Y. KATZNELSON

# Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 76, no 2 (1959), p. 83-123
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1959_3_76_2_83_0>

# SUR LE CALCUL SYMBOLIQUE
## DANS QUELQUES ALGÈBRES DE BANACH

PAR M. Y. KATZNELSON.

### INTRODUCTION.

Un théorème bien connu de Wiener [26] et Lévy [18] affirme que si $f(x)$ est la somme d'une série de Fourier absolument convergente et si $F(z)$ est analytique sur l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$, la série de Fourier de $F(f(x))$ converge absolument. Lévy pose le problème inverse : caractériser les fonctions qui partagent cette propriété avec les fonctions analytiques. Ainsi conçu le problème est plutôt de variables réelles que de variables complexes : en effet, une généralisation facile de la méthode employée par Lévy [18] ou une application d'un théorème de Šilov [25] montrent qu'il suffit de supposer que $F(z) = F(x + iy)$ est analytique en tant que fonction des deux variables réelles $x$ et $y$, pour que la conclusion du théorème cité soit valable. Il est naturel de se limiter d'abord au cas d'une seule variable. Nous désignons par $\mathcal{A}(T)$ l'algèbre des sommes de séries de Fourier absolument convergentes, par $\mathcal{A}_r$ l'ensemble des fonctions réelles de $\mathcal{A}(T)$ et nous cherchons à caractériser les fonctions $F(x)$ définies sur l'axe réel telles que

$$f(x) \in \mathcal{A}_r \Rightarrow F(f(x)) \in \mathcal{A}(T)$$

Nous dirons qu'une telle fonction F « opère » dans $\mathcal{A}_r$.

Des recherches ont été faites dans deux directions opposées. Marcinkiewicz [20] et Kahane [9] ont montré qu'il existe des ensembles assez larges de fonctions dans $\mathcal{A}_r$ dont les itérées avec des fonctions suffisamment de fois dérivables appartiennent à $\mathcal{A}(T)$. D'autre part, un certain nombre de résultats « négatifs » a été découvert par Kahane et Rudin. Dans [9] et [10] Kahane construit une fonction $f \in \mathcal{A}_r$ telle $|f| \notin \mathcal{A}_r$. Rudin [23] a montré indépendamment qu'il existe une fonction non négative $f \in \mathcal{A}_r$, telle que $\sqrt{f} \notin \mathcal{A}_r$. Un autre résultat de Rudin [24] concernant les fonctions qui « opèrent » sur les coefficients de Fourier des fonctions sommables entraîne que les fonctions qui opèrent sont nécessairement Lipschitziennes d'ordre 1. Que cette condition n'est pas suffisante résulte d'une construction de Kahane. Enfin Kahane montre [12] que le théorème de Wiener-Lévy ne peut s'étendre en remplaçant la condition « F analytique » par « F appartenant à une classe donnée (non analytique) de fonctions infiniment dérivables ».

C'est Monsieur Mandelbrojt qui a attiré mon attention sur ce problème et m'a proposé d'examiner dans quelle mesure les fonctions « monogènes » opèrent dans $\mathcal{A}_r$.

L'idée est la suivante : pour tout $a > 0$, la fonction $F_a(x) = (a - x^2)^{-1}$ est analytique sur l'axe réel et par conséquent opère dans $\mathcal{A}_r$, est-il possible de choisir une suite $\{a_n\}$ tendant vers zéro et une suite $\{A_n\}$ décroissant suffisamment vite pour que $\sum A_n F_{a_n}(f)$ converge pour tout $f \in \mathcal{A}_r$. Cette construction permet d'obtenir pour toute partie compacte ou $\sigma$ compacte dans $\mathcal{A}_r$ des fonctions non analytiques qui l'appliquent dans $\mathcal{A}(T)$. Pour construire une telle fonction qui opère dans $\mathcal{A}_r$ il fallait démontrer que la fonction $(1 + \rho^2)^{-1}$ reste bornée dans $\mathcal{A}_r$ lorsque $f$ y parcourt des parties bornées. Or il résulte du dernier théorème énoncé dans [12] que ce n'est pas le cas ; une fonction $F(x)$ qui est bornée sur les parties bornées de $\mathcal{A}_r$ est nécessairement une fonction entière.

