RENÉ LAGRANGE

Sur les systèmes isogonaux de sphères

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 76, nº 4 (1959), p. 305-399

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1959_3_76_4_305_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 76, 1959, p. 305 à 399.

SUR LES SYSTÈMES ISOGONAUX DE SPHÈRES

PAR M. RENÉ LAGRANGE.

INTRODUCTION.

1. Un système S_n de n sphères $U_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ de l'espace euclidien E_N à N dimensions est dit « isogonal » lorsque les angles que font ces sphères deux à deux sont égaux. En géométrie anallagmatique, où les U_i sont supposées unitaires, cette qualité se traduit par l'égalité, en valeur absolue, des produits $U_i U_j$ $(i \neq j)$. Si $a = \cos\alpha$ désigne l'un de ceux-ci, ces $U_i U_j$ sont de la forme $a\varepsilon_{ij}$, où $\varepsilon_{ij} = \pm 1$. Nous convenons de dire que S_n est « strictement isogonal » lorsque tous les ε_{ij} sont égaux; sinon, il est isogonal au sens large. J'ai consacré un article récent aux systèmes strictement isogonaux [1], dans E_N. Nous étudions ici l'isogonalité générale.

La matrice carrée d'ordre n dont les éléments sont tous les $U_i U_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ joue un rôle essentiel dans l'étude du système S_n, et son déterminant

$$\Delta_n = |(U_i U_j)|$$

est non seulement un invariant anallagmatique, mais il est également covariant lorsqu'on change un U_i en $-U_i$, ou lorsqu'on transpose deux sphères. Son rôle est également important ici. La matrice est symétrique; sa diagonale principale est formée de chiffres 1, et elle est définie par la donnée des ε_{ij} d'indice $i < j$ $(1 \leq i < j \leq n)$. Il est commode de représenter S_n par le triangle que

[1] *Sur les systèmes isogonaux de sphères* (*J. Math. pures et appl.*, 37, 1958, p. 225-244).

forment ces $\frac{n(n-1)}{2}$ symboles ε_{ij}, placés comme dans la matrice, et de désigner ce triangle par S_n, soit

$$S_n = \left\{ \begin{array}{cccc} \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ & \varepsilon_{23} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & \varepsilon_{n-1,n} \end{array} \right\}.$$

Deux tels systèmes S_n, S'_n seront dits « semblables » s'ils sont réductibles l'un à l'autre par les changements de signe de certains U_i, associés ou non à une permutation des sphères, donc à un produit de transpositions. Cette similitude s'appellera, plus précisément, la « similitude directe ». Le S'_n dont les ε'_{ij} $(i<j)$ sont les opposés des ε_{ij} de S_n, chacun à chacun, est dit « l'opposé » de S_n; il s'en déduit encore en changeant simplement a en $-a$. Deux systèmes de n sphères seront dits « inversement semblables » lorsque l'un sera directement semblable à l'opposé de l'autre. Les deux similitudes ne s'excluent pas, et certains systèmes, tels que S_4, sont directement semblables à leur opposé (²).

2. L'ensemble des changements de signe portant sur une seule sphère forment la base d'un groupe multiplicatif que nous appelons le groupe (ν), le changement de U_i en $-U_i$ étant l'élément ν_i de ce groupe. Chaque ν_i^2 est l'identité. Les autres éléments de (ν) sont les produits de la forme $\nu_i\nu_j\nu_k\dots$ $(i, j, k\dots$ distincts), dont le nombre des facteurs ne dépasse pas $\left[\frac{n}{2}\right]$, car deux produits de p et $n-p$ facteurs respectivement, dont les n indices diffèrent, transforment de la même façon les ε_{ij}; en effet, si i et j se trouvent dans l'un des produits, celui-ci laisse ε_{ij} invariant, comme le fait l'autre, tandis que, dans le cas contraire, les deux produits changent son signe. Un produit de p éléments ν_i distincts change tous les $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul des indices est l'un des i, donc de $p(n-p)$ symboles $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Le nombre des produits de p éléments ν_i est C_n^p, donc le nombre des éléments du groupe (ν) est $\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^{n-1}$. Rappelons que Δ_n est invariant pour chaque ν_i, donc pour (ν).

3. Nous désignerons par $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ la transposition de deux sphères U_i, U_j. On a $\tau_{ij}^2 = 1$. Nous désignons par (τ) le groupe des substitutions engendré par les τ_{ij}. Chaque permutation ne change pas les signes des ε_{ij}, mais leur place dans S_n.

Enfin, en désignant par ν' le changement simultané des signes des ε_{ij}, ce qui revient à changer a en $-a$, le groupe des similitudes est le groupe formé par

(²) En géométrie euclidienne plane, une figure peut bien être égale à sa symétrique par rapport à une droite.

la réunion de (ν), (τ), ν'. Le sous-groupe de (ν), (τ) est le groupe des similitudes directes.

4. *A priori*, chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ symboles ε_{ij} du triangle S_n a deux valeurs possibles, donc le nombre des S_n distincts est $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Ils sont réductibles par (ν), 2^{n-1} à 2^{n-1}, ce qui permet de les grouper en $2^{\frac{n(n-1)}{2}-n+1} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ « familles », les éléments de chaque famille f étant les transformés de l'un d'eux par (ν), et ayant, en particulier, le même déterminant Δ_n. Les familles qui sont réductibles l'une à l'autre par (τ) ont aussi le même Δ_n, et seront rassemblées dans une même « classe ». Ainsi, chaque classe est formée par tous les S_n directement semblables à l'un d'eux. Le problème que nous étudions dans la première partie de cet article est la répartition de tous les S_n dans les différentes classes et familles.

Il suffira de former un S_n type de chaque classe C, puisque (ν) permet d'en déduire la famille f de cet élément σ, et que (τ) permet de former ensuite toutes les familles de C. Il faut observer cependant que les transformées de f par les différents éléments de (τ) ne sont pas toujours distinctes, et il conviendra, dans chaque cas, de déterminer les familles distinctes dans C. Bien entendu, deux familles qui n'ont pas le même nombre de symboles ε_{ij} négatifs sont irréductibles par (τ) et sont dans deux classes différentes. Enfin, on formera, pour chaque classe, le polynome en a qu'est le déterminant Δ_n.

Ce problème n'est pas commode puisque, dès la valeur 7 de n, il s'agit de classer 2^{21} systèmes et $2^{15} = 32\,768$ familles. Heureusement, le nombre des classes est disproportionné avec ces grands nombres, puisqu'il est égal à 54. Nous n'avons pu résoudre ce problème dans sa généralité, et n'en donnons ici la solution que pour les valeurs de n inférieures à 8. Cela nous suffira d'ailleurs pour répondre à la question posée dans la deuxième partie. Nous constaterons aussi que, pour chacune de ces valeurs de n, les Δ_n des différentes classes sont des polynomes distincts, et obtiendrons ainsi le théorème remarquable suivant, qui semble devoir être général :

THÉORÈME. — *Pour que deux n-sphères isogonaux d'ordre $n \leqq 7$ soient directement semblables, il faut et il suffit que leurs déterminants Δ_n soient deux polynomes identiques en $a = \cos\alpha$.*

COROLLAIRE. — *Pour que deux S_n isogonaux d'ordre $n \leqq 7$ soient inversement semblables, il faut et il suffit que leurs déterminants Δ_n ne diffèrent que par le changement de a en $-a$.*

La méthode utilisée pour aboutir à cette classification appelle une observation essentielle. Lorsque nous déterminerons, pour un élément σ d'une classe C, les transformations du groupe (ν) qui sont équivalentes à une permutation du groupe (τ), nous en déduirons le nombre des familles distinctes contenues dans C; d'une manière précise, si q est le nombre des transformations de (ν) en question, l'identité comprise, le nombre de ces familles est le quotient par q du nombre des permutations qu'on peut effectuer sur les ε_{ij} du système σ. Mais nous ne démontrons pas, dans chaque classe, que les transformations de (ν) examinées sont toutes celles qui ont l'équivalence en question, et nous ne sommes pas sûrs d'avoir effectué la réduction maximale. Ce n'est qu'à la fin de la discussion faite pour une même valeur de n que nous constaterons que le nombre total des familles formées, qui est *a priori* un maximum, est justement le nombre prévu $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$. Nous saurons alors que la réduction aura été effectivement complète dans chaque classe. Nous ne nous préoccuperons plus de ce détail dans le cours de la discussion.

5. Lorsque, dans un S_n, les ε_{ij} négatifs ne sont pas nombreux, il est commode de représenter ce système par la suite de ces seuls ε_{ij}, ou, plus simplement, par la suite des couples ij de leurs indices. Ainsi, on pourra écrire

$$S_4 = \left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{matrix}\right\} = (\varepsilon_{23}, \varepsilon_{34}) = (23, 34).$$

Nous n'avons pas pu songer à dessiner les graphiques qu'on peut associer à chaque S_n, mais le lecteur pourra les reproduire aisément s'il le désire; ils sont commodes et nous y ferons allusion dans les raisonnements. En voici le principe. Les indices i, j des ε_{ij} d'un S_n ont n valeurs possibles $1, 2, \ldots, n$, qu'on peut représenter par n points différents du plan, numérotés $1, 2, \ldots, n$; chaque ε_{ij} égal à -1 est alors représenté par le segment de droite qui joint les points i et j. Ainsi, le système $(23, 34)$ est représenté par la ligne brisée à deux segments joignant les points 2, 3, 4 dans l'ordre, le point 1 restant isolé. Dans le cas général, un S_n est représenté par un certain nombre de côtés et diagonales d'un n-gone; les deux cas extrêmes sont le S_n dont tous les $\varepsilon_{ij} = 1$, qu'on peut représenter par la parenthèse vide ( ), ou par les n points isolés, et celui dont tous les $\varepsilon_{ij} = -1$, dont le graphique est formé par les $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ côtés et diagonales du n-gone. Une transformation ν_i de S_n change la nature des segments issus du point i, en effaçant ceux de son graphique, et en faisant apparaître les autres; si le nombre des premiers est r, celui des autres est $n-1-r$. Sur l'exemple S_4 cité, ν_1 donne ainsi

$$\nu_1(23, 34) = (12, 13, 14; 23, 34),$$

tandis que

$$\nu_2(23, 34) = (12, 24, 43).$$

Les diagrammes sont respectivement un quadrilatère avec une diagonale, et une ligne brisée de trois traits. Par contre,

$$\nu_3(23, 34) = (13)$$

est représenté par un seul trait.

Précisons que les deux sommets d'un segment seront dits adjacents ou « unis », tandis que deux sommets seront dits « reliés » s'ils appartiennent à une même ligne brisée.

6. La deuxième partie de ce travail, exposée aux chapitres IV et V, est l'application des généralités de la première à la formation des systèmes isogonaux du plan et de E_3. En outre du problème de l'existence de tels systèmes S_n lorsque n surpasse 4 ou 5, on peut se demander si ceux-ci peuvent être formés de sphères réelles ou imaginaires pures. J'ai montré antérieurement (3) que ces sphères sont alors toutes réelles ou toutes imaginaires pures suivant la position de a ($a \neq 0$) par rapport à l'intervalle $(-1, 1)$. Lorsqu'il en est ainsi, S_n sera dit « pur »; sinon « impur ». On verra que, dans E_2, il n'existe pas d'heptacercle isogonal, mais on peut former quatre types de pentacercle et deux d'hexacercle. Dans E_3, on trouve de même dix types d'hexasphère, cinq d'heptasphère et trois d'octosphère, dont la valeur de a et la nature sont relatés dans les tableaux récapitulatifs des paragraphes 58, 63 et 73.

CHAPITRE I.

Les systèmes isogonaux d'ordre $n \leqq 5$.

1. $n = 2$. — Les systèmes $S_2 = \{\varepsilon_{12}\}$ ont deux formes possibles $\{1\}$ et $\{-1\}$. Elles sont équivalentes par (ν) et par ν', donc directement et inversement semblables. Le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$$

est effectivement une fonction paire de a. On prendra naturellement

$$\sigma_2 = \{1\} = (\ \ )$$

pour forme type de la classe unique, à une seule famille, $C(\sigma_2)$. Le graphique de σ_2 est un couple de points isolés; celui de l'autre système (4)

$$\sigma'_2 = \nu'\sigma_2 = (12)$$

est le trait qui joint ces deux points.

---

(3) *Loc. cit.*

(4) $\nu_i\, S_n$ et $\nu' S_n$ désignent naturellement les transformés respectifs de S_n par ν_i et par ν'; de même, $\tau_{ij} S_n$ est son transformé par la transposition τ_{ij}.

2. $n=3$. — Les $2^3=8$ systèmes

$$S_3=\begin{Bmatrix} \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

se partagent *a priori* en 2 familles f_1, f_2 comprenant chacune 4 systèmes équivalents par (ν). f_1 est la famille des transformés par (ν) du système type

$$\sigma_3^1=\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}=(\ \ ).$$

Les trois autres éléments de f_1 sont les $\nu_i\sigma_3^1$, qui se déduisent de σ_3^1 par deux changements de signe des $\varepsilon_{i\alpha}$: ainsi,

$$\nu_1\sigma_3^1=\begin{Bmatrix} -1 & -1 \\ & 1 \end{Bmatrix}=(12,\ 13), \qquad \nu_2\sigma_3^1=\begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{Bmatrix}=(12,\ 23),$$
$$\nu_3\sigma_3^1=\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ & -1 \end{Bmatrix}=(13,\ 23).$$

f_2 est la famille des S_3 différant de σ_3^1 par un ou trois changements de signe des ε_{ij}; on peut adopter l'élément type

$$\sigma_3'^1=\nu'\sigma_3^1=\begin{Bmatrix} -1 & -1 \\ & -1 \end{Bmatrix}=(12,\ 23,\ 31),$$

et les 3 autres systèmes sont

$$\nu_1\sigma_3'^1=\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & -1 \end{Bmatrix}=(23), \qquad \nu_2\sigma_3'^1=\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{Bmatrix}=(13), \qquad \nu_3\sigma_3'^1=\begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}=(12).$$

Les transpositions ne changeant pas le nombre des ε_{ij} négatifs, ces deux familles ne sont pas directement semblables; mais elles le sont inversement puisque $\sigma_3'^1=\nu'\sigma_3^1$. On pourra donc désigner les 2 classes représentées par ces 2 familles par $C_1=C(\sigma_3^1)$ et $C_1'=C(\sigma_3'^1)$. Il en résulte que les déterminants $\Delta_3^1=\Delta(\sigma_3^1)$ et $\Delta_3'^1=\Delta(\sigma_3'^1)$ sont des polynomes en $a=\cos\alpha$ du troisième degré qui se déduisent l'un de l'autre en changeant ([5]) a en $-a$. Les 8 systèmes sont semblables, et strictement isogonaux à une similitude près.

Nous groupons ces résultats dans le tableau suivant, où nous désignons, pour chacune des deux classes ([6]), un système type, le nombre des familles qui la compose, et la valeur de Δ_3.

$C_1=C(\sigma_3^1)\ =C(\ \ )$	1 famille	$\Delta_3^1\ =(1-a)^2(1+2a)$
$C_1'=C(\sigma_3'^1)=\nu' C_1=C(12)$	1 famille	$\Delta_3'^1=(1+a)^2(1-2a)$

3. $n=4$. — Les $2^6=64$ systèmes S_4 se partagent *a priori* en $2^3=8$ familles

([5]) Nous omettons le calcul de Δ_3, qui n'offre ni difficulté ni intérêt.

([6]) C( ) désigne naturellement la classe du système dont tous les $\varepsilon_{ij}=1$; C(12) celle du système (12).

contenant chacune 8 systèmes équivalents par (ν). Nous adoptons toujours pour système type de la première famille f_1 le système

$$\sigma_4^1 = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{matrix} \right\} = (\quad),$$

dont le graphique est l'ensemble des quatre sommets isolés d'un quadrilatère. Rappelons qu'une transformation ν_i change les signes des 3 symboles $\varepsilon_{i\alpha}(\alpha \neq i)$ et que tout produit $\nu_i\nu_j(i \neq j)$ change ceux de 4 des 6 éléments $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

α. Les 6 S_4 déduits de σ_4^1 par un seul changement de signe n'appartiennent donc pas à f_1, et appartiennent également à 6 familles distinctes, puisqu'on passe de l'un à l'autre par deux changements de signe. Par contre ces familles sont équivalentes par (τ); elles sont donc groupées dans une même classe, et ont le même Δ_4. Prenons par exemple, pour système type de cette classe C_2 de 6 familles de 8 systèmes chacune,

$$\sigma_4^2 = \left\{ \begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{matrix} \right\} = (12).$$

β. Considérons maintenant les S_4 déduits de σ_4^1 par deux changements de signe. Le dessin représente 2 segments liant des sommets du quadrilatère, et l'on distingue les graphiques où ces deux traits sont adjacents de ceux où ils sont isolés, car ils représentent nécessairement des classes distinctes. Nous conviendrons d'appeler p-uple un point qui est le sommet commun de p segments du graphique et p seulement; l'indice de ce sommet est commun à p ε_{ij} négatifs, et p seulement (7).

β_1. Considérons d'abord les S_4 de la classe de (12, 34); les 3 formes qu'on en déduit par (τ) sont équivalentes par (ν), car

$$\tau_{23}(12\,;\,34) = (13\,;\,24) = \nu_1\nu_4(12\,;\,34),$$
$$\tau_{24}(12\,;\,34) = (14\,;\,23) = \nu_1\nu_3(12\,;\,34);$$

d'ailleurs cette famille est inversement semblable à f_1, d'après

$$\nu_1\nu_2(12\,;\,34) = \nu'\sigma_1^4.$$

Nous désignerons ce transformé $\nu'\sigma_4^1$ par $\sigma_4'^{\,1}$, et son diagramme est l'ensemble des 6 segments joignant les 4 points.

β_2. Les systèmes transformés par (τ) du type (12, 13) sont au nombre de 12. Ils sont équivalents deux à deux par (ν) car

$$\nu_1\nu_4(12,\ 13) = (42,\ 43) = \tau_{14}(12,\ 13).$$

(7) Ne pas confondre un point simple avec un point isolé.

Ils forment seulement 6 familles, qui sont d'ailleurs les 6 familles de σ_4^2 puisque

$$\nu_1(12,\ 13) = (14).$$

Nous avons ainsi obtenu les 64 systèmes S_4 : 8 de la classe $C_1 = C(\sigma_4^1)$ à une famille, 8 de la classe $C'_1 = C(\sigma_4'^{\,1})$ à une famille, et 48 rattachés par ν et (τ) à σ_4^2 dans la classe à six familles $C_2 = C(\sigma_4^2)$. Il est à prévoir que C_2 est invariante par ν'; en effet

$$\nu_1\nu_2\sigma_4^2 = \nu_1\nu_2(12) = \nu'(34).$$

Le calcul de Δ_4 confirme ces résultats. Comme pour $n = 3$, nous rassemblons ces faits dans un tableau :

	$C_1 = C(\sigma_4^1) \;= C(\quad)$	$1f$	$\Delta_4^1 \;= (1-a)^3(1+3a)$
β_1 :	$C'_1 = C(\sigma_4'^{\,1}) = \nu' C_1 = C(12;\ 34)$	$1f$	$\Delta_4'^{\,1} = (1+a)^3(1-3a)$
α et β_2 :	$C_2 = C'_2 = C(\sigma_4^2) = C(12)$	$6f$	$\Delta_4^2 \;= (1-a^2)(1-5a^2)$

Nous avons également rappelé l'alinéa où la classe a été formée. Les seuls systèmes strictement isogonaux sont σ_4^1 et $\sigma_4'^{\,1}$; les 14 autres systèmes de leurs deux classes, ou familles, sont à la fois directement et inversement semblables à un système strictement isogonal. Les systèmes de C_2 sont inversement semblables deux à deux.

4. Nous ne nous sommes pas occupés des systèmes dont le graphique comporte un ou plusieurs points triples, car la transformation ν_i dont l'indice est celui d'un sommet triple réduit de 3 unités le nombre des segments de la figure. Pour le même motif, nous aurions pu omettre l'examen des S_4 comportant un indice double i, car le ν_i correspondant réduit d'une unité le nombre des segments du graphique. C'est pour cette raison que l'étude faite en β_2 ne nous a pas donné de classe nouvelle. Nous ferons notre profit de cette importante remarque dans la suite, mais l'alinéa β_2 nous a fourni néanmoins des résultats assez intéressants pour être conservé. Dans le même ordre d'idées, montrons dans quelles classes se placeraient les S_4 dont le graphique comporte 3 traits.

Si l'on désigne par d et s les nombres respectifs des sommets doubles et simples, et par c le nombre des points isolés, les graphiques de cette nature, et sans point triple, vérifient les deux relations

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 4,$$

donc $d = 2 + c \geqq 2$.

γ_1. Une première solution est $d = 2$, $s = 2$, $c = 0$. Un type de cette classe est $(12,\ 23,\ 34)$, et le nombre des systèmes de ce type est 12; cependant il n'y en a que 6 qui soient irréductibles les uns aux autres par (ν), puisque

$$\nu_1\nu_4(12,\ 23,\ 34) = (13,\ 32,\ 24) = \tau_{23}(12,\ 23,\ 34).$$

Ils appartiennent aux 6 familles de la classe C_2; on vérifie d'ailleurs, par exemple, que $\nu_1\nu_3(12,\ 23,\ 34) = (14)$.

γ_2. L'autre solution est $d = 3$, $s = 0$, $c = 1$. Un système type est $(12,\ 23,\ 31)$, représenté par un triangle; les 4 systèmes analogues appartiennent à la même classe [8] car

$$\nu_1\nu_2(12,\ 23,\ 31) = (12,\ 24,\ 41) = \tau_{34}(12,\ 23,\ 31),$$

donc, de même,

$$\nu_1\nu_3(12,\ 23,\ 31) = \tau_{24}(12,\ 23,\ 31); \qquad \nu_1\nu_4(12,\ 23,\ 31) = \tau_{14}(12,\ 23,\ 31).$$

δ. Les systèmes qui ont quatre ε_{ij} négatifs, sans indice triple, sont fournis par la résolution du système

$$2d + s = 8, \qquad d + s + c = 4,$$

dont la solution unique est $d = 4$, $s = c = 0$. Ils appartiennent à la classe du type $(12,\ 23,\ 34,\ 41)$; c'est la classe C_1 car ce type est transformé en σ_4^1 par $\nu_1\nu_3$.

5. $n = 5$. — Les $2^{10} = 1\,024$ systèmes S_5 se groupent *a priori* en $2^6 = 64$ familles f contenant chacune $2^4 = 16$ systèmes équivalents par (ν). Nous prenons naturellement

$$\sigma_5^1 = \left\{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right\} = (\quad),$$

représenté par les 5 sommets d'un pentagone, comme système type de la première famille f_1, identifiée avec la première classe $C_1 = C(\sigma_5^1)$.

Ici, les ν_i changent les signes des $4\,\varepsilon_{i\alpha}(\alpha \neq i)$, et les produits $\nu_i\nu_j$ changent le signe de 6 symboles $\varepsilon_{\alpha\beta}$; ces transformations sont les seuls éléments de (ν), en outre de l'identité. Nous allons examiner les familles déduites de f_1, ou, ce qui est équivalent, les systèmes déduits de σ_5^1 par un, deux ou trois changements de signe des ε_{ij}.

α. Les systèmes qui n'ont qu'un ε_{ij} négatif ne sont pas semblables à σ_5^1, mais sont équivalents par (τ). Aux 10 symboles ε_{ij} correspondent ainsi 10 familles f d'une même classe, directement semblables au système type $\sigma_5^2 = (12)$. C'est la classe $C_2 = C(\sigma_5^2)$.

β. Les systèmes déduits de σ_5^1 par deux changements de signe ont un graphique formé par deux traits, et se partagent en deux classes suivant que le nombre d des points doubles est 0 ou 1.

---

[8] Il s'agit de C_1', comme le montre $\nu_3(12,\ 23,\ 31) = (12;\ 34)$.

β_1. La première solution fournit les systèmes du type

$$\sigma_5^3 = (12;\, 34),$$

au nombre de $\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 15$; ils constituent, à l'aide de (ν), la classe $C_3 = C(\sigma_5^3)$ de 15 familles.

β_2. L'autre solution fournit les systèmes du type $(12,\, 13)$; ils n'engendrent que 15 familles, car $\nu_1(12,\, 13) = (14,\, 15)$; ils sont inversement semblables à ceux de la classe C_3 car

$$\nu_4\nu_5(12,\, 13) = \nu'(23,\, 45).$$

Leurs 15 familles forment la classe $C'_3 = C(\sigma'^{\,3}_5)$, en désignant par $\sigma'^{\,3}_5$ le système $\nu'\sigma_5^3$.

γ. Examinons maintenant les S_5 à trois ε_{ij} négatifs, donc représentés par 3 traits joignant des sommets du pentagone. On peut écarter les S_5 qui ont un point triple, car le ν_i dont l'indice est celui d'un tel point remplace les trois segments par un seul. Avec les notations adoptées, il s'agit de résoudre le système d'équations

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 5;$$

on en déduit $d = c + 1$, donc $2c + 1 \leqq 5$, ou $c \leqq 2$; il y a ainsi 3 solutions

(1) $\quad d = 1, \quad s = 4, \quad c = 0,$

(2) $\quad d = 2, \quad s = 2, \quad c = 1,$

(3) $\quad d = 3, \quad s = 0, \quad c = 2.$

γ_1. Les S_5 fournis par (1) sont du type $(12,\, 13;\, 45)$, et au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} = 30$. Les 30 familles qu'on en déduit par (ν) sont semblables trois à trois, car

$$\nu_1\nu_4(12,\, 13;\, 45) = (42,\, 43;\, 15) = \tau_{14}(12,\, 13;\, 45),$$
$$\nu_1\nu_5(12,\, 13;\, 45) = \tau_{15}(12,\, 13;\, 45).$$

C'est une classe de 10 familles, d'ailleurs inversement semblables à $C(\sigma_5^2)$, car

$$\nu_4\nu_5(12,\, 13;\, 45) = \nu'(23).$$

Nous la désignerons par $C(\sigma'^{\,2}_5) = C'_2$, où $\sigma'^{\,2}_5 = \nu'\sigma_5^2$.

γ_2. Les S_5 fournis par (2) sont du type

$$\sigma_5^4 = (12,\, 23,\, 34),$$

et sont représentés par 3 segments consécutifs. Ils sont au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2} = 60$. Les 60 familles correspondantes sont semblables cinq à cinq; en effet,

$$\nu_2(12, 23, 34) = (52, 24, 43) = \tau_{15}\tau_{34}(12, 23, 34),$$

et, de même,

$$\nu_3(12, 23, 34) = (21, 13, 35) = \tau_{12}\tau_{45}(12, 23, 34);$$

en réitérant sur ces nouvelles formes, on a encore

$$\nu_2\nu_4(12, 23, 34) = \nu_4(52, 24, 43) = (25, 54, 41),$$
$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34) = \nu_1(21, 13, 35) = (41, 15, 53).$$

Ces deux derniers types sont équivalents par ν_5. Ces 12 familles sont deux à deux inversement semblables, car

$$\nu'\nu_5(12, 23, 34) = (31, 14, 42),$$

et leur classe $C_4 = C(\sigma_5^4)$ est invariante par similitude inverse. Le déterminant Δ_5^4 de ces systèmes est une fonction paire de a.

γ_3. Les S_5 fournis par (3) sont du type (12, 23, 31), et sont représentés par les 10 triangles qu'on peut construire avec les 5 sommets du pentagone. Leurs 10 familles sont celles de la classe C'_2 formée en γ_1, car, par exemple,

$$\nu_1(12, 23, 31) = (14, 15; 23).$$

6. Cette discussion nous a donné 6 classes et 63 familles; il ne manque plus qu'une famille et il est clair que c'est la classe à une famille inversement semblable à C_1. Il est à prévoir que l'étude des S_5 représentés par plus de 3 traits ne nous fournira pas d'autre nouvelle classe que $C'_1 = \nu' C_1$; elle n'en est pas moins instructive et nous la poursuivons.

δ. Puisque nous pouvons ignorer les diagrammes à point triple, les S_5 représentés par 4 traits sont donnés par la résolution du système d'équations

$$2d + s = 8, \qquad d + s + c = 5,$$

donc $d = c + 3$, avec $c \leqq 1$. Il n'y a que les deux solutions $d = 3$, $s = 2$, $c = 0$, et $d = 4$, $s = 0$, $c = 1$.

δ_1. Si les deux points simples sont unis, les S_5 fournis par la première solution sont du type (12, 23, 31; 45). On voit tout de suite que $\nu_4\nu_6$ le transforme en $\nu'\sigma_5^1$, et la classe de ces systèmes est justement la classe à une famille C'_1.

δ_2. Si les deux points simples sont unis à deux des trois points doubles, les S_5 sont du type (12, 23, 34, 45). Ils appartiennent à la classe C_3 puisque

$$\nu_2\nu_4(12, 23, 34, 45) = (14; 25).$$

δ_3. Les S_5 fournis par la deuxième solution $d = 4$, $s = 0$, $c = 1$ sont ceux du type (12, 23, 34, 41), représentés par un quadrilatère; leurs 15 familles sont celles de C'_3 car

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34, 41) = (15, 35).$$

η. Les S_5 représentés par 5 traits, et sans point triple, sont fournis par le système d'équations

$$2d+s=10, \qquad d+s+c=5,$$

donc $d=5$, $s=c=0$. Cette solution unique donne les systèmes du type de $(12, 23, 34, 45, 51)$, représentés par un pentagone. Leur classe comprend $\frac{5\,!}{5\times 2}=12$ familles, comme C_4, et l'on a en effet

$$\nu_1\nu_4(12, 23, 34, 45, 51)=(13, 32, 24).$$

Il n'y a pas lieu de poursuivre la discussion, car tout S_5 dont plus de cinq ε_{ij} sont négatifs est inversement semblable à un système qui en a moins de cinq. Nous avons bien obtenu les 64 familles et, comme pour les valeurs précédentes de n, le tableau suivant récapitule ces résultats, en fournissant en outre les valeurs des déterminants Δ_5 relatifs à chacune des sept classes; nous en omettons le calcul, qui est sans intérêt :

	$C_1=C(\sigma_5^1)=C(\quad)$	$1f$	$\Delta_5^1\ =(1-a)^4(1+4a)$
δ_1 :	$C'_1=C(\sigma_1'^5)=\nu' C_1$	$1f$	$\Delta_5'^1=(1+a)^4(1-4a)$
α :	$C_2=C(\sigma_5^2)=C(12)$	$10f$	$\Delta_5^2\ =(1-a)^2(1+a)(1+a-8a^2)$
γ_1 et γ_3 :	$C'_2=C(\sigma_5'^2)=\nu' C_2$	$10f$	$\Delta_5'^2=(1+a)^2(1-a)(1-a-8a^2)$
β_1 et δ_2 :	$C_3=C(\sigma_5^3)=C(12;34)$	$15f$	$\Delta_5^3\ =(1+a)^2(1-3a)(1+a-4a^2)$
β_2 et δ_3 :	$C'_3=C(\sigma_5'^3)=\nu' C_3$	$15f$	$\Delta_5'^3=(1-a)^2(1+3a)(1-a-4a^2)$
γ_2 et η :	$C_4=C'_4=C(\sigma_5^4)=C(12, 23, 34)$	$12f$	$\Delta_5^4\ =(1-5a^2)^2$

CHAPITRE II.

Les hexasphères isogonaux.

7. Les $2^{15}=2^{10}\times 2^5=1024\times 32=32\,768$ systèmes S_6 se groupent en $2^{10}=1024$ familles f contenant chacune $2^5=32$ systèmes équivalents par (ν). Les transformations ν_i de ce groupe changent les cinq symboles $\varepsilon_{i\alpha}(\alpha\neq i)$, les produits $\nu_i\nu_j(i\neq j)$ changent les signes des huit $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul indice est i ou j, et les produits $\nu_i\nu_j\nu_k(i, j, k$ distincts$)$ changent les neuf $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul indice est i, j ou k. Ces transformations sont les seuls éléments de (ν), en outre de l'identité.

Nous prenons toujours le système strictement isogonal

$$\sigma_6^1=\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{matrix}\right\}=(\quad)$$

pour type de la première famille f, qui constitue la première classe C_1, et nous allons classer les systèmes qui en diffèrent par un ou plusieurs changements de signe des ε_{ij}.

α. Les S_6 dont un seul ε_{ij} vaut -1 ne sont pas semblables à σ_6^1, mais sont semblables entre eux par (τ). Aux 15 symboles ε_{ij} correspondent ainsi 15 familles f, réductibles l'une à l'autre par (τ), et groupées dans une classe $C_2 = C(\sigma_6^2)$, dont le système type est $\sigma_6^2 = (12)$.

β. Les S_6 représentés par deux traits joignant des sommets de l'hexagone se partagent en deux classes, suivant que le dessin comporte, ou non, un point double.

β_1. Lorsqu'il n'y a pas de point double, S_6 est du type

$$\sigma_6^3 = (12;\ 34);$$

ces S_6 sont au nombre de $\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 45$, et fournissent autant de familles par (ν).

β_2. Les S_6 qui ont un sommet double ont pour type

$$\sigma_6^4 = (12,\ 13),$$

et se groupent en $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} = 60$ familles.

8. Comme pour $n \leqq 5$, il n'y a pas lieu de discuter des S_6 qui ont un point triple, car la transformation ν_i de même indice que ce point réduit à deux les segments qui en partent; la même observation vaut *a fortiori* pour les sommets d'ordre plus grand. Dans ces conditions, les S_6 représentés par trois traits sont fournis par la résolution du système

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 6.$$

Il y a donc 4 solutions, avec $d = c \leqq 3$, soit

$$(1) \qquad d = c = 0, \qquad s = 6,$$

$$(2) \qquad d = c = 1, \qquad s = 4.$$

$$(3) \qquad d = c = 2, \qquad s = 2.$$

$$(4) \qquad d = c = 3, \qquad s = 0.$$

γ_1. La première solution fournit les S_6 du type

$$\sigma_6^5 = (12;\ 34;\ 56).$$

Le nombre des familles équivalentes par (τ) est

$$\frac{1}{6}\,\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 15.$$

γ_2. Les S_6 fournis par (2) sont du type

$$\sigma_6^6 = (12, 13; 45),$$

et sont au nombre de $60 \times 3 = 180$. Les 180 familles qu'on en déduit par (ν) sont inversement semblables deux à deux, car on a, par exemple,

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 13; 45) = (64, 65; 23) = \tau_{16}\tau_{24}\tau_{35}\sigma_6^6.$$

On vérifiera que Δ_6^6 est une fonction paire de a.

γ_3. Lorsqu'on écarte les deux points isolés d'un S_6 vérifiant (3), on obtient un S_4 de l'alinéa γ_1 du paragraphe 4. Il n'y a donc que des S_6 du type

$$\sigma_6^7 = (12, 23, 34),$$

au nombre de $\frac{6 \times 5}{2} \times 12 = 180$, fournissant autant de familles; le nombre de celles-ci n'est pas réductible par (ν), comme il l'est pour les classes associées au même type dans les ordres $n = 4$ ou 5.

