CH. PISOT

Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 81, nº 2 (1964), p. 165-188
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_2_165_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 81, 1964, p. 165 à 188.

FAMILLES COMPACTES DE FRACTIONS RATIONNELLES ET ENSEMBLES FERMÉS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

PAR M. CH. PISOT.

INTRODUCTION.

Soit S l'ensemble des entiers algébriques réels θ, vérifiant $\theta > 1$, dont tous les conjugués autres que θ sont dans le cercle $|z| < 1$. Ces nombres algébriques jouissent de propriétés remarquables.

Ils sont étroitement liés aux approximations rationnelles des nombres algébriques. Ils sont caractérisés par le fait qu'il existe des nombres λ tels que, si l'on pose $\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n$, où u_n est entier rationnel, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2$ est convergente. Cette dernière propriété montre une relation avec la répartition modulo 1 encore si mal connue des fonctions exponentielles [10].

Les nombres de S sont aussi liés à certains ensembles d'unicité dans la théorie des séries trigonométriques. Soit un ensemble du type de Cantor, mais obtenu en partageant les intervalles dans les rapports ξ, $1\text{-}2\,\xi$, ξ, avec $0 < \xi < \frac{1}{2}$ et en enlevant l'intervalle médian $\left(\text{l'ensemble de Cantor est obtenu pour } \xi = \frac{1}{3}\right)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que cet ensemble soit un ensemble d'unicité est que $\frac{1}{\xi} \in S$ [14], [16].

Enfin R. Salem a démontré la propriété remarquable suivante de l'ensemble S, à savoir que :

S *est un ensemble fermé* [15].

C'est ce dernier théorème que nous allons prendre comme point de départ de ce travail et montrer, en utilisant à la fois l'analyse dans le domaine des nombres complexes **C** et dans celui des extensions p-adiques du corps des rationnels **Q**, qu'il existe d'autres ensembles fermés de nombres algébriques analogues à S. Ces résultats ont été annoncés dans une Note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [11].

Pour les théorèmes d'analyse p-adique utilisés nous renvoyons, en général, à un article de B. Dwork [4] où sont exposés un certain nombre de résultats obtenus par divers auteurs.

La fermeture de l'ensemble S peut s'obtenir à partir du théorème suivant :

Soit $Q(z)$ *le polynome à coefficients entiers rationnels, irréductible, ayant* $\frac{1}{\theta}$ *pour zéro et tel que* $Q(0) = 1$. *Soit* $A(z)$ *un autre polynome à coefficients entiers rationnels vérifiant*

$$|A(z)| \leq |Q(z)| \quad \textit{sur } |z| = 1 \qquad \textit{et} \qquad A\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0.$$

Alors la famille des fractions rationnelles $f(z) = \frac{A(z)}{Q(z)}$ *pour lesquelles* θ *est borné supérieurement est un ensemble compact pour la convergence uniforme dans un certain compact situé dans* $|z| < 1$ [5].

C'est ce dernier théorème que nous nous proposons de généraliser dans le chapitre I.

CHAPITRE I.

1. Le résultat de base de cette étude est le suivant :

LEMME 1 (Kronecker [9]). — *La condition nécessaire et suffisante pour que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ *représente le développement de Taylor d'une fraction rationnelle, c'est que les déterminants*

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

soient tous nuls pour n assez grand.

Nous ne démontrons pas ici ce résultat classique.

Nous allons maintenant établir une majoration de $|d_n|$.

LEMME 2. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| < 1$, ayant dans $|z| < 1$ au plus k pôles ($k \geq 0$), mais $z = 0$ n'étant pas un pôle, et supposons que $|\varphi(z)|$ soit bornée supérieurement au voisinage de $|z| = 1$. La fonction $\varphi(z)$ possède alors un développement de Taylor autour de $z = 0$, soit $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$, et l'on a la majoration suivante :*

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$, indépendante de n, telle que

$$|d_n| \leq C(\varepsilon)\,\varepsilon^n.$$

Démonstration. — Soit $g(z) = 1 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_k z^k$ le polynome qui a pour zéros les pôles de $\varphi(z)$, alors

$$\varphi(z)\,g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n, \qquad u'_n = u_n + \gamma_1 u_{n-1} + \ldots + \gamma_k u_{n-k}$$

de même que

$$\varphi(z)\,g^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u''_n z^n, \qquad u''_n = u'_n + \gamma_1 u'_{n-1} + \ldots + \gamma_k u'_{n-k}$$

sont holomorphes et bornés dans $|z| < 1$.

Par suite, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} |u'_n|^2$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |u''_n|^2$ sont convergentes. Or, on a

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & \ldots & u_{k-1} & u'_k & \ldots & u'_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & \ldots & u_{n+k-1} & u'_{n+k} & \ldots & u''_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & \ldots & u_{k-1} & u'_k & \ldots & u'_n \\ \cdot\cdot & \ldots & \cdots & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ u_{k-1} & \ldots & u_{2k-2} & u'_{2k-1} & \ldots & u'_{n+k-1} \\ u'_k & \ldots & u'_{2k-1} & u''_{2k} & \ldots & u''_{n+k} \\ \cdot\cdot & \ldots & \cdots & \cdots & \ldots & \cdots \\ u'_n & \ldots & u'_{n+k-1} & u''_{n+k} & \ldots & u''_{2n} \end{vmatrix}.$$

La majoration de Hadamard [7] d'un déterminant donne

$$|d_n| \leq \prod_{j=0}^{n} |s_j|,$$

où l'on a posé

$$s_j^2 = |u_j|^2 + \ldots + |u_{j+k-1}|^2 + |u'_{j+k}|^2 + |u'_{j+k+1}|^2 + \ldots \qquad \text{si } j = 0, \ldots, k-1$$

et

$$s_j^2 = |u'_j|^2 + \ldots + |u'_{j+k-1}|^2 + |u''_{j+k}|^2 + |u''_{j+k+1}|^2 + \ldots \qquad \text{si } j \geq k.$$

La convergence des séries de terme général $|u'_n|^2$ et $|u''_n|^2$ montre que $\lim_{j \to \infty} s_j = 0$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver $h = h(\varepsilon)$ tel que $|s_j| \leqq \varepsilon$ pour tout $j > h$. En posant

$$C(\varepsilon) = \varepsilon^{-h} \prod_{j=0}^{h} |s_j|,$$

on obtient

$$|d_n| \leqq C(\varepsilon)\, \varepsilon^n,$$

et le lemme 2 est démontré.

LEMME 3. — *Supposons que* $\varphi(z)$ *est une fraction rationnelle* $\frac{A(z)}{Q(z)}$, *où* A *et* Q *sont des polynomes à coefficients entiers rationnels. Nous poserons*

$$Q(0) = q \neq 0.$$

Les nombres $q^{n+1} u_n$ *sont alors des entiers rationnels pour tout* n.

En effet, $q\,\varphi(qz) = q\,\frac{A(qz)}{Q(qz)}$ est une fraction rationnelle à coefficients entiers, telle que le terme constant du dénominateur soit égal à 1 (après simplification par q); le développement de Taylor a donc tous ses coefficients entiers rationnels.

RÉCIPROQUE. — Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ soit le développement de Taylor d'une fraction rationnelle $\frac{B(z)}{C(z)}$, où

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \qquad C(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 \ldots$$

et supposons qu'il existe un entier rationnel $q \neq 0$ tel que $q^{n+1} u_n$ soit entier rationnel pour tout n.