La solution du problème de Lévy est due à une collaboration heureuse lors d'une réunion consacrée à l'analyse harmonique qui s'est déroulée à Montpellier au mois de Juillet 1958. Une suite de notes [15] [5] [14] a été présentée à l'Académie des Sciences. Nous consacrons le deuxième chapitre de cette thèse à la démonstration de la réciproque du théorème de Wiener-Lévy. Nous y donnons également une classe d'algèbres quotients de $\mathcal{A}(T)$ pour lesquelles cette réciproque est valable. Ce chapitre peut être lu indépendamment du chapitre I.

La théorie de Gelfand [8] montre que chaque algèbre de Banach B, commutative et semi-simple peut être représentée comme algèbre de fonctions continues sur un espace de Hausdorff (espace séparé) $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ est compact si B contient un élément unité.

Nous dirons qu'une fonction $F(z)$ opère dans B, si $F(f) \in B$ dès que $f \in B$ et pourvu que F soit défini sur l'ensemble des valeurs de $f$. Une généralisation du théorème de Wiener-Lévy due à Gelfand, assure que les fonctions analytiques opèrent toujours. Elles ne sont, en général, pas les seules à opérer. Le premier chapitre est dédié à l'étude de quelques propriétés générales des fonctions qui opèrent, et des rapports entre la structure de B et l'ensemble $\mathcal{F}$ de ces fonctions. Quelques résultats obtenus sous l'hypothèse que $\mathcal{F}$ admet une structure d'algèbre de Banach peuvent être obtenus sous des hypothèses moins restrictives — par exemple : $\mathcal{F}$ métrisable ... — comme le lecteur verra de lui-même. Le premier chapitre contient également quelques résultats d'ordre plus particulier. Citons par exemple la généralisation du théorème de Beurling-Helson et Leibenson,

Le présent travail a été effectué sous la direction de Monsieur Mandelbrojt à qui je dois non seulement ma formation et l'initiation à la recherche mathématique, mais aussi l'affection paternelle et la compréhension qu'il m'a toujours montrée. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma profonde gratitude.

Les publications de J.-P. Kahane, ses communications verbales, les conversations que j'ai eues avec lui et son encouragement constant m'ont été très précieux. Je veux lui témoigner ici de toute mon amitié et de ma reconnaissance.

Je tiens également à remercier Monsieur Choquet et Monsieur Salem, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Je remercie le Service des Relations Culturelles du Ministère des Affaires Étrangères pour la bourse dont j'ai bénéficié pendant deux années et qui m'a permis d'entreprendre ce travail.

# CHAPITRE I.

## Sur le calcul symbolique dans des algèbres commutatives, auto-adjointes de Banach.

1. Quelques définitions et notations. — Soit B une algèbre commutative de Banach. Dans tout ce qui suit, nous supposons que B est semi-simple, auto-adjointe et possède un élément unité. Soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(B)$ l'espace des idéaux maximaux de B. La tranformation de Fourier-Gelfand est un isomorphisme de B sur une algèbre $\hat{B}$ de fonctions définies sur $\mathfrak{M}$, l'image $\hat{f}$ de $f \in B$ étant définie par : $\hat{f}(M) \equiv f(\text{mod}\, M)$ pour tout $M \in \mathfrak{M}$. La topologie faible induite sur $\mathfrak{M}$ par $\hat{B}$, c'est-à-dire, la topologie la moins fine rendant toutes les fonctions $\hat{f}(M)$ $(f \in B)$ continues, munit $\mathfrak{M}$ d'une structure d'espace de Hausdorff compact. La distinction entre B et $\hat{B}$ ne nous semble pas utile ; nous supposons que B est une algèbre de Banach de fonctions continues sur un espace de Hausdorff compact $\mathfrak{M}$, avec comme hypothèses :

1.*a*. $f(M) \equiv 1$ appartient à B
1.*b*. si $f(M) \in B$ $\overline{f(M)} \in B$
1.*c*. si $M_1 \neq M_2$ il existe $f \in B$ tel que $f(M_1) \neq f(M_2)$
1.*d*. si $f(M)$ ne s'annule pas, $(f(M))^{-1} \in B$.

L'hypothèse 1.*b*. signifie que B est auto-adjointe ; les hypothèses 1.*c*. et 1.*d* impliquent que $\mathfrak{M}$ est l'espace des idéaux maximaux de B.

M représente toujours un élément de $\mathfrak{M}$. Nous parlerons tantôt du point M, tantôt de l'idéal maximal M sans distinction.

Pour toute partie $G \subset \mathfrak{M}$, le noyau $k(G)$ est l'idéal $\bigcap_{M_\alpha \in G} M_\alpha$. $k(G)$ est l'ensemble de tous les $f \in B$ tels que $f(M)$ s'annule sur G. Les fonctions $f(M)$ étant continues il est clair que, si $\overline{G}$ est l'adhérence de G dans $\mathfrak{M}$ : $k(G) = k(\overline{G})$.