γ_4. (4) ne fournit évidemment pas d'autres systèmes que ceux du type

$$\sigma_6^8 = (12, 23, 31),$$

et les familles qu'on en déduit sont au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 20$. Cette classe est invariante par ν', car on a, par exemple,

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 31) = (45, 56, 64) = \tau_{14}\tau_{25}\tau_{36}\sigma_6^8.$$

9. Pour les S_6 qui ont quatre ε_{ij} négatifs, les nombres d, s, c vérifient les relations

$$2d + s = 8, \qquad d + s + c = 6,$$

donc $d = c + 2$, avec $c \leqq 2$. Ce système admet donc les trois solutions

$$(5) \qquad d = 2, \quad s = 4, \quad c = 0,$$

$$(6) \qquad d = 3, \quad s = 2, \quad c = 1,$$

$$(7) \qquad d = 4, \quad s = 0, \quad c = 2.$$

Les systèmes qui satisfont à (5) ont deux formes possibles, suivant que les points doubles sont unis, ou non. Pour les solutions (6) et (7), il suffit d'écarter un point isolé pour retrouver les formes trouvées au paragraphe 6, alinéas δ, dans l'étude des S_5.

δ_1. Les S_6 fournis par (5) et dont les points doubles sont adjacents sont du type (12, 23, 34; 56); ils sont au nombre de $\frac{6 \times 5}{2} \times 4 \times 3 = 180$, comme ceux de la classe $C(\sigma_6^7)$; effectivement,

$$\nu'\nu_5\nu_6(12, 23, 34; 56) = (31, 14, 42).$$

Nous désignerons cette classe, inversement semblable à $C(\sigma_6^7)$, par $C(\sigma_6'^7)$ où $\sigma_6'^7 = \nu'\sigma_6^7$.

δ_2. Les autres S_6 déduits de (5) sont ceux du type (12, 13; 45, 46). Ils sont au nombre de $\frac{6!}{8} = 90$. Ils sont équivalents deux à deux par (ν) car, par exemple,

$$\nu_1\nu_4(12,\ 13;\ 45,\ 46) = (15,\ 16;\ 42,\ 43) = \tau_{14}(12,\ 13;\ 45,\ 46),$$

et donnent seulement 45 familles; c'est le nombre des familles de $C(\sigma_6^3)$, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12,\ 13;\ 45,\ 46) = (23;\ 56).$$

On prendra $\sigma_6'^3 = \nu'\sigma_6^3$ pour type de cette classe.

δ_3. Les S_6 analogues aux S_5 de l'alinéa δ_1 (§ 6) sont ceux du type (12, 23, 31; 45), et fournissent 60 familles comme dans $C(\sigma_6^4)$. C'est effectivement la classe inversement semblable, car

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12,\ 23,\ 31;\ 45) = (46,\ 56).$$

Nous la représenterons par $C(\sigma_6'^4)$ où $\sigma_6'^4 = \nu'\sigma_6^4$.

δ_4. L'alinéa δ_2 (§ 6) fournit de même les S_6 du type

$$\sigma_6^9 = (12,\ 23,\ 34,\ 45),$$

au nombre de $\frac{6!}{2} = 360$. Cependant, leur classe ne comprend que 180 familles, d'après

$$\nu_2\nu_4(12,\ 23,\ 34,\ 45) = (14,\ 46,\ 62,\ 25) = \tau_{24}\tau_{36}(12,\ 23,\ 34,\ 45).$$

Ces familles sont inversement semblables deux à deux, puisque

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12,\ 23,\ 34,\ 45) = (13,\ 34,\ 46,\ 65) = \tau_{15}\tau_{26}\tau_{34}(12,\ 23,\ 34,\ 45).$$

On verra que le déterminant Δ_6 de cette classe est une fonction paire de a.

δ_5. L'alinéa δ_3 (§ 6) donne les S_6 du type (12, 23, 34, 41); ils sont au nombre de $\frac{6 \times 5}{2} \times 3 = 45$, mais n'appartiennent qu'à 15 familles, car

$$\nu_1\nu_3(12,\ 23,\ 34,\ 41) = (15,\ 53,\ 36,\ 61) = \tau_{25}\tau_{46}(12,\ 23,\ 34,\ 41),$$

et, de même,

$$\nu_2\nu_4(12,\ 23,\ 34,\ 41) = \tau_{15}\tau_{36}(12,\ 23,\ 34,\ 41).$$

Ce nombre est celui des familles de $C(\sigma_6^5)$; c'est la classe inversement semblable $C(\sigma_6'^5)$, où $\sigma_6'^5 = \nu'\sigma_6^5$, puisque

$$\nu'\nu_5\nu_6(12,\ 23,\ 34,\ 41) = (13,\ 24,\ 56) = \tau_{23}\sigma_6^5.$$

10. Les S_6 à cinq ε_{ij} négatifs sont fournis par les solutions du système

$$2d + s = 10, \qquad d + s + c = 6;$$

on a donc $d = c + 4 \leqq 5$, qui donne $c \leqq 1$, d'où résultent les deux solutions

(8) $d = 4, \quad s = 2, \quad c = 0,$

(9) $d = 5, \quad s = 0, \quad c = 1.$

Dans les S_6 qui relèvent de (8), les deux points simples peuvent être adjacents, ou unis séparément à un même point double, ou à deux points doubles; il existe donc 3 types de graphique. Par contre, (9) fournit un seul type, comme à l'alinéa η des S_5.

η_1. Les S_6 qui vérifient (8), et dont les points simples sont unis, sont du type (12, 23, 34, 41 ; 56), et au nombre de 45, comme dans les classes $C(\sigma_6^3)$ et $C(\sigma_6'^{3})$. On retrouve cette dernière, car

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 34, 41 ; 56) = (16, 36; 25, 45)$$

est du type formé à l'alinéa δ_2.

η_2. Lorsque les deux points simples sont unis à un même point, les S_6 fournis par (8) sont du type (12, 23, 31 ; 45, 56). Leur nombre est $6 \times \frac{5 \times 4}{2} = 60$, mais ils sont réductibles par (ν) quatre à quatre, car

$$\nu_1\nu_5(12, 23, 31; 45, 56) = (52, 23, 35; 41, 16) = \tau_{15}(12, 23, 31; 45, 56),$$

et l'on voit de même que $\nu_2\nu_5$ et $\nu_3\nu_5$ équivalent respectivement, pour ce système, à τ_{25} et τ_{35}. Cette classe comprend ainsi 15 familles, comme $C(\sigma_6^2)$; c'est la classe inversement semblable, puisque

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12, 23, 31; 45, 56) = (46).$$

Nous la désignons par $C_2' = C(\sigma_2')$, où $\sigma_6'^{2} = \nu'\sigma_6^2$.

η_3. Lorsque les deux points simples sont unis à deux points doubles, les S_6 fournis par (8) sont du type (12, 23, 34, 45, 56), et au nombre de $\frac{6!}{2} = 360$. Ils forment 180 familles car ils sont équivalents par (ν), deux à deux, en vertu de

$$\nu_2\nu_5(12, 23, 34, 45, 56) = (15, 53, 34, 42, 26) = \tau_{25}(12, 23, 34, 45, 56).$$

C'est le nombre des familles de $C(\sigma_6^7)$; il s'agit de $C(\sigma_6'^{7})$ car

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 34, 45, 56) = (41, 16, 63; 25)$$

est du type étudié à l'alinéa δ_1.

η_4. Les S_6 fournis par (9) sont ceux dont le graphique comporte un pentagone, et dont un type est

$$\sigma_6^{10} = (12, 23, 34, 45, 51).$$

Ils sont au nombre de $6 \times \frac{5!}{5 \times 2} = 72$, mais ils ne forment que 12 familles, car ils sont équivalents six à six par (ν). En effet, les transformations $\nu_i\nu_j$ dont les indices i, j désignent deux sommets non consécutifs transforment ce pentagone en un autre pentagone; c'est ainsi qu'on a

$$\nu_1\nu_3(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51)=(16,\ 63,\ 35,\ 54,\ 41)=\tau_{26}\tau_{45}\sigma_6^{10},$$

donc, par des transpositions évidentes,

$$\nu_2\nu_4\sigma_6^{10}=\tau_{36}\tau_{15}\sigma_6^{10},\qquad \nu_3\nu_5\sigma_6^{10}=\tau_{46}\tau_{12}\sigma_6^{10},$$
$$\nu_1\nu_4\sigma_6^{10}=\tau_{56}\tau_{23}\sigma_6^{10},\qquad \nu_2\nu_5\sigma_6^{10}=\tau_{16}\tau_{34}\sigma_6^{10}.$$

Cette classe est en outre invariante par ν', car

$$\nu'\nu_6(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51)=(13,\ 35,\ 52,\ 24,\ 41)$$

est le pentagone formé par les diagonales de celui qui représente σ_6^{10}. Le déterminant de cette classe $C(\sigma_6^{10})$ est une fonction paire de a.

11. Les S_6 dont six ε_{ij} sont négatifs sont fournis par les solutions du système

$$2d+s=12,\qquad d+s+c=6;$$

on a donc $d=c+6\leqq 6-c$, et, par suite, la solution unique $d=6$, $s=c=0$. Cependant, les six segments peuvent former deux triangles ou un hexagone.

ζ_1. Les S_6 représentés par deux triangles sont du type $(12,\ 23,\ 31;\ 45,\ 56,\ 64)$ et sont au nombre de $\frac{1}{2}\times\frac{6\times5\times4}{6}=10$. Cependant, ils sont tous équivalents par (ν), car, sur le type cité, chacune des 9 transformations

$$\nu_i\nu_j\,(i=1,\ 2,\ 3;\ j=4,\ 5,\ 6)$$

équivaut à la transposition τ_{ij}. La famille unique de cette classe a justement pour type $\sigma_6'^{1}=\nu'\sigma_6^1$, comme le montre $\nu_1\nu_2\nu_3(12,\ 23,\ 31;\ 45,\ 56,\ 64)$, dont tous les ε_{ij} sont négatifs.

ζ_2. Il y a $\frac{6\,!}{6\times2}=60\ S_6$ dont le diagramme est un hexagone; un type en est $(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 56,\ 61)$. Cependant

$$\nu_1\nu_4(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 56,\ 61)=(13,\ 32,\ 24,\ 46,\ 65,\ 51)=\tau_{23}\tau_{56}(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 56,\ 61);$$

par suite, $\nu_2\nu_5$ et $\nu_3\nu_6$ transforment ce type comme le font respectivement $\tau_{34}\tau_{61}$ et $\tau_{45}\tau_{12}$; la classe de ces S_6 ne contient que 15 familles. Ce n'est pas une classe nouvelle, puisque

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 56,\ 61)=(14;\ 25;\ 36)\in C(\sigma_6^5).$$

12. La discussion est close puisqu'on ne peut tracer plus de six segments sans tripler au moins un des six sommets. Les 1014 familles f irréductibles par (ν)

se partagent ainsi en 16 classes, dont nous donnons le tableau, avec les renseignements habituels, en n'indiquant que les S_6 sans sommet triple :

	$C_1 = C(\sigma_6^1) = C(\quad)$	$1\,f$	$\Delta_6^1 = (1-a)^5(1+5a)$
ζ_1 :	$C'_1 = C(\sigma'_6{}^1) = \nu' C_1$	$1\,f$	$\Delta'_6{}^1 = (1+a)^5(1-5a)$
α :	$C_2 = C(\sigma_6^2) = C(12)$	$15\,f$	$\Delta_6^2 = (1-a)^3(1+a)(1+2a-11a^2)$
η_2 :	$C'_2 = C(\sigma'_6{}^2) = \nu' C_2$	$15\,f$	$\Delta'_6{}^2 = (1+a)^3(1-a)(1-2a-11a^2)$
β_1 :	$C_3 = C(\sigma_6^3) = C(12;\ 34)$	$45\,f$	$\Delta_6^3 = (1-a)(1+a)^2(1-3a)(1+2a-7a^2)$
δ_2 et η_1 :	$C'_3 = C(\sigma'_6{}^3) = \nu' C_3$	$45\,f$	$\Delta'_6{}^3 = (1+a)(1-a)^2(1+3a)(1-2a-7a^2)$
β_2 :	$C_4 = C(\sigma_6^4) = C(12,\ 13)$	$60\,f$	$\Delta_6^4 = (1-a)^3(1+3a-9a^2-19a^3)$
δ_3 :	$C'_4 = C(\sigma'_6{}^4) = \nu' C_4$	$60\,f$	$\Delta'_6{}^4 = (1+a)^3(1-3a-9a^2+19a^3)$
γ_1 et ζ_2 :	$C_5 = C(\sigma_6^5) = C(12;\ 34;\ 56)$	$15\,f$	$\Delta_6^5 = (1+a)^3(1-3a)^2(1+3a)$
δ_5 :	$C'_5 = C(\sigma'_6{}^5) = \nu' C_5$	$15\,f$	$\Delta'_6{}^5 = (1-a)^3(1+3a)^2(1-3a)$
γ_2 :	$C_6 = C'_6 = C(\sigma_6^6) = C(12,\ 13;\ 45)$	$180\,f$	$\Delta_6^6 = \Delta'_6{}^6 = (1-a)(1+a)(1-14a^2+29a^4)$
γ_3 :	$C_7 = C(\sigma_6^7) = C(12,\ 23,\ 34)$	$180\,f$	$\Delta_6^7 = (1-a)(1-5a^2)(1+a-9a^2-a^3)$
δ_1 et η_3 :	$C'_7 = C(\sigma'_6{}^7) = \nu' C_7$	$180\,f$	$\Delta'_6{}^7 = (1+a)(1-5a^2)(1-a-9a_2+a^3)$
γ_4 :	$C_8 = C'_8 = C(\sigma_6^8) = C(12,\ 23,\ 31)$	$20\,f$	$\Delta_6^8 = \Delta'_6{}^8 = (1-a)^2(1+a)^2(1-13a^2)$
δ_4 :	$C_9 = C'_9 = C(\sigma_6^9) = C(12,\ 23,\ 34,\ 45)$	$180\,f$	$\Delta_6^9 = \Delta'_6{}^9 = (1-a)(1+a)(1-3a)(1+3a)(1-5a^2)$
η_4 ;	$C_{10} = C'_{10} = C(\sigma_6^{10}) = C(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51)$	$12\,f$	$\Delta_6^{10} = \Delta'_6{}^{10} = (1-5a^2)^3$

Seuls σ_6^1 et $\sigma'_6{}^1$ sont strictement isogonaux, et les systèmes directement semblables à un système strictement isogonal sont les 64 systèmes des deux premières classes C_1 et C'_1. On observe que les déterminants des 16 classes sont des polynomes distincts, donc deux S_6 isogonaux sont directement semblables pourvu que leurs déterminants Δ_6 soient deux polynomes identiques.

CHAPITRE III.

Les heptasphères isogonaux.

13. Les $2^{21} = 2\,097\,152$ S_7 se groupent en $2^{15} = 32\,768$ familles f contenant chacune $2^6 = 64$ systèmes équivalents par (ν). Les transformations ν_i modifient les six $\varepsilon_{i\alpha}$ dont l'indice α diffère de i, les produits $\nu_i\nu_j(i \neq j)$ changent les signes des dix $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul indice est i ou j, et les $\nu_i\nu_j\nu_k$ (i, j, k distincts) changent les douze $\varepsilon_{\alpha\beta}$ dont un seul indice est i, j ou k. Ces transformations sont les seuls éléments de (ν), avec l'identité. La discussion ne peut pas ignorer les S_7 dont le diagramme a un ou plusieurs points triples. Cependant, si S_7 a deux sommets triples i, j non adjacents, les six segments qui en partent deviennent quatre segments par $\nu_i\nu_j$, ce qui réduit de deux unités le nombre des traits du graphique ; autrement dit, un tel S_7 est directement semblable à un heptasphère rencontré

auparavant dans la discussion. Pour un motif analogue, il est inutile d'examiner les S_7 qui ont deux points triples adjacents, i et j, mais aucun point double non adjacent à i, car ν_i ne crée aucun point triple, et fait du sommet j un point double. L'examen des S_7 dont un sommet i est d'ordre plus grand que 3 est sans objet puisque ν_i réduirait de deux unités au moins le nombre des traits du graphique.

Nous prenons toujours le système strictement isogonal

$$\sigma_7^1 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{array} \right\} = (\ )$$

pour type de la première famille f, qui constitue la première classe C_1.

α. Les S_7 dont un seul ε_{ij} vaut -1 ne peuvent être semblables à σ_7^1, mais le sont entre eux par (τ). Aux 21 symboles ε_{ij} correspondent ainsi 21 familles f, réductibles l'une à l'autre par (τ), et groupées dans une même classe $C_2 = C(\sigma_7^2)$, dont le système type est, par exemple, $\sigma_7^2 = (12)$.

β. Comme pour $n = 6$, les S_7 représentés par deux traits se groupent en deux classes.

β_1. Sans sommet double, S_7 est du type

$$\sigma_7^3 = (12;\ 34);$$

ces S_7 sont au nombre de $\frac{1}{2} \times \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{5 \times 4}{2} = 105$, et fournissent par (ν) autant de familles.

β_2. Les S_7 qui ont un point double ont pour type

$$\sigma_7^4 = (12,\ 13),$$

et donnent également 105 familles.

14. Les S_7 dont le diagramme a trois traits ont un point triple au plus. S'il n'y en a pas, les sommets vérifient le système d'équations

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 7,$$

donc $d = c - 1 \leqq 3$; on en conclut que $1 \leqq c \leqq 4$, ce qui donne 4 solutions

$$(1) \qquad d = 0, \quad s = 6, \quad c = 1,$$
$$(2) \qquad d = 1, \quad s = 4, \quad c = 2,$$
$$(3) \qquad d = 2, \quad s = 2, \quad c = 3,$$
$$(4) \qquad d = 3, \quad s = 0, \quad c = 4.$$

Avec un sommet triple, la seule solution est évidemment

$$(5) \qquad t=1, \quad d=0, \quad s=3, \quad c=3,$$

t désignant systématiquement le nombres des points triples.

γ_1. Les S_7 fournis par (1) sont du type

$$\sigma_7^5=(12;\ 34;\ 56),$$

et au nombre de $7\times5\times3=105$; ils donnent, par (ν), autant de familles.

γ_2. Les S_7 déduits de (2) sont ceux du type

$$\sigma_7^6=(12,\ 13;\ 45),$$

au nombre de $7\times\frac{6\times5}{2}\times\frac{4\times3}{2}=630$, associés à autant de familles.

γ_3. (3) ne donne que les S_7 du type

$$\sigma_7^7=(12,\ 23,\ 34);$$

ils sont au nombre de $\frac{7\times6\times5\times4}{2}=420$, et fournissent par ($\nu$) autant de familles.

γ_4. Les S_7 fournis par (4) sont naturellement ceux du type

$$\sigma_7^8=(12,\ 23,\ 31),$$

au nombre de 35, et donnant autant de familles.

γ_5. Enfin, la solution (5) fournit les S_7 du type

$$\sigma_7^9=(12,\ 13,\ 14);$$

ils sont au nombre de 140; ils ne donnent pourtant que 70 familles, car

$$\nu_1(12,\ 13,\ 14)=(15,\ 16,\ 17).$$

15. S_7 ne peut avoir deux sommets triples si son diagramme a moins de cinq traits, donc $t=0$ ou 1 pour les S_7 à quatre ε_{ij} négatifs. Ceux pour lesquels $t=0$ sont déterminés par les relations

$$2d+s=8, \qquad d+s+c=7,$$

soit $d=c+1$, $s=6-2c$, donc $0\leqq c\leqq 3$; on obtient ainsi les quatre solutions

$$(6) \qquad t=0, \quad d=1, \quad s=6, \quad c=0,$$
$$(7) \qquad t=0, \quad d=2, \quad s=4, \quad c=1,$$
$$(8) \qquad t=0, \quad d=3, \quad s=2, \quad c=2,$$
$$(9) \qquad t=0, \quad d=4, \quad s=0, \quad c=3.$$

Avec $t=1$, le système à résoudre est

$$2d+s=5, \qquad d+s+c=6,$$

d'où résultent $d=c-1$, $s=7-2c$, donc $1 \leqq c \leqq 3$; on obtient ainsi les trois solutions

(10) $t=1, \quad d=0, \quad s=5, \quad c=1,$

(11) $t=1, \quad d=1, \quad s=3, \quad c=2,$

(12) $t=1, \quad d=2, \quad s=1, \quad c=3.$

δ_1. Les S_7 déduits de (6) sont ceux du type

$$\sigma_7^{10}=(12,\ 13;\ 45;\ 67);$$

ils sont au nombre de $7 \times \frac{6 \times 5}{2} \times 3 = 315$, et donnent autant de familles.

δ_2. Lorsque $d=2$, les deux points doubles peuvent être unis, ou non, comme pour les S_6. Dans le premier cas, S_7 est du type

$$\sigma_7^{11}=(12,\ 23,\ 34;\ 56);$$

ces S_7 sont sept fois plus nombreux que les S_6 du même type, donc au nombre de 1260, et donnent autant de familles.

δ_3. Les autres solutions de (7) sont les S_7 du type

$$\sigma_7^{12}=(12,\ 13;\ 45,\ 46),$$

au nombre de $\frac{7!}{8}=630$; ils donnent autant de familles.

δ_4. Comme pour $n=5$ ou 6, (8) convient à deux types de systèmes. Un premier type est

$$\sigma_7^{13}=(12,\ 23,\ 31;\ 45);$$

il y a $35 \times 6 = 210$ S_7 de ce type, et autant de familles.

δ_5. Un deuxième type est

$$\sigma_7^{14}=(12,\ 23,\ 34,\ 45);$$

il y a $\frac{7!}{4}=1260$ S_7 de ce type, et autant de familles.

δ_6. La solution (9) conduit aux seuls systèmes représentés par un quadrilatère du type

$$\sigma_7^{15}=(12,\ 23,\ 34,\ 41).$$

Ils sont au nombre de $7 \times 5 \times 3 = 105$, et fournissent autant de familles.

δ_7. Les S_7 qui satisfont à (10) sont du type

$$\sigma_7^{16}=(12,\ 13,\ 14;\ 56),$$

ils sont au nombre de $7 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3\,!} \times 3 = 420$, et donnent, par ($\nu$), autant de familles.

δ_8. Les S_7 déduits de (11) sont ceux du type

$$\sigma_7^{17} = (12, 23; 14, 15);$$

il y en a $7 \times 6 \times 5 \times \frac{4 \times 3}{2} = 1260$, mais ils ne donnent que 630 familles, d'après

$$\nu_1(12, 23; 14, 15) = (13, 32; 16, 17) = \tau_{23}\tau_{46}\tau_{57}\sigma_7^{17}.$$

δ_9. Enfin (12) fournit les S_7 du type (12, 23, 31; 14), qui sont au nombre de $35 \times 12 = 420$. C'est effectivement la classe $C(\sigma_7^{16})$, car

$$\nu_1(12, 23, 31; 14) = (15, 16, 17; 23) = \tau_{25}\tau_{36}\tau_{47}\sigma_7^{16}.$$

16. Un S_7 représenté par cinq traits a deux points triples au plus. Si $t = 2$, la remarque que nous avons faite au début du paragraphe 13 permet de supposer que les deux points triples sont unis; les points doubles possibles leur sont nécessairement adjacents, et la même remarque permet d'écarter ces systèmes.

Les S_7 sans point triple sont associés au système d'équations

$$2d + s = 10, \qquad d + s + c = 7,$$

de sorte que $d = c + 3$, $s = 4 - 2c$; on a donc $0 \leqq c \leqq 2$, et, par suite, trois solutions

(13)	$t = 0,$	$d = 3,$	$s = 4,$	$c = 0,$
(14)	$t = 0,$	$d = 4,$	$s = 2,$	$c = 1,$
(15)	$t = 0,$	$d = 5,$	$s = 0,$	$c = 2.$

Si $t = 1$, le système à résoudre est

$$2d + s = 7, \qquad d + s + c = 6,$$

ce qui donne $d = c + 1$, $s = 5 - 2c$, donc $0 \leqq c \leqq 2$; nous obtenons encore trois solutions

(16)	$t = 1,$	$d = 1,$	$s = 5,$	$c = 0,$
(17)	$t = 1,$	$d = 2,$	$s = 3,$	$c = 1,$
(18)	$t = 1,$	$d = 3,$	$s = 1,$	$c = 2.$

Les diagrammes qui vérifient (13) sont de trois sortes, selon que quatre, deux ou zéro points simples sont isolés des points doubles. Ceux que fournissent (14) et (15) sont analogues à ceux déduits au paragraphe 10 des équations (8) et (9); il y en a respectivement trois types distincts et un type. La solution (16) fournit deux sortes de systèmes suivant que le sommet triple est adjacent, ou non, au point double. Dans les S_7 qui vérifient (17), le point triple est nécessairement adjacent à un ou deux points doubles; la première circonstance fournit un seul type, et la deuxième en donne deux. La solution (18) donne deux sortes de systèmes, selon que le sommet simple est uni, ou non, au point triple.

η_1. Les S_7 qui vérifient (13), et dont les quatre sommets simples sont isolés des points doubles, sont du type (12, 23, 31; 45; 67); il y en a $\frac{7\times 6\times 5}{3\,!}\times 3 = 105$, et autant de familles; c'est le nombre obtenu en δ_6, et la classe formée ici est justement la classe inversement semblable à $C(\sigma_7^{15})$; en effet,

$$\nu'\nu_1\nu_2\nu_3(12,\ 23,\ 31;\ 45;\ 67) = (65,\ 57,\ 74,\ 46) = \tau_{16}\tau_{25}\tau_{37}\sigma_7^{15}.$$

Nous prendrons pour type de cette classe $\sigma_7'^{15} = \nu'\sigma_7^{15}$.

η_2. Lorsque deux sommets simples seulement sont isolés des points doubles, les S_7 déduits de (13) sont du type

$$\sigma_7^{18} = (12,\ 23,\ 34,\ 45;\ 67);$$

ils sont au nombre de $\frac{7\times 6}{2}\times\frac{5\,!}{2} = 1260$, et donnent autant de familles.

η_3. La troisième solution fournie par (13) consiste en les S_7 du type (12, 23, 34; 56, 67), et trois fois plus nombreux que ceux de l'alinéa γ_3, soit au nombre de $420\times 3 = 1260$. C'est le nombre trouvé en δ_2, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12,\ 23,\ 34;\ 56,\ 67) = (24,\ 41,\ 13;\ 57) \in C(\sigma_7^{11}).$$

Nous prendrons $\sigma_7'^{11} = \nu'\sigma_7^{11}$ comme type de cette classe de 1260 familles.

η_4. A la classe formée à l'alinéa η_1 du paragraphe 10 correspondent ici les S_7 du type (12, 23, 34, 41; 56). Leur nombre est donc $45\times 7 = 315$, et ils donnent autant de familles. C'est le nombre trouvé pour la classe $C(\sigma_7^{10})$ en δ_1, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12,\ 23,\ 34,\ 41;\ 56) = (57,\ 76;\ 13;\ 24).$$

Nous prendrons $\sigma_7'^{10} = \nu'\sigma_7^{10}$ pour type de cette classe de 315 familles.

η_5. La deuxième solution déduite de (14) est formée par les systèmes du type obtenu à l'alinéa η_2 (§ 10), soit (12, 23, 31; 45, 56); ils sont au nombre de $60\times 7 = 420$, et fournissent autant de familles. C'est le nombre trouvé pour $C(\sigma_7^{16})$, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_6(12,\ 23,\ 31;\ 45,\ 56) = (71,\ 72,\ 73;\ 46).$$

Nous désignerons cette classe par $C(\sigma_7'^{16})$ où $\sigma_7'^{16} = \nu'\sigma_7^{16}$.

η_6. L'alinéa η_3 (§ 10) donne de même le troisième type associé à (14), soit

$$\sigma_7^{19} = (12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 56).$$

Ces S_7 sont au nombre de $360\times 7 = 2520$, et fournissent autant de familles.

η_7. Enfin l'alinéa η_4 (§ 10) donne les S_7 associés à (15), du type de

$$\sigma_7^{20} = (12, 23, 34, 45, 51).$$

Il y en a $\frac{7^2 \times 7}{2} = 252$, et ils donnent autant de familles.

η_8. Les S_7 de la solution (16), dont les points double et triple ne sont pas adjacents, sont du type de (12, 13, 14; 56, 67); ils sont au nombre de $7 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{6} \times 3 = 420$, mais ne se répartissent que dans 210 familles, car

$$\nu_1 \nu_6 (12, 13, 14; 56, 67) = (62, 63, 64; 51, 17) = \tau_{16}(12, 13, 14; 56, 67).$$

C'est le nombre des familles de la classe de σ_7^{13}, et l'on a en effet

$$\nu' \nu_5 \nu_6 \nu_7 (12, 13, 14; 56, 67) = (23, 34, 42; 57).$$

Nous prendrons $\nu' \sigma_7^{13} = \sigma_7'^{13}$ pour type de cette classe.

η_9. Les S_7 de la solution (16) dont le point double est uni au point triple sont du type

$$\sigma_7^{21} = (12, 23; 14, 15; 67);$$

ils sont au nombre de $7 \times 6 \times 5 \times \frac{4 \times 3}{2} = 1260$, et donnent autant de familles.

η_{10}. Les S_7 de la solution (17), dont le point triple est uni [9] à un seul point double, sont du type

$$\sigma_7^{22} = (12, 23, 34; 15, 16).$$

Il y en a $\frac{1}{2} 7! = 2520$, mais ils ne donnent que 1260 familles, d'après

$$\nu_1 \nu_3 (12, 23, 34; 15, 16) = (37, 71, 14; 35, 36) = \tau_{13} \tau_{27} \sigma_7^{22}.$$

η_{11}. Lorsque le point triple d'un S_7 associé à (17) est uni aux deux points doubles, ceux-ci peuvent être eux-mêmes adjacents ou non. Dans le premier cas, un trait unit deux des points simples, et le S_7 est du type (12, 23, 31; 14; 56). Le nombre des S_7 de ce type est $\frac{7 \times 6 \times 5}{2} \times 4 \times 3 = 1260$, mais ils ne donnent que 630 familles, d'après

$$\nu_1 (12, 23, 31; 14; 56) = (15, 56, 61; 17; 23) = \tau_{25} \tau_{36} \tau_{47} (12, 23, 31; 14; 56).$$

La classe obtenue est la classe inversement semblable à $C(\sigma_7^{12})$, puisque [10]

$$\nu' \nu_5 \nu_6 \nu_7 (12, 23, 31; 14; 56) = (42, 43; 75, 76) = \tau_{14} \tau_{47} \sigma_7^{12}.$$

Nous prendrons $\sigma_7'^{12} = \nu' \sigma_7^{12}$ pour type de cette classe.

η_{12}. Lorsque les deux points doubles, adjacents au point triple, sont adja-

---

[9] Rappelons qu'uni et adjacent sont synonymes.

[10] Le produit $\tau_{14} \tau_{74}$ s'entend en l'effectuant de droite à gauche.

cents à deux sommets simples, le S_7 est du type

$$\sigma_7^{23} = (12, 23; 14, 45; 16).$$

Ces systèmes sont au nombre de $\frac{7!}{2} = 2520$, mais ne donnent que 1 260 familles, car

$$\nu_1(12, 23; 14, 45; 16) = (13, 32; 15, 54; 17) = \tau_{23}\tau_{45}\tau_{67}\sigma_7^{23}.$$

η_{13}. Les S_7 qui vérifient (18), et dont le sommet simple est uni au point triple, sont du type

$$\sigma_7^{24} = (12, 23, 34, 41; 15);$$

il y en a $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2} \times 3 = 1260$, mais ils ne donnent que 630 familles, d'après

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34, 41; 15) = (36, 61, 17, 73; 35) = \tau_{13}\tau_{26}\tau_{47}\sigma_7^{24}.$$

η_{14}. Les autres S_7 fournis par (18) sont ceux du type (12, 23, 31; 14, 45). Ils sont au nombre de 1 260, mais ne donnent rien d'autre que la classe $C(\sigma_7^{21})$, puisque

$$\nu_1(12, 23, 31; 14, 45) = (15, 54; 16, 17; 23).$$

17. Les graphiques formés par six segments vérifient le système d'équations

$$3t + 2d + s = 12, \qquad t + d + s + c = 7,$$

donc $t \leqq 4$. Ceux qui n'ont pas de point triple, et qui font l'objet de ce paragraphe, se rattachent au système

$$2d + s = 12, \qquad d + s + c = 7,$$

d'où l'on tire $d = c + 5$, $s = 2 - 2c$, donc $c \leqq 1$. On obtient ainsi les deux cas

$$(19) \qquad t = 0, \qquad d = 5, \qquad s = 2, \qquad c = 0,$$
$$(20) \qquad t = 0, \qquad d = 6, \qquad s = 0, \qquad c = 1.$$

Le solution (19) fournit quatre types de diagramme, suivant que celui-ci comprend un pentagone, un quadrilatère, un triangle, ou une seule ligne brisée ouverte. Les graphiques conformes à (20) sont analogues à ceux que nous avons formés au paragraphe 11, avec $n = 6$.

ζ_1. Un premier type conforme à (19) est (12, 23, 34, 45, 51; 67). Les S_7 de ce type sont au nombre de $\frac{7 \times 6}{2} \times \frac{5!}{5 \times 2} = 252$; c'est le nombre des systèmes du type de σ_7^{20}, et l'on a en effet

$$\nu'\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 45, 51; 67) = (13, 35, 52, 24, 41) = \tau_{23}\tau_{45}\sigma_7^{20}.$$

Nous formons donc ici la classe $C(\sigma_7'^{20})$, de 252 familles, dont un type est $\sigma_7'^{20} = \nu'\sigma_7^{20}$.

ζ_2. Les S_7 conformes à (19), et qui comprennent un quadrilatère, sont du type (12, 23, 34, 41; 56, 67). Ils sont au nombre de $7 \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4!}{4 \times 2} = 315$, mais ne donnent que 105 familles; en effet

$$\nu_1 \nu_3 \nu_6 (12, 23, 34, 41; 56, 67) = (15, 53, 37, 71; 26, 64) = \tau_{25}\tau_{47}(12, 23, 34, 41; 56, 67),$$

et, de même, $\nu_2 \nu_4 \nu_6$ transforme ce système type comme $\tau_{15}\tau_{37}$. Ce nombre est celui des familles obtenues à l'alinéa γ_1, ce qui s'explique par

$$\nu' \nu_5 \nu_6 \nu_7 (12, 23, 34, 41; 56, 67) = (13, 24, 57) = \tau_{23}\tau_{67}\sigma_7^5.$$

Nous prendrons $\sigma_7'^5 = \nu' \sigma_7^5$ comme type de cette classe inversement semblable à $C(\sigma_7^5)$.

ζ_3. Les solutions de (19) dont le graphique contient un triangle sont les S_7 du type (12, 23, 31; 45, 56, 67). Il y en a $\frac{7 \times 6 \times 5}{3!} \times \frac{4!}{2} = 420$, donnant autant de familles. C'est la classe inversement semblable à $C(\sigma_7^7)$, comme le montre

$$\nu' \nu_1 \nu_2 \nu_3 (12, 23, 31; 45, 56, 67) = (64, 47, 75).$$

Nous désignerons cette classe par $C(\sigma_7'^7)$ où $\sigma_7'^7 = \nu' \sigma_7^7$.

ζ_4. La quatrième solution déduite de (19) est la classe des S_7 qui sont du type de (12, 23, 34, 45, 56, 67). Ces S_7, au nombre de $\frac{1}{2} 7! = 2\,520$, ne donnent que 1 260 familles, car

$$\nu_2 \nu_4 \nu_6 (12, 23, 34, 45, 56, 67) = (52, 27, 74, 41, 16, 63) = \tau_{15}\tau_{37}(12, 23, 34, 45, 56, 67).$$

Cette classe est la classe inversement semblable à $C(\sigma_7^{23})$, d'après

$$\nu' \nu_5 \nu_6 \nu_7 (12, 23, 34, 45, 56, 67) = (41, 13; 45, 57; 42).$$

On prendra $\sigma_7'^{23} = \nu' \sigma_7^{23}$ pour type de cette classe.