Dans ces conditions, le développement en série de Taylor de la fraction rationnelle $q\frac{B(qz)}{C(qz)}$ a tous ses coefficients entiers rationnels. D'après un théorème de Fatou [6], la fraction rationnelle est le quotient de deux polynomes à coefficients entiers rationnels, le terme constant du dénominateur valant 1. Par suite :

Si l'on choisit $c_0 = q$, *les nombres* $q^j c_{j+1}$ *et* $q^j b_j$ *pour* $j \geqq 0$ *sont entiers rationnels.*

Soit maintenant p un nombre premier, nous désignons par $|\ |_p$ la valeur absolue p-adique définie par $|p|_p = p^{-1}$ et $|p'|_p = 1$ si p' est un nombre premier distinct de p. Nous notons $\mathbf{Q}_p$ la complétion du corps $\mathbf{Q}$ des rationnels par la valeur absolue p-adique, $\mathbf{\Omega}_p$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. Nous distinguerons soigneusement les symboles $|\ |$, valeur absolue ordinaire (module) dans le corps **C** des nombres complexes et $| \ |_p$, valeur absolue p-adique dans $\boldsymbol{\Omega}_p$.

Lemme 4. — *Soit* $\frac{A(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ *une fraction rationnelle où* A *et* Q *sont à coefficients entiers rationnels et où* $Q(0) = q \neq 0$. *Pour tout nombre premier* p, *on a alors la majoration suivante :*

$$|d_n|_p \leqq |q|_p^{-(3n+1)}.$$

Corollaire. — Comme d_n est un nombre rationnel dont le dénominateur est une puissance de q, en appliquant le lemme 4 à tous les nombres premiers p qui divisent q, on voit que :

Le nombre $q^{3n+1} d_n$ *est un entier rationnel pour tout* n.

Ce résultat n'a d'ailleurs de l'intérêt que pour les petites valeurs de n, car pour les valeurs assez grandes de n, le critère de Kronecker (lemme 1) montre que $d_n = 0$.

Démonstration. — Plaçons-nous dans $\boldsymbol{\Omega}_p$ et décomposons $Q(z)$ en ses facteurs linéaires. On a

$$Q(z) = q \prod_{j=1}^{s} (1 - \alpha_j z)$$

et nous supposerons les $|\alpha_j|_p$ rangés par ordre décroissant

$$|\alpha_1|_p \geqq |\alpha_2|_p \geqq \ldots \geqq |\alpha_m|_p > 1 \geqq |\alpha_{m+1}|_p \geqq \ldots \geqq |\alpha_s|_p.$$

Le nombre m vérifie $0 \leqq m \leqq s$, le cas $m = 0$ voulant dire que $|\alpha_j|_p \leqq 1$ pour tout $j = 1, \ldots, s$.

Posons

$$Q_h(z) = q \prod_{j=h+1}^{s} (1 - \alpha_j z)$$

et

$$\frac{A(z)}{Q_h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{h,n} z.$$

On a alors $u_{0,n} = u_n$ et

$$u_{h,n} = u_n + \beta_{h,1} u_{n-1} + \ldots + \beta_{h,h} u_{n-h},$$

où

$$1 + \beta_{h,1} z + \ldots + \beta_{h,h} z^h = \prod_{j=1}^{h} (1 - \alpha_j z).$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,h} z^n$ converge pour $|z|_p < |\alpha_{h+1}|_p^{-1}$. D'autre part, pour $|z|_p = \rho < |\alpha_{h+1}|_p^{-1}$, on a

$$|Q_h(z)|_p = |q|_p,$$

car

$$|\alpha_j z|_p < \left|\frac{\alpha_j}{\alpha_{h+1}}\right|_p \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad j \geqq h+1.$$

Pour $h < m$, on a $\rho < 1$; pour $h = m$, nous nous restreignons aux valeurs de $\rho \leqq 1$; alors pour $|z|_p = \rho$, on a $|A(z)|_p \leqq 1$.

Ainsi on a

$$\left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right|_p \leqq |q|_p^{-1} \qquad \text{pour} \quad |z|_p = \rho.$$

Les inégalités de Cauchy [4] dans $\boldsymbol{\Omega}_p$ montrent qu'on a

$$|u_{h,n}|_p \leqq |q|_p^{-1} \rho^{-n}.$$

Faisant tendre ρ vers $|\alpha_{h+1}|_p^{-1}$ si $h < m$, vers 1 si $h = m$, on obtient

$$|u_{h,n}|_p \leqq |q|_p^{-1} |\alpha_{h+1}|_p^n \qquad \text{si} \quad h < m,$$
$$|u_{h,n}|_p \leqq |q|_p^{-1} \qquad \text{si} \quad h = m.$$

Si $n \geqq m$, on a

$$d_n = \begin{vmatrix} u_{0,0} & u_{1,1} & \dots & u_{m,m} & u_{m,m+1} & \dots & u_{m,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{0,n} & u_{1,n+1} & \dots & u_{m,n+m} & u_{m,n+m+1} & \dots & u_{m,2n} \end{vmatrix}$$

Les inégalités trouvées donnent

$$|d_n|_p \leqq |q|_p^{-n+1} |\alpha_1|_p^n |\alpha_2|_p^{n+1} \dots |\alpha_m|_p^{n+m-1}$$

Si $n < m$, on obtient de manière analogue

$$|d_n|_p \leqq |q|_p^{-(n+1)} |\alpha_1|_p^n |\alpha_2|_p^{n+1} \dots |\alpha_{n+1}|_p^{2n}.$$

La considération du polygone de Newton [4] du polynome

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{s} q_j z^j,$$

où $q_0 = q$, montre que m est le plus petit indice tel que

$$|q_m|_p = \operatorname*{Max}_{0 \leqq j \leqq s} |q_j|_p$$

et que

$$|\alpha_1 \dots \alpha_m|_p = |q_m q_0^{-1}|_p \leqq |q|_p^{-1}.$$

On a donc, dans tous les cas,

$$|d_n|_p \leqq |q|_p^{-(3n+1)}$$

et le lemme 4 est démontré.

Remarque. — F. Dress [3] vient de préciser, en se servant d'identités déduites par É. Borel [1], qui ne font pas intervenir le p-adique, que $q^{2n+1} d_n$ *est toujours un entier rationnel.*

2. Définition. — *Nous désignons par* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(q, k, \delta)$ *l'ensemble des fractions rationnelles* $\varphi(z) = \frac{A(z)}{Q(z)}$ *telles que* A *et* Q *soient des polynomes à coefficients entiers rationnels. Nous supposons de plus que* $Q(0) = q \neq 0$ *est fixe et que* $Q(z)$ *a, dans* $|z| \leqq 1$, *au plus* k *zéros,* $k \geqq 0$, *tous dans une couronne fixe* $0 < \delta \leqq |z| < 1$. *Enfin, nous supposons que*

$$|\varphi(z)| \leqq 1 \qquad \textit{pour} \quad |z| = 1.$$

On a alors la proposition suivante :

Théorème 1. — *L'ensemble* $\mathcal{F}$ *est compact pour la convergence uniforme dans tout disque* $|z| \leqq r$, $r < \delta$ *dans* $\mathbf{C}$ *et dans tout disque* $|z|_p \leqq r_p$, $r_p < |q|_p$ *dans* $\mathbf{\Omega}_p$.

