1$ et $T_2 \in B_2$, on a

$$\mathrm{Tr}(T_1 T_2) = \lambda_2(T_2)\, \mathrm{Tr}_1(T_1) = \lambda_1(T_1)\, \mathrm{Tr}'_2(T_2),$$

donc $\lambda_1(T_1)/\mathrm{Tr}_1(T_1) = \lambda_2(T_2)/\mathrm{Tr}'_2(T_2)$ est un nombre k indépendant de T_1 et T_2; si l'on pose $\mathrm{Tr}_2 = k\mathrm{Tr}'_2$, on a

$$\mathrm{Tr}(T_1 T_2) = \mathrm{Tr}_1(T_1)\,\mathrm{Tr}_2(T_2) \tag{2}$$

pour T_1 non nul $\in \mathfrak{m}_1^+$ et T_2 non nul $\in \mathfrak{m}_2^+$; on a encore (2) pour $T_1 \in \mathfrak{m}_1$ et $T_2 \in \mathfrak{m}_2$ par linéarité.

Notons H, H_1, H_2 les espaces hilbertiens complétés des algèbres hilbertiennes $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}$, $\mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}$; l'application bilinéaire

$$(T_1, T_2) \to T_1 T_2$$

de $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \times \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}$ dans $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ définit une application linéaire Ω de $\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}$ dans $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$,

$$\Omega\left(\sum_{n=1}^{m} T_{1,n} \otimes T_{2,n}\right) = \sum_{n=1}^{m} T_{1,n}\, T_{2,n}$$

qui est un homomorphisme de $\star$-algèbres et conserve le produit scalaire (vérification facile); elle se prolonge en un isomorphisme Ω de $H_1 \otimes H_2$ sur un sous-espace fermé H' de H; $\Omega\left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}\right)$ est stable par les opérateurs U_S de multiplication à gauche par S ($S \in \mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$); il en est donc de même de H' et H' est stable par tous les U_S ($S \in \mathcal{A}$); on voit de même qu'il est stable par tous les opérateurs V_S de multiplication à droite par S ($S \in \mathcal{A}$), donc $H' = H$; alors $\Omega\left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}\right)$ est une sous-algèbre hilbertienne partout dense de $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ et l'on a

$$\mathcal{U}\left(\Omega\left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}\right)\right) = \mathcal{U}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right).$$

D'autre part, comme on le vérifiera sans peine, Ω transforme $U_{T_1 \otimes T_2}$ en $U_{T_1 T_2}$ pour tout couple $(T_1, T_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, donc $\mathcal{U}\left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}\right)$ en $\mathcal{U}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$; combinant à droite avec l'isomorphisme de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sur

$$\mathcal{U}\left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}\right) = \mathcal{U}\left(\mathfrak{m}_1^{\frac{1}{2}}\right) \otimes \mathcal{U}\left(\mathfrak{m}_2^{\frac{1}{2}}\right)$$

défini par

$$T_1 \otimes T_2 \to U_{T_1 \otimes T_2} = U_{T_1} \otimes U_{T_2}$$

et à gauche avec le réciproque de l'isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{U}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$,

$$T \to U_T,$$

on obtient l'isomorphisme cherché.

Remarque. — Ce résultat généralise celui de [10].

THÉORÈME 2. — *Tout caractère σ de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ tel qu'on ait*

$$0 < \sigma(x_1 \otimes x_2,\, x_1 \otimes x_2) < +\infty$$

pour au moins un couple $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ *est le produit tensoriel de deux caractères de* A_1 *et* A_2.

Soit π la représentation gauche canoniquement associée à σ, $\mathcal{A}$ le facteur engendré par $\pi(A)$, Tr la trace canonique sur $\mathcal{A}$, π_i la restriction de π à A_i, $\mathcal{A}_i$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_i(A_i)$; $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des facteurs permutant élément par élément et engendrant $\mathcal{A}$ (*cf.* fin du paragraphe 2) et les hypothèses de la proposition 4 sont vérifiées; on en déduit que π est quasi équivalente à $\pi_1 \otimes \pi_2$; puis π_1 et π_2 sont non dégénérées, car par exemple

$$\begin{aligned} \pi_1(x_1)\xi = 0 \quad \text{pour tout } x_1 \in A_1 \quad &\Rightarrow \quad \pi(x_1 \otimes x_2)\xi = 0 \quad \text{pour tout } x_1 \in A_1, \quad x_2 \in A_2 \\ &\Rightarrow \quad \pi(x)\xi = 0 \quad \text{pour tout } x \in A \quad \Rightarrow \quad \xi = 0 \end{aligned}$$

enfin, elles sont normales puisque si l'on a

$$0 < \sigma(x_1 \otimes x_2, x_1 \otimes x_2) < +\infty,$$

on a

$$0 < \mathrm{Tr}_i(\pi_i(x_i x_i^*)) < +\infty \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2.$$

Alors σ est égal au produit tensoriel des caractères de π_1 et π_2.