ζ_5. Un premier type de système vérifiant (20) a la représentation des S_6 formés à l'alinéa ζ_1 (§ 11), soit (12, 23, 31; 45, 56, 64). Le nombre de ces S_7 est $10 \times 7 = 70$, et ils donnent autant de familles. C'est le nombre trouvé pour la classe $C(\sigma_7^9)$, ce qui s'explique par

$$\nu' \nu_1 \nu_2 \nu_3 (12, 23, 31; 45, 56, 64) = (74, 75, 76).$$

Il s'agit donc de la classe $C(\sigma_7'^9)$, où $\sigma_7'^9 = \nu' \sigma_7^9$.

ζ_6. La deuxième solution fournie par (20) est la classe des S_7 du type

$$\sigma_7^{25} = (12, 23, 34, 45, 56, 61),$$

représenté par un hexagone. Ils sont sept fois plus nombreux que les S_6 de l'alinéa ζ_2 (§ 11), et donnent autant de familles, soit 420.

18. Les S_7 représentés par six segments, avec un seul sommet triple,

se rattachent au système de relations

$$2d+s=9, \qquad d+s+c=6;$$

ils sont donc tels qu'on ait $d=c+3$, $s=3-2c$. On obtient ainsi les deux solutions

$$(21) \qquad t=1, \quad d=3, \quad s=3, \quad c=0,$$
$$(22) \qquad t=1, \quad d=4, \quad s=1, \quad c=1.$$

Sept formes de graphique sont conformes à (21) : dans deux d'entre elles, deux des points simples sont adjacents, le troisième sommet simple étant uni à un point double ou au point triple; on obtient également deux formes de diagramme où deux points simples sont adjacents à deux points doubles, suivant que le troisième point simple est uni à un troisième point double ou au point triple; deux formes de graphique ont deux points simples unis au point triple; enfin un type de dessin a deux points simples unis à un même point double. On voit de même que (22) conduit à trois types de graphique, suivant que le point simple est uni au point triple, ou a un point double adjacent au point triple, ou à un point double adjacent à un autre point double.

ζ_7. La première solution déduite de (21) est du type de (12, 23, 31; 14, 45; 67). Ces S_7 sont au nombre de $7\times\frac{6\times5}{2}\times4\times3=1260$, mais ils ne donnent que 630 familles, d'après

$$\nu_1(12,\ 23,\ 31;\ 14,\ 45;\ 67)=(16,\ 67,\ 71;\ 15,\ 54;\ 23)=\tau_{26}\tau_{37}\tau_{45}(12,\ 23,\ 31;\ 14,\ 45;\ 67).$$

D'autre part,

$$\nu'\nu_6\nu_7(12,\ 23,\ 31;\ 14,\ 45;\ 67)=(52,\ 24,\ 43,\ 35;\ 51)=\tau_{15}\tau_{34}\sigma_7^{24}$$

montre qu'il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{24})$, où $\sigma_7'^{24}=\nu'\sigma_7^{24}$.

ζ_8. La deuxième solution conforme à (21) donne les S_7 du type de (12, 23, 34, 41; 15; 67). Il y en a également 1260, et ils donnent autant de familles. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{21})$ où $\sigma_7'^{21}=\nu'\sigma_7^{21}$, car [11]

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12,\ 23,\ 34,\ 41;\ 15;\ 67)=(51,\ 13;\ 56,\ 57;\ 24)\in C(\sigma_7^{21}).$$

ζ_9. Dans la troisième solution déduite de (21), les trois points simples sont unis aux trois points doubles, eux-mêmes unis au point triple. Ces S_7 sont donc du type (12, 23; 14, 45; 16, 67). Il y en a $\frac{1}{6}7!=840$, mais seulement 420 familles, d'après

$$\nu_1(12,\ 23;\ 14,\ 45;\ 16,\ 67)=(13,\ 32;\ 15,\ 54;\ 17,\ 76)=\tau_{23}\tau_{45}\tau_{67}(12,\ 23;\ 14,\ 45;\ 16,\ 67).$$

---

(11) $\nu'\nu_6\nu_7$ donnerait un S_7 du type formé à l'alinéa η_{14}.

Ce n'est rien d'autre que la classe $C(\sigma_7^{25})$, comme le montre

$$\nu_2\nu_4\nu_6(12,\ 23;\ 14,\ 45;\ 16,\ 67) = (25,\ 56,\ 63,\ 34,\ 47,\ 72).$$

ζ_{10}. La quatrième solution conforme à (21) est du type (12, 23, 34; 15, 56; 17). Cela fait $7\,! = 5\,040$ systèmes, répartis dans 2 520 familles, car

$$\nu_1\nu_3\nu_6(12,\ 23,\ 34;\ 15,\ 56;\ 17) = (67,\ 73,\ 35;\ 64,\ 41;\ 62) = \tau_{16}\tau_{27}\tau_{45}(12,\ 23,\ 34;\ 15,\ 56;\ 17).$$

C'est la classe $C(\sigma_7'^{19})$ où $\sigma_7'^{19} = \nu'\sigma_7^{19}$, comme le montre

$$\nu'\nu_2\nu_3\nu_4(12,\ 23,\ 34;\ 15,\ 56;\ 17) = (42,\ 21,\ 16,\ 67,\ 75) \in C(\sigma_7^{19}).$$

ζ_{11}. La cinquième solution fournie par (21) a un diagramme du type de (12, 23, 34, 45; 16, 17), où le troisième point simple est relié, mais non adjacent, au point triple. Mais cette classe n'est rien d'autre que la classe $C(\sigma_7'^{21})$ formée à l'alinéa ζ_8, car

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12,\ 23,\ 34,\ 45;\ 16,\ 17) = (56,\ 63,\ 37,\ 75;\ 52;\ 14).$$

ζ_{12}. Les S_7 fournis par (21), et dont les trois points simples sont unis au point triple, sont ceux du type de (12, 13, 14; 56, 67, 75). Bien qu'au nombre de $\dfrac{7\times6\times5\times4}{3\,!} = 140$, ils ne fournissent que 35 familles; en effet

$$\nu_1\nu_5(12,\ 13,\ 14;\ 56,\ 67,\ 75) = (52,\ 53,\ 54;\ 16,\ 67,\ 71) = \tau_{15}(12,\ 13,\ 14;\ 56,\ 67,\ 75),$$

et, de même, $\nu_1\nu_6$ et $\nu_1\nu_7$ équivalent respectivement à τ_{16} et τ_{17}. Il s'agit d'ailleurs de la classe $C(\sigma_7'^{8})$, où $\sigma_7'^{8} = \nu'\sigma_7^{8}$, d'après

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12,\ 13,\ 14;\ 56,\ 67,\ 75) = (42,\ 23,\ 34) = \tau_{14}\sigma_7^{8}.$$

ζ_{13}. La dernière solution que fournit (21) est l'ensemble des S_7 du type (12, 23, 31; 14; 56, 67). Ils sont au nombre de $7\times\dfrac{6\times5}{2}\times4\times3 = 1260$, mais il n'y a que 630 familles, parce que

$$\nu_1\nu_6(12,\ 23,\ 31;\ 14;\ 56,\ 67) = (62,\ 23,\ 36;\ 64;\ 51,\ 17) = \tau_{16}(12,\ 23,\ 31;\ 14;\ 56,\ 67).$$

C'est d'ailleurs la classe $C(\sigma_7'^{6})$ inversement semblable à $C(\sigma_7^{6})$, d'après

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12,\ 23,\ 31;\ 14;\ 56,\ 67) = (42,\ 43;\ 57) = \tau_{17}\tau_{14}\tau_7^{6}.$$

ζ_{14}. Un type de la première solution déduite de (22) est

$$\sigma_7^{26} = (12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51;\ 16).$$

Cela fait $\frac{1}{2}\,7\,! = 2\,520\ S_7$, mais seulement 840 familles, car

$$\nu_1\nu_3(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51;\ 16) = (37,\ 71,\ 14,\ 45,\ 53;\ 36) = \tau_{13}\tau_{27}\sigma_7^{26},$$

donc, pareillement,

$$\nu_1\nu_4\sigma_7^{26} = \tau_{14}\tau_{57}\sigma_7^{26}.$$

ζ_{15}. Les S_7 de la deuxième solution conforme à (22) sont ceux du type (12, 23, 34, 41 ; 15, 56). Il y en a encore $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, répartis dans 1 260 familles, car

$$\nu_2\nu_4\nu_5(12,\ 23,\ 34,\ 41;\ 15,\ 56) = (72,\ 26,\ 64,\ 47;\ 75,\ 53) = \tau_{17}\tau_{36}(12,\ 23,\ 34,\ 41;\ 15,\ 56).$$

Il s'agit d'ailleurs de la classe $C(\sigma_7'^{18})$, où $\sigma_7'^{18} = \nu'\sigma_7^{18}$, puisque

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12,\ 23,\ 34,\ 41;\ 15,\ 56) = (31,\ 15,\ 57,\ 76;\ 24) \in C(\sigma_7^{18}).$$

ζ_{16}. La dernière solution déduite de (22) est l'ensemble des S_7 du type (12, 23, 31 ; 14, 45, 56). Au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, ils donnent 1 260 familles, car

$$\nu_1\nu_5(12,\ 23,\ 31;\ 14,\ 45,\ 56) = (52,\ 23,\ 35;\ 57,\ 71,\ 16) = \tau_{15}\tau_{47}(12,\ 23,\ 31;\ 14,\ 45,\ 56).$$

Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{22})$, où $\sigma_7'^{22} = \nu'\sigma_7^{22}$, puisque

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_6(12,\ 23,\ 31;\ 14,\ 45,\ 56) = (71,\ 14,\ 46;\ 72,\ 73) \in C(\sigma_7^{22}).$$

19. Les S_7 dont le diagramme est formé par six traits, avec deux points triples, sont associés au système d'équations

$$2d + s = 6, \qquad d + s + c = 5,$$

donc tels qu'on ait $d = c + 1$, $s = 4 - 2c$. On obtient ainsi les trois solutions

$$(23) \qquad t = 2, \quad d = 1, \quad s = 4, \quad c = 0,$$
$$(24) \qquad t = 2, \quad d = 2, \quad s = 2, \quad c = 1,$$
$$(25) \qquad t = 2, \quad d = 3, \quad s = 0, \quad c = 2.$$

Rappelons-nous la remarque faite au début du chapitre. Il suffit alors de considérer les figures dont les deux points triples sont adjacents. Comme il est impossible de se conformer à (23) sans que le point double unique soit adjacent à l'un des sommets triples, (23) ne peut conduire à un type nouveau.

ζ_{17}. La même observation nous permet de n'examiner, parmi les S_7 conformes à (24), que ceux dont les deux sommets triples sont adjacents, sans qu'aucun d'eux soit adjacent aux deux points doubles. On n'obtient ainsi que les S_7 du type unique

$$\sigma_7^{27} = (12,\ 23,\ 34,\ 41;\ 15;\ 26).$$

Ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, mais ils ne donnent que 360 familles, grâce à la relation

$$\nu_1(12,\ 23,\ 34,\ 41;\ 15;\ 26) = (13,\ 32,\ 26,\ 61;\ 17;\ 34) = \tau_{23}\tau_{46}\tau_{57}\sigma_7^{27},$$

et à celles qu'on en déduit en permutant les sommets triples [12], et par itéra-

---

[12] Bien entendu, une telle permutation affecte d'autres sommets par raison de symétrie.

tion; il s'agit d'abord de

$$\nu_2 \sigma_7^{27} = \tau_{14}\tau_{35}\tau_{67}\sigma_7^{27},$$

puis, par itération, de

$$\nu_1\nu_3\sigma_7^{27} = \tau_{13}\tau_{26}\tau_{47}\sigma_7^{27}; \qquad \nu_2\nu_4\sigma_7^{27} = \tau_{15}\tau_{24}\tau_{37}\sigma_7^{27};$$

et enfin, par une nouvelle itération, de

$$\nu_1\nu_3\nu_6\sigma_7^{27} = \tau_{16}\tau_{27}\tau_{45}\sigma_7^{27}; \qquad \nu_2\nu_4\nu_5\sigma_7^{27} = \tau_{17}\tau_{25}\tau_{36}\sigma_7^{27}.$$

ζ_{18}. Pour les mêmes raisons, un seul type des S_7 fournis par (25) mérite la discussion. Il s'agit de ceux qui sont du type (12, 23, 34, 41; 15, 52), mais ils appartiennent à la classe $C(\sigma_7'^{18})$ déjà formés en ζ_{15}, car

$$\nu_1\nu_3(12, 23, 34, 41; 15, 52) = (37, 71, 16, 63; 35, 52).$$

20. Lorsque $t = 3$, les S_7 à six ε_{ij} négatifs sont fournis par le système de relations

$$2d + s = 3, \qquad d + s + c = 4,$$

donc par $d = c - 1$, $s = 5 - 2c$. Les seules valeurs admissibles de c sont $c = 1$ et $c = 2$, auxquelles correspondent les deux possibilités

$$\begin{aligned} t &= 3, \quad & d &= 0, \quad & s &= 3, \quad & c &= 1, \\ t &= 3, \quad & d &= 1, \quad & s &= 1, \quad & c &= 2. \end{aligned}$$

Les seuls diagrammes à retenir sont ceux dont les points triples forment un triangle. Mais ceux qui vérifient la première solution n'ont aucun point double, et ceux qui sont conformes à la deuxième peuvent être également ignorés car leur point double unique est nécessairement adjacent à un, et même deux, sommet triple.

Enfin, lorsque $t = 4$, le système d'équations associé

$$2d + s = 0, \qquad d + s + c = 3$$

n'a d'autre solution que $d = s = 0$, $c = 3$. Les quatre points triples sont unis deux à deux, mais ces S_7 sont hors de discussion puisqu'ils sont sans point double.

21. Les graphiques formés par sept segments vérifient le système d'équations

$$3t + 2d + s = 14, \qquad t + d + s + c = 7,$$

donc $t \leqq 4$. Ceux qui n'ont pas de point triple, et qui nous intéressent tout d'abord, sont assujettis aux équations

$$2d + s = 14, \qquad d + s + c = 7,$$

de sorte que $d = c + 7$, $s + 2c = 0$; il n'y a pas d'autre solution que

$$t = 0, \qquad d = 7, \qquad s = 0, \qquad c = 0.$$

Les sept points doubles ne peuvent former qu'un heptagone ou la réunion d'un quadrilatère et d'un triangle.

λ_1. Dans le premier cas, les S_7 sont du type (12, 23, 34, 45, 56, 67, 71). Il y en a $\frac{7!}{2 \times 7} = 360$, et ils donnent autant de familles. C'est le nombre des familles de la classe $C(\sigma_7^{27})$ formée à l'alinéa ζ_{17}. Il s'agit effectivement de la classe inversement semblable $C(\sigma_7'^{27})$, où $\sigma_7'^{27} = \nu' \sigma_7^{27}$, puisque

$$\nu' \nu_1 \nu_2 \nu_3 (12, 23, 34, 45, 56, 67, 71) = (47, 71, 13, 34; 46; 75) \in C(\sigma_7^{27}).$$

λ_2. Les S_7 représentés par un quadrilatère et un triangle sont du type (12, 23, 34, 41; 56, 67, 75). Il y en a $\frac{7!}{2 \times 4 \times 3!} = 105$, et ils donnent autant de familles. Il s'agit d'ailleurs de la classe $C(\sigma_7'^{3})$, où $\sigma_7'^{3} = \nu' \sigma_7^{3}$, d'après

$$\nu' \nu_5 \nu_6 \nu_7 (12, 23, 34, 41; 56, 67, 75) = (13, 24) = \tau_{23} \sigma_7^{3}.$$

22. Lorsque $t = 1$, les S_7 en question sont fournis par les équations

$$2d + s = 11, \qquad d + s + c = 6,$$

donc $d = c + 5$, $s = 1 - 2c$; il n'y a pas d'autre solution que

$$t = 1, \qquad d = 5, \qquad s = 1, \qquad c = 0.$$

Le point simple ne peut terminer une ligne brisée isolée du point triple. Si un segment l'unit à celui-ci, l'ablation de ce segment donne le graphique d'un S_6 à six segments et six sommets doubles, de l'un des deux types formés au paragraphe 11. Les diagrammes où deux segments relient le point simple au point triple se rattachent de même au S_5 à cinq segments et cinq points doubles formé à l'alinéa η(§6). Enfin, lorsqu'une ligne brisée de trois, ou quatre, traits relie le point simple au point triple, celui-ci forme respectivement un quadrilatère, ou un triangle, avec les trois, ou deux, sommets doubles restants.

λ_3. Les S_7 de la première de ces cinq solutions sont du type (12, 23, 31; 14; 56, 67, 75). Leur nombre est $7 \times \frac{6 \times 5}{2} \times 4 = 420$, mais ils ne donnent que 105 familles; en effet,

$$\nu_1 \nu_5 (12, 23, 31; 14; 56, 67, 75) = (52, 23, 35; 54; 16, 67, 71) = \tau_{15} (12, 23, 31; 14; 56, 67, 75),$$

et $\nu_1 \nu_6$, $\nu_1 \nu_7$ transforment de même ce type comme τ_{16} et τ_{17} respectivement. Nous trouvons ici la classe $C(\sigma_7'^{4})$, où $\sigma_7'^{4} = \nu' \sigma_7^{4}$, car

$$\nu' \nu_5 \nu_6 \nu_7 (12, 23, 31; 14; 56, 67, 75) = (42, 43) = \tau_{14} \sigma_7^{4}.$$

λ_4. Les S_7 de la deuxième solution sont du type $(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17)$. Ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, mais deux à deux équivalents par (ν), d'après

$$\nu_1\nu_4(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17) = (42, 23, 31, 15, 56, 64; 47) = \tau_{14}(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17).$$

Cette classe de 1260 familles a été formée à l'alinéa η_2(§ 16), puisque

$$\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17) = (25, 57, 73, 36; 14) \in C(\sigma_7^{18}).$$

λ_5. Les S_7 qui se rattachent aux S_5 de l'alinéa η (§6) sont du type $(12, 23, 34, 45, 51; 16, 67)$. Ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, mais trois à trois équivalents par (ν), car

$$\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23, 34, 45, 51; 16, 67) = (52, 27, 74, 41, 15; 56, 63)$$

transforme ce diagramme comme $\tau_{15}\tau_{37}$, et, par symétrie, $\nu_3\nu_5\nu_6$ équivaut à $\tau_{12}\tau_{47}$. Cette classe de 840 familles n'est rien d'autre que $C(\sigma_7'^{26})$, où $\sigma_7'^{26} = \nu'\sigma_7^{26}$, d'après

$$\nu'\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 45, 51; 16, 67) = (13, 35, 52, 24, 41; 16) \in C(\sigma_7^{26}).$$

λ_6. Les S_7, dont le graphique se réduit à un quadrilatère après l'ablation de trois traits, sont ceux du type $(12, 23, 34, 41; 15, 56, 67)$. Il y en a toujours 2 520, donnant 1 260 familles, d'après

$$\begin{aligned}\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23, 34, 41; 15, 56, 67) &= (52, 27, 74, 45; 51, 16, 63)\\ &= \tau_{15}\tau_{37}(12, 23, 34, 41; 15, 56, 67).\end{aligned}$$

C'est la classe $C(\sigma_7'^{11})$ formée à l'alinéa η_3, puisque

$$\nu_1\nu_3\nu_6(12, 23, 34, 41; 15, 56, 67) = (17, 73, 35; 46, 62) = \tau_{27}\tau_{45}(12, 23, 34; 56, 67).$$

La transformation $\nu'\nu_5\nu_6\nu_7$ fournirait directement un élément de $C(\sigma_7^{11})$.

λ_7. Les S_7 de la dernière solution sont du type $(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67)$. Toujours au nombre de 2 520, ils ne donnent que 630 familles. En effet,

$$\nu_1\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67) = (62, 23, 36; 64, 45, 51, 17) = \tau_{16}(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67);$$

de plus

$$\begin{aligned}\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67) &= (36, 61, 13; 34, 47, 72, 25)\\ &= \tau_{13}\tau_{26}\tau_{57}(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67),\end{aligned}$$

et, par symétrie,

$$\nu_3\nu_4\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67) = \tau_{12}\tau_{36}\tau_{57}(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67).$$

C'est la classe $C(\sigma_7'^{17})$, où $\sigma_7'^{17} = \nu'\sigma_7^{17}$, car

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 14, 45, 56, 67) = (45, 57; 42, 43) \in C(\sigma_7^{17}).$$

23. Les graphiques à sept traits et deux points triples relèvent du système d'équations

$$2d + s = 8, \qquad d + s + c = 5,$$

donc sont tels qu'on ait $d = c + 3$, $s = 2 - 2c$, et, par suite, $0 \leqq c \leqq 1$. On obtient ainsi les deux solutions

$$(26) \qquad t = 2, \quad d = 3, \quad s = 2, \quad c = 0,$$
$$(27) \qquad t = 2, \quad d = 4, \quad s = 0, \quad c = 1.$$

Nous n'étudions que les S_7 dont les deux points triples sont unis. La solution (26) donne alors huit formes distinctes, et (27) en donne trois, que nous passons en revue dans les alinéas λ_8 à λ_{15} pour (26), et λ_{16} à λ_{18} pour (27).

λ_8. Les S_7 de (26) dont les deux points simples sont unis sont nécessairement représentés par un diagramme contenant un quadrilatère et un triangle construits avec les sommets multiples, du type unique (12, 23, 34, 41 ; 15, 52 ; 67). Ils sont au nombre de $\frac{1}{4}\,7! = 1\,260$, et donnent autant de familles. C'est la classe $C(\sigma_7'^{14})$, où $\sigma_7'^{14} = \nu'\sigma_7^{14}$, d'après

$$\nu'\nu_6\nu_7(12, 23, 34, 41 ; 15, 52 ; 67) = (13, 35, 54, 42) \in C(\sigma_7^{14}).$$

λ_9. Les S_7 dont les deux points simples sont unis à un même point double sont nécessairement du type (12; 13, 32; 14, 42; 56, 67). Il y en a $7 \times \frac{6\times 5}{2} \times \frac{4\times 3}{2} = 630$, se repartissant dans six fois moins de familles, car leur classe est la classe $C(\sigma_7'^{3})$ formée à l'alinéa λ_2; on a en effet

$$\nu_3\nu_4\nu_6(12 ; 13, 32 ; 14, 42 ; 56, 67) = (35, 54, 47, 73 ; 12, 26, 61) \in C(\sigma_7'^{3}).$$

On pourrait aussi former directement [13]

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12 ; 13, 32 ; 14, 42 ; 56, 67) = (34 ; 57) = \tau_{15}\tau_{27}\sigma_7^{3}.$$

λ_{10}. Les S_7 dont les points simples sont unis à un même point triple sont du type (12; 13, 34, 45, 51; 26, 27). Il y en a $7 \times 6 \times \frac{5\times 4\times 3}{2} = 1\,260$, mais ils ne donnent que 315 familles, car ν_1, $\nu_2\nu_4$ et $\nu_1\nu_2\nu_4$ transforment ce type en trois autres S_7 de même forme. Ce n'est rien d'autre que la classe $C(\sigma_7'^{10})$, déjà formée à l'alinéa η_4, comme le montrent soit

$$\nu_2\nu_3\nu_5(12 ; 13, 34, 45, 51 ; 26, 27) = (36, 65, 57, 73 ; 24) \in C(\sigma_7'^{10}),$$

soit

$$\nu'\nu_2\nu_6\nu_7(12 ; 13, 34, 45, 51 ; 26, 27) = (21, 14 ; 35 ; 67) = \tau_{12}\tau_{34}\tau_7^{10}.$$

λ_{11}. Lorsque les deux points simples sont adjacents aux points triples, ceux-ci

---

(13) ν_1, ν_2, $\nu_1\nu_6$, $\nu_2\nu_6$ et $\nu_1\nu_2\nu_6$ transforment (12; 13, 32; 14, 42; 56, 67) en cinq S_7 du même type.

forment nécessairement un pentagone avec les trois points doubles, et S_7 est du type $(12;\ 13, 34, 45, 52;\ 16;\ 27)$. Il y en a $\frac{1}{2}\,7! = 2\,520$, mais ils sont équivalents six à six par (ν); en effet,

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_5(12;\ 13, 34, 45, 52;\ 16;\ 27) &= (57;\ 53, 34, 41, 17;\ 56;\ 72)\\ &= \tau_{15}\tau_{27}(12;\ 13, 34, 45, 52;\ 16;\ 27);\end{aligned}$$

par symétrie, $\nu_2\nu_3$ équivaut, pour ce type, à $\tau_{23}\tau_{16}$. En réitérant, on est conduit à former $\nu_1\nu_5\nu_7\nu_3$, qui équivaut à $\nu_2\nu_4\nu_6$, soit

$$\nu_2\nu_4\nu_6(12;\ 13, 34, 45, 52;\ 16;\ 27) = (36;\ 31, 14, 47, 76;\ 32;\ 65),$$

et de même, par symétrie,

$$\nu_1\nu_4\nu_7(12;\ 13, 34, 45, 52;\ 16;\ 27) = (57;\ 52, 24, 46, 67;\ 51;\ 73),$$

et enfin, par une nouvelle itération,

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_2\nu_4(12;\ 13, 34, 45, 52;\ 16;\ 27) &= (12;\ 17, 74, 46, 62;\ 15;\ 23)\\ &= \tau_{37}\tau_{56}(12;\ 13, 34, 45, 52;\ 16;\ 27).\end{aligned}$$

Ces 420 familles sont inversement semblables à celles de $C(\sigma_7^{25})$, car

$$\nu'\nu_3\nu_4\nu_5(12;\ 13, 34, 45, 52;\ 16;\ 27) = (13, 35, 52, 26, 67, 71) \in C(\sigma_7^{25}).$$

Nous désignerons cette classe par $C(\sigma_7'^{25})$, où $\sigma_7'^{25} = \nu'\sigma_7^{25}$.

λ_{12}. Les S_7 dont les deux points simples sont réunis au même point triple, respectivement par un trait et deux traits, sont du type $(12;\ 13, 34, 41;\ 25, 56;\ 27)$. Au nombre de $\frac{1}{2}\,7! = 2\,520$, ils ne donnent que $1\,260$ familles, car

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_5(12;\ 13, 34, 41;\ 25, 56;\ 27) &= (57;\ 53, 34, 45;\ 71, 16;\ 72)\\ &= \tau_{15}\tau_{27}(12;\ 13, 34, 41;\ 25, 56;\ 27).\end{aligned}$$

On retrouve ici la classe $C(\sigma_7'^{14})$ formée à l'alinéa λ_8, d'après

$$\nu_1(12;\ 13, 34, 41;\ 25, 56;\ 27) = (15, 52, 27, 71;\ 16, 65;\ 34) \in C(\sigma_7'^{14}).$$

λ_{13}. Lorsque les deux points simples sont réunis respectivement aux deux points triples, l'un par un trait et l'autre par deux traits, S_7 est du type $(12, 23, 34, 41;\ 15, 56;\ 27)$. Ces systèmes sont au nombre de $7! = 5\,040$, mais deux à deux équivalents par (ν), car

$$\begin{aligned}\nu_1(12, 23, 34, 41;\ 15, 56;\ 27) &= (13, 32, 27, 71;\ 16, 65;\ 34)\\ &= \tau_{23}\tau_{47}\tau_{56}(12, 23, 34, 41;\ 15, 56;\ 27).\end{aligned}$$

Cette classe de $2\,520$ familles n'est rien d'autre que $C(\sigma_7^{19})$, déjà formée à l'alinéa η_6, comme le montre

$$\nu_2\nu_4\nu_5(12, 23, 34, 41;\ 15, 56;\ 27) = (26, 64, 47, 75, 53) \in C(\sigma_7^{19}).$$

λ_{14}. Les deux points simples ne peuvent être réunis au même point triple par deux lignes à deux traits, mais ils peuvent l'être aux deux points triples.

Les S_7 en question sont du type (12, 23, 31; 14, 45; 26, 67), au nombre de $\frac{1}{2}\,7! = 2\,520$, mais réductibles sept à sept par (ν). En effet,

$$\begin{aligned}\nu_1(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67) &= (16, 67, 71; 15, 54; 62, 23)\\ &= \tau_{26}\tau_{37}\tau_{45}(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67);\end{aligned}$$

par itération, on transforme ce nouveau système par ν_6, ce qui donne

$$\nu_1\nu_6(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67) = (56, 64, 45; 51, 17; 63, 32),$$

et une nouvelle itération fournit encore

$$\nu_1\nu_5\nu_6(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67) = (35, 52, 23; 36, 64; 57, 71).$$

Symétriquement, ν_2, $\nu_2\nu_4$ et $\nu_2\nu_4\nu_7$ équivalent pour ce type à une transformation de (τ). Les 360 familles de cette classe sont celles de $C(\sigma_7'^{27})$ déjà formée à l'alinéa λ_1, car

$$\nu_3\nu_4\nu_6(12, 23, 31; 14, 45; 26, 67) = (12, 24, 47, 73, 35, 56, 61) \in C(\sigma_7'^{27}).$$

λ_{15}. Si une ligne à trois traits réunit l'un des points simples à un point triple, l'autre point simple est nécessairement adjacent au second point triple, et le S_7 est du type (12, 23, 31; 14, 45, 56; 27). Le nombre de ces systèmes est $7! = 5\,040$, mais ils sont quatre à quatre équivalents par (ν); en effet,

$$\begin{aligned}\nu_1(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) &= (15, 56, 61; 17, 72, 23; 54)\\ &= \tau_{25}\tau_{36}\tau_{47}(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27),\\ \nu_2\nu_5(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) &= (15, 53, 31; 14, 42, 26; 57)\\ &= \tau_{25}(12, 23, 31; 14; 45, 56; 27),\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_2\nu_5(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) &= (12, 26, 61; 17, 75, 53; 24)\\ &= \tau_{36}\tau_{47}(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27).\end{aligned}$$

Ces 1 260 familles sont celles de la classe $C(\sigma_7'^{14})$ formée à l'alinéa λ_8 (et déjà retrouvée en λ_{12}), car

$$\nu_2\nu_4\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) = (36, 67, 74, 43; 31, 16; 25).$$

Bien entendu, on pourrait former directement

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_6(12, 23, 31; 14, 45, 56; 27) = (37, 71, 14, 46) = \tau_{13}\tau_{27}\tau_{56}\sigma_7'^{14}.$$

λ_{16}. Dans les graphiques conformes à (27), chaque point triple est adjacent à deux points doubles. Les S_7 où les deux couples de points doubles ne sont pas unis sont du type (12; 13, 34, 41; 25, 56, 62); ils sont au nombre de $2^{-3}\,7! = 630$, et donnent autant de familles. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{17})$ déjà formée à l'alinéa λ_7, car

$$\nu_1\nu_5(12;\ 13,\ 34,\ 41;\ 25,\ 56,\ 62)=(53,\ 34,\ 45;\ 57,\ 71,\ 16,\ 62)\in C(\sigma_7'^{17}).$$

On peut aussi vérifier directement que

$$\nu'\nu_2\nu_5\nu_6(12;\ 13,\ 34,\ 41;\ 25,\ 56,\ 62)=(71,\ 12;\ 73,\ 74)\in C(\sigma_7^{17}).$$

λ_{17}. Si l'un des quatre points doubles est adjacent aux deux points triples, les graphiques fournis par (27) sont du type (12, 23, 34, 45, 51; 16, 62). Ces S_7 sont au nombre de $\frac{1}{2}7!=2520$, mais équivalents trois à trois par (ν), puisque $\nu_1\nu_4$ transforme le type cité comme $\tau_{14}\tau_{57}$, et que, par symétrie, $\nu_2\nu_4$ équivaut à $\tau_{24}\tau_{37}$. Ces 840 familles sont celles de la classe $C(\sigma_7'^{26})$ déjà formée à l'alinéa λ_5, car

$$\nu_1\nu_3(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51;\ 16,\ 62)=(35,\ 54,\ 41,\ 17,\ 73;\ 36,\ 62)\in C(\sigma_7'^{26}).$$

On a encore directement

$$\nu'\nu_3\nu_4\nu_7(12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51;\ 16,\ 62)=(52,\ 23,\ 37,\ 74,\ 45;\ 56)\in C(\sigma_7^{26}).$$

λ_{18}. Enfin les couples de points doubles adjacents à chaque point triple peuvent être eux-mêmes unis en formant deux quadrilatères ayant pour côté commun le segment qui unit les points triples. Les S_7 correspondants sont ceux du type (12, 23, 34, 41; 15, 56, 62). Ils sont au nombre de $\frac{1}{4}7!=1260$, et donnent autant de familles. C'est la classe $C(\sigma_7^{23})$ déjà formée à l'alinéa η_{12}, d'après

$$\nu_1\nu_3\nu_6(12,\ 23,\ 34,\ 41;\ 15,\ 56,\ 62)=(73,\ 35;\ 76,\ 64;\ 71)\in C(\sigma_7^{23}).$$

24. Les S_7 à sept traits et trois points triples sont assujettis aux relations

$$2d+s=5, \qquad d+s+c=4,$$

ou $d=c+1$, $s=3-2c$. Aux deux valeurs acceptables de c correspondent ainsi les deux solutions

$$(28) \qquad t=3, \qquad d=1, \qquad s=3, \qquad c=0,$$
$$(29) \qquad t=3, \qquad d=2, \qquad s=1, \qquad c=1.$$

Il suffit d'examiner les graphiques dont les trois points triples sont unis triangulairement. Dans les conditions (28), on voit que le point double ne peut être adjacent à deux points simples; l'un des sommets triples est donc adjacent à ce point double unique, et l'observation générale que nous avons déjà fréquemment utilisée permet d'écarter l'examen de ces S_7. Par contre, sur deux formes de graphique vérifiant (29), chacun des points triples n'est pas adjacent à un certain point double.