Démonstration. — Soient θ_j $(j = 1, \ldots, k)$ des nombres vérifiant $1 < |\theta_j| < \frac{1}{\delta}$ et tels que dans $\mathbf{C}$

$$\frac{1}{Q(z)} \prod_{j=1}^{k} (1 - \theta_j z)$$

soit holomorphe dans $|z| \leqq 1$. $\left[\text{Les pôles de } \varphi(z) \text{ sont donc de la forme } \frac{1}{\theta_j}.\right]$ Si $k = 0$, ces nombres θ_j n'existent pas. Posons

$$\psi(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - \theta_j z}{\bar{\theta}_j - z} \quad \text{si } k \geqq 1 \qquad \text{et} \qquad \psi(z) = 1 \quad \text{si } k = 0;$$

alors $\psi(z)$ est holomorphe dans $|z| \leqq 1$ et l'on a

$$|\psi(z)| = 1 \qquad \text{pour} \quad |z| = 1.$$

La fonction $\psi(z)\,\varphi(z)$ est aussi holomorphe dans $|z| \leqq 1$ et l'on a

$$|\psi(z)\,\varphi(z)| \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad |z| = 1.$$

Les fonctions $\psi(z)$ et $\psi(z)\,\varphi(z)$ constituent donc dans $|z| < 1$ une famille normale au sens de M. Montel, c'est-à-dire, de tout sous-ensemble infini de telles fonctions, on peut extraire des suites partielles convergeant uniformément dans tout compact situé dans $|z| < 1$. On peut d'ailleurs choisir ces suites partielles de manière qu'elles convergent simultanément. Comme la couronne $1 \leqq |z| \leqq \frac{1}{\delta}$ est un ensemble compact, on peut choisir ces suites partielles de manière que, si $k \geqq 1$, les nombres θ_j tendent vers des limites θ_j^* situés dans la couronne. Les fonctions $\psi(z)$ tendent alors vers la fonction

$$\Psi(z) = \prod_j \frac{1 - \theta_j^* z}{\bar{\theta}_j^* - z}$$

où j parcourt les indices pour lesquels $|\theta_j^*| > 1$. Si $k = 0$, on a $\Psi(z) = 1$.

Nous désignons la fonction limite de $\psi(z)\ \varphi(z)$ par $\Psi(z)\ \Phi(z)$; cette dernière fonction est alors holomorphe dans $|z| < 1$ et vérifie

$$|\Psi(z)\,\Phi(z)| \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

Comme $|\theta_j| \leqq \frac{1}{\delta}$, on a $|\theta_j^*| \leqq \frac{1}{\delta}$ et $\Psi(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas pour $|z| < \delta$; par suite, $\Phi(z)$ est holomorphe dans $|z| < \delta$ et est limite uniforme de $\varphi(z)$ dans tout compact intérieur à $|z| < \delta$. La fonction $\Phi(z)$ admet donc un développement en série de Taylor, soit $\sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n$, convergeant pour $|z| < \delta$ et U_n est limite des u_n de même indice n. Mais $q^{n+1} u_n$ est un entier rationnel; il en sera donc de même de $q^{n+1} U_n$ et u_n finit par être égal à U_n. De plus, comme $\Psi(z)\,\Phi(z)$ est holomorphe dans $|z| < 1$, la fonction $\Phi(z)$ est méromorphe dans $|z| < 1$ et ses seuls pôles possibles sont les nombres $\frac{1}{\theta_j^*}$ avec $|\theta_j^*| > 1$; il y en a donc k au plus; aucun de ces pôles n'est en $z = 0$. Enfin, $|\Psi(z)| = 1$ pour $|z| = 1$ et est continu au voisinage de $|z| = 1$, donc $\Phi(z)$ est borné au voisinage de $|z| = 1$.

Posant alors

$$D_n = \begin{vmatrix} U_0 & U_1 & \dots & U_n \\ U_1 & U_2 & \dots & U_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n} \end{vmatrix},$$

le lemme 2 montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon)$ indépendant de n, tel que $|D_n| \leqq C(\varepsilon)\ \varepsilon^n$.

D'autre part, comme u_n finit par devenir égal à U_n, D_n est égal à d_n à partir d'un certain rang; le corollaire du lemme 4 montre alors que $q^{3n+1} D_n$ est un entier rationnel. Or

$$|q^{3n+1} D_n| \leqq C(\varepsilon)\ q\,(\varepsilon q^3)^n.$$

En choisissant $\varepsilon < q^{-3}$, on voit que pour n assez grand, on a

$$|q^{3n+1}D_n| < 1, \qquad \text{donc} \quad D_n = 0$$

et le lemme 1 montre que $\Phi(z)$ est une fraction rationnelle que nous écrirons

$$\Phi(z) = \frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)},$$

avec

$$A^\star(z) = a_0^\star + a_1^\star z + a_2^\star z^2 + \ldots, \qquad Q^\star(z) = q + q_1^\star z + q_2^\star z^2 + \ldots,$$

les coefficients $a_j^\star$ et $q_j^\star$ étant des nombres rationnels, $A^\star$ et $Q^\star$ étant premiers entre eux. En faisant tendre z vers un point de $|z| = 1$, on voit que

$$|\Phi(z)| = \left|\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}\right| \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad |z| = 1.$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que les coefficients des polynomes $Q^\star$ et $A^\star$ sont des entiers rationnels. Pour cela, nous allons étudier le polygone de Newton [4] des polynomes Q et du polynome $Q^\star$ dans $\boldsymbol{\Omega}_p$.

Rappelons que

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{s} q_j z^j, \qquad \text{avec} \quad q_0 = q.$$

Posons $|q|_p = p^{-t}$, alors $t \geqq 0$ est un entier rationnel. Le polygone de Newton de $Q(z)$ montre que, dans Ω_p, tous les zéros de $Q(z)$ sont dans $|z|_p \geqq p^{-t}$. Désignons par $j(h)$ le plus petit indice j (lorsqu'il existe) tel que $|q_j|_p = p^{-h}$, où $0 \leqq h \leqq t$. Soit h_0 le plus petit indice h tel que, pour tous les polynomes Q de la suite considérée, $\limsup j(h)$ soit fini; on a alors $0 \leqq h_0 \leqq t$ et nous poserons $m_0 = \limsup j(h_0)$. On a $m_0 \geqq 0$. On peut alors extraire de la suite des $\varphi(z)$ une suite partielle telle que pour les polynomes $Q(z)$ correspondants on ait

$$j(h_0) = m_0 \qquad \text{et} \qquad \lim j(h) = +\infty$$

pour tout $h < h_0$ (s'il y en a), de plus que le polygone de Newton de $Q(z)$ soit fixe pour $0 \leqq j \leqq m_0$ et que le point (m_0, h_0) soit un sommet de ce polygone.

Dans $\boldsymbol{\Omega}_p$ les polynomes $Q(z)$ ont alors dans $|z|_p < 1$, m_0 zéros, dans la couronne

$$|q|_p \leqq |z|_p \leqq \gamma < 1,$$

où $\log \gamma$ est la pente (négative) du côté du polygone de Newton aboutissant à gauche au sommet (m_0, h_0). Ces zéros appartiennent à des extensions de $\mathbf{Q}_p$ de degré m_0 au plus, donc ils sont tous dans une même extension de degré fini de $\mathbf{Q}_p$ [8]; leurs valeurs absolues p-adiques données par les pentes du polygone de Newton sont fixes. Par suite, ces zéros appartiennent à un ensemble compact et l'on peut trouver une suite partielle telle que ces zéros aient des limites p-adiques.

Soit

$$\beta(z) = (1-\alpha_1 z)\ldots(1-\alpha_{m_0} z) = 1 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{m_0} z^{m_0}$$

le polynome ayant pour zéros les m_0 zéros de $Q(z)$ situés dans $|z|_p \leqq \gamma$; on a donc

$$p^{-t} \leqq |\alpha_j|_p^{-1} \leqq \gamma \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, m_0.$$

Désignons par $\alpha_j^\star$ la limite p-adique de α_j et posons

$$\beta^\star(z) = (1-\alpha_1^\star z)\ldots(1-\alpha_{m_0}^\star z) = 1 + \beta_1^\star z + \ldots + \beta_{m_0}^\star z^{m_0}.$$

On a alors aussi

$$\lim |\beta_j - \beta_j^\star|_p = 0 \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, m_0.$$

Posons

$$\beta(z)\frac{A(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n,$$

alors

$$v_n = u_n + \beta_1 u_{n-1} + \ldots + \beta_{m_0} u_{n-m_0}.$$

Or on a $u_n = U_n$ à partir d'un certain rang, donc pour tout n fixe, v_n tend au sens p-adique vers

$$V_n = U_n + \beta_1^\star U_{n-1} + \ldots + \beta_{m_0}^\star U_{n-m_0}$$

et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n = \beta^\star(z)\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}.$$

Montrons alors que pour $|z|_p = \rho' < 1$, les fonctions $\beta(z)\dfrac{A(z)}{Q(z)}$ sont uniformément bornées au sens p-adique dans $\mathbf{\Omega}_p$. Il en résultera qu'elles tendent uniformément vers $\beta^\star(z)\dfrac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ dans tout disque $|z|_p \leqq \rho < \rho'$ et la fonction limite est bornée par la même borne [4].