COROLLAIRE 1. — *Tout caractère de type fini de* A *est le produit tensoriel de deux caractères de type fini de* A_1 *et* A_2.

COROLLAIRE 2. — *Supposons* A_1 *et* A_2 *à bases dénombrables;* Π *et* $\overline{\Pi}$ *induisent des isomorphismes boréliens réciproques de* $(\tilde{A}_1)_f \times (\tilde{A}_2)_f$ *sur* $\tilde{A}_f$ *et* vice versa.

($\tilde{A}_f$ désigne l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles du type fini de A.)

La restriction de $\overline{\Pi}$ à $\tilde{A}_f$ est borélienne (§ 3) et injective d'après le théorème 2; $\tilde{A}_f$ et $(\tilde{A}_1)_f \times (\tilde{A}_2)_f$ sont standard ([6], chap. I, § 2, th. 1); en vertu de ([8], th. 3.2), $\overline{\Pi} | \tilde{A}_f$ est un isomorphisme borélien de $\tilde{A}_f$ sur son image, $(\tilde{A}_1)_f \times (\tilde{A}_2)_f$.

5. Représentations irréductibles normales de A_1, A_2 et $A_1 \overset{*}{\otimes} A_2$.

LEMME 4. — *Si* π_i *et* ρ_i *sont deux représentations de même noyau de* $A_i (i = 1, 2)$, *les représentations* $\pi_1 \otimes \pi_2$ *et* $\rho_1 \otimes \rho_2$ *ont même noyau.*

En effet, il existe un isomorphisme de $\pi_i(A_i)$ sur $\rho_i(A_i)$ transformant $\pi_i(x_i)$ en $\rho_i(x_i)$ pour tout $x_i \in A_i$; d'après ([12], th. 1), on a

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \pi_1(x_{1,n}) \otimes \pi_2(x_{2,n}) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{m} \rho_1(x_{1,n}) \otimes \rho_2(x_{2,n}) \right\|$$

quels que soient $x_{i,1}, \ldots, x_{i,m} \in A_i$; alors

$$\| (\pi_1 \otimes \pi_2)\, x \| = \| (\rho_1 \otimes \rho_2)\, x \| \quad \text{pour tout } x \in A,$$

d'où le lemme.

THÉORÈME 3. — *Si* A_1 *ou* A_2 *est NGCR et à base dénombrable,* $A_1 \overset{*}{\otimes} A_2$ *est NGCR.*

Supposons, par exemple, A_1 NGCR et à base dénombrable; d'après ([5], th. 1), il existe deux familles $(\pi_{1,i})_{i\in I}$ et $(\pi'_{1,i})_{i\in I}$ de représentations irréductibles de A_1 telles que :

— pour tout $i \in I$, $\pi_{1,i}$ et $\pi'_{1,i}$ aient même noyau sans être équivalentes;

— $\sum_i \pi_{1,i}$ et $\sum_i \pi'_{1,i}$ soient fidèles.

Soit, d'autre part, $(\pi_{2,j})_{j\in J}$ une famille de représentations irréductibles de A_2 telle que $\sum_j \pi_{2,j}$ soit fidèle. Pour tout couple $(i, j) \in I \times J$ les représentations $\pi_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$ et $\pi'_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$ de A sont irréductibles, de même noyau (lemme 4) et inéquivalentes; de plus, les représentations

$$\sum_{i,j} \pi_{1,i} \otimes \pi_{2,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i,j} \pi'_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$$

sont fidèles : en effet (distributivité du produit tensoriel par rapport à la somme directe) $\sum_{i,j} \pi_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$ est équivalente à $\left(\sum_i \pi_{1,i}\right) \otimes \left(\sum_j \pi_{2,j}\right)$ qui est fidèle; même raisonnement pour $\sum_{i,j} \pi'_{1,i} \otimes \pi_{2,j}$. Appliquant à nouveau ([5], th. 1), on voit que A est NGCR.