λ_{19}. Parmi ces deux solutions à étudier, les S_7 dont le point simple est uni à un point triple sont du type (12, 23, 31; 14, 45, 52; 36). Leur nombre est $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, mais ils sont réductibles six à six par (ν); en effet,

$$\begin{aligned}\nu_3(12, 23, 31;\ 14, 45, 52;\ 36) &= (45, 53, 34;\ 41, 12, 25;\ 37)\\ &= \tau_{14}\tau_{25}\tau_{67}(12, 23, 31;\ 14, 45, 52;\ 36),\\ \nu_1\nu_5(12, 23, 31;\ 14, 45, 52;\ 36) &= (56, 63, 35;\ 57, 71, 16;\ 32)\\ &= \tau_{15}\tau_{26}\tau_{47}(12, 23, 31;\ 14, 45, 52;\ 36).\end{aligned}$$

Par symétrie, et par la multiplication des transformations, on voit que $\nu_2\nu_4$ équivaut, pour ce type, à $\tau_{16}\tau_{24}\tau_{57}$, puis que

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_3\nu_5(12, 23, 31;\ 14, 45, 52;\ 36) &= (17, 73, 31;\ 16, 65, 57;\ 34),\\ \nu_2\nu_3\nu_4(12, 23, 31;\ 14, 45, 52;\ 36) &= (27, 73, 32;\ 26, 64, 47;\ 35).\end{aligned}$$

Cette classe de 420 familles n'est rien d'autre que $C(\sigma_7'^{25})$ formée à l'alinéa λ_{11}, comme le montre

$$\nu_1(12, 23, 31;\ 14, 45, 52;\ 36) = (15;\ 16, 63, 32, 25;\ 17;\ 54) \in C(\sigma_7'^{25}),$$

ou encore

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_7(12, 23, 31;\ 14, 45, 52;\ 36) = (14, 47, 75, 52, 26, 61) \in C(\sigma_7^{25}).$$

λ_{20}. Les S_7 dont le point simple est uni à un point double sont nécessairement du type $(12, 23, 31;\ 14, 42;\ 35, 56)$. Au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, ils donnent 1 260 familles car

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_2\nu_5(12, 23, 31;\ 14, 42;\ 35, 56) &= (12, 27, 71;\ 16, 62;\ 75, 54)\\ &= \tau_{37}\tau_{46}(12, 23, 31;\ 14, 42;\ 35, 56).\end{aligned}$$

Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{14})$ déjà rencontrée aux alinéas λ_8, λ_{12}, λ_{15}. Par exemple,

$$\nu_3(12, 23, 31;\ 14, 42;\ 35, 56) = (43;\ 41, 12, 24;\ 36, 65;\ 37)$$

est du type formé à l'alinéa λ_{12}; on a encore

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 31;\ 14, 42;\ 35, 56) = (34, 45, 57, 76) \in C(\sigma_7^{14}).$$

25. Les S_7 à sept traits et quatre points triples sont assujettis aux relations

$$2d + s = 2, \qquad d + s + c = 3,$$

donc $d = c - 1$, $s = 4 - 2c$. Aux deux valeurs acceptables de c correspondent les deux systèmes d'équations

$$t = 4, \quad d = 0, \quad s = 2, \quad c = 1, \tag{30}$$

$$t = 4, \quad d = 1, \quad s = 0, \quad c = 2. \tag{31}$$

Dans les seuls diagrammes utiles, les quatre points triples sont unis deux à deux, par six traits; (31) n'est pas réalisable, mais (30) fournit une solution, où les deux points simples sont adjacents.

λ_{21}. Les S_7 en question sont du type $(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56)$, au nombre de $\frac{7\times 6\times 5}{2} = 105$; ils donnent autant de familles; il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^4)$ formée à l'alinéa λ_3, comme le montre

$$\nu_1(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56) = (15, 56, 61; 17; 23, 34, 42) \in C(\sigma_7'^4),$$

ou, directement,

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56) = (75, 76) = \tau_{17}\tau_{25}\tau_{36}\sigma_7^4.$$

26. Les graphiques à huit traits relèvent du système d'équations

$$3t + 2d + s = 16, \qquad t + d + s + c = 7,$$

d'où l'on tire $2t + d = c + 9$, et $t = s + 2c + 2$; il y a donc au moins deux points triples, qu'on suppose adjacents.

Lorsque $t = 2$, on obtient la solution unique

$$(32) \qquad t = 2, \qquad d = 5, \qquad s = 0, \qquad c = 0.$$

Quatre formes de graphique sont à examiner : une forme où les deux points doubles unis à un point triple sont également unis à l'autre point triple; une forme où un seul de ces deux points doubles est uni au second point triple; et deux formes où les deux points doubles adjacents à un point triple ne sont pas unis à l'autre, car ces deux points doubles peuvent être eux-mêmes unis, ou non.

μ_1. Les S_7 de la première forme sont du type $(12, 23, 31; 14, 42; 56, 67, 75)$, et au nombre de $\frac{7\times 6}{2} \times \frac{5\times 4}{2} = 210$. Ils ne donnent que 21 familles; en effet,

$$\nu_1\nu_5(12, 23, 31; 14, 42; 56, 67, 75) = (52, 23, 35; 54, 42; 16, 67, 71)$$
$$= \tau_{15}(12, 23, 31; 54, 42; 56, 67, 75);$$

symétriquement, $\nu_1\nu_6$, $\nu_1\nu_7$, $\nu_2\nu_5$, $\nu_2\nu_6$, $\nu_2\nu_7$ transforment ce type comme τ_{16}, τ_{17}, τ_{25}, τ_{26}, τ_{27} respectivement; en outre, l'itération montre que $\nu_3\nu_4\nu_7$ équivaut $\tau_{15}\tau_{26}$, et, de même, $\nu_3\nu_4\nu_5$ à $\tau_{16}\tau_{27}$, et $\nu_3\nu_4\nu_6$ à $\tau_{15}\tau_{27}$. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^2)$, car

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 23, 31; 14, 42; 56, 67, 75) = (34) \in C(\sigma_7^2).$$

μ_2. Les S_7 qui vérifient (32), et dont les deux points triples sont unis à trois points doubles, sont du type $(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17, 72)$; ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, mais ne donnent que 630 familles; en effet,

$$\nu_1\nu_4(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17, 72) = (42, 23, 31, 15, 56, 64; 47, 72)$$
$$= \tau_{14}(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17, 72);$$

par symétrie, $\nu_2\nu_5$ équivaut à τ_{25}, et, par itération, $\nu_1\nu_4\nu_2\nu_5 = \nu_3\nu_6\nu_7$ équivaut pour ce type à $\tau_{14}\tau_{25}$. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{24})$, déjà formée à l'alinéa ζ_7, comme le montre $\nu_1\nu_3\nu_5$, ou bien

$$\nu'\nu_3\nu_4\nu_5(12, 23, 34, 45, 56, 61; 17, 72) = (62, 23, 35, 56; 67) \in C(\sigma_7^{24}).$$

μ_3. L'une des formes de graphique où le deux points triples sont adjacents à quatre des cinq points doubles comporte un triangle et un quadrilatère; les S_7 en question sont du type $(12; 13, 34, 45, 51; 26, 67, 72)$, et au nombre de $\frac{1}{4}7! = 1260$; c'est une classe de 630 familles, car

$$\begin{aligned}\nu_2\nu_4(12;\ 13, 34, 45, 51;\ 26, 67, 72) &= (14;\ 13, 32, 25, 51;\ 46, 67, 74)\\ &= \tau_{24}(12;\ 13, 34, 45, 51;\ 26, 67, 72).\end{aligned}$$

Il s'agit de $C(\sigma_7'^{6})$, déjà formée à l'alinéa ζ_{13}, comme le montre $\nu_1\nu_4\nu_6$, ou, directement,

$$\nu'\nu_2\nu_6\nu_7(12;\ 13, 34, 45, 51;\ 26, 67, 72) = (12, 14;\ 35) = \tau_{34}\sigma_7^6.$$

μ_4. La dernière solution fournie par (32) comporte un quadrilatère et un pentagone construits sur le segment unissant les deux points triples.

Ces S_7, du type $(12, 23, 34, 45, 51;\ 16, 67, 72)$, sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, et donnent autant de familles. Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{19})$ formée à l'alinéa ζ_{10}, comme le montre la transformation de ce type par $\nu_1\nu_4\nu_7$, ou bien

$$\nu'\nu_3\nu_4\nu_5(12, 23, 34, 45, 51;\ 16, 67, 72) = (62, 23, 35, 51, 17) \in C(\sigma_7^{19}).$$

27. Les S_7 à huits traits et trois points triples sont associés aux relations $d = c + 3$, $s = 1 - 2c$; il n'y a pas d'autre solution que

$$(33) \qquad t = 3, \qquad d = 3, \qquad s = 1, \qquad c = 0.$$

On suppose que les trois points triples forment un triangle; le point simple est alors réuni à l'un d'eux par un, deux ou trois traits.

μ_5. Les S_7 dont le point simple est adjacent à un point triple sont du type $(12, 23, 31;\ 24, 45, 56, 63;\ 17)$; ils sont au nombre de $\frac{1}{2}7! = 2\,520$, mais réductibles dix à dix par (ν). En effet,

$$\begin{aligned}\nu_2(12, 23, 31;\ 24, 45, 56, 63;\ 17) &= (52, 26, 65;\ 27, 71, 13, 36;\ 54)\\ \tau_{15}\tau_{36}\tau_{47} &= (12, 23, 31;\ 24, 45, 56, 63;\ 17);\end{aligned}$$

par symétrie, ν_3 transforme ce type comme $\tau_{15}\tau_{24}\tau_{67}$; par itération, on voit ensuite que $\nu_2\nu_6$ équivaut à $\tau_{26}\tau_{37}$, donc $\nu_3\nu_4$ à $\tau_{34}\tau_{27}$. Une nouvelle itération montre que $\nu_2\nu_6\nu_7$ équivaut à $\tau_{15}\tau_{27}\tau_{34}$, donc aussi que $\nu_3\nu_4\nu_7$ équivaut à $\tau_{15}\tau_{37}\tau_{26}$. Enfin, on a encore

$$\begin{aligned}\nu_1\nu_5(12, 23, 31;\ 24, 45, 56, 63;\ 17) &= (52, 23, 35;\ 24, 41, 16, 63;\ 57)\\ &= \tau_{15}(12, 23, 31;\ 24, 45, 56, 63;\ 17),\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\nu_1\nu_5\nu_2$ équivaut à $\tau_{36}\tau_{47}$, et, par symétrie, que $\nu_1\nu_5\nu_3$ équivaut à $\tau_{24}\tau_{67}$. Ces 252 familles sont celles de la classe $C(\sigma_7'^{20})$ formée à l'alinéa ζ_1, comme le montre

$$\nu_1\nu_4\nu_6(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 45,\ 56,\ 63;\ 17)=(23,\ 34,\ 47,\ 76,\ 62;\ 15)\in C(\sigma_7'^{20}),$$

ou encore

$$\nu'\nu_4\nu_5\nu_6(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 45,\ 56,\ 63;\ 17)=(24,\ 46,\ 63,\ 37,\ 72)\in C(\sigma_7^{20}).$$

μ_6. La deuxième solution conforme à (33) est formée par les S_7 du type (12, 23, 31; 24, 45, 53; 16, 67), au nombre de $\frac{1}{2}7!=2\,520$. Leur classe ne comprend que 1 260 familles, car

$$\begin{aligned}\nu_1(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 45,\ 53;\ 16,\ 67)&=(14,\ 45,\ 51;\ 42,\ 23,\ 35;\ 17,\ 76)\\&=\tau_{24}\tau_{35}\tau_{67}(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 45,\ 53;\ 16,\ 67).\end{aligned}$$

Il s'agit de la classe $C(\sigma_7'^{23})$, formée à l'alinéa ζ_4, comme le montre

$$\nu_2\nu_5\nu_6(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 45,\ 53;\ 16,\ 67)=(46,\ 63,\ 31,\ 15,\ 57,\ 72)\in C(\sigma_7'^{23}),$$

ou

$$\nu'\nu_6\nu_7(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 45,\ 53;\ 16,\ 67)=(14,\ 43;\ 15,\ 52;16)\in C(\sigma_7^{23}).$$

μ_7. La dernière solution fournie par (33) consiste en les S_7 du type (12, 23, 31; 24, 43; 15, 56, 67). Ils sont toujours au nombre de $\frac{1}{2}7!=2\,520$, mais réductibles six à six par (ν). En effet,

$$\begin{aligned}\nu_2(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 43;\ 15,\ 56,\ 67)&=(52,\ 26,\ 65;\ 27,\ 76;\ 51,\ 13,\ 34)\\&=\tau_{15}\tau_{36}\tau_{47}(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 43;\ 15,\ 56,\ 67).\end{aligned}$$

Par symétrie, ν_3 équivaut à $\tau_{15}\tau_{26}\tau_{47}$. Par itération, on en conclut que $\nu_2\nu_6$ équivaut pour ce S_7 à τ_{26}, et $\nu_3\nu_6$ à τ_{36}, et enfin $\nu_2\nu_3\nu_6$ à $\tau_{15}\tau_{47}$. Cette classe de 420 familles n'est rien d'autre que $C(\sigma_7'^{7})$, formée à l'alinéa ζ_3, puisque

$$\nu_1\nu_4\nu_6(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 43;\ 15,\ 56,\ 67)=(23,\ 36,\ 62;\ 17,\ 74,\ 45)\in C(\sigma_7'^{7}),$$

ou

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12,\ 23,\ 31;\ 24,\ 43;\ 15,\ 56,\ 67)=(41,\ 15,\ 57)\in C(\sigma_7^{7}).$$

28. Pour les S_7 à huit traits et quatre points triples, on a $d=c+1$, $s=2-2c$; il y a donc deux possibilités

(34)	$t=4$,	$d=1$,	$s=2$,	$c=0$,
(35)	$t=4$,	$d=2$,	$s=0$,	$c=1$.

Il est clair qu'aucun S_7 dont les quatre points triples sont adjacents deux à deux, ce qui exige six traits, ne peut vérifier (35). Seul (34) donne un graphique admissible, où le point double est adjacent aux deux points simples.

μ_8. Les S_7 en question sont du type (12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 57). Leur nombre est $\frac{7\times 6\times 5}{2} = 105$, et ils sont réductibles cinq à cinq par (ν); en effet,

$$\nu_1\nu_5(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 57) = (52, 53, 54, 23, 24, 34; 16, 17)$$

transforme ce type comme τ_{15}; par conséquent, $\nu_2\nu_5$, $\nu_3\nu_5$, $\nu_4\nu_5$ équivalent respectivement, pour ce même type, à τ_{25}, τ_{35}, τ_{45}. Ces 21 familles sont celles de la classe $C(\sigma_7'^2)$, formée à l'alinéa μ_1, comme le montre par exemple

$$\nu_1(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 57) = (15, 56, 61; 17, 75; 23, 34, 42) \in C(\sigma_7'^2),$$

ou

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 57) = (67) = \tau_{16}\tau_{27}\sigma_7^2.$$

29. Il est inutile d'examiner les S_7 à huit traits et plus de quatre points triples puisque ceux-ci ne peuvent être adjacents deux à deux qu'en traçant au moins dix traits, et qu'ils sont au moins des points quadruples. Les S_7 à neuf traits relèvent du système d'équations

$$3t + 2d + s = 18, \qquad t + d + s + c = 7,$$

ou $2t + d - c = 11$, $t = s + 2c + 4$, donc $t \geqq 4$. La remarque que nous venons de faire nous permet de nous borner à la seule valeur $t = 4$, donc au système

$$t = 4, \qquad d = 3, \qquad s = 0, \qquad c = 0. \tag{36}$$

$\varkappa$. Les quatre points triples étant unis deux à deux, les trois points doubles sont unis en triangle, et les S_7 en question sont du type (12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 67, 75); ils sont en nombre de $\frac{7\times 6\times 5}{3!} = 35$, mais tous équivalents par (ν).

En effet, on voit tout de suite que

$$\nu_1(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 67, 75) = \tau_{25}\tau_{36}\tau_{47}(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 67, 75),$$

donc ν_2, ν_3, ν_4 équivalent respectivement, pour ce type, à $\tau_{15}\tau_{36}\tau_{47}$, $\tau_{15}\tau_{26}\tau_{47}$, $\tau_{15}\tau_{26}\tau_{37}$; par itération, il en résulte que chacune des 12 transformations $\nu_i\nu_k$ ($i \leqq 4$; $k \geqq 5$) équivaut à τ_{ik} pour ce S_7, et que chacun des 18 produits $\nu_i\nu_j\nu_k$ ($i, j \leqq 4$; $k \geqq 5$) équivaut à $\tau_{\alpha l}\tau_{\beta m}$ où α, β sont les indices distincts de i et j parmi 1, 2, 3, 4, et l, m les indices autres que k parmi 5, 6, 7.

Cette classe à une seule famille est justement $C(\sigma_7'^1)$ où $\sigma_7'^1 = \nu'\sigma_7^1$, comme le montre

$$\nu'\nu_5\nu_6\nu_7(12, 13, 14, 23, 24, 34; 56, 67, 75) = (\quad) = \sigma_7^1.$$

30. Il est inutile de poursuivre la discussion avec les S_7 dont le graphique a plus de neuf traits [14]. Les S_7 à m traits relèvent en effet du système d'équations

$$3t + 2d + s = 2m, \qquad t + d + s + c = 7,$$

---

[14] Rappelons que 3 est l'ordre maximum des sommets des graphiques à considérer.

	$C_1 = C(\sigma_7^1) = C(\ )$	$1\ f$	$\Delta_7^1 = (1-a)^6(1+6a)$
$\varkappa$:	$C'_1 = C(\sigma_7'^1) = \nu' C_1$	$1\ f$	$\Delta_7'^1 = (1+a)^6(1-6a)$
α :	$C_2 = C(\sigma_7^2) = C(12)$	$21\ f$	$\Delta_7^2 = (1-a)^4(1+a)(1+3a-14a^2)$
μ_1 et μ_8 :	$C'_2 = C(\sigma_7'^2) = \nu' C_2$	$21\ f$	$\Delta_7'^2 = (1+a)^4(1-a)(1-3a-14a^2)$
β_1 :	$C_3 = C(\sigma_7^3) = C(12;34)$	$105\ f$	$\Delta_7^3 = (1-a)^2(1+a)^2(1-2a)(1-3a)(1+5a)$
λ_2 et λ_9 :	$C'_3 = C(\sigma_7'^3) = \nu' C_3$	$105\ f$	$\Delta_7'^3 = (1+a)^2(1-a)^2(1+2a)(1+3a)(1-5a)$
β_2 :	$C_4 = C(\sigma_7^4) = C(12, 13)$	$105\ f$	$\Delta_7^4 = (1-a)^4(1+4a-11a^2-26a^3)$
λ_3 et λ_{21} :	$C'_4 = C(\sigma_7'^4) = \nu' C_4$	$105\ f$	$\Delta_7'^4 = (1+a)^4(1-4a-11a^2+26a^3)$
γ_1 :	$C_5 = C(\sigma_7^5) = C(12;34;56)$	$105\ f$	$\Delta_7^5 = (1+a)^3(1-3a)^2(1+3a-6a^2)$
ζ_2 :	$C'_5 = C(\sigma_7'^5) = \nu' C_5$	$105\ f$	$\Delta_7'^5 = (1-a)^3(1+3a)^2(1-3a-6a^2)$
γ_2 :	$C_6 = C(\sigma_7^6) = (12, 13;45)$	$630\ f$	$\Delta_7^6 = (1-a)^2(1+a)(1+a-19a^2-a^3+50a^4)$
ζ_{13} et μ_3 :	$C'_6 = C(\sigma_7'^6) = \nu' C_6$	$630\ f$	$\Delta_7'^6 = (1+a)^2(1-a)(1-a-19a^2+a^3+50a^4)$
γ_3 :	$C_7 = C(\sigma_7^7) = C(12, 23, 34)$	$420\ f$	$\Delta_7^7 = (1-a)^2(1-5a^2)(1+2a-13a^2-2a^3)$
ζ_3 et μ_7 :	$C'_7 = C(\sigma_7'^7) = \nu' C_7$	$420\ f$	$\Delta_7'^7 = (1+a)^2(1-5a^2)(1-2a-13a^2+2a^3)$
γ_4 :	$C_8 = C(\sigma_7^8) = C(12, 23, 31)$	$35\ f$	$\Delta_7^8 = (1-a)^3(1+a)^2(1+a-18a^2)$
ζ_{12} :	$C'_8 = C(\sigma_7'^8) = \nu' C_8$	$35\ f$	$\Delta_7'^8 = (1+a)^3(1-a)^2(1-a-18a^2)$
γ_5 :	$C_9 = C(\sigma_7^9) = C(12, 13, 14)$	$70\ f$	$\Delta_7^9 = (1-a)^4(1+2a)(1-3a)(1+5a)$
ζ_5 :	$C'_9 = C(\sigma_7'^9) = \nu' C_9$	$70\ f$	$\Delta_7'^9 = (1+a)^4(1-2a)(1+3a)(1-5a)$
δ_1 :	$C_{10} = C(\sigma_7^{10}) = C(12, 13;45;67)$	$315\ f$	$\Delta_7^{10} = (1-a)(1+a)^2(1-3a)(1+2a-13a^2-22a^3)$
η_4 et λ_{10} :	$C'_{10} = C(\sigma_7'^{10}) = \nu' C_{10}$	$315\ f$	$\Delta_7'^{10} = (1+a)(1-a)^2(1+3a)(1-2a-13a^2+22a^3)$
δ_2 :	$C_{11} = C(\sigma_7^{11}) = C(12, 23, 34;56)$	$1\,260\ f$	$\Delta_7^{11} = (1-a)^2(1-2a-7a^2)(1+4a-3a^2-10a^3)$
η_3 et λ_6 :	$C'_{11} = C(\sigma_7'^{11}) = \nu' C_{11}$	$1\,260\ f$	$\Delta_7'^{11} = (1+a)^2(1+2a-7a^2)(1-4a-3a^2+10a^3)$
δ_3 :	$C_{12} = C(\sigma_7^{12}) = C(12, 13;45, 46)$	$630\ f$	$\Delta_7^{12} = (1+a)(1-5a^2)(1-a-15a^2+21a^3+2a^4)$
η_{11} :	$C'_{12} = C(\sigma_7'^{12}) = \nu' C_{12}$	$630\ f$	$\Delta_7'^{12} = (1-a)(1-5a^2)(1+a-15a^2-21a^3+2a^4)$
δ_4 :	$C_{13} = C(\sigma_7^{13}) = C(12, 23, 31;45)$	$210\ f$	$\Delta_7^{13} = (1-a)(1+a)^3(1-2a)(1-17a^2)$
η_8 :	$C'_{13} = C(\sigma_7'^{13}) = \nu' C_{13}$	$210\ f$	$\Delta_7'^{13} = (1+a)(1-a)^3(1+2a)(1-17a^2)$
δ_5 :	$C_{14} = C(\sigma_7^{14}) = C(12, 23, 34, 45)$	$1\,260\ f$	$\Delta_7^{14} = (1-a)^2(1+a)(1-3a)(1+4a-7a^2-26a^3)$
$\lambda_8, \lambda_{12}, \lambda_{15}$ et λ_{20} :	$C'_{14} = C(\sigma_7'^{14}) = \nu' C_{14}$	$1\,260\ f$	$\Delta_7'^{14} = (1+a)^2(1-a)(1+3a)(1-4a-7a^2+26a^3)$
δ_6 :	$C_{15} = C(\sigma_7^{15}) = C(12, 23, 34, 41)$	$105\ f$	$\Delta_7^{15} = (1-a)^4(1+3a)(1+a-14a^2)$
η_1 :	$C'_{15} = C(\sigma_7'^{15}) = \nu' C_{15}$	$105\ f$	$\Delta_7'^{15} = (1+a)^4(1-3a)(1-a-14a^2)$
δ_7 et δ_9 :	$C_{16} = C(\sigma_7^{16}) = C(12, 13, 14;56)$	$420\ f$	$\Delta_7^{16} = (1-a)^2(1+a)(1+a-19a^2-5a^3+46a^4)$
η_5 :	$C'_{16} = C(\sigma_7'^{16}) = \nu' C_{16}$	$420\ f$	$\Delta_7'^{16} = (1+a)^2(1-a)(1-a-19a^2+5a^3+46a^4)$
δ_8 :	$C_{17} = C(\sigma_7^{17}) = C(12, 23;14, 15)$	$630\ f$	$\Delta_7^{17} = (1-a)^2(1+2a-11a^2)(1-7a^2-2a^3)$
λ_7 et λ_{16} :	$C'_{17} = C(\sigma_7'^{17}) = \nu' C_{17}$	$630\ f$	$\Delta_7'^{17} = (1+a)^2(1-2a-11a^2)(1-7a^2+2a^3)$
η_2 et λ_4 :	$C_{18} = C(\sigma_7^{18}) = C(12, 23, 34, 45;67)$	$1\,260\ f$	$\Delta_7^{18} = (1+a)^2(1-3a)(1+a-15a^2-13a^3+34a^4)$
ζ_{15} et ζ_{18} :	$C'_{18} = C(\sigma_7'^{18}) = \nu' C_{18}$	$1\,260\ f$	$\Delta_7'^{18} = (1-a)^2(1+3a)(1-a-15a^2+13a^3+34a^4)$
η_6 et λ_{13} :	$C_{19} = C(\sigma_7^{19}) = C(12, 23, 34, 45, 56)$	$2\,520\ f$	$\Delta_7^{19} = (1-a-9a^2+a^3)(1+a-11a^2-a^3+18a^4)$
ζ_{10} et μ_4 :	$C'_{19} = C(\sigma_7'^{19}) = \nu' C_{19}$	$2\,520\ f$	$\Delta_7'^{19} = (1+a-9a^2-a^3)(1-a-11a^2+a^3+18a^4)$
η_7 :	$C_{20} = C(\sigma_7^{20}) = C(12, 23, 34, 45, 51)$	$252\ f$	$\Delta_7^{20} = (1-a)(1-5a^2)^2(1+a-10a^2)$
ζ_1 et μ_5 :	$C'_{20} = C(\sigma_7'^{20}) = \nu' C_{20}$	$252\ f$	$\Delta_7'^{20} = (1+a)(1-5a^2)^2(1-a-10a^2)$
η_9 et η_{14} :	$C_{21} = C(\sigma_7^{21}) = C(12, 23;14, 15;67)$	$1\,260\ f$	$\Delta_7^{21} = (1-a)(1+a)(1-20a^2+2a^3+83a^4-2a^5)$

ζ_8 et ζ_{11} :	$C'_{21} = C(\sigma_7'^{21}) = \nu' C_{21}$	$1\,260\,f$	$\Delta_7'^{21} = (1+a)(1-a)(1-20a^2-2a^3+83a^4+2a^5)$
η_{10} :	$C_{22} = C(\sigma_7^{22}) = C(12, 23, 34; 15, 16)$	$1\,260\,f$	$\Delta_7^{22} = (1-a)^2(1-5a^2)(1+2a-13a^2-18a^3)$
ζ_{16} :	$C'_{22} = C(\sigma_7'^{22}) = \nu' C_{22}$	$1\,260\,f$	$\Delta_7'^{22} = (1+a)^2(1-5a^2)(1-2a-13a^2+18a^3)$
η_{12} et λ_{18} :	$C_{23} = C(\sigma_7^{23}) = C(12, 23; 14, 45; 16)$	$1\,260\,f$	$\Delta_7^{23} = (1+a)(1-3a)(1+2a-7a^2)(1-7a^2+2a^3)$
ζ_4 et μ_6 :	$C'_{23} = C(\sigma_7'^{23}) = \nu' C_{23}$	$1\,260\,f$	$\Delta_7'^{23} = (1-a)(1+3a)(1-2a-7a^2)(1-7a^2-2a^3)$
η_{13} :	$C_{24} = C(\sigma_7^{24}) = C(12, 23, 34, 41; 15)$	$630\,f$	$\Delta_7^{24} = (1-a)^2(1-3a)(1+3a)(1+2a-9a^2-2a^3)$
ζ_7 et μ_2 :	$C'_{24} = C(\sigma_7'^{24}) = \nu' C_{24}$	$630\,f$	$\Delta_7'^{24} = (1+a)^2(1+3a)(1-3a)(1-2a-9a^2+2a^3)$
ζ_6 et ζ_9 :	$C_{25} = C(\sigma_7^{25}) = C(12, 23, 34, 45, 56, 61)$	$420\,f$	$\Delta_7^{25} = (1+a)^2(1-2a)(1-3a)^2(1+3a)^2$
λ_{11} et λ_{19} :	$C'_{25} = C(\sigma_7'^{25}) = \nu' C_{25}$	$420\,f$	$\Delta_7'^{25} = (1-a)^2(1+2a)(1+3a)^2(1-3a)^2$
ζ_{14} :	$C_{26} = C(\sigma_7^{26}) = C(12, 23, 34, 45, 51; 16)$	$840\,f$	$\Delta_7^{26} = (1-3a)(1-5a^2)^2(1+3a-2a^2)$
λ_5 et λ_{17} :	$C'_{26} = C(\sigma_7'^{26}) = \nu' C_{26}$	$840\,f$	$\Delta_7'^{26} = (1+3a)(1-5a^2)^2(1-3a-2a^2)$
ζ_{17} :	$C_{27} = C(\sigma_7^{27}) = C(12, 23, 34, 41; 15; 26)$	$360\,f$	$\Delta_7^{27} = (1-2a)(1+a-9a^2-a^3)^2$
λ_1 et λ_{14} :	$C'_{27} = C(\sigma_7'^{27}) = \nu' C_{27}$	$360\,f$	$\Delta_7'^{27} = (1+2a)(1-a-9a^2+a^3)^2$.

donc, par une combinaison évidente,

$$t = 2m - 14 + s + 2c \geqq 2m - 14\,;$$

m étant supérieur à 7, et les t points triples étant adjacents deux à deux, le graphique comporte au moins $\dfrac{(2m-14)(2m-15)}{2} = (m-7)(2m-15)$ traits. Ce dernier nombre ne pouvant surpasser m, on a l'inégalité

$$2m^2 - 30m + 105 \leqq 0.$$

Le plus grand zéro de ce polynome est compris entre 9 et 10, donc m ne peut dépasser 9. Remarquons aussi qu'il aurait été inutile *a priori* de supposer $m \geqq 11$, car ν' ramènerait le S_7 à un système de $21 - m$ traits, donc de moins de onze traits.

31. Comme pour les valeurs précédentes de n, nous récapitulons ces résultats dans un tableau donnant, pour chacune des 54 classes, le nombre des familles, les alinéas où elles ont été formées, et la valeur du polynome Δ_n, dont nous omettons les calculs qui n'offrent que des difficultés d'ordre numérique, (*voir* tableau ci-contre et ci-dessus).

On observe que les 54 classes sont deux à deux inversement semblables, alors que, pour $n = 4$, 5 ou 6, certaines des classes sont invariantes par ν'. Tous les $\Delta_n (n = 1, 2, \ldots, 7)$ sont distincts, ce qui établit le théorème cité dans l'introduction. Enfin, la somme des nombres de familles de ce tableau est bien 32 768.

CHAPITRE IV.

LES S_n ISOGONAUX DU PLAN.

32. La formation des S_n isogonaux du plan et de E_3 fait intervenir certains angles dont le cosinus et le sinus s'expriment en fonction de $a = \cos\alpha$. Il nous

sera utile de disposer d'un tableau de ces lignes trigonométriques, et d'avoir précisé les notations. Nous conviendrons de représenter par une lettre primée, telle que α'_i, l'angle dont les lignes trigonométriques se déduisent de celles de α_i en changeant a en $-a$. Il suffira de citer les angles non primés dans le tableau T en question :

T.

$\cos\alpha = a$	$\sin\alpha = \sqrt{1-a^2}$
$\cos\alpha_1 = \dfrac{a}{1+a}$	$\sin\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{1+2a}}{1+a}$
$\cos\alpha_2 = \dfrac{a}{1+2a}$	$\sin\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{(1+a)(1+3a)}}{1+2a}$
$\cos\alpha_3 = \dfrac{a}{1+3a}$	$\sin\alpha_3 = \dfrac{\sqrt{(1+2a)(1+4a)}}{1+3a}$
$\cos\beta_1 = \dfrac{-a(1+3a)}{(1-a)(1+2a)}$	$\sin\beta_1 = \dfrac{(1+a)\sqrt{1-5a^2}}{(1-a)(1+2a)}$
$\cos\beta_2 = \dfrac{-a(1+5a)}{(1-a)(1+3a)}$	$\sin\beta_2 = \dfrac{\sqrt{(1+a)(1+2a)(1+a-8a^2)}}{(1-a)(1+3a)}$
$\cos\beta_3 = \dfrac{a(1-3a)}{1-5a^2}$	$\sin\beta_3 = \dfrac{\sqrt{(1+a)(1-2a)(1+a-8a^2)}}{1-5a^2}$
$\cos\beta_4 = \dfrac{a(1-a)}{1-5a^2}$	$\sin\beta_4 = \dfrac{\sqrt{(1-2a)(1+3a)(1-a-4a^2)}}{1-5a^2}$
$\cos\beta_5 = \dfrac{-a(1+2a-7a^2)}{(1-a)(1-5a^2)}$	$\sin\beta_5 = \dfrac{(1+a)\sqrt{(1-2a)(1-3a)(1+a-4a^2)}}{(1-a)(1-5a^2)}$
$\cos\gamma_1 = \dfrac{a}{\sqrt{1-4a^2}}$	$\sin\gamma_1 = \dfrac{\sqrt{1-5a^2}}{\sqrt{1-4a^2}}$
$\cos\gamma_2 = a\sqrt{\dfrac{1+a}{(1+3a)(1-5a^2)}}$	$\sin\gamma_2 = \sqrt{\dfrac{(1+2a)(1+a-8a^2)}{(1+3a)(1-5a^2)}}$
$\cos\gamma_3 = a\sqrt{\dfrac{1+3a}{(1+a)(1-5a^2)}}$	$\sin\gamma_3 = \sqrt{\dfrac{(1+2a)(1-a-4a^2)}{(1+a)(1-5a^2)}}$

Nous aurons également besoin des valeurs numériques de certaines de ces fonctions, pour $a = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Il suffira de donner celles des lignes des angles, primés et non primés, pour les seules valeurs $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{5}}$. Nous formons ainsi les trois tableaux des valeurs numériques utiles :

$T_1 : \quad a = \frac{1}{2}.$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$,	$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;	$\cos\alpha_1 = \dfrac{1}{3}$,	$\sin\alpha_1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;	$\cos\beta_1 = -\dfrac{5}{4}$,	$\sin\beta_1 = \dfrac{3i}{4}$.

$$T_2 : \quad a = \frac{1}{3}.$$

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$,	$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;	$\cos\alpha_1 = \frac{1}{4}$,	$\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{15}}{4}$;	$\cos\alpha'_1 = -\frac{1}{2}$,	$\sin\alpha'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\cos\beta_1 = -\frac{3}{5}$,	$\sin\beta_1 = \frac{4}{5}$;	$\cos\beta'_1 = 0$,	$\sin\beta'_1 = 1$;	$\cos\beta_4 = \frac{1}{2}$,	$\sin\beta_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\cos\beta'_4 = -1$,	$\sin\beta'_4 = 0$;	$\cos\beta_5 = -1$,	$\sin\beta_5 = 0$;	$\cos\beta'_5 = -\frac{1}{4}$,	$\sin\beta'_5 = \frac{\sqrt{15}}{4}$;
$\cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$,	$\sin\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$;	$\cos\gamma'_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$,	$\sin\gamma'_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$;	$\cos\gamma_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}$,	$\sin\gamma_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}$.

$$T_3 : \quad a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$,	$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$;	$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$,	$\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$;
$\cos\alpha'_1 = \frac{-1}{\sqrt{5}-1}$,	$\sin\alpha'_1 = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$;	$\cos\beta_1 = \cos\beta'_1 = -1$,	$\sin\beta_1 = \sin\beta'_1 = 0$.

33. $n = 3$. — Tous les S_3 isognaux le sont strictement ([15]). On peut prendre

$$S_3 = \sigma_3^1 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}, \qquad \text{avec} \quad \Delta_3 = (1-a)^2(1+2a).$$

Si $a \neq -\frac{1}{2}$, S_3 est régulier ([16]), et, si on le rapporte à trois cercles ω_i orthonormaux, il est de la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_1 &= \omega_1, \\ U_2 &= \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1). \end{aligned} \right.$$

Si $a = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha_1 = -1$, et U_3 prend la forme

$$U_3 = \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \omega,$$

([15]) Rappelons que, pour des raisons exposées dans l'article antérieur cité, nous écartons les systèmes de sphères tangentes ($a = \pm 1$).