On a

$$\frac{\beta(z)}{Q(z)} = \frac{1}{q\prod_{j>m_0}(1-\alpha_j z)}.$$

Donnons-nous $\rho' < 1$; on a

$$|\alpha_j|_p^{-1} > \rho' \quad \text{pour tout } j > m_0$$

dès que le rang est assez grand. Par suite,

$$\left|\frac{\beta(z)}{Q(z)}\right|_p = p^t \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{\Omega}_p \text{ vérifiant } |z|_p = \rho'.$$

D'autre part, pour $|z|_p = \rho'$, on a

$$|A(z)|_p \leqq 1.$$

On a donc

$$\left|\beta(z)\frac{A(z)}{Q(z)}\right|_p \leqq p^t \qquad \text{pour} \quad |z|_p = \rho' < 1$$

et $\beta(z)\dfrac{A(z)}{Q(z)}$ est holomorphe dans $|z|_p \leqq \rho'$ à partir d'un certain rang dans la suite partielle. Il en résulte que, dans $|z|_p \leqq \rho < \rho'$, la fonction limite

$$\beta^\star(z)\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$$

est holomorphe et l'on a

$$\left|\beta^\star(z)\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}\right|_p \leqq p^t \qquad \text{pour} \quad |z|_p \leqq \rho.$$

Comme ρ et ρ' sont aussi voisins qu'on veut de 1, on voit que les seuls zéros possibles de $Q^\star(z)$ dans $|z|_p < 1$ sont les zéros de $\beta^\star(z)$. Par suite, les côtés à pente négative du polygone de Newton de $Q^\star(z)$ (s'il y en a) coïncident ou sont au-dessus de ceux du polygone de Newton des $Q(z)$ pour $j \leqq m_0$ (partie fixe des polygones). Le polygone de Newton est donc, en particulier, tout entier au-dessus de l'axe des j, c'est-à-dire on a

$$|q_j^\star|_p \leqq 1 \quad \text{pour tout } j.$$

On peut d'ailleurs préciser. Désignons par J l'ensemble (pouvant être vide) des indices $j \leqq m_0$ tels que $\dfrac{1}{\alpha_j^\star}$ soit effectivement zéro de $Q^\star(z)$. Le dernier sommet du polygone de Newton de $Q^\star(z)$ auquel aboutit un côté de pente négative est alors le point (m_1, h_1), où m_1 est le nombre d'éléments de J et $|q_{m_1}^\star|_p = p^{-h_1}$. On a donc $h_0 \leqq h_1$, et

$$|q_j^\star|_p \leqq p^{-h_1} \quad \text{pour tout } j.$$

De plus,

$$\prod_{j=1}^{m_0} |\alpha_j^\star|_p = p^{t-h_0},$$

$$\prod_{j\in J} |\alpha_j^\star|_p = p^{t-h_1}.$$

Soit maintenant ρ un nombre vérifiant $\gamma < \rho < 1$. Pour tout z avec $|z|_p = \rho$, on a alors

$$|\beta^\star(z)|_p = \rho^{m_0} \prod_{j=1}^{m_0} |\alpha_j^\star|_p = \rho^{m_0} p^{t-h_0},$$

$$|Q^\star(z)|_p = \rho^{m_1} p^{-t} \prod_{j \in J} |\alpha_j^\star|_p = \rho^{m_1} p^{-h_1}.$$

Par conséquent, pour $|z|_p = \rho$, on a

$$|A^\star(z)|_p \leqq p^t \left| \frac{Q^\star(z)}{\beta^\star(z)} \right|_p = \rho^{m_1 - m_0} p^{h_0 - h_1}.$$

Les inégalités de Cauchy [4] dans $\mathbf{\Omega}_p$ donnent alors

$$|a_j^\star|_p \leqq \rho^{m_1 - m_0 - j} p^{h_0 - h_1}.$$

En faisant tendre ρ vers 1, j étant fixé, il vient

$$|a_j^\star|_p \leqq p^{h_0 - h_1} \quad \text{pour tout } j.$$

En particulier, comme $h_0 \leqq h_1$, on a

$$|a_j^\star|_p \leqq 1 \quad \text{pour tout } j.$$

Mais on a

$$\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n$$

et $q^{n+1} U_n$ est entier rationnel. La réciproque du lemme 3 montre que $q_j^\star$ est un nombre rationnel dont le dénominateur est q^{j-1} et $a_j^\star$ est un nombre rationnel dont le dénominateur est q^j. En répétant les considérations précédentes pour tous les nombres premiers distincts p qui divisent q, donc pour un nombre fini de nombres premiers, on voit que les conditions

$$|q_j^\star|_p \leqq 1, \qquad |a_j^\star|_p \leqq 1$$

pour tout p divisant q entraînent que $q_j^\star$ et $a_j^\star$ sont des entiers rationnels. Par suite,

$$\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)} \in \mathcal{F}$$

et le théorème 1 est démontré.

Nous voyons de plus que si, pour certains p, on a $h_1 > 0$, alors $Q^\star(z)$ n'est pas primitif et l'on peut diviser tous ses coefficients par un même entier $\tilde{q}$, diviseur de q, défini par $|\tilde{q}|_p = p^{-h_1}$ pour tout p divisant q. On peut écrire

$$Q^\star(z) = \tilde{q}\, \tilde{Q}(z),$$

où $\tilde{Q}(z)$ est un polynome primitif.

On a, de même,

$$A^*(z) = \tilde{q}' \tilde{A}(z),$$

où $\tilde{A}(z)$ est un polynome à coefficients entiers rationnels (pas nécessairement primitif) et où $\tilde{q}'$ est défini par $|\tilde{q}'|_p = p^{h_0 - h_1}$ pour tout p divisant q; par suite, $\tilde{q}'$ divise $\tilde{q}$ et l'on a

$$\left|\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}'}\right|_p = p^{-h_0}.$$

En particulier, $\tilde{q}' = \tilde{q}$ si $h_0 = 0$ pour tout p divisant q. Posant $q'' = \frac{q}{\tilde{q}}$, on a, par suite,

$$\left|\frac{\tilde{A}(z)}{q''\tilde{Q}(z)}\right| = \left|\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}\right| \leq 1 \qquad \text{sur} \quad |z| = 1.$$

Ainsi $\frac{\tilde{A}(z)}{q''\tilde{Q}(z)}$ appartient à une famille $\mathcal{F}(q', k, \delta)$, où

$$q' = \frac{q}{q''} = \tilde{q}' \frac{q}{\tilde{q}}$$

est un diviseur de q.

3. Compléments. — Une famille $\mathcal{F}$ telle que nous venons de la définir contient des constantes et, si $|q| \geq 2$, des polynomes. Si nous voulons avoir une famille dont toutes les fonctions soient de véritables fractions rationnelles, à l'exclusion des polynomes, nous sommes amenés à introduire des conditions supplémentaires.