DÉFINITIONS. — Rappelons qu'une représentation irréductible π d'une C^*-algèbre B dans un espace hilbertien H est *normale* si et seulement si $\pi(B)$ contient tous les opérateurs compacts dans H [il suffit pour cela que $\pi(B)$ contienne *un* opérateur compact non nul]. Nous dirons pour abréger que π est *compacte* si $\pi(B)$ est identique à l'algèbre des opérateurs compacts.

PROPOSITION 5. — *Soient* π_1 *et* π_2 *deux représentations irréductibles non nulles de* A_1 *et* A_2 :

(i) *La représentation* $\pi_1 \otimes \pi_2$ *est compacte si et seulement si* π_1 *et* π_2 *le sont;*

(ii) *Si* π_1 *et* π_2 *sont normales, il en est de même de* $\pi_1 \otimes \pi_2$*;*

(iii) *Si* $\pi_1 \otimes \pi_2$ *est normale et si* $\pi_1(A_1)$ [resp. $\pi_2(A_2)$] *est à base dénombrable, alors* π_1 (resp. π_2) *est normale.*

Si $x_i \in A_i$ et si $\pi_i(x_i)$ est compact non nul, $\pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2)$ est compact non nul; ceci prouve (ii) et la partie « si » de (i).

Partie « seulement si » de (i) : si $\pi_1 \otimes \pi_2$ est compacte, $\pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2)$ est compact quels que soient x_1 et x_2, donc aussi $\pi_1(x_1)$ et $\pi_2(x_2)$.

(iii) Supposons $\pi_1 \otimes \pi_2$ normale et, par exemple, $\pi_1(A_1)$ à base dénombrable et π_1 non normale; $\pi_1(A_1)$ est NGCR ([5], th. 1), donc aussi, d'après le théorème 3,

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(A) = \pi_1(A_1) \overset{\star}{\otimes} \pi_2(A_2),$$

ce qui contredit la normalité de $\pi_1 \otimes \pi_2$.

Proposition 6. — *Soient π une représentation factorielle de A, π_1 et π_2 ses restrictions à A_1 et A_2; si π_1 ou π_2 est de type* I, *π est quasi équivalente à $\pi_1 \otimes \pi_2$.*

C'est une généralisation facile de ([12], lemme 13).

Théorème 4. — *Soient A_1 et A_2 deux C*-algèbres non nulles :*

(i) *La C*-algèbre $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ est CCR si et seulement si A_1 et A_2 le sont;*

(ii) *Si $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ est GCR et si A_1* (resp. A_2) *est à base dénombrable, alors A_1* (resp. A_2) *est GCR.*

La partie « si » de (i) est démontrée dans ([12], cor. 5). Prouvons en même temps (ii) et la partie « seulement si » de (i), i. e. supposons A CCR (resp. A GCR et, par exemple, A_1 à base dénombrable); soient π_1 et π_2 deux représentations irréductibles de A_1 et A_2; $\pi_1 \otimes \pi_2$ est irréductible et compacte (resp. normale), donc π_1 et π_2 sont compactes (resp. π_1 est normale); A_1 et A_2 sont CCR (resp. A_1 est GCR).

Lemme 5. — *Soient $\mathcal{A}$ un facteur continu,* S *et* T *des éléments non nuls de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$;* ST *n'est pas compact.*

On peut supposer S et T positifs, puisque si ST était compact, $STT^\star S^\star = SS^\star TT^\star$ le serait aussi. Dans ces conditions, il existe des projecteurs spectraux P_E et P_F de S et T respectivement tels qu'on ait

$$S_E \geq h > 0 \qquad \text{et} \qquad T_F \geq k > 0;$$

si $x \in E \cap F$, on a $Tx \in E$, donc

$$\| STx \| \geq h \| Tx \| \geq hk \| x \|;$$

$E \cap F$ est de dimension infinie, car il existe des projecteurs $Q_1, Q_2, \ldots$ de $\mathcal{A}'$ non nuls, deux à deux orthogonaux et de somme P_F et l'on a $P_E Q_n \neq 0$ pour tout n. Par conséquent, ST n'est pas compact.