([16]) S_n est régulier, ou non, suivant que la famille linéaire de ses sphères contient, ou non, un système orthonormal de n sphères; cela équivaut à $\Delta_n \neq 0$, ou $\Delta_n = 0$.

avec $\omega^2 = 0$, $\omega\omega_1 = \omega\omega_2 = 0$, ce qui remplace (1) par

$$(2)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha = \dfrac{-\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2}, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \lambda(\omega_3 + i\omega_4) = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \lambda(\omega_3 + i\omega_4), \end{cases}$$

où les quatre ω_i sont orthonormaux et où λ est un scalaire quelconque. Si $\lambda = 0$, S_3 est un faisceau de trois cercles inclinés de 120° l'un sur l'autre. Si $\lambda \neq 0$, on peut faire $\lambda = \frac{1}{2}$ en choisissant convenablement le couple orthonormal ω_3, ω_4, de sorte qu'on a

$$(2')\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \dfrac{\omega_3 + i\omega_4}{2}. \end{cases}$$

Rappelons que, si les U_i sont purs, c'est-à-dire réels ou imaginaires purs, ils sont tous de même nature, réels et sécants pour $-1 < a < 1$, réels non sécants pour $a < -1$, et imaginaires purs pour $a > 1$.

Pour $a = -\frac{1}{2}$, (2′) donne des cercles réels pourvu que ω_1, ω_2 le soient, ainsi que le point $\omega_3 + i\omega_4$, c'est-à-dire pourvu que ω_1, ω_2, ω_3 soient réels et ω_4 imaginaire pur ([17]). Dans le cas général $-1 < a < 1$, $a \neq -\frac{1}{2}$, (1) montre que ω_1 et ω_2 sont encore réels si S_3 est pur, mais ω_3 est réel ou imaginaire pur suivant que a est supérieur ou non à $-\frac{1}{2}$. Pour $a < -1$, $\cos\alpha_1$ est réel, mais $\sin\alpha$ et $\sin\alpha_1$ sont imaginaires purs, donc S_3 est réel pourvu que ω_1 et ω_3 soient réels, et ω_2 imaginaire pur. Enfin, si $a > 1$, seul le coefficient $\sin\alpha$ des expressions est imaginaire, pur, et le S_3 est imaginaire pur pourvu que ω_1 soit imaginaire pur, et ω_2, ω_3 réels.

34. $n = 4$. — Les S_4 en question sont semblables à $S_4^1 = (\quad)$, avec $\Delta_4^1 = (1-a)^3(1+3a)$, ou à $S_4^2 = (34)$, avec $\Delta_4^2 = (1-a)^2(1-5a^2)$.

Il sera commode d'appeler « associés » deux systèmes S_p et S_n lorsque les sphères de S_p, si $p \leqq n$, sont les p premières sphères de S_n.

Lorsque $a = -\frac{1}{2}$, le S_3 associé au S_4 étudié est représenté par (2), avec $\lambda \neq 0$,

---

([17]) ω_1, ω_2 sont sécants et anallagmatiquement équivalents à deux droites rectangulaires. Si O est leur intersection, ω_3 et ω_4, qui leur sont orthogonaux et sont orthogonaux entre eux, sont de la forme $\dfrac{\overrightarrow{OP}^2 - \rho^2}{2\rho}$, $\dfrac{\overrightarrow{OP}^2 + \rho^2}{-2i\rho}$ respectivement, avec le même nombre complexe ρ. Mais alors $\omega_3 + i\omega_4 = -\rho$ est réel pourvu que ρ le soit.

afin que ce S_4 puisse être régulier, puisque $\Delta_4\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$. U_1, U_2, U_4 forment un S_3 analogue, donc U_4 est de la forme

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \mu(\omega_3 - i\omega_4) \qquad (\mu \neq 0). \tag{3}$$

Nous avons remplacé le terme $\omega_3 + i\omega_4$ de U_3 par $\omega_3 - i\omega_4$ afin que les quatre U_i soient linéairement distincts, puisque S_4 est régulier. Il reste à écrire que $U_3 U_4 = \pm a$, suivant qu'il s'agit de S_4^1 ou de S_4^2. Il vient ainsi

$$U_3 U_4 = 1 + 2\lambda\mu = \mp \frac{1}{2},$$

donc $\lambda\mu = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{4}$. Pour S_4^1, $\lambda\mu = -\frac{3}{4}$, ce qui permet de prendre

$$\lambda = -\mu = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

par exemple. C'est la solution donnée dans l'article cité ([18]). Pour S_4^2, $\lambda\mu = -\frac{1}{4}$, et l'on peut prendre $\lambda = -\mu = \frac{1}{2}$, ce qui donne le système

$$\left\{\begin{aligned} U_1 &= \omega_1, \\ U_2 &= \frac{-\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2}, \\ U_3 &= -\frac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \frac{\omega_3 + i\omega_4}{2}, \\ U_4 &= -\frac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} - \frac{\omega_3 - i\omega_4}{2}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

S_4^1 est l'équivalent anallagmatique du système que forment les trois côtés d'un triangle équilatéral et son cercle circonscrit. S_4^2 a également pour image type un triangle équilatéral ABC et le cercle qui passe par A et est centré au point symétrique de A par rapport à BC.

Si $a \neq -\frac{1}{2}$, le S_3 associé est donné par (1), et le quatrième cercle U_4 de S_4^1 est de la forme ([19])

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\alpha_2 + \omega_4 \sin\alpha_2)],$$

donc S_4^1 est représenté par

$$\left\{\begin{aligned} U_1 &= \omega_1, \\ U_2 &= \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_4 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\alpha_1 + \omega_4 \sin\alpha_2)]. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

([18]) *Loc. cit.*, p. 232-235, pour $p = 3$.
([19]) *Loc. cit.*, p. 229.

Dans S_4^2, si $a \neq -\frac{1}{2}$, le cercle U_4 à adjoindre à (1) est de la forme

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\beta_1 + \omega_4 \sin\beta_1)],$$

où $\cos\beta_1$ est déterminé par la condition

$$U_3 U_4 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 \cos\beta_1) = -\cos\alpha,$$

soit

$$\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 \cos\beta_1 = -\frac{a}{1-a},$$

qui donne pour $\cos\beta_1$ l'expression du tableau T. S_4^2 est donc représenté par les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_1 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\beta_1 + \omega_4 \sin\beta_1)]. \end{cases}$$

Comme prévu, $\sin\beta_1$ s'annule en même temps que Δ_4^2, et les quatre cercles sont alors linéairement liés ($n = N + 2$); plus précisément $\cos\beta_1 = -1$.

Rappelons la forme de S_4^1 pour $a = -\frac{1}{3}$. Dans (5), $\sin\alpha_2 = 0$ et $\cos\alpha_2 = -1$; l'expression de U_4 se réduit à

$$(7) \qquad U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 - \omega_3 \sin\alpha_1).$$

et la relation linéaire imposée par l'irrégularité de S_4^1 est

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0,$$

d'après $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\alpha_1 = -\frac{1}{2}$.

35. Examinons l'existence des S_4 purs. Pour $-1 < a < 1$, $a \neq -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$, la réalité des U_i de (5) équivaut à celle de ω_1, ω_2, $\omega_3 \sin\alpha_1$, $\omega_4 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$. Les expressions de $\sin\alpha_1$ et de $\sin\alpha_2$ de T donnent alors le tableau [20]

a	-1 ... $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ ... $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ ... 1
ω_1	r	r	r
ω_2	r	r	r
ω_3	i	r	r
ω_4	r	i	r

où les lettres r et i indiquent le caractère réel ou imaginaire pur. Ainsi, S_4^1 n'est

[20] Dans ce tableau, comme dans tous ceux qui suivront, la colonne qui contient $a = 0$, ne peut fournir aucun S_n pur, puisqu'il n'existe pas de S_n orthonormaux réels, si $n \geq 4$, dans le plan; il en sera de même pour $n \geq 5$ dans l'espace.

réel que pour $-1 < a \leqq -\frac{1}{3}$. Pour les mêmes valeurs de a, la réalité des U_i de (6) équivaut à celle de ω_1, ω_2, $\omega_3 \sin\alpha_1$, $\omega_4 \sin\alpha_1 \sin\beta_1$, ce qui donne le tableau

a	-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		1
ω_1		r		r		r		r	
ω_2		r		r		r		r	
ω_3		i		r		r		r	
ω_4		r		i		r		i	

S_4^2 n'est réel que pour $\frac{1}{\sqrt{5}} \leqq |a| < 1$. Le tableau suivant rassemble ces deux ensembles de résultats sur la réalité des S_4 formés de cercles sécants :

a	-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		1
Réalité des S_4		S_4^1 et S_4^2		S_4^1 et S_4^2		S_4^1		aucun S_4		S_4^2	

Pour $a = -\frac{1}{3}$, la dernière équation (5) est remplacée par (7), et la réalité de S_4^1 est assurée par celle de ω_1, ω_2, ω_3, ce qui justifie la réponse affirmative donnée plus haut pour cette valeur limite. On voit de même que la réalité de S_4^2 est assurée, pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, par celle des trois premiers ω_i,

Étudions maintenant l'existence de S_4 formés par quatre cercles réels non sécants. a est inférieur à -1, donc de la forme $a = -\operatorname{ch}\theta$ (θ réel), et $\sin\alpha = i\operatorname{sh}\theta$. Les deux S_4, qui sont nécessairement réguliers, sont représentés par (5) et par (6). $\sin\alpha_1$ et $\sin\beta_1$ sont imaginaires purs, $\sin\alpha_2$ est réel, donc il faut et il suffit que ω_1 et ω_3 soient réels, ω_2 imaginaire pur, mais ω_4 réel dans (5) et imaginaire pur dans (6). Le S_4^1 réel existe, mais non le S_4^2.

Enfin les U_i imaginaires purs supposent $a > 1$, soit $a = \operatorname{ch}\theta$ (θ réel). On a encore $\sin\alpha = i\operatorname{sh}\theta$, et (5) et (6) sont valables. $\sin\alpha_1$ et $\sin\alpha_2$ sont réels, mais $\sin\beta_1$ est imaginaire pur, donc S_4^1 se construit avec un ω_1 imaginaire pur, et les autres ω_i réels, tandis que ω_4 est également imaginaire pur dans S_4^2. Le S_4^1 imaginaire pur existe donc, mais non le S_4^2.

36. $n = 5$. — Les S_5 du plan sont irréguliers, donc de la classe C_1 avec $a = -\frac{1}{4}$, ou C_2 avec $8a^2 - a - 1 = 0$, ou C_3 avec $a = \frac{1}{3}$ ou $4a^2 - a - 1 = 0$, ou enfin C_4 avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Il est inutile de considérer les classes C'_1, C'_2, C'_3 qui se ramènent aux classes citées de même indice en changeant a en $-a$, ni la valeur $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ puisque $C_4 = C'_4$.

Le S_5^1, de la classe C_1, est le pentacercle strictement isogonal construit avec $a = -\frac{1}{4}$. Le S_4 associé est régulier, et représenté par (5). U_1, U_2, U_3, U_5 forment un S_4 analogue, donc U_5 ne diffère de U_4 que par le signe du terme en ω_4. On vérifie alors qu'on a bien $U_4 U_5 = -\frac{1}{4}$, et le système qui représente ce S_5^1 est ainsi

$$(8)\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\alpha_2 + \omega_4 \sin\alpha_2)], \\ U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\alpha_2 - \omega_4 \sin\alpha_2)]. \end{cases}$$

Il n'est pas pur puisque le S_4^1 associé ne l'est pas pour $a = -\frac{1}{4}$.

Un système type de la classe C_2 est $S_5^2 = (45)$, avec $8a^2 - a - 1 = 0$, dont les deux racines sont comprises entre $-\frac{1}{3}$ et 1. Le S_4 associé est encore représenté par (5), et U_5 par la dernière équation (8), pour la raison invoquée au sujet de S_5^1. (8) représente encore ce S_5^2, car on vérifie que

$$U_4 U_5 = 1 - 2\sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 = 1 - 2\frac{(1-a)(1+3a)}{1+2a} = \frac{6a^2 - 2a - 1}{1+2a}$$

est bien égal à $-a$ pour ces deux valeurs de a. S_5^2 est impur, puisque les deux valeurs de a en question sont dans l'intervalle $-\frac{1}{3}$, 1 dans lequel le S_4^1 associé est impur. Bien entendu, ces deux systèmes S_5^1 et S_5^2 existent sous forme réelle dans l'espace. La relation qui assujettit les U_i est

$$\frac{U_5 + U_4}{2} - U_3 \cos\alpha_2 - U_2 \cos\alpha_1(1 - \cos\alpha_2) - U_1 \cos\alpha(1 - \cos\alpha_1)(1 - \cos\alpha_2) = 0,$$

où

$$\cos\alpha(1 - \cos\alpha_1) = \cos\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha_1(1 - \cos\alpha_2) = \cos\alpha_2,$$

ce qui donne

$$(9)\qquad U_5 + U_4 - \frac{2a}{1+2a}(U_3 + U_2 + U_1) = 0.$$

37. Un système de la classe C_3 est $S_5^3 = (23, 45)$. Le S_4 associé appartient à la classe $C(\sigma_4^2)$, et est régulier; son diagramme (23) montre qu'il est de la forme

$$(10)\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha'_1 + \omega_3 \sin\alpha'_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\gamma_1 + \omega_4 \sin\gamma_1)], \end{cases}$$

où $\cos\alpha'_1$, défini par $U_2 U_3 = -\cos\alpha$, est conforme aux notations du tableau T, tandis que $U_1U_4 = U_2U_4 = \cos\alpha$ justifient les coefficients de ω_1 et ω_2 dans l'expression de U_4; $\cos\gamma_1$ est défini par

$$U_3U_4 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos\alpha_1\cos\alpha'_1 + \sin\alpha_1\sin\alpha'_1\cos\gamma_1) = \cos\alpha,$$

qui se réduit à

$$\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1\cos\gamma_1 = \sqrt{1-4a^2}\cos\gamma_1 = a,$$

de sorte que γ_1 est l'angle ainsi désigné dans T. U_5, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, ne peut en différer que par le signe du coefficient de ω_4. Il vient alors

$$U_4U_5 = U_4(U_5 - U_4) + 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1,$$

qui vaut bien $-a$ pour $a = \frac{1}{3}$, comme il résulte tout de suite du tableau T_2. Pour $4a^2 - a - 1 = 0$, on observe que

$$U_4U_5 = 1 - 2\frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)} = \frac{-1+a+8a^2-10a^3}{1-a-2a^2}$$
$$= \frac{2a+4a^2-10a^3}{1-a-2a^2} = a\frac{-2+4(1+a)-10a^2}{2-(1+a)-2a^2} \doteq -a.$$

On obtient ainsi trois S_5^3, représentés par

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} U_1 &= \omega_1,\\ U_2 &= \omega_1\cos\alpha + \omega_2\sin\alpha,\\ U_3 &= \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1 + \omega_3\sin\alpha'_1),\\ U_4 &= \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2(\omega_3\cos\gamma_1 + \omega_4\sin\gamma_1)],\\ U_5 &= \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3\cos\gamma_1 - \omega_4\sin\gamma_1)],\end{aligned}\right.$$

avec $a = \frac{1}{3}$; ou $a' = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$, ou $a'' = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$. Ces trois valeurs sont comprises entre -1 et $+1$, donc les S_5^3 purs doivent être réels; plus précisément, on vérifie que $-\frac{1}{2} < a' < 0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < a'' < 1$, donc $\sin\alpha_1$ et $\sin\alpha'_1\cos\gamma_1$ sont réels; les U_i sont réels pourvu que ω_1 et ω_2 le soient, et que ω_3, ω_4 soient respectivement de même nature que $\sin\alpha'_1$ et $\sin\gamma_1$; on voit aisément que $-\frac{1}{\sqrt{5}} < a'$, tandis que $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est manifestement entre $\frac{1}{3}$ et a'', donc $\sin\alpha'_1$ est réel pour $\frac{1}{3}$ et a', et imaginaire pur pour a''; $\sin\gamma_1$ est réel, car $\sin^2\gamma_1$ est du signe de $(1-2a)(1-5a^2)$, qui est positif pour ces trois valeurs de a. Ainsi ω_4 doit être réel, tandis que ω_3 est réel pour $\frac{1}{3}$ et a', imaginaire pur pour a''. Le seul S_5^3 réel est celui construit avec $a = a''$.

La relation linéaire existant entre ces cinq cercles est, grâce à T,

$$\begin{vmatrix} U_1 & 1 & 0 & 0 \\ U_2 & a & 1 & 0 \\ U_3 & a & \dfrac{-a}{1-a} & \dfrac{\sqrt{1-2a}}{1-a} \\ U_4+U_5 & 2a & \dfrac{2a}{1+a} & \dfrac{2a}{(1+a)\sqrt{1-2a}} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la dernière colonne par $\sqrt{1-2a}$, et ajoutons la deuxième ligne à la troisième; il vient

$$\begin{vmatrix} U_1 & 1 & 0 & 0 \\ U_2 & a & 1 & 0 \\ U_2+U_3 & 2a & \dfrac{1-2a}{1-a} & \dfrac{1-2a}{1-a} \\ U_4+U_5 & 2a & \dfrac{2a}{1+a} & \dfrac{2a}{1+a} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} U_1 & 1 & 0 \\ U_2+U_3 & 2a & \dfrac{1-2a}{1-a} \\ U_4+U_5 & 2a & \dfrac{2a}{1+a} \end{vmatrix} = 0;$$

on observe que

$$\frac{1-2a}{1-a} - \frac{2a}{1+a} = \frac{1-3a}{1-a^2}, \qquad \frac{1-2a}{1-a} + \frac{2a}{1+a} = \frac{1+a-4a^2}{1-a^2},$$

donc la soustraction des deux dernières lignes pour $a = \frac{1}{3}$, et leur addition pour a' et a'', donnent les deux relations respectives

$$U_2+U_3-U_4-U_5=0, \qquad a=\frac{1}{3}, \tag{12}$$

$$U_2+U_3+U_4+U_5=4aU_1, \qquad 4a^2-a-1=0. \tag{12'}$$

Observons que, pour $a = \frac{1}{3}$, U_2, U_3, U_4, U_5 forment un S_4 irrégulier; ce système est en effet de la classe $C(\sigma_4'^1)$, dont le déterminant

$$\Delta_4'^1 = (1+a)^3(1-3a)$$

est nul pour cette valeur de a.

38. Étudions maintenant les S_5 de la classe C_4, avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Un système type est $S_5^4 = (23, 34, 45)$. Le S_3 associé est régulier, mais le S_4 associé ne l'est pas, car il appartient à la classe $C(\sigma_4^2)$; U_1, U_2, U_3 ont encore les expressions (10), mais U_4, qui leur est linéairement lié, avec $U_1U_4 = U_2U_4 = a$, est de la forme

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 + \varepsilon\omega_3\sin\alpha_1),$$

où $\varepsilon = \pm 1$ est déterminé par la condition $U_3U_4 = -a$. La même observation vaut pour U_5, qui doit se déduire de U_4 en changeant le signe de ε, puisque

$U_3 U_5 = a$. Il vient, d'autre part,

$$U_3 U_4 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos\alpha_1 \cos\alpha'_1 + \varepsilon \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1) = \varepsilon \sin^2\alpha \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1$$
$$= \varepsilon\sqrt{1-4a^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} = \varepsilon a,$$

donc $\varepsilon = -1$ répond aux conditions. On voit enfin que

$$U_4 U_5 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1) = 1 - 2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1 = 1 - 2\frac{(1-a)(1+2a)}{1+a}$$
$$= 1 - 2\frac{1+a-\frac{2}{5}}{1+a} = -1 + \frac{4}{5}\frac{1-a}{1-a^2} = -a,$$

comme il se doit, donc ce S_5^4 existe, sous la forme des expressions

$$(13)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha'_1 + \omega_3 \sin\alpha'_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 - \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1). \end{cases}$$

Tous les coefficients sont réels, donc les U_i sont réels pourvu que ω_1, ω_2, ω_3 le soient, ce qui est possible. Formons les deux relations qui unissent U_4 et U_5 à U_1, U_2, U_3. Elles sont de la forme

$$\begin{vmatrix} U_2 - aU_1 & 1 & 0 \\ U_3 - aU_1 & \cos\alpha'_1 & \sin\alpha'_1 \\ U_i - aU_1 & \cos\alpha_1 & \varepsilon\sin\alpha_1 \end{vmatrix} = 0,$$

avec $\varepsilon = -1$ pour $i = 4$, $\varepsilon = 1$ pour $i = 5$. Après multiplication par $1 - a^2$, cela se développe en

$$(1+a)\sqrt{1-2a}(U_i - aU_1) - \varepsilon(1-a)\sqrt{1+2a}(U_3 - aU_1)$$
$$- a\left(\sqrt{1-2a} + \varepsilon\sqrt{1+2a}\right)(U_2 - aU_1) = 0;$$

grâce à

$$(1+a)(1-2a) = \frac{3}{5} - a = a(3a-1), \qquad \sqrt{1-4a^2} = a,$$

la multiplication de cette relation par $\frac{1}{a}\sqrt{1-2a}$ la transforme en

$$(3a-1)(U_i - aU_1) - \varepsilon(1-a)(U_3 - aU_1) - (1 - 2a + \varepsilon a)(U_2 - aU_1) = 0,$$

ou

$$(3a-1)U_i - \varepsilon(1-a)U_3 - (1-2a+\varepsilon a)U_2 - a(5a-2-\varepsilon)U_1 = 0,$$

ou enfin

$$(3a-1)U_i - \varepsilon(1-a)U_3 - (1-2a+\varepsilon a)U_2 - (1-2a-\varepsilon a)U_1 = 0.$$

Les deux valeurs de ε donnent ainsi les deux relations

$$(3a-1)(U_4+U_2)+(1-a)(U_3-U_1)=0,$$
$$(3a-1)(U_5+U_1)-(1-a)(U_3+U_2)=0.$$

En observant enfin que $\frac{1-a}{3a-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, on a en définitive

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &U_4+U_2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}(U_3-U_1)=0,\\ &U_5+U_1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}(U_3+U_2)=0.\end{aligned}\right.$$

39. $n=6$. — Le S_5 associé est l'un des systèmes que nous venons de former, à une anallagmatie près, avec $a=-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou l'un des zéros de $8a^2-a-1$, $4a^2-a-1$. Mais a doit également annuler l'un des déterminants Δ_6, ce qui n'est possible que si $a=\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Les classes $C(\sigma_6^h)$ irrégulières pour $a=\frac{1}{3}$ sont [21] C_3, C_5, C'_5 et C_9. Un diagramme de C_3 est (34, 56), dont le S_5 associé est (34), de la classe $C(\sigma_5^2)$, qui est régulier pour $a=\frac{1}{3}$. Un diagramme de C'_5 est le quadrilatère (34, 45, 56, 63), dont le S_5 associé est (34, 45), de la classe $C(\sigma_5'^3)$, également régulier pour $a=\frac{1}{3}$; il en est de même pour $S_5=(23, 34, 45)$, de la classe $C(\sigma_5^4)$, associé au diagramme (23, 34, 45, 56) de C_9.

La classe C_5 peut seule fournir un S_6. Prenons $S_6=(23; 45; 61)$, de sorte que le S_5 associé soit le $S_5^3=(23; 45)$ représenté par les équations (11). Le cercle $-U_6$ faisant les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2, U_6 est de la forme

$$U_6=-\omega_1\cos\alpha-\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha'_1+\sin\alpha'_1(\omega_3\cos\alpha'_2+\omega_4\sin\alpha'_2)],$$

où α'_2 est déterminé par les conditions $U_3U_6=U_4U_6=U_5U_6=a$. La première s'écrit

$$U_3(U_6+U_3)=\sin^2\alpha\sin^2\alpha'_1(1-\cos\alpha'_2)\equiv\frac{(1+a)(1-2a)}{1-a}(1-\cos\alpha'_2)=1+a,$$

qui donne

$$\cos\alpha'_2=1-\frac{1-a}{1-2a}=\frac{-a}{1-2a},$$

conformément aux notations du tableau T; mais, ici, $\cos\alpha'_2=-1$, $\sin\alpha'_2=0$.

([21]) *Cf.* § 12.

On vérifie alors tout de suite que

$$U_4(U_6+U_3)=U_5(U_6+U_3)=2\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1\cos\gamma_1=2a,$$

d'où résulte la solution S_6^5 représentée par le système d'expressions

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}U_1&=\omega_1,\\U_2&=\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha,\\U_3&=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1+\omega_3\sin\alpha'_1),\\U_4&=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1(\omega_3\cos\gamma_1+\omega_4\sin\gamma_1)],\\U_5&=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1(\omega_3\cos\gamma_1-\omega_4\sin\gamma_1)],\\U_6&=-\omega_1\cos\alpha-\sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1-\omega_3\sin\alpha'_1).\end{aligned}\right.$$

Avec les valeurs numériques du tableau T_2, ce système s'écrit

$$(15')\quad\left\{\begin{aligned}U_1&=\omega_1, & U_4&=\frac{\omega_1}{3}+\frac{\omega_2}{3\sqrt{2}}+\frac{\omega_3+2\omega_4}{\sqrt{6}},\\U_2&=\frac{\omega_1+2\sqrt{2}\,\omega_2}{3}, & U_5&=\frac{\omega_1}{3}+\frac{\omega_2}{3\sqrt{2}}+\frac{\omega_3-2\omega_4}{\sqrt{6}},\\U_3&=\frac{\omega_1}{3}+\sqrt{2}\,\frac{-\omega_2+\sqrt{3}\,\omega_3}{3}, & U_6&=-\frac{\omega_1}{3}+\sqrt{2}\,\frac{\omega_2+\sqrt{3}\,\omega_3}{3}.\end{aligned}\right.$$

Outre la relation (12) formée au paragraphe 37, il existe une relation linéaire entre U_1, U_2, U_3, U_6, qui apparaît tout de suite en formant U_6-U_3, donc les U_i sont liés par les deux relations

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}U_2+U_3-U_4-U_5&=0,\\U_1-U_2-U_3+U_6&=0.\end{aligned}\right.$$

(15') n'est pas pur, puisque S_5^3 ne l'est pas pour $a=\frac{1}{3}$; c'est d'ailleurs évident sur ces expressions numériques.

40. Recherchons maintenant les S_6 formés avec $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Les classes $C(\sigma_6^h)$ irrégulières pour cette valeur sont C_7, C'_7, C_9 et C_{10}. Au diagramme (45, 56, 61) de la classe C_7 est associé $S_5^2=(45)$, régulier pour $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Au diagramme (45, 56, 61; 23) de C'_7 est associé $S_5^3=(23; 45)$, qui est également régulier. Ce même S_5^3 est associé au $S_6=(23, 36, 64, 45)$ de la classe C_9. Ainsi, la seule classe qui puisse fournir une solution est C_{10}. Avec $S_6^{10}=(23, 34, 45, 56, 62)$, le S_5 associé est le S_5^4 représenté par les expressions (13). U_6, qui fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2, est de la forme

$$U_6=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha[\omega_2\cos\alpha'_1+\sin\alpha'_1(\omega_3\cos\beta'_1+\omega_4\sin\beta'_1)],$$

où $\cos\beta'_1$ est défini par $U_3U_6=\cos\alpha$, c'est-à-dire

$$U_3(U_3-U_6)=\sin^2\alpha\sin^2\alpha'_1(1-\cos\beta'_1)=\frac{(1+a)(1-2a)}{1-a}(1-\cos\beta'_1)=1-a,$$

qui donne

$$\cos\beta'_1 = 1 - \frac{(1-a)^2}{(1+a)(1-2a)} = \frac{a(1-3a)}{(1+a)(1-2a)},$$

conforme aux notations du tableau T. Mais alors $\sin\beta'_1 = 0$, et, plus précisément, on voit que $\cos\beta'_1 = -1$. On vérifie ensuite que U_4U_6 et U_5U_6 valent respectivement

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos\alpha_1\cos\alpha'_1 \pm \sin\alpha_1\sin\alpha'_1) = \pm\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1 = \pm\sqrt{1-4a^2} = \pm a,$$

comme il se doit, et l'on a ainsi obtenu le S_6^{10} du plan

$$(17)\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1\cos\alpha + \omega_2\sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1 + \omega_3\sin\alpha'_1), \\ U_4 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 - \omega_3\sin\alpha_1), \\ U_5 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 + \omega_3\sin\alpha_1), \\ U_6 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1 - \omega_3\sin\alpha'_1). \end{cases}$$

Ces expressions sont évidemment valables pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, le tableau T_3 donne les expressions numériques

$$(17')\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, & U_4 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1}, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + 2\omega_2}{\sqrt{5}}, & U_5 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{-\omega_2 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1}, & U_6 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\dfrac{\omega_2 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1}. \end{cases}$$

Il suffirait de changer $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$ pour $a = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Ce système est réel si ω_1, ω_2, ω_3 le sont. U_1, U_2, U_3 sont seuls linéairement distincts, et il s'ajoute aux relations (14) la relation

$$U_6 + U_3 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}(U_2 - U_1) = 0,$$

pour le système (17′).

41. $n = 7$. — Le S_6 associé est l'un des deux systèmes que nous venons de former avec $a = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Supposons d'abord $a = \frac{1}{3}$. Le diagramme de S_7, qui se déduit de celui de S_6^5 par l'adjonction de 0, 1, 2 ou 3 segments [22] issus du sommet 7, est formé par

[22] Ce nombre de segments peut être supposé ≤ 3, en utilisant au besoin ν_7.

3 traits au moins (isolés dans ce cas) et 6 au plus. Les seules classes de S_7, irrégulières pour $a = \frac{1}{3}$, et susceptibles d'une telle représentation graphique, sont ainsi [23] C_5, C_{10}, C_{14}, C'_{15}, C_{18}, C_{23}, C_{24}, C'_{24}, C_{25}, C_{26}.

Un diagramme de C_5 est (34, 56, 71), et le S_5 associé est (34), de la classe $C(\sigma_5^2)$, régulière pour $a = \frac{1}{3}$. Ce même S_5 est associé à $S_7 = (17, 72; 34; 56)$, de la classe C_{10}; il n'y a pas non plus de S_7^{10}. Les quatre traits consécutifs de C_{14} ne peuvent se construire à partir de S_6^5. Un graphique de C'_{15} est $S_7 = (12, 23, 31; 46; 57)$, et le S_5 associé est (12, 23, 31), de la classe $C(\sigma'^2_5)$ formée à l'alinéa γ_3 (§ 5), donc régulier pour $a = \frac{1}{3}$. $S_5 = (34)$ est encore associé au $S_7 = (16, 65, 57, 72; 34)$ de la classe C_{18}, ainsi qu'au $S_7 = (76, 65; 74, 43; 72)$ de C_{23}, et au $S_7 = (73, 34, 46, 67; 75)$ de C_{24}. Un graphique de la classe C'_{24}, de l'alinéa ζ_7 (§ 18) est (21, 17, 72; 23, 34; 56) dont le S_6 associé est (12, 23, 34; 56), de la classe $C(\sigma'^7_6)$ régulière pour $a = \frac{1}{3}$. Les deux diagrammes (23, 34, 45, 56, 67, 72) de C_{25} et (23, 34, 35, 57, 72; 71) de C_{26} ont le même S_5 associé, dont le diagramme (23, 34, 45) appartient à la classe $C(\sigma_5^4)$, régulière pour $a = \frac{1}{3}$. Ainsi, cette valeur de a ne fournit aucun S_7.

Lorsque $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, le diagramme de S_7 est associé à celui de S_6^{10}, et comporte

Système.	Valeur de a.	Expressions représentatives.	Nature.
$S_5^1 = (\ )$	$-\frac{1}{4}$	(8)	impur
$S_5^2 = (45)$	$8a^2 - a - 1 = 0$	(8)	»
	$\frac{1}{3}$	(11)	»
$S_5^3 = (23; 45)$	$\frac{1-\sqrt{17}}{8}$	(11)	»
	$\frac{1+\sqrt{17}}{8}$	(11)	réel
$S_5^4 = (23, 34, 45)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	(13)	»
$S_6^5 = (23; 45; 61)$	$\frac{1}{3}$	(15)	impur
$S_6^{10} = (23, 34, 45, 56, 62)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	(17)	réel

[23] Le diagramme de C'_{25}, formé aux alinéas λ_{11} et λ_{17}, comporte 7 traits.

donc 5 traits au moins (formant alors un pentagone) et 8 au plus. Les seules classes de S_7 à retenir sont C'_7, C'_{12}, C_{20}, C'_{20}, C'_{22}, C_{26}, C'_{26}. Mais le S_7 de C'_7 formé à l'alinéa ζ_3 (§ 17), ni celui de C'_{12}, formé à l'alinéa η_{11} (§ 16) n'ont 5 traits consécutifs. Les diagrammes (73, 34, 46, 65, 57) de C_{20} et (73, 34, 46, 65, 57; 71) de C_{26} sont associés à $S_5^2 = (34)$, régulier pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$. $S_5^3 = (12, 34)$, régulier pour cette même valeur de a, est le S_5 associé au $S_7 = (73, 34, 46, 65, 57; 12)$ de C'_{20} formé à l'alinéa ζ_4 (§ 17), ainsi qu'au $S_7 = (73, 34, 46, 65, 57; 71, 12)$ de C'_{26} formé à l'alinéa λ_5 (§ 22). Enfin, le diagramme de C'_{22} formé à l'alinéa ζ_{16} (§ 18) ne peut se déduire d'un pentagone. $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ne fournit aucun S_7.

Nous avons ainsi démontré qu'il n'existe aucun heptacercle isogonal dans le plan. Par contre, il existe quatre types de pentacercle et deux types d'hexacercle, dont nous rappelons les caractéristiques dans le tableau ci-dessus.

CHAPITRE V.

LES S_n ISOGONAUX DE L'ESPACE E_3.

42. Les S_3 et les S_4 sont les mêmes que dans E_2, sauf les S_4 irréguliers, qu'on peut supposer formés avec $a = -\frac{1}{3}$ ou $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Le S_3 associé à $S_4^1 \left(a = -\frac{1}{3}\right)$ ou à $S_4^2 \left(a = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ est encore donné par (1; IV), mais l'expression (7; IV) ou (6; IV) de U_4 est remplacée par

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 - \omega_3 \sin\alpha_1) + h\frac{\omega_4 + i\omega_5}{2}, \tag{1}$$

où h est quelconque.

La discussion faite au paragraphe 35 sur la pureté des S_4 montre que ceux-ci existent sous forme réelle pour $-1 < a < 1$, car il existe quatre ω_i réels dans E_3; par contre il n'existe pas non plus de S_4^2 pur pour $|a| > 1$, car aucun espace E_n ne contient deux ω_i imaginaires purs.