Lemme 5. — *Soient $\chi(z)$ et $\omega(z)$ deux fonctions holomorphes dans $|z| \leq 1$ et vérifiant*

$$|\chi(z)| \leq |\omega(z)| \qquad \text{pour} \quad |z| = 1.$$

Supposons que

$$\chi(z) - \omega(z) = \gamma_n z^n + \gamma_{n+1} z^{n+1} + \ldots$$

et que $\omega(z)$ a k zéros dans $|z| < 1$. Alors :

si $\gamma_n \neq 0$, on a $n \leq k$, et si $n > k$, on a $\chi(z) = \omega(z)$.

En effet, considérons la fonction

$$\omega_\lambda(z) = \chi(z) - \lambda\,\omega(z),$$

où λ est un nombre réel avec $\lambda > 1$. Comme

$$|\lambda\,\omega(z)| > |\chi(z)| \qquad \text{sur} \quad |z| = 1,$$

les fonctions $\omega_\lambda(z)$ et $\omega(z)$ ont, d'après le théorème de Rouché, le même nombre de zéros dans $|z| \leq 1$, c'est-à-dire k. Faisant tendre λ vers 1, la continuité des racines montre que $\omega_1(z)$ a, dans $|z| < 1$, au plus k zéros.

Si $\gamma_n \neq 0$, il y a déjà n zéros en $z = 0$, donc $n \leqq k$. Si $n > k$, il y a contradiction si $\omega_1(z)$ n'est pas identiquement nul.

LEMME 6. — *Soit* $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ *une fonction méromorphe dans* $|z| \leqq 1$ *et* $|\varphi(z)| \leqq 1$ *pour* $|z| = 1$. *Supposons, de plus,* $|u_0| \geqq 1$.

Si $u_j \neq 0$ *pour au moins un indice* $j \geqq 1$, *alors* $\varphi(z)$ *a au moins un pôle dans* $|z| < 1$.

Réciproquement, si $\varphi(z)$ *a* $k \geqq 1$ *pôles dans* $|z| < 1$, *alors on a* $u_j \neq 0$ *pour au moins un indice* j *vérifiant* $1 \leqq j \leqq k$.

Comme $\varphi(z)$ est borné sur $|z| = 1$, $\varphi(z)$ a un nombre fini, soit k pôles dans $|z| < 1$.

Soit

$$g(z) = 1 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_k z^k$$

le polynome qui a pour zéros les pôles de $\varphi(z)$. Alors

$$\varphi(z)\, g(z) = \chi(z)$$

est holomorphe dans $|z| \leqq 1$ et l'on a

$$|\chi(z)| \leqq |g(z)| \qquad \text{pour} \quad |z| = 1;$$

de plus, $g(z)$ et $\chi(z)$ n'ont pas de zéro commun.

Supposons que $n \geqq 1$ soit le plus petit indice tel que $u_n \neq 0$. On a

$$(u_0 + u_n z^n + \ldots)\, g(z) = \chi(z),$$

donc

$$\chi(z) - u_0 g(z) = u_n z^n + \ldots.$$

Le lemme 5 montre alors que $n \leqq k$, ce qui montre la réciproque du lemme 6.

La proposition directe est évidente, car si $\varphi(z)$ n'avait pas de pôle dans $|z| < 1$, elle serait holomorphe et le lemme 5 appliqué avec $\varphi(z)$ à la place de $\chi(z)$ et u_0 à la place de $\omega(z)$ montre que $\varphi(z) = u_0$, donc on ne pourrait avoir $u_j \neq 0$ pour un $j \geqq 1$.

COROLLAIRE. — *Soit* $|u_0| \geqq 1$; *si* $u_1 \neq 0$, $\varphi(z)$ *a au moins un pôle dans* $|z| < 1$; *si* $\varphi(z)$ *a exactement un pôle dans* $|z| < 1$, *alors* $u_1 \neq 0$.

LEMME 7. — Examinons maintenant le cas de pôles dans $\mathbf{\Omega}_p$. Montrons la proposition suivante :

Si le polygone de Newton du polynome $\frac{q}{a_0} \mathrm{A}(z)$ *est strictement au-dessus de l'horizontale d'ordonnée* h_0, *alors* $\frac{\mathrm{A}^*(z)}{\mathrm{Q}^*(z)}$ *a au moins un pôle dans* $|z|_p < 1$.

Démonstration. — Comme les polygones de Newton de $\frac{q}{a_0}$ A (z) et de Q (z) ont le sommet de départ $j = 0$ en commun, les conditions du lemme 7 ne peuvent être vérifiées que si $m_0 \geqq 1$. Soit alors ρ un nombre vérifiant $p^{-\frac{1}{2m_0}} < \rho < 1$. Comme on a $|\alpha_{m_0}|_p \geqq p^{\frac{1}{m_0}}$, on a donc $\rho > |\alpha_{m_0}^{-1}|_p$; d'autre part, on a

$$|\alpha_j^{-1}|_p > \rho \quad \text{pour tous les } j \geqq m_0 + 1$$

à partir d'un certain rang dans la suite. On en déduit que pour $z \in \mathbf{\Omega}_p$ avec $|z|_p = \rho$, on a

$$|\mathrm{Q}(z)|_p = p^{-h_0}\rho^{m_0} > p^{-h_0-\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, les hypothèses du lemme 7 expriment que

$$\left|\frac{q}{a_0} a_j\right|_p \leqq p^{-h_0-1} \quad \text{pour tout } j \geqq 0,$$

donc

$$\left|\frac{q}{a_0} \mathrm{A}(z)\right|_p \leqq p^{-h_0-1} \qquad \text{pour} \quad |z|_p = \rho.$$

On a donc

$$\left|\frac{q}{a_0} \frac{\mathrm{A}(z)}{\mathrm{Q}(z)}\right|_p < p^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{pour} \quad z \in \mathbf{\Omega}_p, \qquad \text{avec} \quad |z|_p = \rho,$$

D'autre part, pour $|z|_p = \rho$, on a

$$|\beta(z)|_p = \rho^{m_0} \prod_{j=1}^{m_0} |\alpha_j|_p.$$

Or $\frac{q}{a_0} \frac{\mathrm{A}(z)}{\mathrm{Q}(z)} \beta(z)$ tend vers

$$\frac{q}{a_0^\star} \frac{\mathrm{A}^\star(z)}{\mathrm{Q}^\star(z)} \beta^\star(z) \qquad \text{dans} \quad |z|_p \leqq \rho',$$

où $\rho < \rho' < 1$. Comme u_0 finit par être égal à U_0, on a $a_0^\star = a_0$ à partir d'un certain rang. Enfin, pour $|z|_p = \rho$, on a

$$|\beta^\star(z)|_p = \rho^{m_0} \prod_{j=1}^{m_0} |\alpha_j^\star|_p = |\beta(z)|_p,$$

à partir d'un certain rang.

On a, par conséquent,

$$\left|\frac{q}{a_0} \frac{\mathrm{A}^\star(z)}{\mathrm{Q}^\star(z)}\right|_p \leqq p^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{pour} \quad |z|_p = \rho.$$

Si alors $\dfrac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ n'avait pas de pôle dans $|z|_p \leqq \rho$, elle serait holomorphe et les inégalités de Cauchy donneraient

$$\left|\frac{q}{a_0}\frac{A^*(0)}{Q^*(0)}\right|_p \leqq p^{-\frac{1}{2}} < 1,$$

ce qui est en contradiction avec $\dfrac{q}{a_0}\dfrac{A^*(0)}{Q^*(0)} = 1$.