THÉORÈME 5. — *Toute représentation irréductible compacte de* $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ *est équivalente au produit tensoriel de deux représentations irréductibles compactes de* A_1 *et* A_2.

Soient π une représentation irréductible compacte de A, π_i sa restriction à A_i; il existe $x_i \in A_i$ tel que $\pi_i(x_i) \neq 0$;

$$\pi_1(x_1)\,\pi_2(x_2) = \pi(x_1 \otimes x_2)$$

est compact, donc π_1 et π_2 sont de type I (lemme 5) et π est quasi équivalente à $\pi_1 \otimes \pi_2$ (prop. 6).

PROBLÈME. — Le théorème reste-t-il vrai si l'on remplace « compacte » par « normale » ?

THÉORÈME 3′. — *Si* $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ *est NGCR et à base dénombrable, l'une au moins des algèbres* A_1 *et* A_2 *l'est aussi.*

Car si A_1 et A_2 admettent des idéaux autoadjoints fermés GCR non nuls I_1 et I_2, $I_1 \overset{\star}{\otimes} I_2$ est un idéal autoadjoint fermé GCR non nul nul de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ [12].

6. La $C^\star$-algèbre d'un produit direct de groupes localement compacts.

Soient G_1 et G_2 deux groupes localement compacts, $G = G_1 \times G_2$ leur produit direct, A_1, A_2, A' les $C^\star$-algèbres respectives de G_1, G_2, G; $\mathcal{K}(G_1)$, $\mathcal{K}(G_2)$, $\mathcal{K}(G)$ les espaces de fonctions continues à supports compacts sur G_1, G_2, G; soit Φ l'application linéaire injective de $\mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$ dans $\mathcal{K}(G)$ associant à tout $f_1 \otimes f_2$ la fonction $(s_1, s_2) \rightarrow f_1(s_1)\,f_2(s_2)$; on sait que Φ est un homomorphisme de $\star$-algèbres quand on munit $\mathcal{K}(G_1)$, etc. du produit de convolution et de l'involution $f \rightarrow f^\star$; et d'autre part, que son image B est partout dense dans $\mathcal{K}(G)$ pour la topologie déduite de la norme $\|\ \ \|_1$.

Soient maintenant π_1 et π_2 des représentations unitaires continues de G_1 et G_2; considérant π_1 et π_2 comme des représentations de A_1 et A_2, on peut former la représentation $\pi_1 \otimes \pi_2$ de $\mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$; d'autre part, on peut former la représentation $\pi_1 \times \pi_2$ de G définie par

$$(\pi_1 \times \pi_2)\,(s_1, s_2) = \pi_1(s_1) \otimes \pi_2(s_2),$$

puis la considérer comme une représentation de A′; on vérifie alors facilement la relation

$$(1) \qquad (\pi_1 \otimes \pi_2)\,(x) = (\pi_1 \times \pi_2)\,(\Phi(x)) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2).$$

Les $C^\star$-algèbres $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ et A′ sont complétées respectivement de $\mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$ et de B pour des normes que nous noterons p et q.

PROPOSITION 7. — *L'isomorphisme de $\star$-algèbres Φ se prolonge en un isomorphisme de* C*-*algèbres de* $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ *sur* A' *dans chacun des cas suivants :*

(i) *La fonction* 1 *sur chacun des groupes* G_1 *et* G_2 *est limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts;*

(ii) *L'un au moins des groupes* G_1 *et* G_2 *est de type* I.

Il s'agit de montrer que Φ transforme p en q.

Premier cas : On sait [11] que la fonction 1 sur G est aussi limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts. Les représentations régulières gauches π_1, π_2, π de G_1, G_2, G sont fidèles quand on les considère comme des représentations de A_1, A_2, A'; d'autre part, pour $x \in \mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$ et $y \in B$, on a

$$\begin{aligned} p(x) &= \|(\pi_1 \otimes \pi_2)(x)\|, \\ q(y) &= \|\pi(y)\| \\ &= \|(\pi_1 \times \pi_2)(y)\|, \end{aligned}$$

puisque π est équivalente à $\pi_1 \times \pi_2$; l'assertion résulte de (1).