On peut construire les deux S_4 irréguliers représentés par (1; IV) et (1) en prenant trois plans orthonormaux pour ω_1, ω_2, ω_3, et deux sphères respectivement réelle et imaginaire pure pour ω_4, ω_5. Nous appelons $\mathfrak{T}_0$ le pentasphère orthonormal correspondant [24]

$$\mathfrak{T}_0 : \quad \omega_i = \vec{e}_i . \overrightarrow{OP} \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \omega_4 = \frac{\overrightarrow{OP}^2 - \rho^2}{2\rho}, \qquad \omega_5 = \frac{\overrightarrow{OP}^2 + \rho^2}{-2i\rho},$$

---

[24] Les trois vecteurs $\vec{e}_i$ sont orthonormaux; ρ est réel; P désigne le point courant de l'espace.

de sorte que $\omega_4 + i\omega_5 = -\rho$ représente le plan de l'infini. U_1, U_2, U_3 forment alors un trièdre de sommet O, que U_4 complète en tétraèdre si $h \neq 0$. Réciproquement, tout tétraèdre isogonal est un S_4 irrégulier, et est semblable à ceux-ci. Les seuls polyèdres réguliers dont l'angle polyèdre est un trièdre non rectangle sont le tétraèdre et le dodécaèdre. Le S_4^1 que nous venons de construire est justement un tétraèdre régulier, et le S_4^2 est le tétraèdre obtenu en coupant un trièdre de dodécaèdre régulier par un plan. Il ne peut s'agir d'un plan perpendiculaire à l'axe ternaire puisque $U_3 U_4$ est opposé à $U_1 U_4 = U_2 U_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On montre aisément que U_4 coupe les trois arêtes du trièdre à des distances proportionnelles à 1, 1, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Les expressions explicites de ces deux tétraèdres sont respectivement, pour $S_4^1\left(a = \frac{1}{3}\right)$,

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
U_1 &= \vec{e}_1 . \overrightarrow{OP},\\
U_2 &= \frac{-\vec{e}_1 + 2\sqrt{2}\,\vec{e}_2}{3}\overrightarrow{OP},\\
U_3 &= -\frac{\vec{e}_1 + \sqrt{2}\,\vec{e}_2 - \sqrt{6}\,\vec{e}_3}{3}\overrightarrow{OP},\\
U_4 &= -\frac{\vec{e}_1 + \sqrt{2}\,\vec{e}_2 + \sqrt{6}\,\vec{e}_3}{3}\overrightarrow{OP} - l,
\end{aligned}
\right.
$$

où $l = \frac{h\rho}{2} \neq 0$, et, pour $S_4^2\left(a = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$,

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
U_1 &= \vec{e}_1 . \overrightarrow{OP},\\
U_2 &= \frac{\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{OP},\\
U_3 &= \left(\vec{e}_1 + 2\,\frac{\vec{e}_2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\vec{e}_3}{\sqrt{5}+1}\right)\frac{\overrightarrow{OP}}{\sqrt{5}},\\
U_4 &= \left(\vec{e}_1 + 2\,\frac{\vec{e}_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\vec{e}_3}{\sqrt{5}+1}\right)\frac{\overrightarrow{OP}}{\sqrt{5}} - l.
\end{aligned}
\right.
$$

43. $n = 5$. — En changeant au besoin a en $-a$, il suffit de former un S_5 de chacune des classes C_1, C_2, C_3, C_4.

Le système strictement isogonal S_5^1 de C_1 est représenté par les expressions

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
U_1 &= \omega_1,\\
U_2 &= \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha,\\
U_3 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1),\\
U_4 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \sin\alpha_2 + \omega_4 \sin\alpha_2)],\\
U_5 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,\{\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2(\omega_4 \cos\alpha_3 + \omega_5 \sin\alpha_3)]\},
\end{aligned}
\right.
$$

lorsqu'il est « itérativement régulier », c'est-à-dire lorsque tous les S_p associés d'ordre $p < n$, sont réguliers; pour $n = 5$, cela suppose $a \neq -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$; les notations des angles α_i sont celles du tableau T. On a démontré dans un article antérieur ([25]) que (4) n'est pur que si $a \leqq -\frac{1}{4}$ ou $a > 1$, les U_i étant réelles et sécantes pour $-1 < a \leqq -\frac{1}{4}$, réelles non sécantes pour $a < -1$, et imaginaires pures pour $a > 1$. Les expressions valables pour $a = -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ ont été données dans cet article ([26]). Pour $a = -\frac{1}{2}$, on peut leur donner la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \dfrac{-\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2}, \\ U_3 = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\omega_3 + i\omega_4), \\ U_4 = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\omega_3 - i\omega_4), \\ U_5 = -\dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + i\sqrt{3}(\omega_4 + i\omega_5), \end{cases}$$

qu'on obtient en reproduisant les expressions (2; IV) et (3; IV) avec $\lambda = -\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et en ajoutant une cinquième sphère U_5, qui est *a priori* de la forme

$$(6) \qquad U_5 = -\frac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \omega,$$

avec $\omega^2 = \omega\omega_1 = \omega\omega_2 = 0$, et $U_3 U_5 = U_4 U_5 = -\frac{1}{2}$. Avec un pentasphère du type $\mathfrak{T}_0$ du paragraphe 42, où les indices 1, 2, 3, 4, 5 des ω_i de (5) sont les indices 1, 2, 4, 5, 3 de $\mathfrak{T}_0$, U_1, U_2, U_3 sont les faces d'un prisme équilatéral parallèle à $\vec{e}_3$, et U_4, U_5 deux sphères centrées sur l'axe de ce prisme et circonscrites aux sections droites de leurs centres. En fonction de ρ, la hauteur de la section droite est $\rho\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc le rayon de ces sphères est $\frac{\rho}{\sqrt{3}}$, et la distance de leurs centres est égale à ρ.

Avec $a = -\frac{1}{3}$, une solution consiste en le tétraèdre régulier (2), de hauteur $l (l > 0)$, auquel on adjoint une sphère qui est nécessairement de la forme

$$(7) \qquad U_5 = -\frac{\vec{e}_1 + \sqrt{2}\,\vec{e}_2 + \sqrt{6}\,\vec{e}_3}{3}\,\overrightarrow{OP} + \frac{\overrightarrow{OP}^2}{2\rho},$$

([25]) *Loc. cit.*, p. 242; c'est d'ailleurs immédiatement vérifiable.

([26]) *Loc. cit.*, p. 235.

avec $U_4 U_5 = 1 + \frac{l}{\rho} = -\frac{1}{3}$, donc de rayon $|\rho| = \frac{3}{4} l$; c'est la sphère circonscrite.

44. Prenons $S_5^2 = (45)$ pour système type de la classe C_2. On sait que le déterminant $\Delta_5^2 = (1-a)^2(1+a)(1+a-8a^2)$, donc S_5^2 est régulier si $8a^2 - a - 1 \neq 0$. Lorsque a diffère de $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$, le S_4 associé est représenté par les quatre premières expressions (4), et U_5, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2 et U_3, est de la forme

$$U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 [\omega_3 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2 (\omega_4 \cos\beta_2 + \omega_5 \sin\beta_2)] \},$$

où $\cos\beta_2$ est déterminé par la condition $U_4 U_5 = -a$; celle-ci s'écrit

$$U_4(U_4 - U_5) = \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 (1 - \cos\beta_2) \equiv \frac{(1-a)(1+3a)}{1+2a}(1 - \cos\beta_2) = 1 + a,$$

donc

$$\cos\beta_2 = 1 - \frac{(1+a)(1+2a)}{(1-a)(1+3a)} = \frac{-a(1+5a)}{(1-a)(1+3a)}$$

est conforme aux notations du tableau T. S_5^2 est ainsi représenté par

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} U_1 &= \omega_1, \\ U_2 &= \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1), \\ U_4 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha [\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 (\omega_3 \cos\alpha_2 + \omega_4 \sin\alpha_2)], \\ U_5 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 [\omega_3 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2 (\omega_4 \cos\beta_2 + \omega_5 \sin\beta_2)] \}, \end{aligned} \right.$$

pour $a \neq -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$. On vérifie l'irrégularité pour $8a^2 - a - 1 = 0$, qui annule $\sin\beta_2$.

Lorsque $a = -\frac{1}{2}$, les quatre premières expressions (5) subsistent, ainsi que (6), mais avec les conditions $U_3 U_5 = -U_4 U_5 = -\frac{1}{2}$; il vient alors

$$\omega(\omega_3 + i\omega_4) = -\frac{3}{\sqrt{3}}, \qquad \omega(\omega_3 - i\omega_4) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

qui, joints à $\omega\omega_1 = \omega\omega_2 = \omega^2 = 0$, donnent

$$(9) \qquad U_5 = -\frac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2} - \frac{\omega_3 - 2i\omega_4}{\sqrt{3}} + \omega_5.$$

Avec les ω_i particularisés pour la construction de (5), U_1, U_2, U_3 sont les faces du même prisme, U_4 est la même sphère, mais U_5 est déplacée parallèlement au prisme de manière que la distance des deux centres soit maintenant égale à $\frac{\rho}{\sqrt{3}}$, donc au rayon.

Pour $a = -\frac{1}{3}$, (2) et (7) conviennent encore, mais $U_4 U_5 = 1 + \frac{l}{\rho} = \frac{1}{3}$ donne maintenant $\rho = -\frac{3l}{2}$; U_5 est l'homothétique double de la sphère circonscrite, par rapport à un sommet du tétraèdre.

Discutons de la réalité des S_5^2 représentés par (8). Pour $-1 < a < 1$, les U_i doivent être réels; les cosinus étant toujours réels, ce caractère des U_i s'exprime par la réalité de ω_1, ω_2, tandis que ω_3, ω_4, ω_5 sont respectivement de la même nature que $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2$, $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\beta_2$. Les valeurs caractéristiques de a sont $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, et les zéros a', a'' de $8a^2 - a - 1$, qui sont compris entre $-\frac{1}{3}$ et 1. Avec les notations habituelles, la discussion est résumée dans le tableau suivant :

a	-1 ; $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$; a'	a' ; 0 ; a''	a'' ; 1
ω_1	r	r	r	r	r
ω_2	r	r	r	r	r
ω_3	i	r	r	r	r
ω_4	r	i	r	r	r
ω_5	r	r	i	r	i

Les S_5^2 purs, formés de sphères sécantes, n'existent donc que dans les intervalles $-1 < a \leqq a'$ et $a'' \leqq a < 1$; les bornes a', a'' conviennent, puisque $\sin\beta_2 = 0$ élimine ω_5 des expressions (8). S_5^2 devrait être également réel pour $a < -1$; or, ces valeurs de a modifient la nature des coefficients $\sin\alpha$, $\sin\alpha_2$, $\sin\beta_2$ par rapport à la colonne $-1 < a < -\frac{1}{2}$; ω_2 et ω_5 devraient changer de nature et devenir imaginaires pures, ce qui est impossible. S_5^2 devrait être imaginaire pur pour $a > 1$; or ces valeurs de a ne changent la nature que de $\sin\alpha$, par rapport à la colonne $a'' < a < 1$; ω_1 seul devrait changer de nature, ω_1 et ω_5 seraient alors imaginaires, ce qui est impossible. En résumé il n'y a pas d'autres S_5^2 purs que ceux fournis par les intervalles $-1 < a \leqq a'$ et $a'' \leqq a < 1$.

45. Un système type de C_3 est $S_5^3 = (23; 45)$, et

$$\Delta_5^3 = (1+a)^2 (1-3a)(1+a-4a^2).$$

Le S_4 associé est de la classe $C(\sigma_4^2)$ et représenté par le système (10; IV) si $a \neq \frac{1}{2}$, afin que le S_3 associé soit régulier; U_1, U_2, U_3, U_5 forment un S_4 analogue, donc, si $\sin\gamma_1 \neq 0$, U_5 est de la forme

$$U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 [\omega_3 \cos\gamma_1 + \sin\gamma_1 (\omega_4 \cos\beta_5 + \omega_5 \sin\beta_5)] \},$$

où $\cos\beta_5$ est défini par $U_4 U_5 = -a$; ceci s'écrit

$$U_4(U_4 - U_5) = \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 (1 - \cos\beta_5) \equiv \frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)} (1 - \cos\beta_5) = 1 + a,$$

donc

$$\cos\beta_5 = 1 - \frac{(1+a)^2(1-2a)}{(1-a)(1-5a^2)} = \frac{-a(1+2a-7a^2)}{(1-a)(1-5a^2)}$$

correspond aux notations du tableau T. Ainsi, pour $a \neq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\pm\sqrt{5}}$, les S_5^3 en question sont représentés par le système

$$(10)\quad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\ U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,(\omega_2 \cos\alpha'_1 + \omega_3 \sin\alpha'_1), \\ U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\gamma_1 + \omega_4 \sin\gamma_1)], \\ U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,\{\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3 \cos\gamma_1 + \sin\gamma_1(\omega_4 \cos\beta_5 + \omega_5 \sin\beta_5)]\}. \end{cases}$$

$\sin\beta_5$ s'annule effectivement si $\Delta_5^3 = 0$, ce qui rend S_5^3 irrégulier; $\cos\beta_5$ est alors égal à -1 pour les trois valeurs de a : $\frac{1}{3}$ et les zéros a', a'' de $4a^2 - a - 1$.

Recherchons tout de suite les systèmes purs fournis par (10). Pour $-1 < a < 1$, la réalité des U_i équivaut à celle de ω_1, ω_2, alors que ω_3, ω_4, ω_5 sont respectivement de la nature des coefficients ([27]) $\sin\alpha'_1$, $\sin\alpha_1 \sin\gamma_1$ et $\sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \sin\beta_5$, donc de

$$\sqrt{1-2a}, \quad \sqrt{(1-2a)(1-5a^2)}, \quad \sqrt{(1-3a)(1-5a^2)(1+a-4a^2)}.$$

On voit aisément que $-\frac{1}{\sqrt{5}} < a' < 0$ et $\frac{1}{2} < a'' < 1$, et l'on a le tableau

a.....	-1 — $-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$ — a'	a' — 0 — $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$ — $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ — a''	a'' — 1
ω_1......	r	r	r	r	r	r	r
ω_2......	r	r	r	r	r	r	r
ω_3......	r	r	r	r	r	i	i
ω_4......	i	r	r	r	i	r	r
ω_5......	r	i	r	i	r	r	i

Il n'existe des S_5^3 réels que dans les intervalles $-1 < a \leqq a'$ et $\frac{1}{3} \leqq a \leqq a''$; les bornes $\frac{1}{3}$, a', a'' conviennent car ω_5 disparaît alors des expressions (10). Pour $a < -1$, les U_i devraient être réelles, mais $\sin\alpha$ et $\sin\alpha \sin\alpha'_1$ sont imaginaires, ce qui exige la même qualité de ω_2, ω_3, impossible à réaliser. Pour $a > 1$, les U_i devraient être imaginaires, alors que $\sin\alpha \sin\alpha'_1$ est réel; ω_1 et ω_3 devraient être imaginaires, ce qui est impossible. Il n'y a pas d'autres S_5^3 purs que les S_5^3 réels correspondant aux deux intervalles ci-dessus; même les valeurs

([27]) On observe que $\sin\alpha'_1$ est de même nature que $\sin\alpha_1 \cos\gamma_1$.

$a = \frac{1}{2}$ et $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ pour lesquelles (10) n'est plus valable, mais qui sont dans ces intervalles, donnent des systèmes réels comme nous allons le voir.

46. Pour $a = \frac{1}{2}$, le S_3 associé de S_5^3, de diagramme (23), est irrégulier, mais le S_4 associé est régulier. U_1, U_2, U_4 formant un système strictement isogonal, on peut prendre

$$\begin{aligned}
&U_1 = \omega_1,\\
&U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha,\\
&U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1),\\
&U_3 = \omega_1 \cos\alpha - \omega_2 \sin\alpha + \lambda(\omega_3 + i\omega_4),
\end{aligned}$$

avec

$$U_3 U_4 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cos\alpha_1 + \lambda \sin\alpha \sin\alpha_1 \equiv \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2},$$

donc $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$. U_5, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 [\omega_3 \cos\beta_1 + \sin\beta_1(\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)] \},$$

avec

$$U_4(U_5 - U_4) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 (\cos\beta_1 - 1) = -(1 + a),$$

donc

$$\cos\beta_1 = 1 - \frac{(1+a)^2}{(1-a)(1+2a)} = \frac{-a(1+3a)}{(1-a)(1+2a)} = -\frac{5}{4},$$

conformément aux notations des tableaux T et T_2, et $\sin\beta_1 = \frac{3i}{4}$. Il reste à écrire que $U_3 U_5 = \frac{1}{2}$, ou

$$U_3(U_5 - U_4) \equiv \lambda \sin\alpha \sin\alpha_1 (\cos\beta_1 - 1 + i \sin\beta_1 \cos\theta) = 0,$$

donc $\cos\theta = -3$, et $\sin\theta = 2i\sqrt{2}$. Nous obtenons ainsi le S_5^3

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&U_1 = \omega_1,\\
&U_2 = \frac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2},\\
&U_3 = \frac{\omega_1 - \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\omega_3 + i\omega_4}{2},\\
&U_4 = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\omega_3,\\
&U_5 = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{5\omega_3 + 9i\omega_4}{2} + 3\sqrt{2}\,\omega_5\right).
\end{aligned}\right.$$

Il est réel en prenant pour ω_4 la seule sphère imaginaire pure. Avec le pentasphère $\mathcal{T}_0$, où ρ est imaginaire pur, U_1, U_2, U_3 sont les faces d'un trièdre supplémentaire d'un trièdre de tétraèdre régulier.

Lorsque $a = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$, $\varepsilon = \pm 1$, le S_3 associé de S_5^3 est régulier, mais le S_4 est irrégulier. Les trois premières expressions (10) subsistent, mais celle de U_4, où $\cos\gamma = \varepsilon$ et $\sin\gamma_1 = 0$, est remplacée par une expression de la forme

$$U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \varepsilon\omega_3 \sin\alpha_1) + \lambda(\omega_4 + i\omega_5).$$

U_5, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de forme analogue, mais avec un terme en $\omega_4 - i\omega_5$ puisque S_5^3 est régulier, soit

$$U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \varepsilon\omega_3 \sin\alpha_1) + \mu(\omega_4 - i\omega_5).$$

Il suffit d'exprimer que $U_4 U_5 = -\cos\alpha$, ce qui donne tout de suite $2\lambda\mu = -\frac{\varepsilon\sqrt{5}+1}{\varepsilon\sqrt{5}}$. λ et μ ne sont pas nuls, et l'on peut choisir les valeurs $\lambda = \frac{2}{\varepsilon\sqrt{5}}$, $\mu = -\frac{\varepsilon\sqrt{5}+1}{4} = \frac{-1}{\varepsilon\sqrt{5}-1}$, sans restriction de la généralité. Le S_5^3 ainsi obtenu est

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}
U_1 &= \omega_1,\\
U_2 &= \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha,\\
U_3 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha'_1 + \omega_3 \sin\alpha'_1),\\
U_4 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \varepsilon\omega_3 \sin\alpha_1) + 2\frac{\omega_4 + i\omega_5}{\varepsilon\sqrt{5}},\\
U_5 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \varepsilon\omega_3 \sin\alpha_1) - \frac{\omega_4 - i\omega_5}{\varepsilon\sqrt{5}-1}.
\end{aligned}\right.$$

Les lignes trigonométriques étant réelles, ce système est réel si ω_5 est la seule sphère ω_i qui soit imaginaire pure. Avec $\varepsilon = 1$, les formules numériques sont

$$(12')\qquad \left\{\begin{aligned}
U_1 &= \omega_1,\\
U_2 &= \frac{\omega_1 + 2\omega_2}{\sqrt{5}},\\
U_3 &= \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{-\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1},\\
U_4 &= \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + 2\,\frac{\omega_4 + i\omega_5}{\sqrt{5}},\\
U_5 &= \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} - \frac{\omega_4 - i\omega_5}{\sqrt{5}-1}.
\end{aligned}\right.$$

Avec le pentasphère $\mathfrak{T}_0$ du paragraphe 42, ρ réel, U_1, U_2, U_3, U_4 forment un tétraèdre dont l'angle des faces U_1, U_2, U_4 est un trièdre de dodécaèdre régulier. U_3 est le plan sécant appelé U_4 dans les formules (3) et U_5 est une sphère qui passe par les sommets $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ et $U_1 = U_2 = U_4 = 0$.

Bien entendu, le S_5^3 relatif à $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ s'obtient en remplaçant, dans (12′), $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$.

47. Dans la classe C_4, dont le déterminant $\Delta_5^4 = (1 - 5a^2)^2$, considérons le système $S_5^4 = (23, 34, 45)$. Le S_4 associé est itérativement régulier si $a \neq \frac{1}{2}$ et $\frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$; il relève des formules déduites de (10; IV) en remplaçant $\sin\alpha_1$ par $-\sin\alpha_1$ de manière à changer le signe de $U_3 U_4$. Les trois premiers termes de l'expression de U_5 sont les mêmes que dans (11; IV) ou (10), et la condition $U_4 U_5 = -a$, qui détermine le coefficient de ω_4, donne de ce S_5^4 les expressions

$$
(13)\quad \begin{cases}
U_1 = \omega_1, \\
U_2 = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha, \\
U_3 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha'_1 + \omega_3 \sin\alpha'_1), \\
U_4 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\gamma_1 + \omega_4 \sin\gamma_1)], \\
U_5 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\{\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3 \cos\gamma_1 - \sin\gamma_1(\omega_4 \cos\alpha'_1 + \omega_5 \sin\alpha'_1)]\}.
\end{cases}
$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
U_4 U_5 &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha[\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1(\cos^2\gamma_1 - \sin^2\gamma_1 \cos\alpha'_1)] \\
&= 1 - \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1[2 - \sin^2\gamma_1(1 + \cos\alpha'_1)] = 1 - \frac{2(1-a)(1+2a) - (1-5a^2)}{1+a} = -a.
\end{aligned}
$$

Ce S_5^4 n'est jamais pur. En effet, les U_i devraient être réels pour $-1 < a < 1$, donc ω_1, ω_2 seraient réels, et les autres ω_i seraient respectivement de la nature [28] de $\sin\alpha'_1$, $\sin\alpha_1 \sin\gamma_1$, $\sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 \sin\gamma_1$. Les valeurs caractéristiques de a sont justement $\frac{1}{2}$ et $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, et fournissent le tableau

a	-1		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{2}$		1
ω_1		r		r		r		r	
ω_2		r		r		r		r	
ω_3		r		r		r		i	
ω_4		i		r		i		r	
ω_5		i		r		i		i	

qui met en évidence notre affirmation pour ces valeurs de a. Pour $a < -1$, S_5^4 devrait être encore réel, mais le facteur $\sin\alpha$ devient imaginaire; les autres sinus sont de même nature que dans la première colonne du tableau, donc les $\omega_i (i \geqq 2)$ ont la nature contraire. Pour $a > 1$, S_5^4 devrait être imaginaire, et un

[28] $\sin\alpha_1 \cos\gamma_1$ est de la nature de $\sin\alpha'_1$.

raisonnement semblable montre que les ω_i d'indice $i \geqq 2$ seraient de même nature que dans la quatrième colonne. Dans les deux cas, la réalisation est impossible.

48. Lorsque $a = \frac{1}{2}$, le S_3 associé de ce S_5^4 est encore représenté par les trois premières expressions (11) de S_5^3, mais $U_3U_4 = -\frac{1}{2}$ conduit à changer le signe de ω_3 dans l'expression de U_4. U_5 fait, avec U_1, U_2, U_4, les mêmes angles que la sphère U_5 de (11); elle est donc de la forme ([29])

$$U_5 = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2\sqrt{3}} + \frac{5\omega_3}{2\sqrt{6}} + \frac{3i}{2\sqrt{6}}(\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta),$$

puisque le changement de signe du coefficient de ω_3 dans U_4 produit le même effet dans U_5. Il reste à préciser θ par la condition nécessaire et suffisante $U_3U_5 = \frac{1}{2}$, qui s'écrit

$$U_3U_5 = \frac{5}{8} - \frac{3}{8}\cos\theta = \frac{1}{2},$$

donc $\cos\theta = \frac{1}{3}$, on peut faire évidemment $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, et l'on obtient le système

$$(14)\qquad \begin{cases} U_1 = \omega_1, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2}{2}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1 - \sqrt{3}\,\omega_2}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\dfrac{\omega_3 + i\omega_4}{2}, \\ U_4 = \dfrac{\omega_1}{2} + \dfrac{\omega_2}{2\sqrt{3}} - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\omega_3, \\ U_5 = \dfrac{\omega_1}{2} + \dfrac{\omega_2}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\dfrac{5\omega_3 + i\omega_4}{2} + i\sqrt{2}\,\omega_5\right). \end{cases}$$

Il n'est pas pur, puisque ω_4 et ω_5 devraient être imaginaires.

Pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, le S_5^4 a été formé dans le plan en (13; IV); mais, dans E_3, on peut ajouter aux formules de U_4, U_5 deux sphères-points orthogonales à ω_1, ω_2, ω_3, et orthogonales entre elles afin de conserver U_4U_5. Elles sont toutes les deux de la forme $\lambda(\omega_4 + i\omega_5)$, et le S_5^4 cherché s'écrit, grâce au tableau T_3

([29]) Le coefficient $\frac{3i}{2\sqrt{6}}$ est déterminé par la condition $U_5^2 = 1$.

pour les expressions numériques,

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
U_1 &= \omega_1, \\
U_2 &= \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha = \frac{\omega_1 + 2\omega_2}{\sqrt{5}}, \\
U_3 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha'_1 + \omega_3 \sin\alpha'_1) = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{-\omega_2 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1}, \\
U_4 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 - \omega_3 \sin\alpha_1) + \lambda\,\frac{\omega_4 + i\omega_5}{2} \\
&= \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + \lambda\,\frac{\omega_4 + i\omega_5}{2}, \\
U_5 &= \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2 \cos\alpha_1 + \omega_3 \sin\alpha_1) + \mu\,\frac{\omega_4 + i\omega_5}{2} \\
&= \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + \mu\,\frac{\omega_4 + i\omega_5}{2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, il suffirait de changer $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$; mais le système obtenu est directement semblable à (15) puisque $C'_4 = C_4$. Ce système est réel si ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, λ, μ sont réels et ω_5 imaginaire pure. Ce fait ne contredit pas les résultats du tableau du paragraphe 47, car, lorsque a tend vers $\frac{1}{\sqrt{5}}$ à gauche, ω_4 reste réelle à la limite, tandis que ω_5 devient imaginaire $\left(\text{la continuité de sa nature est à droite de } \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. (15) représente alors un pentaèdre lorsque les ω_i sont les sphères du $\mathcal{T}_0$ du paragraphe 42, ρ réel. L'indétermination qui porte sur λ, μ traduit la possibilité de déplacer par translation les faces U_4, U_5.

49. $n = 6$. — Les S_n d'ordre $n \geqq 6$ sont irréguliers dans E_3 et, pour $n = 6$, nous pouvons borner la discussion ([30]) aux dix classes $C_1, C_2, \ldots, C_{10}$.

Dans C_1, a doit valoir $-\frac{1}{5}$, et le S_5 associé à S_6^1 est donné par (4), avec $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$. Il suffit d'ajouter la sphère U_6, distincte de U_5, qui fait les mêmes angles que celle-ci avec les quatre premières sphères; il s'agit nécessairement de

$$
(16)\quad U_6 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,\{\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\,[\omega_3 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2(\omega_4 \cos\alpha_3 - \omega_5 \sin\alpha_3)]\}.
$$

Il vient alors

$$
(17)\quad U_5 U_6 = 1 - 2\sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \sin^2\alpha_3 \equiv 1 - 2\,\frac{(1-a)(1+4a)}{1+3a} \equiv -\frac{1+3a-8a^2}{1+3a},
$$

([30]) *Voir* la remarque faite au début du paragraphe 36.

qui vaut bien $-\frac{1}{5}$ pour $a = -\frac{1}{5}$. Ce S_6^1 n'est pas réel, car $-\frac{1}{5}$ est dans l'intervalle d'impureté $\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ de S_5^1. Ce caractère réduit l'intérêt des expressions numériques des formules (4), (16) de ce système.

Dans la classe C_2, $11a^2 - 2a - 1 = 0$. Avec $S_6^2 = (56)$, le raisonnement qui vient d'être fait pour S_6^1 demeure valable. (4) et (16) représentent encore S_6^2, et (17) donne maintenant $U_5 U_6 = -a$ pour ces deux valeurs de a. Celles-ci sont d'ailleurs dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{4}, 1\right)$ et ces deux S_6^2 ne peuvent être réels.

50. La classe C_3 ne peut donner que trois types de S_6^3, car $(1-3a)(1+2a-7a^2) = 0$. On peut prendre $S_6^3 = (36; 45)$, de sorte que le S_5 associé est un S_5^2 régulier, relevant des formules (8). U_1, U_2, U_3, U_6 forment un système du type du S_4^2 représenté dans le plan par (6; IV), donc U_6 est ici de la forme

$$(18) \quad U_6 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 [\omega_3 \cos\beta_1 + \sin\beta_1 (\omega_4 \cos\gamma_2 + \varepsilon\omega_5 \sin\gamma_2)] \},$$

où γ_2 et $\varepsilon = \pm 1$ sont tels que $U_4 U_6 = U_5 U_6 = a$. La première condition s'écrit

$$U_4(U_4 - U_6) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 [\cos\alpha_2 (\cos\alpha_2 - \cos\beta_1) + \sin\alpha_2 (\sin\alpha_2 - \sin\beta_1 \cos\gamma_2)] = 1 - a,$$

soit successivement

$$\frac{1+2a}{1+a}\left[1 + \frac{a^2(1+3a)}{(1-a)(1+2a)^2} - \frac{(1+a)\sqrt{(1+a)(1+3a)(1-5a^2)}}{(1-a)(1+2a)^2}\cos\gamma_2\right] = 1,$$
$$\sqrt{(1+a)(1+3a)(1-5a^2)}\cos\gamma_2 = 1 + 2a - a^2 - (1-a)(1+2a) = a(1+a),$$

où les trois valeurs de a surpassent -1; γ_2 est donc l'angle ainsi désigné dans T. L'autre condition s'écrit ensuite

$$(U_5 - U_4) U_6 \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\beta_1 [(\cos\beta_2 - 1)\cos\gamma_2 + \varepsilon \sin\beta_2 \sin\gamma_2] = 0,$$

où

$$1 - \cos\beta_2 = 1 + \frac{a(1+5a)}{(1-a)(1+3a)} = \frac{(1+a)(1+2a)}{(1-a)(1+3a)},$$

donc [31]

$$\varepsilon(1 + a - 8a^2) = a(1+a).$$

Ainsi, $\varepsilon = 1$ pour $a = \frac{1}{3}$, et -1 pour les zéros a'_1, a''_1 de $7a^2 - 2a - 1$.

Ces S_6^3 ne sont purs que s'ils sont réels, et l'existence dépend de la situation de ces trois valeurs de a dans le tableau formé au paragraphe 44 au sujet du S_5^2 associé; on voit aisément que $-1 < a' < a'_1 < \frac{1}{3} < a'' < a''_1 < 1$, donc ce S_5^2 n'est réel que si $a = a''_1$, ω_5 étant la sphère unique imaginaire pure. D'autre part, $\sin\alpha_1$ est réel, et la réalité de (18) est assurée par celle de $\sin\beta_1 \cos\gamma_2$ et $i \sin\beta_1$

---

(31) Un même radical a la même détermination dans les expressions de $\sin\beta_2$, $\cos\gamma_2$, $\sin\gamma_2$.

$\sin\gamma_2$, c'est-à-dire de $\sqrt{1+3a}$ et de $i\sqrt{(1+3a)(1+a-8a^2)}$, ce qui est le cas pour a''_1. En résumé (8) et (18) donnent trois S^3_6, dont un seul est pur, pour $a = a''_1 = \frac{1+\sqrt{8}}{7}(\varepsilon = -1)$.

51. Les S^4_6 cherchés doivent annuler $\Delta^4_6 = (1-a)^3(1+3a-9a^2-19a^3)$, ce qui permet trois valeurs de a, a'_1, a''_1, a'''_1, vérifiant les inégalités [32] $-1 < a'_1 < a''_1 < 0 < a'''_1 < 1$. Ces valeurs n'annulent aucun Δ_n d'ordre $n<6$, donc le S_5 associé est itérativement régulier. En prenant $S^4_6 = (45, 56)$, ce S_5 est encore représenté par (8). U_6, qui forme un S_5 strictement isogonal avec U_1, U_2, U_3, U_4, a donc pour expression

$$(19)\quad U_6 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2(\omega_4\cos\alpha_3 + \varepsilon\omega_5\sin\alpha_3)]\},$$

avec les notations du tableau T, et où la seule indéterminée est $\varepsilon = \pm 1$. Celle-ci est fixée par la condition $U_5 U_6 = -a$, c'est-à-dire

$$U_5(U_4 - U_6) \equiv \sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2[\cos\beta_2(1-\cos\alpha_3) - \varepsilon\sin\beta_2\sin\alpha_3] = 0,$$

ou enfin

$$\varepsilon\sqrt{(1+2a)(1+4a)}\sqrt{(1+a)(1+2a)(1+a-8a^2)} = -a(1+2a)(1+5a).$$

Cette relation est valable puisque $\Delta^4_6 = 0$; donc le coefficient de ε est réel, et la vérification en est aisée par l'élévation au carré. Pour préciser, il convient de situer a'_1, a''_1, a'''_1 par rapport à $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, et aux zéros a', a'' de $8a^2 - a - 1$; nous les situerons aussi par rapport à $-\frac{1}{3}$ pour discuter de la réalité de S^4_6 à l'aide du tableau du paragraphe 44. En posant

$$\varphi(a) \equiv 19a^3 + 9a^2 - 3a - 1,$$

on a

$$\varphi(-1) < 0,\quad \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) > 0,\quad \varphi\left(-\frac{1}{4}\right) > 0,\quad \varphi\left(-\frac{1}{5}\right) < 0,\quad \varphi(0) < 0,\quad \varphi(1) > 0,$$

et, pour a', a'',

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= 19a^3 + 9a^2 - 2a - (a+1)\\ &= a(19a^2 + a - 2) = a[19a^2 + 3a - 2(a+1)] = 3a^2(a+1) > 0.\end{aligned}$$

Sachant que $a' < -\frac{1}{4} < a''$, on a donc

$$-1 < a'_1 < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < a' < -\frac{1}{4} < a''_1 < -\frac{1}{5} < 0 < a'''_1 < a'' < 1,$$

et les deux radicaux au premier membre de la relation précédente sont positifs;

---

[32] Nous les vérifions plus loin, avec d'autres inégalités.

ε est du signe de $-a(1+2a)(1+5a)$, donc $\varepsilon = 1$ pour a'_1, et -1 pour a''_1 et a'''_1.

D'autre part, le S_5 associé n'est pur, donc réel, que pour $a = a'_1$; ω_3 est le seul ω_i imaginaire pur; pour cette valeur, $\sin\alpha_1$ et $\sin\alpha_2$ sont imaginaires purs, $\sin\alpha_3$ est réel, donc U_6 est réel ainsi que le S_6^4 correspondant.