Les conditions du lemme 7 s'expriment par les inégalités

$$|q|_p\,|a_j|_p \leqq |a_0|_p\, p^{-h_0-1} \qquad \text{pour} \quad j \geqq 1.$$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1. — *Si pour toutes les fractions de la suite on a* $|a_0|_p > |\alpha_1|_p^{-1}$, *alors la fraction limite a au moins un pôle dans* $|z|_p < 1$. *Cette condition est satisfaite en particulier si l'on a* $|a_0|_p > p^{h_0 - t}$.

En effet, on a

$$|\alpha_1|_p \leqq |q|_p^{-1}\, p^{-h_0};$$

la condition du lemme donne

$$|a_0|_p\, p^{-h_0} > |\alpha_1|_p^{-1}\, p^{-h_0} \geqq |q|_p.$$

Comme $|a_j|_p \leqq 1$, les conditions

$$|q|_p\,|a_j|_p < |a_0|_p\, p^{-h_0},$$

sont donc vérifiées.

Corollaire 2. — *Si pour toutes les fonctions de la famille, le polygone de Newton de* $Q(z)$ *entre* $j = 0$ *et* $j = m_0$, *est formé d'un seul segment joignant le point* $(0, t)$, *où* $|q|_p = p^{-t}$, *au point* (m_0, h_0) *et que* $t - h_0$ *soit premier à* m_0; *si, d'autre part,* $|a_0|_p > p^{-\frac{t-h_0}{m_0}}$, *alors il en est de même de* $Q^*(z)$, *et*

$$|A^*(0)|_p > p^{-\frac{t-h_0}{m_0}}.$$

En effet, d'après le corollaire 1, $Q^*(z)$ a, dans Ω_p, au moins un zéro dans $|z|_p < 1$ et si $\dfrac{1}{\alpha_1^*}$ est ce zéro, α_1^* est limite de α_1, donc

$$|\alpha_1^*|_p = |\alpha_1|_p = p^{\frac{t-h_0}{m_0}}.$$

Mais $Q^*(z)$ étant à coefficients entiers rationnels, les sommets de son polygone de Newton sont des points à coordonnées entières; le premier sommet possible après le point $(0, t)$ est donc le point (m_0, h_0), donc $Q^*(z)$

a exactement m_0 zéros dans $|z|_p < 1$; ils ont tous la même valeur absolue p-adique $p^{-\frac{t-h_0}{m_0}}$. Enfin, a_0^* étant limite de a_0, on a aussi

$$|a_0^*|_p > p^{-\frac{t-h_0}{m_0}}.$$

CHAPITRE II.

Nous donnons ici quelques applications du théorème 1.

1. DÉFINITION. — *Nous appelons* S_q, *où* q *est un entier rationnel, l'ensemble suivant de nombres algébriques réels* : $\theta \in S_q$ *si* $\frac{1}{\theta}$ *est zéro d'un polynome* $Q(z)$ *à coefficients entiers rationnels tel que* $Q(0) = q$, *que* $\frac{1}{\theta}$ *est le seul zéro de* $Q(z)$ *situé dans* $|z| \leqq 1$ *et enfin qu'il existe un polynome* $A(z)$, *à coefficients entiers rationnels, vérifiant*

$$A\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0, \qquad |A(0)| > |q| \qquad \textit{et} \qquad |A(z)| \leqq |Q(z)| \qquad \textit{pour} \quad |z| = 1.$$

L'ensemble S_q n'est pas vide. En effet, appartient à S_q tout nombre algébrique $\theta > 1$ de degré $s \geqq 3$ défini comme suit : ses conjugués autres que θ sont dans $|z| < 1$ et la norme $N(\theta)$ vérifie $|N(\theta)| \geqq 1$; soit $P(z)$ le polynome irréductible primitif dont θ est zéro et posons $Q(z) = z^s P\left(\frac{1}{z}\right)$, on suppose que $Q(0) = q$.

$P(z)$ ayant θ pour seul zéro dans $|z| \geqq 1$, $Q(z)$ a $\frac{1}{\theta}$ pour seul zéro dans $|z| \leqq 1$. Comme $s \geqq 3$, $P(z)$ a $s-1 \geqq 2$ zéros dans $|z| < 1$ et puisque P est irréductible, P et Q sont premiers entre eux, donc $P\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0$. Enfin,

$$|N(\theta)| = \left|\frac{P(0)}{Q(0)}\right| \geqq 1, \qquad \text{donc} \quad |P(0)| \geqq |q|.$$

Par suite, on peut prendre $A(z) = P(z)$ et $\theta \in S_q$.

Remarquons encore que la définition de S_q n'implique pas que $Q(z)$ soit irréductible, ni que $Q(z)$ soit primitif. On peut donc multiplier Q et A par un même entier, ce qui montre que $S_{q'} \subset S_q$ si q' est un diviseur de q. En particulier, S_1 est identique à l'ensemble S dont nous avons parlé au début; en effet, si $\theta \in S_1$, θ est un entier algébrique, donc $|N(\theta)| \geqq 1$; si son degré $s \geqq 3$, on peut prendre pour $A(z)$ le polynome irréductible primitif dont θ est zéro; si $s = 1$ ou $s = 2$, on montre aisément qu'on peut prendre $A(z) = 1$. Ce que nous venons de dire montre que S_1 est un sous-ensemble de tout S_q.

Le théorème 1 nous permet de monter le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *L'ensemble* S_q *est fermé.*

Ce théorème 2 généralise donc le théorème déjà cité de M. R. Salem [15] relatif à l'ensemble $S_1 = S$.

Montrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 8. — *Pour tout* θ *de* S_q, *on a*

$$|\theta| > 1 + \frac{1}{4|q|}.$$

On peut supposer $\theta > 1$, car si $\theta \in S_q$, alors aussi $-\theta \in S_q$. Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{1-\theta z}{\theta - z}\,\frac{A(z)}{Q(z)},$$

elle est holomorphe et bornée par 1 dans $|z| \leqq 1$. On a donc

$$|f(0)| = \frac{1}{\theta}\left|\frac{A(0)}{q}\right| \leqq 1.$$

Pour les nombres θ vérifiant $\theta < 1 + \frac{1}{|q|}$, on a donc

$$1 \leqq \left|\frac{A(0)}{q}\right| < 1 + \frac{1}{|q|}, \qquad \text{donc} \quad \frac{A(0)}{q} = \pm 1.$$

Choisissons le signe de $A(z)$ de sorte que $\frac{A(0)}{q} = 1$ et posons

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{q + a_1 z + \ldots}{q + q_1 z + \ldots} = 1 + u_1 z + \ldots.$$

On en déduit $qu_1 + q_1 = a_1$, donc qu_1 est entier rationnel. Le corollaire du lemme 6 montre que

$$u_1 \neq 0, \qquad \text{donc} \quad |u_1| \geqq \frac{1}{|q|}.$$

Or on a

$$f(z) = \frac{1}{\theta} + \left(\frac{u_1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} - 1\right) z + \ldots.$$

Le lemme de Schwarz, appliqué à $f(z)$, donne

$$\left|\frac{f(z) - f(0)}{z(1 - f(0)f(z))}\right| \leqq 1 \qquad \text{dans} \quad |z| \leqq 1.$$

Pour $z = 0$, on obtient

$$\left|\frac{\frac{u_1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} - 1}{1 - \frac{1}{\theta^2}}\right| \leqq 1,$$

c'est-à-dire

$$-(\theta^2-1) \leqq u_1\theta - (\theta^2-1) \leqq \theta^2 - 1.$$

Par suite,

$$u_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad 2\theta^2 - u_1\theta - 2 \geqq 0,$$

d'où

$$\theta \geqq \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2+16}}{4}.$$

La plus petite valeur de cette dernière expression est obtenue pour $u_1 = \frac{1}{|q|}$. Or

$$\sqrt{16 + \frac{1}{|q|^2}} > 4$$

d'où le lemme 8.

Ce lemme 8 montre, en particulier, que ± 1 ne sont pas des points limites de S_q.