Deuxième cas : Pour $x \in \mathcal{K}(G_1) \otimes \mathcal{K}(G_2)$, on a

$$p(x) = \sup \|\pi(x)\| \quad \text{pour } \pi \text{ représentation irréductible de } A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2;$$

mais comme toute représentation irréductible de $A_1 \overset{\star}{\otimes} A_2$ est un produit tensoriel de représentations irréductibles,

$$p(x) = \sup \|(\pi_1 \otimes \pi_2)(x)\| \quad \text{pour } \pi_i \text{ représentation irréductible de } A_i.$$

De même, pour $y \in B$, on a

$$q(y) = \sup \|\rho(y)\| \quad \text{pour } \rho \text{ représentation irréductible de } G;$$

mais toute représentation irréductible de G est un produit de représentations irréductibles de G_1 et G_2 (la démonstration est la même que pour les C*-algèbres), donc

$$q(y) = \sup \|(\rho_1 \times \rho_2)(y)\| \quad \text{pour } \rho_i \text{ représentation irréductible de } G_i;$$

l'assertion résulte encore de (1).

Exemples de produits tensoriels de C*-*algèbres et de représentations irréductibles qui ne sont pas des produits tensoriels.* — Soient G un groupe localement compact tel que la fonction 1 sur G soit limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts, et π_1 une représentation factorielle de type II de G; π_1 est quasi équivalente à une représentation ρ_1 telle que le facteur $\mathcal{A}$ engendré par $\rho_1(G)$ soit antiisomorphe à son commutant $\mathcal{A}'$; notons Ψ l'antiisomorphisme et définissons une représentation ρ_2 de G par

$$\rho_2(s) = \Psi(\rho_1(s^{-1}))$$

et une représentation (irréductible) ρ de $G \times G$ par

$$\rho(s_1, s_2) = \rho_1(s_1)\, \rho_2(s_2)\,;$$

soit enfin π la représentation irréductible de $A \overset{\star}{\otimes} A$ ($A = C^\star$-algèbre de G) transportée de ρ par Φ. Si π était un produit tensoriel, sa restriction π'_1 à A serait de type I, ce qui n'est pas le cas, puisque π'_1 est identique à ρ_1 comme le montre le calcul suivant [f est un élément de $\mathcal{K}(G)$ et (u_α) une unité approchée de $L^1(G)$] :

$$\pi'_1(f) = \lim_\alpha \pi(f \otimes u_\alpha) = \lim_\alpha \rho(f(s_1)\, u_\alpha(s_2))$$
$$= \lim_\alpha \rho_1(f)\, \rho_2(u_\alpha) = \rho_1(f).$$

Remarques. — Dans le même ordre d'idées, signalons qu'on rencontre en Théorie ergodique la situation suivante : un espace localement compact X, un groupe G d'homéomorphismes de X et une mesure positive sur $X \times X$, quasi invariante et ergodique par $G \times G$, mais non équivalente à un produit de mesures.

On trouvera dans ([6], chap. II, § 3) un exemple de groupe vérifiant les conditions ci-dessus; par ailleurs, Mautner en a depuis longtemps signalé un autre (groupe de Lie résoluble de dimension 5).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (*Cahiers scientifiques*, fasc. 25, Gauthier-Villars, Paris, 1957).

[2] J. Dixmier, *Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 104, 1962, p. 278-283).

[3] J. Dixmier, *Traces sur les C*-algèbres* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 13, 1963, p. 219-262).

[4] J. A. Ernest, *A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 104, 1962, p. 252-277).

[5] J. Glimm, *Type I C*-algebras* (*Ann. Math.*, t. 73, 1961, p. 572-612).

[6] A. Guichardet, *Caractères des algèbres de Banach involutives* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 13, 1963, p. 1-81).

[7] A. Guichardet, *Utilisation des sous-groupes distingués ouverts dans l'étude des représentations unitaires des groupes localement compacts* (*Comp. Math.*, sous presse).

[8] G. W. Mackey, *Borel structures in groups and their duals* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 85, 1957, p. 134-165).

[9] F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 116-229).

[10] M. Nakamura, *On the direct product of finite factors* (*Tohôku Math. J.*, t. 6, 1954, p. 205-207).

[11] O. Takenouchi, *Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact* (*Math. J. Okayama Univ.*, t. 4, 1955, p. 143-173).

[12] A. Wulfsohn, *Produit tensoriel de C*-algèbres* (*Bull. Sc. math.*, t. 87, 1963, p. 13-27).