L'enveloppe $h(I)$ d'un idéal $I \subset B$ est l'ensemble des idéaux maximaux qui le contiennent.

Rappelons que l'algèbre B est *régulière* si pour tout fermé $G \subset \mathfrak{M}$ : $G = h\{k(G)\}$; en d'autres termes, si pour tout $M_0 \notin G$ il existe $f \in B$ tel que $f(M_0) = 1$, $f(M)$ s'annulant sur G. On sait {voir [19] p, 84} que B est alors *normale* : si $G_1$ et $G_2$ sont deux ensembles fermés disjoints dans $\mathfrak{M}$, il existe $f \in B$ tel que $f(M) = 0$ sur $G_1$ et $f(M) = 1$ sur $G_2$.

Définition 1.1. — Une fonction $F(z)$, définie dans un ensemble $\Omega$ du plan complexe *opère dans* B si $F(f(M)) \in B$ pour tout $f \in B$ dont les valeurs prises sur $\mathfrak{M}$ sont dans $\Omega$.

La condition 1.$b$ pourra alors s'énoncer : $F(z) = \bar{z}$ opère dans B.

Fixons une fois pour toutes : $\Omega = R$ l'axe, réel. Le fait qu'une fonction opère ne dépend que des éléments réels de B. L'ensemble $B_r$ de ces éléments est une algèbre de Banach réelle dont B est l'algèbre complexifiée (hypothèse 1.$b$)

Il est clair que l'ensemble des fonctions, définies sur l'axe réel, qui opèrent dans B est une algèbre (complexe) ; on la notera $\mathcal{F}_0(B)$ ou plus simplement $\mathcal{F}_0$. On désigne par $\mathcal{F}$ la sous algèbre de $\mathcal{F}_0$ formée de toutes les fonctions de période $2\pi$. $\mathcal{F}$ est une algèbre de fonctions sur $T = \frac{R}{2\pi Z}$, Z étant le groupe des entiers, et comme telle satisfait aux conditions :

1.$a'$. $F(t) \equiv 1$ appartient à $\mathcal{F}$

1.$b'$. $F(t) \in \mathcal{F}$ implique $\overline{F(T)} \in \mathcal{F}$

1.$c'$, si $t_1 \neq t_2$ il existe une fonction $F(t) \in \mathcal{F}$ telle que $F(t_1) \neq F(t_2)$; $t_1$ et $t_2$ sont ici des éléments de T ; c'est-à-dire réduits modulo $2\pi$.

1.$d'$. si $F(t)$ ne s'annule pas , $(F(t))^{-1} \in \mathcal{F}$.

1.$a'$, 1.$b'$ et 1.$d'$ résultent respectivement de 1.$a$, 1.$b$ et 1.$d$. 1.$c'$ résulte de ce que $e^{it} \in \mathcal{F}$. L'ensemble de ces conditions implique que l'espace des idéaux maximaux de $\mathcal{F}$ est T.

Pour $F \in \mathcal{F}_0$, on désigne par (F) l'application de $B_r$ dans B définie par

$$(F)(f) = F(f(M)) = F(f). \tag{1.1}$$

Définition 1.2. — (F) *est localement bornée en* $f_0 \in B_r$ s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'image de la boule $\{f ; \|f - f_0\| < \varepsilon\} \cap B_r$ par (F) soit bornée dans B.

(F) *est localement bornée* si elle est localement bornée en tout $f \in B_r$.

Définition 1.3. — (F) *est bornée* si l'image par (F) de toute boule dans $B_r$ est bornée dans B.

Définition 1.4. — (F) est localement bornée en $f_0 \in B_r$ au voisinage de $M_0 \in \mathfrak{M}$

s'il existe un voisinage V de $M_0$ dans $\mathfrak{M}$ et un $\mathcal{E} > 0$ tels que l'image par (F) de l'ensemble

$$\{f_0 + g;\, g \in k(\mathfrak{M} - V),\, \|g\| < \mathcal{E}\} \tag{1.2}$$

soit borné dans B.

DÉFINITION 1.5. — Le spectre $\Lambda(f)$ d'un élément $f \in B$ est l'ensemble des valeurs prises par $f(M)$ $(M \in \mathfrak{M})$.