Remarque. — La méthode qui nous a permis de déterminer les quatre plus petits nombres de S_1 [5] s'applique également ici. Sans diminuer la généralité, on peut supposer $q \geqq 1$. On démontre alors que si $\theta < \hat{\theta}$, où $\hat{\theta}$ est le zéro > 1 de

$$\hat{P}(z) = qz^3 + (q-2)z^2 - (q-1)z - q,$$

on a

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = \frac{1}{q}, \qquad u_2 = \frac{1}{q^2}.$$

Les seules fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$ ayant ces coefficients sont, ou bien $\frac{q-qz^2}{q-z-qz^2}$, ou bien

$$\frac{q-qz^2 \pm (q+z-qz^2)z^n}{q-z-qz^2 \pm (q-qz^2)z^n} \qquad \text{pour } n \geqq 1,$$

Désignons par θ_∞ le zéro > 1 de $qz^2 - z - q$ et par θ_n le zéro > 1 de

$$(qz^2 - z - q)z^n + q(z^2-1).$$

On voit alors facilement qu'on a

$$\theta_n < \theta_{n+1} < \theta_\infty \qquad \text{et} \qquad \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \hat{\theta} < \theta_\infty.$$

Par suite, comme aussi $\hat{\theta} \in S_q$ on a :

Les quatre plus petits éléments de S_q *sont, dans l'ordre :*

θ_1, *zéro* > 1 *de* $qz^3 + (q-1)z^2 - qz - q$;

θ_2, *zéro* > 1 *de* $qz^4 - z^3 - q$;

θ_3, *zéro* > 1 *de* $qz^5 - z^4 - qz^3 + qz^3 - q$;

$\hat{\theta}$, *zéro* > 1 *de* $qz^3 + (q-2)z^2 - (q-1)z - q$.

θ_∞ est point limite de S_q; il est probable que les méthodes de [5] permettent de montrer que c'est le plus petit.

Démonstration du théorème 2. — Soit une suite de nombres $\theta \in S_q$ tendant vers un point limite θ'. Alors $|\theta'| > 1$, d'après le lemme 8; d'autre part, il existe $\delta > 0$, tel que tous les nombres θ de la suite vérifient $|\theta| \leqq \frac{1}{\delta}$. La famille des fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est donc une famille compacte $\mathcal{F}$; on peut en extraire une suite partielle tendant vers une fraction limite

$$\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)} = U_0 + U_1 z + \ldots.$$

On a $U_0 = \lim u_0$, et comme $|u_0| = \left|\frac{A(0)}{Q(0)}\right| \geqq 1$, on a

$$|U_0| \geqq 1, \qquad \text{donc} \quad |A^\star(0)| \geqq |q|.$$

D'autre part, $\frac{1}{\theta'}$ est le seul pôle possible de $\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ dans $|z| \leqq 1$.

Comme $\frac{A(z)}{Q(z)}$ a exactement un pôle dans $|z| \leqq 1$, le corollaire du lemme 6 montre que $u_1 \neq 0$, donc $|u_1| \geqq \frac{1}{q^2}$. Par suite, aussi $U_1 = \lim u_1 \neq 0$, donc ce même corollaire montre que $\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ a effectivement au moins un pôle dans $|z| \leqq 1$, donc $\frac{1}{\theta'}$ est un pôle, c'est-à-dire $\frac{1}{\theta'}$ est zéro de $Q^\star(z)$; par suite, $\theta' \in S_q$ et $A^\star\left(\frac{1}{\theta'}\right) \neq 0$; le théorème 2 est démontré.

Sous-ensembles de S_q. — En utilisant l'analyse p-adique, on peut montrer qu'il y a aussi des sous-ensembles de S_q qui sont eux-mêmes fermés.

Définition. — *Supposons que* $q = p_1^{t_1} \ldots p_r^{t_r}$, *où* t_i *est entier rationnel avec* $t_i \geqq 1$, *soit la décomposition de* q *en facteurs premiers distincts.*

Nous dirons qu'un nombre $\theta \in S_q$ *appartient à* $S_q(m_1, \ldots, m_r)$ *s'il existe un polynome*

$$Q(z) = q + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots$$

à coefficients entiers rationnels tel que $\frac{1}{\theta}$ *soit le seul zéro de* $Q(z)$ *dans* $|z| \leqq 1$, *vérifiant de plus la condition suivante : pour chaque* $i = 1, \ldots, r$ *il existe un indice* $m_i \geqq 1$ *fixe, premier à* t_i, *tel que* q_{m_i} *ne soit pas divisible par* p_i *et que, s'il y a des indices* j *avec* $1 \leqq j \leqq m_i - 1$, q_j *soit divisible par une puissance de* p_i *strictement supérieure à* $t_i\left(1 - \frac{j}{m_i}\right)$. *D'autre part, nous* *supposons qu'il existe un polynome* A (*z*), *à coefficients entiers rationnels, vérifiant*

$$A\left(\frac{1}{\theta}\right)\neq 0, \qquad |A(0)|>|q|, \qquad |A(z)|\leq|Q(z)| \quad \textit{pour} \quad |z|=1,$$

enfin

$$|A(0)|_{p_i}>p_i^{-\frac{t_i}{m_i}} \quad \textit{pour} \quad i=1, \ldots, r.$$

Nous remarquons que les conditions imposées aux coefficients de Q (*z*) entraînent d'abord que Q (*z*) est primitif; d'autre part, pour chaque nombre premier, le polygone de Newton de Q (*z*) a un seul côté de pente négative, c'est celui qui joint le point $(0, t_i)$ au point $(m_i, 0)$ et ce côté ne contient aucun point à coordonnées entières.

On a alors :

THÉORÈME 3. — *L'ensemble* $S_q(m_1, \ldots, m_r)$ *est un sous-ensemble fermé de* S_q.

Soit, en effet, une suite de nombres θ de $S_q(m_1, \ldots, m_r)$ tendant vers un nombre θ'. Comme $\theta\in S_q$, nous savons déjà par le théorème 2, que $\theta'\in S_q$. Nous pouvons extraire de la suite des fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$ ayant pour pôles les nombres de la suite θ une suite partielle qui converge vers une fraction rationnelle $\frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)}$ ayant θ' pour pôle effectif dans $|z|<1$.

Le corollaire 2 du lemme 7 nous apprend que les coefficients de $Q^\star(z)$ vérifient les conditions imposées à ceux de Q (*z*) et $A^\star(z)$ celles imposées aux A (*z*). Ainsi $\theta'\in S_q(m_1, \ldots, m_r)$ et le théorème 3 est démontré.

CAS PARTICULIERS. — Si tous les m_i valent 1, la définition de $S_q(1, \ldots, 1)$ est particulièrement simple. En effet, il suffit que q_1 soit premier à q et que $|A(0)|_p>|q|_p$ pour tout nombre premier divisant q [13].

Si tous les t_i valent 1, alors $m_1, \ldots, m_r$ peuvent être pris arbitrairement et les conditions deviennent $|q_j|_{p_i}<1$ si $j<m_i$, et A (0) premier à q.

3. On peut encore donner d'autres applications du théorème 1. Pour cela nous allons considérer le cas où les fractions rationnelles n'ont aucun pôle dans $|z|\geq 1$, c'est-à-dire une famille $\mathcal{F}(q, 0, \delta)$. Le théorème 1 s'énonce alors :

L'ensemble des fractions rationnelles $\frac{A(z)}{Q(z)}$, *holomorphes dans* $|z|\leq 1$, *où* A *et* Q *sont des polynomes à coefficients entiers rationnels, vérifiant* $|A(z)|\leq|Q(z)|$ *sur* $|z|=1$ *et* $Q(0)=q$ *fixe, est une famille compacte dans* **C** *pour la convergence uniforme dans tout compact situé dans* $|z|<1$, [12].