52. Le déterminant Δ_6^5 de C_5 n'est nul que pour $a = \pm\frac{1}{3}$. Avec $S_6^5 = (23; 45; 61)$, le S_5 associé est le S_5^3 représenté par (10). Comme dans E_2, au paragraphe 39, on voit que U_6 est de la forme

$$U_6 = -\omega_1\cos\alpha - \sin\alpha[\omega_2\cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1(\omega_3\cos\alpha'_2 + \omega)],$$

avec $\omega^2 = \sin^2\alpha'_2$ et $\omega\omega_1 = \omega\omega_2 = \omega\omega_3 = 0$. Pour $a = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha'_2 = -1$, $\sin\alpha'_2 = 0$, donc ω est de la forme $\lambda(\omega_4 \pm i\omega_5)$, tandis que $U_4U_6 = a$ s'écrit

$$\begin{aligned} U_4U_6 &\equiv -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha[\cos\alpha_1\cos\alpha'_1 + \sin\alpha_1\sin\alpha'_1(\lambda\sin\gamma_1 - \cos\gamma_1)] \\ &\equiv \sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1(\cos\gamma_1 - \lambda\sin\gamma_1) \equiv a - \lambda\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1\sin\gamma_1 = a, \end{aligned}$$

donc $\lambda = 0$; on a bien alors $U_5U_6 = U_4U_6 = a$, et

$$U_6 = -\omega_1\cos\alpha - \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha'_1 - \omega_3\sin\alpha'_1), \qquad a = \frac{1}{3}. \tag{20}$$

Pour $a = -\frac{1}{3}$,

$$\omega = \sin\alpha'_2(\omega_4\cos\theta + \omega_5\sin\theta),$$

et $U_4U_6 = a$ donne

$$U_4U_6 \equiv -\sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1(\cos\gamma_1\cos\alpha'_2 + \sin\gamma_1\sin\alpha'_2\cos\theta) = \cos\alpha,$$

ou

$$\cos\theta = \frac{-a(1-3a)}{\sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)}};$$

c'est le $\cos\gamma'_3$ du tableau T, donc $\sin\theta = \varepsilon\sin\gamma'_3$. $\varepsilon = \pm 1$ est précisé par $U_5U_6 = a$, ou encore $(U_5 - U_4)U_6 = 0$, qui se réduit à

$$(\cos\beta_5 - 1)\cos\gamma'_3 + \varepsilon\sin\beta_5\sin\gamma'_3 = 0;$$

il résulte du tableau T_2 que, pour $a = -\frac{1}{3}$,

$$\cos\beta_5 = -\frac{1}{4}, \qquad \sin\beta_5 = \frac{\sqrt{15}}{4}, \qquad \cos\gamma'_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}, \qquad \sin\gamma'_3 = \sqrt{\frac{5}{8}},$$

donc $\varepsilon = 1$, et

$$U_6 = -\omega_1\cos\alpha - \sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1[\omega_3\cos\alpha'_2 + \sin\alpha'_2(\omega_4\cos\gamma'_3 + \omega_5\sin\gamma'_3)]\}. \tag{21}$$

(21) convient aux deux valeurs de a.

Pour $a = \frac{1}{3}$, quatre seulement des U_i sont linéairement distincts; le S_6^5

correspondant a été explicité, sous forme réelle, en (15′; IV), avec les deux relations (16; IV). Par contre, le S_6^3 formé avec $a = -\frac{1}{3}$ est impur, car cette valeur de a est dans la colonne $\left(a', \frac{1}{3}\right)$ du tableau du paragraphe 45.

53. Dans la classe $C_6 = C'_6$, $\Delta_6^6 = 0$ suppose $\varphi(a) \equiv 29a^4 - 14a^2 + 1 = 0$, dont les quatre racines sont entre -1 et 1. Avec $S_6^6 = (23;\ 45,\ 56)$, le S_5 associé est encore le S_5^3 de (10). U_6, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$(22)\quad U_6 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha\,\{\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3\cos\gamma_1 + \sin\gamma_1(\omega_4\cos\beta_3 + \varepsilon\omega_5\sin\beta_3)]\},$$

où $\cos\beta_3$ est déterminé par $U_4U_6 = a$, ou

$$U_4(U_6 - U_4) \equiv \sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1(\cos\beta_3 - 1) = a - 1,$$

donc

$$\cos\beta_3 = 1 - \frac{(1+a)(1-2a)}{1-5a^2} = \frac{a(1-3a)}{1-5a^2}$$

est le $\cos\beta_3$ du tableau T; il reste à préciser $\varepsilon = \pm 1$ par la dernière condition $U_5U_6 = -a$ ou

$$U_5(U_6 - U_4) \equiv \sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1[\cos\beta_5(\cos\beta_3 - 1) + \varepsilon\sin\beta_5\sin\beta_3] = 0;$$

il vient ainsi

$$\varepsilon\sqrt{(1+a)(1-2a)(1+a-8a^2)}\sqrt{(1-2a)(1-3a)(1+a-4a^2)} = a(1-2a)(7a^2-2a-1).$$

Cette relation est possible avec $\varepsilon = \pm 1$ puisque $\Delta_6^6 = 0$ pour ces valeurs de a, que nous désignons par $\pm a'_1$, $\pm a''_1$ $(0 < a'_1 < a''_1)$. Il convient de situer celles-ci par rapport à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, aux zéros $\bar{a}'$, $\bar{a}''$ de $8a^2 - a - 1$, et a', a'' de $4a^2 - a - 1$; également par rapport aux zéros a'_2, a''_2 de $7a^2 - 2a - 1$. On voit tout de suite que $\varphi\left(\pm\frac{1}{2}\right) < 0$, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) < 0$. Pour $\bar{a}'$ et $\bar{a}''$, on peut écrire (dsd signifiant « du signe de »)

$$\begin{aligned}\varphi \text{ dsd } & 29(a+1)^2 - 112(a+1) + 64 \\ & = 29a^2 - 54a - 19 \text{ dsd } 29(a+1) - 432a - 152 = -403\left(a + \frac{123}{403}\right),\end{aligned}$$

qui montre que $\varphi(\bar{a}')$ et $\varphi(\bar{a}'')$ sont négatifs. Pour a' et a'', on a de même

$$\begin{aligned}\varphi \text{ dsd } & 29(a+1)^2 - 56(a+1) + 16 \\ & = 29a^2 + 2a - 11 \text{ dsd } 29(a+1) + 8a - 44 = 37\left(a - \frac{15}{37}\right),\end{aligned}$$

donc $\varphi(a') < 0$ et $\varphi(a'') > 0$, en supposant $a' < 0 < a''$. En observant que $a'' > \frac{1}{2}$, nous pouvons former le tableau des signes :

a	-1		$-a''_1$	$-\frac{1}{2}$	a'	$\bar{a}'$	$-a'_1$	0	a'_1	$\frac{1}{3}$	$\bar{a}''$	$\frac{1}{2}$	a''_1	a''		1
$\varphi(a)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$1-2a$			$+$				$+$		$+$			0	$-$			
$1+a-8a^2$			$-$			0	$+$		$+$		0		$-$			
$(1-2a)(1-3a)$			$+$				$+$		$+$	0		0	$+$			
$1+a-4a^2$			$-$		0		$+$		$+$				$+$	0		

Ainsi, les deux radicaux facteurs de ε sont positifs pour $\pm a'_1$ et a''_1, mais imaginaires purs pour $a = -a''_1$. Si l'on convient alors de les prendre imaginaires purs positifs dans les expressions de $\sin\beta_3$ et $\sin\beta_5$, on est amené à prendre ε du signe de $a(1-2a)(7a^2-2a-1)$ pour $\pm a'_1$ et a''_1, et du signe contraire pour $-a''_1$. Ce signe se précise en situant a'_2, a''_2 par rapport à ces zéros de φ; pour ces deux valeurs de a, φ est du signe de

$$29(2a+1)^2 - 98(2a+1) + 49$$
$$= 4(29a^2 - 20a - 5) \text{ dsd } 29(2a+1) - 140a - 35 = -82\left(a + \frac{3}{41}\right),$$

d'où l'on déduit aisément $\varphi(a'_2) > 0$ et $\varphi(a''_2) < 0$ $(a'_2 < a''_2)$; ainsi, a'_2, qui surpasse $-\frac{1}{2}$, est entre $-a'_1$ et 0, tandis que a''_2 est entre $\frac{1}{2}$ et a''_1, et l'on peut former le tableau

a	-1		$-a''_1$		$-a'_1$		a'_2		0		a'_1		$\frac{1}{2}$		a''_2		a''_1		1
$a(1-2a)(7a^2-2a-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
ε			$+$		$-$						$-$						$-$		

Pour discuter de la pureté de ces S_6^6, il convient de placer les zéros de φ dans le tableau associé au système (10). On observe tout de suite que $\pm a'_1$ sont dans la colonne $\left(a', \frac{1}{3}\right)$ d'impureté de S_5^3, tandis que celui-ci est réel pour $\pm a''_1$; a''_1 est dans la colonne $\left(\frac{1}{2}, a''\right)$, où c'est ω_3 qui est imaginaire pure; grâce à $\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) < 0$, on voit que $-a''_1$ est dans la colonne $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ où la sphère imaginaire pure est ω_4. Enfin, la comparaison de (22) avec l'expression (10) de U_5 montre que U_6 est réel comme U_5 pourvu que $\sin\beta_3 \sin\beta_5$ le soit: c'est justement ce que la formule déterminant ε nous a montré. Les deux S_6^6 formés avec $\pm a''_1$ sont réels.

54. Dans la classe C_7, $\Delta_6^7 = 0$ pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\varphi(a) \equiv a^3 + 9a^2 - a - 1 = 0$, dont nous désignons les racines par a', a'', a''', dans l'ordre croissant habituel.

$\varphi(0) < 0$, $\varphi(\pm 1) > 0$ et $\varphi\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) > 0$ montrent qu'on a

$$a' < -1 < -\frac{1}{\sqrt{5}} < a'' < 0 < a''' < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Le S_5 associé à $S_6^7 = (23, 34, 45)$ est le S_5^4 étudié aux paragraphes 47 et 48. Il est représenté par les formules (13) pour les zéros de $\varphi(a)$ et nous le savons impur; U_6 qui fait les mêmes angles que U_5 avec U_1, U_2, U_3, est alors de la forme

$$(23)\qquad U_6 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,\{\omega_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3\cos\gamma_1 - \sin\gamma_1(\omega_4\cos\beta_4 + \varepsilon\omega_5\sin\beta_4)]\},$$

où $\cos\beta_4$ est déterminé par $U_4 U_6 = a$. Ceci s'écrit

$$U_4(U_6 - U_5) \equiv \sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1(\cos\beta_4 - \cos\alpha'_1) = 2a$$

ou

$$\cos\beta_4 = \frac{2a(1+a)(1-2a)}{(1-a)(1-5a^2)} - \frac{a}{1-a} = \frac{a(1-a)}{1-5a^2}.$$

β_4 est l'angle du tableau T. $\varepsilon = \pm 1$ est ensuite précisé par $U_5 U_6 = a$, ou

$$U_5(U_6 - U_5) \equiv \sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1[\cos\alpha'_1(\cos\beta_4 - \cos\alpha'_1) + \sin\alpha'_1(\varepsilon\sin\beta_4 - \sin\alpha'_1)] = a - 1,$$

donc

$$\frac{1-5a^2}{(1+a)(1-2a)}(1 - \cos\alpha'_1\cos\beta_4 - \varepsilon\sin\alpha'_1\sin\beta_4) = 1,$$

où

$$1 - \cos\alpha'_1\cos\beta_4 = \frac{1-4a^2}{1-5a^2};$$

il vient ainsi

$$\varepsilon\sin\alpha'_1\sin\beta_4 = \frac{1-4a^2}{1-5a^2} - \frac{(1+a)(1-2a)}{1-5a^2} = \frac{a(1-2a)}{1-5a^2},$$

et enfin, en observant que les trois zéros de φ sont plus petits que $\frac{1}{2}$,

$$(24)\qquad \varepsilon\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)} = a(1-a).$$

Cette relation est possible puisque $\Delta_6^7 = 0$, et se vérifie aisément en élevant au carré. Les radicaux de $\sin\alpha'_1$ et $\sin\beta_4$ étant arithmétiques, ε est le signe de a, donc égal à -1 pour a' et a'', 1 pour a'''.

Pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, le S_5 associé est le S_5^4 représenté en (15). U_6, qui fait les mêmes angles que U_5 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$(25)\qquad U_6 = \omega_1\cos\alpha + \sin\alpha(\omega_2\cos\alpha_1 + \omega_3\sin\alpha_1) + \nu\frac{\omega_4 - i\omega_5}{2},$$

car $U_4 U_6 \neq U_4 U_5$ exige que $\omega_4 - i\omega_5$ soit substitué à $\omega_4 + i\omega_5$. $U_4 U_6 = a$

s'écrit d'ailleurs

$$U_4(U_6 - U_5) \equiv \frac{\lambda\nu}{2} = 2a;$$

enfin

$$U_5(U_6 - U_5) \equiv \frac{\mu\nu}{2} = a - 1,$$

donc $\lambda\nu = 4a$, $\mu\nu = 2(a-1)$, ce qui permet de faire $\lambda = 2$, $\nu = 2a$, $\mu = 1 - \frac{1}{a} = -\frac{4}{1+\frac{1}{a}}$. Avec $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, et les ω_i de $\mathcal{T}_0$, le S_6^7 obtenu, qui est réel avec ρ, est représenté par

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned}
&U_1 = \omega_1,\\
&U_2 = \frac{\omega_1 + 2\omega_2}{\sqrt{5}},\\
&U_3 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{-\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} - 1},\\
&U_4 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} + 1} - \rho,\\
&U_5 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} + 1} + \frac{2\rho}{\sqrt{5} + 1},\\
&U_6 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\overrightarrow{OP}^2}{\rho}.
\end{aligned}\right.$$

C'est l'ensemble d'un pentaèdre et d'une sphère; celle-ci passe par le sommet O du trièdre que font U_1, U_2, U_3; par analogie ([33]), elle passe aussi par ceux des trièdres U_1, U_3, U_4 et U_1, U_4, U_5,

55. Δ_6^8 est nul pour les seules valeurs utiles $a = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$; celles-ci n'annulent aucun Δ_n d'ordre inférieur à 6, donc le S_5 associé au S_6^8 cherché est itérativement régulier. Avec $S_6^8 = (45, 56, 64)$, ce S_5 est le S_5^2 représenté par (8). U_6, qui fait les mêmes angles que U_5 avec U_1, U_2, U_3, U_4, et doit différer de U_5, ne peut être que la sphère

$$(27)\quad U_6 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,\{\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1[\omega_3 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2(\omega_4 \cos\beta_2 - \omega_5 \sin\beta_2)]\}.$$

Il vient alors

$$U_5(U_5 - U_6) \equiv 2\sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \sin^2\beta_2 \equiv \frac{2(1+a)(1+a-8a^2)}{(1-a)(1+3a)} = 1 + a$$

([33]) Sur le diagramme de S_6^7, les couples U_2, U_3; U_3, U_4; U_4, U_5 jouent le même rôle. La relation linéaire entre ces U_i est $2(U_2 - U_5) + (\sqrt{5} - 1)(U_3 - U_4) = 0$, facile à vérifier.

si l'on remplace 1 par $13a^2$ dans l'avant-dernier membre; donc $U_5U_6 = -a$. $1+a-8a^2$ étant positif pour ces deux valeurs de a, celles-ci sont dans la colonne a', a'' du tableau du paragraphe 44, donc ces S_6^8 sont impurs.

56. $\Delta_6^9 = 0$ suppose $a = \pm\frac{1}{3}$ ou $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$; on peut même ne considérer que les deux valeurs positives, car $C_9 = C'_9$. Le S_5 associé à $S_6^9 = (23, 34, 45, 56)$ est le $S_5^4 = (23, 34, 45)$ représenté en (13) ou (15), comme pour S_6^7. Si $a = \pm\frac{1}{3}$, (23) subsiste, mais ε est maintenant défini par $U_5U_6 = -a$, c'est-à-dire

$$U_5(U_5 - U_6) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 (1 - \cos\alpha'_1 \cos\beta_4 - \varepsilon \sin\alpha'_1 \sin\beta_4) = 1 + a;$$

$1 - 2a$ étant positif, ceci se réduit à

$$\varepsilon\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)} = (1-a)(1+2a) - (1+a)^2 = -a(1+3a),$$

donc $\varepsilon = -1$ pour $a = \frac{1}{3}$; cette relation s'évanouit pour $a = -\frac{1}{3}$, mais $\sin\beta_4 = 0$ et ε disparaît dans (23). Ces deux S_6^9, semblables, sont impurs comme (13).

Le S_6^9 construit avec $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ est encore représenté par (15) et (25), avec la seule modification

$$U_5(U_6 - U_5) \equiv \frac{\mu\nu}{2} = -(1+a),$$

qui conduit à faire $\lambda = 2$, $\nu = 2a$, $\mu = -\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \frac{4}{1 - \frac{1}{a}}$. Pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, le pentasphère $\mathfrak{T}_0$ donne le S_6^9 représenté par le système (26) modifié en son seul élément

$$U_5 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + \frac{2\rho}{\sqrt{5}-1}. \tag{28}$$

Il consiste encore en un pentaèdre et la sphère U_6, qui passe par les sommets des trièdres que forment U_1, U_2, U_3 et U_1, U_3, U_4, réels avec ρ.

57. $\Delta_6^{10} = 0$ suppose $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, et il suffit de faire $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ puisque $C_{10} = C'_{10}$. Le S_5 associé à $S_6^{10} = (23, 34, 45, 56, 62)$ est le S_5^4 de (15). U_6, qui fait les même angles que U_3 avec U_1 et U_2, est de la forme

$$U_6 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\,[\omega_2 \cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1(\omega_3 \cos\beta'_1 + \omega)],$$

avec $\omega\omega_1 = \omega\omega_2 = \omega\omega_3 = 0$, $\omega^2 = \sin^2\beta'_1$, et où $\cos\beta'_1$ est défini par $U_3U_6 = a$; ceci s'écrit

$$U_3(U_6 - U_3) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha'_1(\cos\beta'_1 - 1) = a - 1,$$

donc

$$\cos\beta'_1 = 1 - \frac{(1-a)^2}{(1+a)(1-2a)} = \frac{a(1-3a)}{(1+a)(1-2a)}$$

correspond aux conventions du tableau T. Mais alors ([34]) $\cos\beta'_1 = -1$, $\sin\beta'_1 = 0$, et $\omega^2 = 0$. En remplaçant $\sin\alpha \sin\alpha'_1 \omega$ par ω, $U_4 U_6 = a$ donne ensuite

$$U_4(U_6 - U_3) = 2\sin^2\alpha \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 + \lambda \frac{\omega_4 + i\omega_5}{2}\omega = 2a,$$

tandis que

$$U_3 U_4 = -\sin^2\alpha \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 = -a,$$

donc $\lambda(\omega_4 + i\omega_5)\omega = 0$. $U_5(U_6 - U_3) = -2a$ donne de même $\mu(\omega_4 + i\omega_5)\omega = 0$, donc ω est de la forme $\nu(\omega_4 + i\omega_5)$, où ν est quelconque. Ceci est vrai quels que soient λ, μ puisque ω_4 et ω_5 disparaissent des formules (15) lorsque $\lambda = \mu = 0$. Le S_6^{10} formé avec $\mathfrak{T}_0$ et $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ est ainsi l'hexaèdre

$$(29)\qquad \left|\begin{aligned}
&U_1 = \omega_1,\\
&U_2 = \frac{\omega_1 + 2\omega_2}{\sqrt{5}},\\
&U_3 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{-\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} - 1},\\
&U_4 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} + 1} + h,\\
&U_5 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} + 1} + k,\\
&U_6 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} - 1} + l,
\end{aligned}\right.$$

où $\omega_i = \vec{e}_i \cdot \overrightarrow{OP}$ ($i = 1, 2, 3$), et où h, k, l sont trois longueurs quelconques, qu'on suppose réelles pour que (29) le soit. Bien entendu, il suffit de changer $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$ pour former le S_6^{10} relatif à $= \frac{-1}{\sqrt{5}}$, mais qui, rappelons-le, est directement semblable à (29).

58. Nous résumons dans le tableau suivant les résultats que nous avons obtenus, concernant, pour chaque classe de S_6 isogonal, le type du diagramme, les valeurs correspondantes de a, les numéros des formules représentatives, et la nature. Signalons que la pureté équivaut à la réalité car toutes ces valeurs de a sont inférieures ([35]) à 1.

59. $n = 7$. — Les S_7 de E_3 sont irréguliers, ainsi que leur S_6 associé. Ils appartiennent donc aux classes dont le déterminant Δ_7 s'annule pour une des valeurs a du tableau de la page suivante.

([34]) *Voir* le tableau T_3.

([35]) Les zéros non explicités des polynomes de la deuxième colonne sont désignés par a', a'', ... dans l'ordre croissant.

Système.	Valeurs de a.	Formules représentatives.	Nature.
$S_6^1 = (\ )$	$a = -\frac{1}{5}$	(4) et (16)	impur
$S_6^2 = (56)$	$1 + 2a - 11a^2 = 0$	(4) et (16)	»
$S_6^3 = (36, 45)$	$(1 - 3a)(1 + 2a - 7a^2) = 0$	(8) et (18); $\varepsilon = 1$ pour $a = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = -1$ pour $a = \frac{1 \pm \sqrt{8}}{7}$	un seul réel : pour $a = \frac{1 + \sqrt{8}}{7}$
$S_6^4 = (45, 56)$	$1 + 3a - 9a^2 - 19a^3 = 0$	(8) et (19); $\varepsilon = 1$ pour a' et $\varepsilon = -1$ pour a'', a''' $(a' < a'' < a''')$	un seul réel : pour $a = a'$
$S_6^5 = (23; 45; 61)$	$a = \pm \frac{1}{3}$	(10) et (21)	un réel $\left(a = \frac{1}{3}\right)$
$S_6^6 = (23; 45, 56)$	$1 - 14a^2 + 29a^4 = 0$	(10) et (22); $\varepsilon = 1$ pour $-a''$, -1 pour $\pm a'$ et a'' $(0 < a' < a'')$	deux réels $(a = \pm a'')$
$S_6^7 = (23, 34, 45)$	$a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$	(26)	réels
	$1 + a - 9a^2 - a^3 = 0$	(13) et (23); $\varepsilon = \operatorname{sgn} a$	impurs
$S_6^8 = (45, 56, 64)$	$a = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$	(8) et (27)	»
$S_6^9 = (23, 34, 45, 56)$	$a = \pm \frac{1}{3}$	(13) et (23); $\varepsilon = -1$	»
	$a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$	(26) corrigé par (28) pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$	réels
$S_6^{10} = (23, 34, 45, 56, 62)$	$a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$	(29) pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$	»

La première est $a = -\frac{1}{5}$, relative au seul système S_6^1. Les seules classes admissibles sont $C(\sigma_7^3)$ et $C(\sigma_7^9)$; mais les S_6 associés à $S_7^3 = (47; 56)$ et à $S_7^9 = (54, 56, 57)$ sont respectivement $S_6^2 = (56)$ et $S_6^4 = (45, 56)$, qui sont régulières pour $a = -\frac{1}{5}$. Il n'existe pas de S_7^3 et de S_7^9 pour cette valeur de a.

Le seul Δ_7 divisible par $1 + 2a - 11a^2$ est Δ_7^{17}; mais le S_6 associé à $S_7^{17} = (43, 32; 45, 47)$ est $S_6^7 = (23, 34, 45)$ qui est régulier pour ces valeurs; il n'y a pas de S_7^{17}.

Les zéros de $1 + 2a - 7a^2$ annulent les seuls déterminants $\Delta_7'^{11}$ et Δ_7^{23}. Un S_7 de C'_{11} est $(23, 34, 45; 17, 76)$ dont le S_6 associé est $S_6^7 = (23, 34, 45)$ qui est alors régulier. La classe C_{23} est irrégulière pour ces deux zéros, ainsi que pour $a = \frac{1}{3}$, comme S_6^3; mais le S_6 associé à $S_7^{23} = (43, 32; 47, 76; 45)$ est $S_6^7(23, 34, 45)$ qui est régulier pour ces trois valeurs; aucune des deux classes ne donne un S_7.

Les zéros de $1 + 3a - 9a^2 - 29a^3$ et de $1 - 14a^2 + 29a^4$ n'annulent aucun Δ_7. Ceux de $1 + a - 9a^2 - a^3$, associés à S_6^7, annulent seulement $\Delta_7'^{19}$ et Δ_7^{27}. Un diagramme de la classe C'_{19} est $(74, 45, 56; 72, 23; 71)$ dont le S_6 associé est $S_6^6 = (23; 45, 56)$, qui est régulier. Un S_7^{27} est $(37, 75, 54, 43; 32; 76)$, dont le S_6 associé est $S_6^7 = (23, 34, 45)$, formé en (13), (23), et qui est irrégulier pour ces trois zéros,

Outre ce S_7^{27}, nous sommes amené à examiner les S_7 qui appartiennent aux classes que rendent irrégulières $a = \pm\frac{1}{3}$ et $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Puisqu'il suffit de former les classes non primées, nous étudierons, pour $a = \pm\frac{1}{3}$, les classes ([36]) C_3, C_5, C_9, C_{10}, C_{14}, C_{15}, C_{18}, C_{24}, C_{25}, C_{26}, et, pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, les classes C_7, C_{12}, C_{20}, C_{22}, C_{26}. Aucun S_7 n'est irrégulier pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}$.

60. Le diagramme $(47; 56)$ de C_3, avec $a = \frac{1}{3}$, est écarté pour le même motif que plus haut, avec $a = -\frac{1}{5}$.

Un diagramme de C_5 est $S_7^5 = (23; 45; 61)$, avec $a = \frac{1}{3}$. C'est aussi celui du S_6 associé, qui est le S_6^5 formé en (10) et (20). D'autre part, U_7 fait avec U_1, U_2, U_3, U_4 le même angle α que U_6 dans S_6^6, ce dernier système relevant lui-même de (10); U_7 est donc donné par (22), où $\cos\beta_3 = 0$, et l'on peut prendre ([37])

$$U_7 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha[\omega_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1(\omega_3 \cos\gamma_1 + \omega_5 \sin\gamma_1)]. \tag{30}$$

([36]) C_{23} vient d'être totalement écartée.

([37]) On peut remplacer le terme $\varepsilon\omega_5 \sin\beta_3$ de (22) par ω_5, qui n'apparaît que dans l'expression de U_7.

Dans ces conditions,

$$U_7 - U_4 = \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 (\omega_5 - \omega_4),$$

donc, compte tenu de $\cos\beta_5 = -1$, $\sin\beta_5 = 0$,

$$U_5(U_7 - U_4) = \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 = \frac{2}{3} = 2a,$$

et $U_6(U_7 - U_4) = 0$. On a bien $U_5 U_7 = U_6 U_7 = a$, ce qui démontre l'existence d'un S_7^5. Le S_6 associé est représenté en (15'; IV), et ces équations, complétées, nous donnent le S_7^5 cherché sous la forme explicite

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{ll} U_1 = \omega_1, & U_5 = \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\omega_3 - 2\omega_4}{\sqrt{6}}, \\ U_2 = \dfrac{\omega_1 + 2\sqrt{2}\,\omega_2}{3}, & U_6 = \dfrac{-\omega_1 + \sqrt{2}\,\omega_2}{3} + \dfrac{2\omega_3}{\sqrt{6}}, \\ U_3 = \dfrac{\omega_1 - \sqrt{2}\,\omega_2}{3} + \dfrac{2\omega_3}{\sqrt{6}}, & U_7 = \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\omega_3 + 2\omega_5}{\sqrt{6}}. \\ U_4 = \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\omega_3 + 2\omega_4}{\sqrt{6}}, & \end{array}\right.$$

Contrairement à S_6^5, il est impur, puisque les coefficients des cinq ω_i sont réels. Rappelons que les U_i sont liées par les relations (16; IV).

Il n'y a pas de S_7^9, car le diagramme (71, 72, 73) de C_9, où $a = \frac{1}{3}$, a, pour S_6 associé, le système régulier S_6^1. Pour un motif analogue, il n'y a pas de S_7^{10}, car le S_6 associé à (45, 56; 23; 71) est le $S_6^6 = (23;\ 45,\ 56)$, régulier pour $a = \frac{1}{3}$. Un S_7^{14} est (45, 56, 67, 71), avec $a = \frac{1}{3}$; mais son S_6 associé est le $S_6^4 = (45, 56)$, régulier. Ce S_6^4 est également associé à $S_7^{15} = (45, 56, 67, 74)$ et est encore régulier pour $a = -\frac{1}{3}$. Les deux classes suivantes C_{18} et C_{24} sont également stériles, car les S_6 associés à $S_7^{18} = (45,\ 56,\ 67,\ 71;\ 23)$, où $a = \frac{1}{3}$, et à $S_7^{24} = (74, 45, 56, 67; 71)$, où $a = \pm\frac{1}{3}$, sont respectivement S_6^6 et S_6^4 qui sont réguliers pour ces valeurs de a.

Un diagramme de C_{25} est l'hexagone (23, 34, 45, 56, 67, 72), avec $a = \pm\frac{1}{3}$. Le S_6 associé est le S_6^9 représenté en (13) et (23), avec $\varepsilon = -1$. U_7 fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2; elle est donc de la forme

$$U_7 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{\omega_2 \cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1 [\omega_3 \cos\beta'_1 + \sin\beta'_1 (\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)]\},$$

où $\cos\beta'_1$ est déterminé par $U_3 U_7 = a$, soit

$$U_3(U_3 - U_7) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha'_1 (1 - \cos\beta'_1) \equiv \frac{(1+a)(1-2a)}{1-a}(1 - \cos\beta'_1) = 1 - a;$$

$$\cos\beta'_1 = \frac{a(1-3a)}{(1+a)(1-2a)}$$

est le $\cos\beta'_1$ du tableau T. $U_4U_7 = a$ s'écrit de même

$$U_4(U_7 - U_3) \equiv \sin^2\alpha \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 [\cos\gamma_1(1-\cos\beta'_1) - \sin\gamma_1 \sin\beta'_1 \cos\theta]$$
$$\equiv \frac{a(1-a)^2 - (1-a)(1-5a^2)\cos\theta}{(1+a)(1-2a)} = 2a,$$

d'où résulte

$$\cos\theta = -\frac{a}{1-a} = \cos\alpha'_1.$$

$U_5U_7 = a$, ou $U_5(U_3 - U_7) = 0$, permet de préciser $\sin\theta = \varepsilon' \sin\alpha'_1$ par

$$\cos\gamma_1(1-\cos\beta'_1) + \sin\gamma_1 \sin\beta'_1 (\cos^2\alpha'_1 + \varepsilon' \sin^2\alpha'_1) = 0,$$

ou

$$a(1-a) + (1-5a^2)\left[1 - (1-\varepsilon')\frac{1-2a}{(1-a)^2}\right] = 0;$$

compte tenu de $1 + a - 6a^2 \equiv (1-2a)(1+3a)$, ceci se réduit à

$$1 - \varepsilon' = \frac{(1+3a)(1-a)^2}{1-5a^2},$$

donc $\varepsilon' = \mp 1$ pour $a = \pm\frac{1}{3}$ respectivement. U_7 est ainsi donné par

$$U_7 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1[\omega_3\cos\beta'_1 + \sin\beta'_1(\omega_4\cos\alpha'_1 - \omega_5(\operatorname{sgn} a)\sin\alpha'_1)]\}, \tag{32}$$

et complète le S_7^{25}, car nous vérifierons tout de suite, sur les formules numériques, que $U_6U_7 = -a$. A l'aide de T_2, celles-ci sont, pour $a = \frac{1}{3}$,

$$\left\{\begin{aligned}
U_1 &= \omega_1,\\
U_2 &= \frac{\omega_1 + 2\sqrt{2}\,\omega_2}{3},\\
U_3 &= \frac{\omega_1 - \sqrt{2}\,\omega_2}{3} + \frac{2\,\omega_3}{\sqrt{6}},\\
U_4 &= \frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3\sqrt{2}} - \frac{\omega_3 + 2\,\omega_4}{\sqrt{6}},\\
U_5 &= \frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \frac{\omega_3 + \omega_4 - \sqrt{3}\,\omega_5}{\sqrt{6}},\\
U_6 &= \frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \frac{\omega_3 - \omega_4 + \sqrt{3}\,\omega_5}{\sqrt{6}},\\
U_7 &= \frac{\omega_1 - \sqrt{2}\,\omega_2}{3} - \frac{\omega_4 + \sqrt{3}\,\omega_5}{\sqrt{6}};
\end{aligned}\right. \tag{33}$$

les U_i sont liées par les deux relations

$$\left\{\begin{aligned}
U_2 + U_3 - U_5 - U_6 &= 0,\\
U_2 - U_4 - U_5 + U_7 &= 0.
\end{aligned}\right. \tag{34}$$

Pour $a=-\frac{1}{3}$, ce S_7^{27} est représenté par les formules

$$(33')\quad \begin{cases} U_1= \omega_1, \\ U_2= \dfrac{-\omega_1+2\sqrt{2}\omega_2}{3}, \\ U_3=-\dfrac{\omega_1}{3}+\dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}}+\dfrac{5\omega_3}{\sqrt{30}}, \\ U_4=-\dfrac{\omega_1+\sqrt{2}\omega_2}{3}+\dfrac{2\omega_3-4\omega_4}{\sqrt{30}}, \\ U_5=-\dfrac{\omega_1+\sqrt{2}\omega_2}{3}-\dfrac{2\omega_3+\omega_4}{\sqrt{30}}-\dfrac{\omega_5}{\sqrt{2}}, \\ U_6=-\dfrac{\omega_1+\sqrt{2}\omega_2}{3}-\dfrac{2\omega_3-4\omega_4}{\sqrt{30}}, \\ U_7=-\dfrac{\omega_1}{3}+\dfrac{\omega_2}{3\sqrt{2}}-\dfrac{3\omega_3-\omega_4}{\sqrt{30}}+\dfrac{\omega_5}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

et ses sphères sont liées par

$$(34')\quad \begin{cases} U_1+U_2+U_4+U_6=0, \\ U_1+U_3+U_5+U_7=0. \end{cases}$$

Ces deux systèmes sont impurs.

La classe C_{26}, où $a=\frac{1}{3}$, ne fournit aucun S_7, car le S_6 associé à $S_7^{26}=(72, 23, 34, 45, 57; 76)$ est le $S_6^7=(23, 34, 45)$, qui est régulier pour cette valeur de a.

61. Examinons maintenant les cinq classes qui sont irrégulières pour $a=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Les deux premières, C_7 et C_{12} ne donnent aucun système, car les S_6 associés à $S_7^7=(47, 75, 56)$ et $S_7^{12}=(37, 74; 45, 56)$ sont respectivement $S_6^2=(56)$ et $S_6^4=(45, 56)$, réguliers pour ces valeurs de a.

Le pentagone $S_7^{20}=(23, 34, 45, 57, 72)$ est associé à $S_6^7=(23, 34, 45)$, que nous avons construit au paragraphe 54, et représenté en (26) pour $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Il s'agit de compléter ce système avec une septième sphère U_7. Celle-ci, qui fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2, est de la forme

$$U_7=\frac{\omega_1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\omega_2}{\sqrt{5}-1}+\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}(\omega_3\cos\theta+\omega),$$

où ω est une sphère orthogonale à ω_1, ω_2, ω_3, et telle que $\omega^2=\sin^2\theta$. $\cos\theta$ est défini par $U_3U_7=\frac{1}{\sqrt{5}}$, ou

$$U_3(U_3-U_7)\equiv\frac{4}{5}\frac{5-2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-1)^2}(1-\cos\theta)\equiv\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1-\cos\theta)=1-\frac{1}{\sqrt{5}},$$

donc $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = 0$; ω est donc de la forme $h(\omega_4 + \varepsilon i \omega_5)$, et l'on peut poser

$$U_7 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} - 1} + h(\omega_4 + \varepsilon i \omega_5). \tag{35}$$

$h \neq 0$ car $U_5 U_7 \neq U_6 U_7$. A l'aide des expressions (15) du S_5 associé, on forme ensuite

$$U_4(U_3 - U_7) \equiv -\frac{2}{\sqrt{5}} - \lambda h \frac{1-\varepsilon}{2} = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

où $\lambda = 2$, donc $\varepsilon = 1$. On vérifie tout de suite que $U_5(U_3 - U_7) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, donc $U_5 U_7 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; enfin, grâce à l'expression (25) de U_6, où $\nu = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$U_6(U_3 - U_7) \equiv \frac{2}{\sqrt{5}} - \nu h \equiv \frac{2}{\sqrt{5}}(1 - h) = 0$$

donne $h = 1$. Nous formons ainsi un S_7^{20} réel, représenté par (26) et le plan

$$U_7 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} - 1} + \omega_4 + i\omega_5 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\omega_2 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5} - 1} - \rho. \tag{36}$$

On forme aisément la relation linéaire qui lie U_7 à U_2, U_3, U_4. Par raison de symétrie, on a la même relation entre U_7, U_5, U_4, U_3. Ce sont [38]

$$\left\{\begin{aligned} &U_2 - U_3 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}(U_4 - U_7) = 0,\\ &U_5 - U_4 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}(U_3 - U_7) = 0. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Le S_7^{20} associé à $a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ s'en déduit en changeant $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$ dans les expressions (26) et dans (37).