On peut remarquer que les hypothèses entraînent que

$$|A(0)| \leqq |q|, \qquad \text{car} \quad \left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right| \leqq 1 \quad \text{pour } |z| = 1$$

et $\dfrac{A(z)}{Q(z)}$ est holomorphe dans $|z| \leqq 1$. Donc, sauf si $|A(0)| = |q|$, il existe au moins un diviseur premier p de q tel que $|A(0)|_p > |q|_p$. Par suite, si $h_0 = 0$, on peut appliquer le corollaire 1 du lemme 7 et l'on en déduit :

Si, de plus, $h_0 = 0$, la famille $\mathcal{F}(q, 0, \delta)$ ne contient que de véritables fractions rationnelles, sauf peut-être les constantes ± 1.

Comme application, nous allons obtenir un résultat énoncé par M. Cl. Chabauty [2].

Définition. — *Un nombre $\theta \in \mathbf{Q}_p$ est dit « p-intégrable » s'il est algébrique sur le corps des rationnels et vérifie une équation*

$$P(z) = p^t z^s + q_1 z^{s-1} + \ldots + q_s = 0,$$

où $t \geqq 1$, q_j entier rationnel et q_1 non divisible par p.

On appelle $\mathfrak{C}$ l'ensemble suivant de nombres de $\mathbf{Q}_p$: $\theta \in \mathfrak{C}$ si $|\theta|_p > 1$ et si θ est p-intégrable, le polynome $P(z)$ ayant tous ses zéros complexes dans $|z| < 1$.

Alors, on a :

Théorème 4 (Chabauty) [2]. — *L'ensemble $\mathfrak{C}$ est un ensemble fermé dans $\mathbf{Q}_p$ pour la topologie de $\mathbf{Q}_p$.*

En effet, posons $Q(z) = z^s P\left(\dfrac{1}{z}\right)$, alors tous les zéros de $Q(z)$ sont dans $|z| > 1$. La fraction rationnelle $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ est donc holomorphe dans $|z| \leqq 1$. D'autre part, les zéros de $P(z)$ étant tous dans $|z| < 1$, on a $|q_s| < p^t$, donc on a

$$|P(0)|_p = |q_s|_p > |p^t|_p.$$

Enfin, comme q_1 n'est pas divisible par p, on a

$$h_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad |\theta|_p = p^t.$$

Soit alors une suite de nombres θ tendant dans $\mathbf{Q}_p$ vers un nombre θ', alors, comme $|\theta|_p \geqq p$, on a $|\theta'|_p = p^{t'}$, où t' est un entier $\geqq 1$. Nous pouvons alors extraire de la suite des θ une suite partielle telle que $|\theta|_p = p^{t'}$ pour tous les nombres de la suite partielle. Posons $q = p^{t'}$ et associons à cette suite partielle la suite des fractions rationnelles $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ cette suite constitue une famille compacte dans $|z| < 1$.

Soit $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ une fonction limite; on aura

$$\left|\frac{A^*(0)}{Q^*(0)}\right| = \lim \left|\frac{P(0)}{Q(0)}\right| \leqq \frac{|q|-1}{|q|} < 1,$$

donc $\frac{A(z)}{Q(z)}$ ne peut pas se réduire à la constante $+1$ ou -1.

De plus, $|q_1|_p = 1$, donc $h_0 = 0$ et $|P(0)|_p > |q|_p$, donc $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ est une véritable fraction rationnelle et $Q^*(z)$ vérifie les mêmes propriétés que $Q(z)$. Le polygone de Newton montre que $Q(z)$ et $Q^*(z)$ ont, dans $|z|_p < 1$, un seul zéro, à savoir $\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{\theta'}$. Donc $\frac{1}{\theta'}$ est zéro de $Q^*(z)$ et tous les zéros complexes de $Q^*(z)$ sont dans $|z| > 1$. Par suite, $\theta' \in \mathfrak{C}$ et le théorème 4 est démontré.

Remarque. — D'après une idée de Mme M. Grandet, on peut observer que la fraction limite $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ ne peut être de la forme $\frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$, où P^* serait le polynome réciproque de Q^*. En effet, supposons le contraire; comme $\frac{A(z)}{Q(z)}$ tend vers $\frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$ dans $|z| < 1$, les coefficients du développement en série de Taylor de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ tendent vers ceux de $\frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$. Or, d'après le lemme 3, $q^{n+1}\,u_n$ est entier, donc les coefficients sont égaux à partir d'un certain rang. On a donc

$$\frac{A(z)}{Q(z)} - \frac{P^*(z)}{Q^*(z)} = (u_n - U_n)\,z^n + \ldots,$$

avec n augmentant indéfiniment, donc

$$A(z)\,Q^*(z) - Q(z)\,P^*(z) = \gamma_n z^n + \gamma_{n+1} z^{n+1} + \ldots$$

et sur $|z| = 1$, on a

$$|A(z)\,Q^*(z)| \leqq |Q(z)\,P^*(z)|.$$

Mais le nombre de zéros dans $|z| < 1$ de $Q(z)\,P^*(z)$ est fixe, égal au degré s^* de P^*, Le lemme 5 donne alors, pour $n > s^*$ l'égalité

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{P^*(z)}{Q^*(z)}$$

et les nombres θ restent fixes à partir d'un certain rang. $\frac{P^*}{Q^*}$ n'est donc pas une véritable fraction limite.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] É. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1903, 122 pages (*voir* p. 38-43).

[2] Cl. Chabauty, *Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 465-466).

[3] F. DRESS, *Déterminants de Hankel du quotient de deux séries entières à coefficients entiers* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 4338-4340).

[4] B. DWORK, *On the zéta-function of a hypersurface*, Presses Universitaires de France, Paris, 1962 (Institut des Hautes Études Scientifiques, *Publications mathématiques*, n° 12, p. 5-68).

[5] J. DUFRESNOY et C. PISOT, *Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé de nombres algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 72, 1955, p. 69-92).

[6] P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* [*Acta Math.*, t. 30, 1906, p. 335-400 (*voir* p. 368-369)].

[7] J. HADAMARD, *Résolution d'une question relative aux déterminants* (*Bull. Sc. Math.*, t. 17, 1893, p. 240-246).

[8] M. KRASNER, *Sur la primitivité des corps* P*-adiques* [*Mathematica*, t. 13, 1937, p. 72-191 (*voir* p. 172)].

[9] L. KRONECKER, *Zur Theorie der Elimination einer Variablen aus zwei algebraischen Gleichungen* (*Monatsber.*, Berlin, 1881, p. 535-600).

[10] C. PISOT, *La répartition modulo* 1 *et les nombres algébriques* (*Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, Série II, t. 7, 1938, p. 205-248).

[11] C. PISOT, *Ensembles fermés de nombres algébriques et familles normales de fractions rationnelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 1418-1419).

[12] C. PISOT, *Une famille normale de fractions rationnelles* (*Séminaire Delange-Pisot, Théorie des nombres*, t. 4, 1962-1963, n° 4, 6 pages).

[13] C. PISOT, *Familles normales de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques* (*Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et Théorie des nombres*, 16e année, 1962-1963, n° 14, 12 pages).

[14] R. SALEM, *Sets of uniqueness and sets of multiplicity* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 54, 1943, p. 218-228; t. 56, 1944, p. 32-49).

[15] R. SALEM, *A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan* (*Duke Math. J.*, t. 11, 1944, p. 103-108).

[16] R. SALEM et A. ZYGMUND, *Sur un théorème de Piatetçki-Shapiro. Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 2040-2042 et 2281-2283).

R. SALEM, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, *Heath mathematical monographs*, Boston, V. S. A., 1963.