C_{22} ne donne aucun système car le S_6 associé à $S_7^{22} = (45, 56, 67; 72, 73)$ est $S_6^4 = (45, 56)$, régulier pour $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Enfin un diagramme de la classe C_{26} est $S_7^{26} = (72, 23, 34, 45, 57; 76)$, dont le S_6 associé est le $S_6^7 = (23, 34, 45)$ utilisé pour former S_7^{20}. La seule modification concerne le signe de $U_6 U_7$, donc (35) subsiste, sans la réserve $h \neq 0$. $U_4(U_3 - U_7) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ donne $h(1 - \varepsilon) = 0$, et cela suffit

---

(38) Il en résulte la relation $U_2 - U_5 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(U_3 - U_4) = 0$ déjà observée entre les sphères (26).

pour que $U_5(U_3-U_7)=\frac{2}{\sqrt{5}}$, donc $U_5U_7=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; enfin

$$(U_5-U_6)U_7\equiv\mu h\frac{1-\varepsilon}{2}-\nu h\frac{1+\varepsilon}{2}=-\nu h\frac{1+\varepsilon}{2}=0$$

donne $h(1+\varepsilon)=0$, donc $h=0$, et (35) se réduit à

$$U_7=\frac{\omega_1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\omega_2+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}-1}. \tag{38}$$

Le S_7^{26} représenté par (26) et (38) est réel, et constitué par six plans et une sphère; les quatre plans U_1, U_2, U_3, U_7 forment un angle tétraèdre, coupé par les deux plans U_4, U_5; et la sphère U_6 passe par le sommet. U_7 est une combinaison linéaire de U_1, U_2, U_3 qu'on forme aisément; la même relation existe entre U_7, U_1, U_5, U_4 par raison de symétrie; ce sont

$$\left\{\begin{aligned}&U_1-U_2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}(U_3+U_7)=0,\\&U_1-U_5-\frac{\sqrt{5}-1}{2}(U_4+U_7)=0.\end{aligned}\right. \tag{39}$$

Il suffit de remplacer $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans toutes ces formules pour le S_7^{26} relatif à $a=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

62. Il ne nous reste plus qu'à construire le prolongement $S_7^{27}=(37, 75, 54, 43; 32; 76)$ du $S_6^7=(23, 34, 45)$, formé en (13), (23) avec l'un quelconque des zéros de $\varphi(a)=1+a-9a^2-a^3$, et $\varepsilon=\operatorname{sgn} a$. U_7 fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3; il est donc de la forme

$$U_7=\omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\,\{\omega_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_1[\omega_3\cos\gamma_1+\sin\gamma_1(\omega_4\cos\theta+\omega_5\sin\theta)]\},$$

et U_7-U_4 se réduit à

$$U_7-U_4=\sin\alpha\sin\alpha_1\sin\gamma_1[\omega_4(1-\cos\theta)-\omega_5\sin\theta].$$

$\cos\theta$ est déterminé par $U_4U_7=a$, soit

$$U_4(U_4-U_7)\equiv\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1(1-\cos\theta)\equiv\frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)}(1-\cos\theta)=1-a.$$

Par conséquent

$$\cos\theta=\frac{a(1-3a)}{1-5a^2}=\cos\beta_3,$$

avec les notations du tableau T. Posons $\sin\theta=-\varepsilon'\sin\beta_3$, ε' étant défini par

$$U_5(U_4-U_7)\equiv\sin^2\alpha\sin^2\alpha_1\sin^2\gamma_1[\cos\alpha'_1(1-\cos\beta_3)+\varepsilon'\sin\alpha'_1\sin\beta_3]=0,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon'\sqrt{1-2a}\sqrt{(1-2a)(1+a)(1+a-8a^2)}=a(1+a)(1-2a),$$

ou enfin, car $1-2a>0$ comme nous l'avons vu au paragraphe 54,

$$\varepsilon'\sqrt{(1+a)(1+a-8a^2)} = a(1+a). \tag{40}$$

On vérifie tout de suite que $\varepsilon'=\pm 1$ est compatible avec $\varphi(a)=0$, comme il se doit d'après $\Delta_7^{27}=0$, et, le radical étant arithmétique, $\varepsilon'=\operatorname{sgn}[a(1+a)]$. Avec les notations du paragraphe 54, $\varepsilon'=-1$ pour a'' et $\varepsilon'=1$ pour a' et a'''.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $U_6U_7=-a$, ou

$$U_6(U_4-U_7) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1[\cos\beta_4(1-\cos\beta_3)+\varepsilon\varepsilon'\sin\beta_4\sin\beta_3] = 2a.$$

Les calculs qui précèdent permettent d'écrire le second membre

$$\begin{aligned}(1-a)\left[\cos\beta_4+\varepsilon\sin\beta_4\,\frac{\varepsilon'\sin\beta_3}{1-\cos\beta_3}\right] &\equiv (1-a)(\cos\beta_4-\varepsilon\operatorname{cotg}\alpha'_1\sin\beta_4)\\ &\equiv \frac{a(1-a)}{1-5a^2}\left(1-a+\varepsilon\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)}\right) = \frac{a(1-a)^2(1+a)}{1-5a^2}\end{aligned}$$

en utilisant (24); ceci vaut justement $2a$ lorsque $\varphi(a)=0$.

Nous avons ainsi construit un S_7^{27}, pour chaque zéro de $\varphi(a)$, représenté par les formules (13), (23) où $\varepsilon=\operatorname{sgn} a$, et

$$U_7 = \omega_1\cos\alpha+\sin\alpha\{\omega_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_1[\omega_3\cos\gamma_1+\sin\gamma_1(\omega_4\cos\beta_3-\varepsilon'\omega_5\sin\beta_3)]\}, \tag{41}$$

avec $\varepsilon'=\operatorname{sgn}[a(1+a)]$.

Les relations linéaires qui permettent d'exprimer U_6 et U_7 en fonction des sphères de (13) ne sont pas simples. Rappelons que (13) est impur; il en est donc de même pour ces S_7^{27}.

63. Le tableau suivant résume les renseignements essentiels obtenus sur les cinq types d'heptasphères existants :

Système.	Valeurs de a.	Formules représentatives.	Nature.
$S_7^5 = (23;\ 45;\ 61)$	$a=\frac{1}{3}$	(31)	impur
$S_7^{20} = (23,\ 34,\ 45,\ 57,\ 72)$	$a=\pm\frac{1}{\sqrt5}$	(26) et (36) pour $a=\frac{1}{\sqrt5}$	réels
$S_7^{25} = (23,\ 34,\ 45,\ 56,\ 67,\ 72)$......	$a=\pm\frac{1}{3}$	(33); (33′)	impurs
$S_7^{26} = (23,\ 34,\ 45,\ 57,\ 72;\ 76)$,....	$a=\pm\frac{1}{\sqrt5}$	(26) et (38) pour $a=\frac{1}{\sqrt5}$	réels
$S_7^{27} = (34,\ 45,\ 57,\ 73;\ 32;\ 76)$.....	$1+a-9a^2-a^3=0$	(13), (23), (41); $\varepsilon=\operatorname{sgn} a$; $\varepsilon'=\operatorname{sgn}[a(1+a)]$	impurs

64. $n=8$. — Les S_8 que nous recherchons sont associés aux S_7 du tableau précédent. Il s'agit donc d'ajouter à chacun d'eux une sphère U_8 pour laquelle les produits $U_iU_8 (1 \leqq i \leqq 7)$ valent $\pm a$. Nous pouvons choisir U_8 de manière que $U_1U_8 = a$, et nous poserons $U_iU_8 = \varepsilon_i a (1 \leqq i \leqq 7;\ \varepsilon_1 = 1)$.

Cherchons d'abord à prolonger le système (31) qui représente S_7^5, avec $a = \frac{1}{3}$. Observons que les 6 sommets des trois segments du diagramme de S_7^5 jouent le même rôle et que les sept sphères sont liées par les relations (16; IV); il en résulte les relations

$$(42) \qquad \begin{cases} \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 = 0, \\ 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_6 = 0, \end{cases}$$

entre les ε_i.

Si $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, (42) entraîne $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1$; U_8 fait les mêmes angles que U_7 avec les six premières sphères U_i, et ne peut différer de U_7 qu'avec l'expression

$$(43) \qquad U_8 = \frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \frac{\omega_3 - 2\omega_5}{\sqrt{6}}.$$

Il vient alors $U_7U_8 = -\frac{1}{3}$, et $\varepsilon_7 = -1$. Il existe donc un S_8, formé avec $a = \frac{1}{3}$, dont le graphique (23; 45; 61; 78) consiste en quatre segments isolés. U_8 est liée aux sphères (31) par

$$(43') \qquad U_2 + U_3 - U_7 - U_8 = 0.$$

Si ε_2 ou ε_3 est égal à -1, nous pouvons admettre, par symétrie, qu'il s'agit de ε_2; (42) entraîne alors $\varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_6 = -1$, $\varepsilon_5 = -\varepsilon_4$. U_8, qui fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2, est de la forme

$$(44) \qquad U_8 = \frac{\omega_1 - \sqrt{2}\,\omega_2}{3} + \frac{2}{\sqrt{6}}[\omega_3 \cos\theta + \sin\theta(\omega_4 \cos\theta_1 + \omega_5 \sin\theta_1)],$$

avec

$$U_3U_8 \equiv \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\theta = \frac{1}{3},$$

donc $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$. Il suffit de former U_4U_8 et U_7U_8; mais

$$U_4U_8 \equiv \frac{2}{3}\cos\theta_1 = \frac{\varepsilon_4}{3}$$

et

$$U_7U_8 \equiv \frac{2}{3}\sin\theta_1 = \frac{\varepsilon_7}{3}$$

sont incompatibles. Il n'y a pas d'autre solution que (43).

65. Recherchons maintenant les S_8 associés à S_7^{25}, car il est normal de rapprocher S_7^{20} et S_7^{26} qui sont associés au même S_6.

Les six sommets de l'hexagone (23, 34, 45, 56, 67, 72) représentant S_7^{25} jouent le même rôle. Considérons d'abord le système (33), avec $a = \frac{1}{3}$. Les relations (34) fournissent les égalités

$$(45)\qquad \begin{cases} \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 = 0, \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 + \varepsilon_7 = 0. \end{cases}$$

Si tous les ε_i valent 1, U_8 fait les mêmes angles que U_6 avec U_1, U_2, U_3, U_4, et ne peut être que

$$U_8 = \frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \frac{\omega_3 - \omega_4 - \sqrt{3}\,\omega_5}{\sqrt{6}} = U_6 - \sqrt{2}\,\omega_5,$$

afin de différer de U_6. Mais alors $U_5 U_8 = U_5 U_6 + 1 = \frac{2}{3}$ est inadmissible.

Dans le cas contraire, nous pouvons faire $\varepsilon_2 = -1$; et, s'il n'existe pas deux ε_i consécutifs négatifs, on peut même prendre $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_7 = 1$, sans restreindre la généralité; (45) donne alors $\varepsilon_4 = -\varepsilon_5 = \varepsilon_6$. U_8, qui fait les mêmes angles que U_7 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$U_8 = \frac{\omega_1 - \sqrt{2}\,\omega_2}{3} + \frac{2}{\sqrt{6}}(\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta);$$

$$U_7 U_8 = \frac{1}{3} - \frac{\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta}{3} = \frac{1}{3}$$

donne donc $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 0$. Il suffit alors de former $U_4 U_8$, c'est-à-dire

$$U_4 U_8 = -\frac{2}{3}\cos\theta = \frac{\varepsilon_4}{3},$$

donc $\cos\theta = -\frac{\varepsilon_4}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\varepsilon_4}{2\sqrt{3}}$, qui sont incompatibles.

Enfin, s'il existe deux ε_i consécutifs négatifs, nous pouvons supposer $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. (45) donne alors $\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -1$, $\varepsilon_7 = \varepsilon_4$. U_8 est encore de la forme (44), avec $U_3 U_8 = -\frac{1}{3}$, donc $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = 0$, ce qui signifie que $\frac{2\sin\theta}{\sqrt{6}}(\omega_4 \cos\theta_1 + \omega_5 \sin\theta_1)$ est une sphère point $h(\omega_4 + \varepsilon i \omega_5)$, avec $\varepsilon = \pm 1$. Il suffit d'exprimer que

$$U_5 U_8 = -\frac{1}{3} + h\frac{1 - \varepsilon i\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{3},$$

qui donne $h = 0$, donc la solution

$$(46)\qquad U_8 = \frac{\omega_1 - \sqrt{2}\,\omega_2}{3} - \frac{2\omega_3}{\sqrt{6}}$$

qui forme, avec (33), un S_8 de E_3. On voit tout de suite que $\varepsilon_4 = 1$, donc ce $S_8 = (23, 34, 45, 56, 67, 72; 82, 83, 85, 86)$ est représentable par un hexagone convexe, deux de ses diagonales et leur point de rencontre, plus un point isolé. U_8 est liée à (33) par la relation

$$U_1 - U_2 - U_3 - U_8 = 0. \tag{46'}$$

66. Le prolongement de (33′) s'étudie comme celui de (33), avec $a = -\frac{1}{3}$, et les relations (34′). Nous avons donc ici

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 = 0, \\ 1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_7 = 0. \end{array}\right. \tag{47}$$

Si $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, il vient $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = -1$, donc il existe nécessairement deux ε_i consécutifs négatifs, et, par raison de symétrie, nous pouvons supposer qu'il s'agit de $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$; (47) donne alors $\varepsilon_6 = -\varepsilon_4$, $\varepsilon_7 = -\varepsilon_5$. U_8, qui fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2, est de la forme

$$U_8 = -\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{30}}[\omega_3 \cos\theta + \sin\theta\,(\omega_4 \cos\theta_1 + \omega_5 \sin\theta_1)],$$

avec

$$U_3 U_8 \equiv \frac{1}{6} + \frac{5\cos\theta}{6} = \frac{1}{3},$$

donc $\cos\theta = \frac{1}{5}$, $\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Il faut ensuite, et cela suffit, que $U_4 U_8 = -\frac{\varepsilon_4}{3}$ et $U_5 U_8 = -\frac{\varepsilon_5}{3}$, où $\varepsilon_4^2 = \varepsilon_5^2 = 1$. La première condition donne

$$U_4 U_8 \equiv \frac{\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta_1}{3} \equiv \frac{1 - 4\sqrt{6}\cos\theta_1}{15} = -\frac{\varepsilon_4}{3},$$

donc $\cos\theta_1 = \frac{1 + 5\varepsilon_4}{4\sqrt{6}}$. La deuxième donne

$$U_5 U_8 \equiv -\frac{2\cos\theta + \sin\theta\cos\theta_1}{6} - \frac{5}{\sqrt{60}}\sin\theta\sin\theta_1 \equiv -\frac{1 + \varepsilon_4}{12} - \frac{2\sin\theta_1}{\sqrt{10}} = -\frac{\varepsilon_5}{3},$$

donc

$$\sin\theta_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{1 + \varepsilon_4 - 4\varepsilon_5}{12}.$$

L'ultime condition $\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 = 1$ s'écrit enfin

$$\frac{13 + 5\varepsilon_4}{4 \times 12} + \frac{5(9 + \varepsilon_4 - 4\varepsilon_5 - 4\varepsilon_4\varepsilon_5)}{12^2} = \frac{21 + 5(\varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_4\varepsilon_5)}{6^2} = 1,$$

soit

$$(1 + \varepsilon_4)(1 - \varepsilon_5) = 4.$$

L'unique solution est $\varepsilon_4 = 1$, $\varepsilon_5 = -1$. Il vient alors $\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $\sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{10}}{4}$, et

$$U_8 = -\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3\sqrt{2}} + \frac{\omega_3 + 3\omega_4}{\sqrt{30}} - \frac{\omega_5}{\sqrt{2}}. \tag{48}$$

Cette sphère est liée à (33′) par la relation

$$U_3 - U_4 + U_5 - U_8 = 0, \tag{48′}$$

et forme, avec ce système, un S_8 ayant le même diagramme que celui formé par (33), (46).

67. La recherche d'un S_8 associé à S_7^{20} consiste, pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, à prolonger par une sphère U_8 le système des sphères représentées en (26), (36). Nous supposons toujours $\varepsilon_1 = 1$, et les relations (37) exigent, entre les ε_i, les égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}(\varepsilon_4 - \varepsilon_7) = 0, \\ &\varepsilon_5 - \varepsilon_4 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_7) = 0, \end{aligned}\right. \tag{49}$$

donc, pour des raisons de rationalité, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_7$. Cette valeur commune ne peut être que -1, sans quoi U_8 ferait les mêmes angles que U_6 avec les sphères de (15), ce qui caractérise U_6, comme l'a montré la discussion du paragraphe 54. Dans ces conditions, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$ montre que U_8 fait les mêmes angles que U_3 avec U_1 et U_2 ; elle est donc de la forme

$$U_8 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} - \frac{2\omega_2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} + \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}[\omega_3\cos\theta + \sin\theta(\omega_4\cos\theta_1 + \omega_5\sin\theta_1)].$$

$\cos\theta$ est défini par $\varepsilon_3 = -1$, soit

$$U_3U_8 \equiv \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} + \frac{4(\sqrt{5}-2)\cos\theta}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

qui donne $\cos\theta = -(\sqrt{5}+2)$; $\sin\theta$ vaut alors $2i\sqrt{\sqrt{5}+2}$. Grâce à (15), où $\lambda = 2$, il vient ensuite

$$U_4U_8 \equiv \frac{-\cos\theta}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\sin\theta\, e^{i\theta_1} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} + \frac{4i\sqrt[4]{5}\,e^{i\theta_1}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

donc

$$e^{i\theta_1} = \frac{i(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt[4]{5}}.$$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$ étant réalisés, (49) entraîne $\varepsilon_5 = \varepsilon_7 = -1$, et il ne reste plus qu'à former $U_6U_8 = \frac{\varepsilon_6}{\sqrt{5}}$, ou, plus simplement,

$$\begin{aligned}(U_6 - U_5)U_8 &\equiv \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\sin\theta\,\frac{\nu e^{-i\theta_1} - \mu e^{i\theta_1}}{2} = \frac{4i\sqrt[4]{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\left(\frac{e^{-i\theta_1}}{\sqrt{5}} + \frac{2e^{i\theta_1}}{\sqrt{5}+1}\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} - 1,\end{aligned}$$

donc $U_6 U_8 = -1$, qui est inacceptable. Aucun S_8 n'est associé à S_7^{20}.

68. Le S_6 associé à $S_7^{26} = (23, 34, 45, 57, 72; 76)$ est toujours (26), pour $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Les relations linéaires (39) nous apprennent que les ε_i doivent satisfaire aux égalités

$$(50)\qquad \left\{ \begin{aligned} &1 - \varepsilon_2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\varepsilon_3 + \varepsilon_7) = 0, \\ &1 - \varepsilon_5 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\varepsilon_4 + \varepsilon_7) = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui exige $\varepsilon_2 = \varepsilon_5 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -\varepsilon_7$. $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ entraînerait encore $U_8 = U_6$; il reste donc la solution $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$, $\varepsilon_7 = 1$. U_8, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$U_8 = \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega_2 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} + h(\omega_4 + \varepsilon i \omega_5) = U_4 - (\omega_4 + i\omega_5) + h(\omega_4 + \varepsilon i \omega_5),$$

avec $\varepsilon = \pm 1$. Il vient alors

$$U_4 U_8 \equiv 1 + h(1 - \varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

qui n'est possible qu'avec $\varepsilon = -1$, $h = -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$. $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$ étant réalisés, les égalités (50) entraînent $\varepsilon_5 = \varepsilon_7 = 1$, et il suffit de satisfaire la condition $U_6 U_8 = \frac{\varepsilon_6}{\sqrt{5}}$; or

$$U_6 U_8 \equiv U_4 U_6 - \nu = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

donc $\varepsilon_6 = -1$. On peut ainsi prolonger S_7^{26} avec la sphère

$$(51)\qquad \begin{aligned} U_8 &= \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} - \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega_4 - i\omega_5}{\sqrt{5}-1} \\ &= \frac{\omega_1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\omega_2 - \sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\omega_3}{\sqrt{5}+1} - \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} \frac{\overrightarrow{OP}^2}{\rho} \end{aligned}$$

en un S_8 dont le diagramme est $(23, 34, 45, 57, 72; 76, 68; 83, 84)$. U_8 est liée aux sphères (26) par la relation

$$(51')\qquad U_2 - U_6 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(U_3 - U_8) = 0.$$

On obtient naturellement un autre $S_8\left(a = -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans toutes les formules. Ces deux S_8 sont réels.

69. Il ne reste plus qu'à rechercher les S_8 associés à S_7^{27}. Nous ne connaissons pas les relations qui lient les sphères du S_7, et qui ont été précieuses jusqu'ici. Par contre, la remarque que, dans le diagramme (34, 45, 57, 73; 23, 67) de S_7^{27}, les deux trios 2, 3, 4 et 6, 7, 5 sont permutables permet de réduire la discussion aux deux cas

$$\alpha: \quad \varepsilon_2 = 1,$$
$$\beta: \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_6 = -1.$$

Chacun d'eux sera lui-même subdivisé en deux, suivant que $\varepsilon_3 = 1$ ou -1.

Rappelons que S_7^{27} est représenté par (13), (23), (41), avec les formules auxiliaires (24), (40), et que $\varphi(a) \equiv 1 + a - 9a^2 - a^3 = 0$. ε_1 vaut toujours 1.

α_1. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. — Si $\varepsilon_4 = 1$, U_8 fait les mêmes angles que U_6 avec U_1, U_2, U_3, U_4, donc, pour différer de U_6, son expression se déduit de (23) en changeant ε en $-\varepsilon$. Autrement dit,

$$U_8 - U_6 = 2 \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \varepsilon \sin\beta_4 \omega_5;$$

compte tenu de (24), $U_5 U_8 = \varepsilon_5 a$ s'écrit alors

$$U_5(U_6 - U_8) \equiv 2 \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 \sin\alpha'_1 \,\varepsilon \sin\beta_4 \equiv \frac{2a(1-a)}{1+a} = (1-\varepsilon_5)\,a, \tag{52}$$

qui est incompatible avec $\varphi(a) = 0$.

Si $\varepsilon_4 = -1$, U_8 fait les mêmes angles que U_5 avec U_1, U_2, U_3, U_4, et se déduit donc de l'expression (13) de U_5 en changeant α'_1 en $-\alpha'_1$; autrement dit

$$U_8 - U_5 = 2 \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \sin\alpha'_1 \,\omega_5.$$

La condition

$$U_6(U_5 - U_8) = (1 - \varepsilon_6)\,a$$

redonne l'équation (52), au changement près de ε_5 en ε_6. Aucun S_8 ne correspond à ce cas.

α_2. $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = -1$. — Si $\varepsilon_4 = 1$, U_8 fait les mêmes angles que U_7 avec U_1, U_2, U_3, U_4; pour qu'elle diffère de U_7, son expression est (41) où l'on change ε' en $-\varepsilon'$; on a donc

$$U_8 = U_7 - 2 \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \varepsilon' \sin\beta_3 \omega_5,$$

qui donne la condition

$$U_7 U_8 \equiv 1 - 2 \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 \sin^2\beta_3 \equiv 1 - 2\,\frac{(1-a)(1+a-8a^2)}{1-5a^2}$$
$$\equiv -\frac{1 - 13a^2 + 16a^3}{1-5a^2} = \varepsilon_7 a,$$

soit encore

$$1 + \varepsilon_7 a - 13a^2 + (16 - 5\varepsilon_7)\,a^3 = 0,$$

qui est incompatible avec $\varphi(a) = 0$, $\varepsilon_7 = \pm 1$.

Si $\varepsilon_4 = -1$, U_8, qui fait les mêmes angles que U_4 avec U_1, U_2, U_3, est de la forme

$$U_8 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 [\omega_3 \cos\gamma_1 + \sin\gamma_1 (\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)] \},$$

soit encore

$$U_8 = U_4 + \sin\alpha \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 [\omega_4 (1 - \cos\theta) - \omega_5 \sin\theta],$$

avec la condition $U_4 U_8 = -a$; celle-ci s'écrit

$$U_4(U_4 - U_8) \equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 (1 - \cos\theta) \equiv \frac{1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)}(1-\cos\theta) = 1 + a,$$

donc

$$\cos\theta = 1 - \frac{(1+a)^2(1-2a)}{(1-a)(1-5a^2)} = \frac{-a(1+2a-7a^2)}{(1-a)(1-5a^2)} = \cos\beta_5;$$

on prend $\sin\theta = \varepsilon'' \sin\beta_5$, $\varepsilon'' = \pm 1$. En se rappelant $1 - 2a > 0$, on a ensuite

$$\begin{aligned} U_5(U_8 - U_4) &\equiv \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\gamma_1 [\cos\alpha'_1 (\cos\theta - 1) + \sin\alpha'_1 \sin\theta] \\ &\equiv \frac{a(1+a)}{1-a} + \frac{\varepsilon''\sqrt{(1-3a)(1+a-4a^2)}}{1-a} = (1+\varepsilon_5)a, \end{aligned}$$

ou

$$\varepsilon''\sqrt{(1-3a)(1+a-4a^2)} = \varepsilon_5 a [1 - (1 + 2\varepsilon_5) a].$$

La quantité sous le radical devient successivement, à l'aide de $\varphi(a) = 0$,

$$1 - 2a - 7a^2 + 12a^3 = -a(3 - 2a - 13a^2) = a^2(5 - 14a - 3a^2).$$

L'élévation au carré de l'équation en ε'' donne donc

$$5 - 14a - 3a^2 = 1 - 2(1 + 2\varepsilon_5)a + (5 + 4\varepsilon_5)a^2,$$

ou

$$1 - (3 - \varepsilon_5)a - (2 + \varepsilon_5)a^2 = 0.$$

C'est incompatible avec $\varphi(a) = 0$, $\varepsilon_5 = \pm 1$, et l'hypothèse α_2 ne donne aucun S_8.

70. β_1. $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_6 = -1$. — On déduit aisément de $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ que U_8 doit être de la forme

$$U_8 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1 [\omega_3 \cos\beta'_1 + \sin\beta'_1 (\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)] \}.$$

$\cos\theta$ est déterminé par $U_4 U_8 = \varepsilon_4 a$; en se rappelant

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos\alpha_1 \cos\alpha'_1 = 0,$$

cela s'écrit

$$\begin{aligned} U_4 U_8 &\equiv -\sin^2\alpha \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 (\cos\gamma_1 \cos\beta'_1 + \sin\gamma_1 \sin\beta'_1 \cos\theta) \\ &\equiv -\frac{a^2(1-3a) + (1-a)(1-5a^2)\cos\theta}{(1+a)(1-2a)} = \varepsilon_4 a, \end{aligned}$$

ou

$$(53) \qquad (1-a)(1-5a^2)\cos\theta = -a[a(1-3a)+\varepsilon_4(1+a)(1-2a)].$$

Si $\varepsilon_4 = 1$, (53) donne $\cos\theta = \dfrac{-a}{1-a} = \cos\alpha'_1$, donc $\sin\theta = \varepsilon''\sin\alpha'_1$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Il reste à exprimer que $U_6U_8 = -a$, soit

$$(54) \quad \begin{aligned} U_6U_8 &\equiv \sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1[\cos\gamma_1\cos\beta'_1 - \sin\gamma_1\sin\beta'_1(\cos\beta_4\cos\alpha'_1 + \varepsilon\varepsilon''\sin\beta_4\sin\alpha'_1)] \\ &\equiv \frac{a^2(1-3a)}{(1+a)(1-2a)} + \frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)} \\ &\quad\times\left[\frac{a^2}{1-5a^2} - \frac{\varepsilon\varepsilon''(1-2a)\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)}}{(1-a)(1-5a^2)}\right] = -a; \end{aligned}$$

grâce à (24), ceci se réduit à

$$(55) \qquad \frac{2a^2}{1+a} - \frac{\varepsilon\varepsilon''\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)}}{1+a} \equiv \frac{2a^2}{1+a} - \varepsilon''\frac{a(1-a)}{1+a} = -a,$$

qui est incompatible avec $\varphi(a) = 0$, $\varepsilon'' = \pm 1$.

Avec $\varepsilon_4 = -1$, (53) donne $\cos\theta = \dfrac{a(1-a)}{1-5a^2} = \cos\beta_4$, donc $\sin\theta = \varepsilon''\sin\beta_4$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Mais alors l'équation

$$U_5U_8 \equiv \sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1[\cos\gamma_1\cos\beta'_1 - \sin\gamma_1\sin\beta'_1(\cos\beta_4\cos\alpha'_1 + \varepsilon''\sin\beta_4\sin\alpha'_1)] = \varepsilon_5 a$$

n'est rien d'autre que (54) où ε'' est remplacé par $\varepsilon\varepsilon''$ et le dernier membre par $\varepsilon_5 a$. (55) est donc remplacé par

$$\frac{2a}{1+a} - \varepsilon\varepsilon''\frac{1-a}{1+a} = \varepsilon_5,$$

qui est satisfait par $\varepsilon_5 = 1$, $\varepsilon'' = -\varepsilon$. U_6U_8 est alors égal à $-a$, comme il est demandé. Il vient ensuite

$$\begin{aligned} -U_7U_8 &= \sin^2\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha'_1[\cos\gamma_1\cos\beta'_1 + \sin\gamma_1\sin\beta'_1(\cos\beta_3\cos\beta_4 + \varepsilon\varepsilon'\sin\beta_3\sin\beta_4)] \\ &= \frac{a^2(1-3a)}{(1+a)(1-2a)} + \frac{(1-a)(1-5a^2)}{(1+a)(1-2a)}(\cos\beta_3\cos\beta_4 + \varepsilon\varepsilon'\sin\beta_3\sin\beta_4), \end{aligned}$$

où, grâce à (24) et (40),

$$\begin{aligned} \varepsilon\varepsilon'\sin\beta_3\sin\beta_4 &= \frac{1-2a}{(1-5a^2)^2}\,\varepsilon\sqrt{(1+3a)(1-a-4a^2)}\,\varepsilon'\sqrt{(1+a)(1+a-8a^2)} \\ &= \frac{a^2(1-a^2)(1-2a)}{(1-5a^2)^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} -U_7U_8 &= \frac{a^2(1-3a)}{(1+a)(1-2a)} + \frac{a^2(1-3a)(1-a)^2}{(1+a)(1-2a)(1-5a^2)} + \frac{a^2(1-a)^2}{1-5a^2} \\ &= \frac{2a^2(1-3a)}{1-5a^2} + \frac{a^2(1-a)^2}{1-5a^2} = \frac{a^2(3-8a+a^2)}{1-5a^2}. \end{aligned}$$

Compte tenu de $\varphi(a) = 0$, $U_7 U_8 = \varepsilon_7 a$ s'écrit alors

$$\frac{a(3 - 8a + a^2)}{1 - 5a^2} \equiv \frac{1 + 4a - 17a^2}{1 - 5a^2} = -\varepsilon_7,$$

qui est impossible avec $\varphi(a) = 0$, $\varepsilon_7 = \pm 1$.

β_2. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_6 = -1$. — On déduit aisément de $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$ que U_8 est de la forme

$$U_8 = \omega_1 \cos\alpha + \sin\alpha \{ \omega_2 \cos\alpha'_1 + \sin\alpha'_1 [\omega_3 \cos\alpha'_2 + \sin\alpha'_2 (\omega_4 \cos\theta + \omega_5 \sin\theta)] \}.$$

$\cos\theta$ est déterminé par

$$(56) \qquad U_4 U_8 \equiv -\sin^2\alpha \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 (\cos\gamma_1 \cos\alpha'_2 + \sin\gamma_1 \sin\alpha'_2 \cos\theta)$$
$$\equiv \frac{a^2}{1 - 2a} - \frac{\sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)}}{1 - 2a} \cos\theta = \varepsilon_4 a,$$

donc

$$(57) \qquad \sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)} \cos\theta = a[a - \varepsilon_4(1 - 2a)].$$

Avec $\varepsilon_4 = 1$, ceci donne (39)

$$\cos\theta = \frac{-a(1-3a)}{\sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)}} = \cos\gamma'_3,$$

donc $\sin\theta = \pm \sin\gamma'_3$. Il vient alors

$$(58) \quad -U_5 U_8 \equiv \sin^2\alpha \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 [-\cos\gamma_1 \cos\alpha'_2 + \sin\gamma_1 \sin\alpha'_2 (\cos\alpha'_1 \cos\theta + \sin\alpha'_1 \sin\theta)]$$
$$\equiv \frac{a^2}{1-2a} + \frac{a^2(1-3a)}{(1-a)(1-2a)} \pm \frac{\sqrt{(1-3a)(1+a-4a^2)}}{1-a} = -\varepsilon_5 a,$$

ou enfin

$$\pm\sqrt{(1-3a)(1+a-4a^2)} = a[2a + \varepsilon_5(1-a)].$$

Grâce à $\varphi(a) = 0$, la quantité sous le radical s'écrit successivement

$$1 - 2a - 7a^2 + 12a^3 = a(-3 + 2a + 13a^2) = a^2(5 - 14a - 3a^2).$$

L'élévation au carré donne alors

$$5 - 14a - 3a^2 = 1 - 2a + 5a^2 + 4\varepsilon_5 a(1-a),$$

soit

$$1 - (3 + \varepsilon_5)a - (2 - \varepsilon_5)a^2 = 0,$$

qui est incompatible avec $\varphi(a) = 0$, $\varepsilon_5 = \pm 1$.

Avec $\varepsilon_4 = -1$, (57) donne

$$\cos\theta = \frac{a(1-a)}{\sqrt{(1-a)(1-3a)(1-5a^2)}} = -\cos\gamma'_2,$$

---

(39) Cette expression précise la détermination de $\cos\gamma'_3$. Mais on peut toujours se reporter à (56) pour remplacer correctement $\cos\theta$ par sa valeur dans les calculs qui suivent.

donc $\sin\theta = \pm \sin\gamma'_2$. (58) est remplacé par

$$-U_5 U_8 \equiv \pm \frac{\sqrt{(1-a)(1-a-8a^2)}}{1-a} = -\varepsilon_5 a,$$

que l'élévation au carré transforme en la condition $1-9a-a^2+a^3 \equiv \varphi(-a)=0$, et non $\varphi(a)=0$. On ne peut associer aucun S_8 à S_7^{27}.

71. Les seuls S_8 isogonaux de l'espace sont semblables aux quatre types du tableau suivant :

Système.	Valeurs de a.	Formules représentatives.	Nature.
(23; 45; 61; 78)..........	$a=\frac{1}{3}$	(31) et (43)	impur
(23, 34, 45, 56, 67, 72; 82, 83, 85, 86).............	$a=\frac{1}{3}$	(33) et (46)	impurs
	$a=-\frac{1}{3}$	(33') et (48)	
(23, 34, 45, 57, 72; 76, 68; 83, 84)................	$a=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$	(26), (38) et (51) pour $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$	réels

Il est inutile de rechercher des S_9 isogonaux dans E_3, puisque le prolongement des S_7 n'a jamais pu être effectué qu'à l'aide d'une sphère unique.