2. CONTINUITÉ DES FONCTIONS QUI OPÈRENT. — THÉORÈME 2.1. — *Si* B *est de dimension infinie toutes les fonctions de* $\mathcal{F}_0$ *sont continues.*

*Démonstration.* — Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que l'espace des idéaux maximaux de B est métrisable. Ceci résulte du fait que si F opère dans B et si B est de dimension infinie on peut trouver une sous-algèbre $B_1 \subset B$, de dimension infinie, avec un espace d'idéaux maximaux métrisable, telle que F opère dans $B_1$. En effet, soit $f \in B$ un élément de spectre infini; soit $B_1$ l'ensemble des fonctions de B qui sont constantes sur les lignes de niveau de $f$, c'est-à-dire

$$f_1 \in B_1 \Leftrightarrow \{f(M_1) = f(M_2) \Rightarrow f_1(M_1) = f_1(M_2)\}. \tag{2.1}$$

Il est clair que si F opère dans B, F opère également dans $B_1$, étant donné que $F(g)$ est constante sur les lignes de niveau de $g$.

Désignons par $\mathfrak{M}_1$ l'espace des idéaux maximaux de $B_1$. B et $B_1$ étant auto-adjointes, on sait que chaque $M \in \mathfrak{M}_1$ est de la forme $M^0 \cap B_1$ avec $M^0 \in \mathfrak{M}$; d'autre part il est clair que pour que $M^0 \cap B_1 = M^1 \cap B_1$ il faut et il suffit que $f(M^0) = f(M^1)$. Il en résulte que $\mathfrak{M}_1$ est identique, comme ensemble, à $\Lambda(f)$.

La topologie faible induite par $B_1$ sur $\Lambda(f)$ — considérée comme $\mathfrak{M}_1$ — est évidemment plus forte ou égale à celle induite par le plan complexe; étant séparées et compactes toutes les deux, ces topologies sont identiques et $\mathfrak{M}_1$ est métrisable. Il est donc licite de limiter la démonstration au cas où $\mathfrak{M}$ est métrisable,

$\mathfrak{M}$ étant infini, compact et métrisable, il existe une suite $\{M_j\} \subset \mathfrak{M}$ qui converge vers $M_0 \in \mathfrak{M}$. Pour chaque $j$ on peut trouver $f_j \in B$ tel que

$$f_j(M_k) = 0 \quad \text{si} \quad k < j,$$
$$f_j(M_j) = 1.$$

On choisit une suite $\{\alpha_j\}$ dont la décroissance soit suffisamment rapide pour que $f = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j$ appartienne à B et que $\{f(M_j)\}$ prenne une infinité de valeurs différentes.

Soient $A_0$ réel et $\{a_n\}$ une suite convergeant vers $a_0$, il existe une fonction entière $G(z)$ telle que

$$\{a_n\} \cap \{G(f(M_j))\} \tag{2.2}$$

soit infini et que $G(f(M_0)) = a_0$.

Soit $F \in \mathcal{F}_0$ ; comme $G(f(M)) \in B$,

$$F[G(f(M))] \in B \quad \text{et} \quad F[G(f(M_j))] \to F[G(f(M_0))] = F(a_0).$$

De toute suite $\{a_n\}$ convergeant vers $a_0$, on peut donc extraire une sous suite infinie $\{a_{n_j}\}$ telle que $F(a_{n_j}) \to F(a_0)$ ce qui implique la continuité de F en $a_0$ ; $a_0$ étant quelconque le théorème est démontré.

Lorsque B est de dimension finie, elle est l'algèbre de toutes les fonctions sur un espace $\mathfrak{M}$ fini et toute fonction $F(x)$ opère dans B ; la condition du théorème 2.1 est donc nécessaire et suffisante.

3. Quelques propriétés de l'application (F). — Lemme 3.1. — *Soit* B *régulière. Pour que* (F) *soit localement bornée en* $f_0 \in B_r$ *il faut et il suffit qu'elle le soit au voisinage de tout* $M \in \mathfrak{M}$ (*cf. définition* 1.4).

*Démonstration.* — La condition est évidemment, nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

Pour tout $M \in \mathfrak{M}$, soit $V_m$ un voisinage de M tel que l'image de (1.2) par (F), avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_M$, soit bornée dans B. $\mathfrak{M}$ étant compact, nous pouvons choisir $M_1, \ldots M_n \in \mathfrak{M}$ tels que $\{V_{M_1}, \ldots V_{M_n}\}$ soit un recouvrement de $\mathfrak{M}$. Dans chaque $V_{M_j}$ choisissons un ouvert $W_j$ tel que $\overline{W}_j \subset V_{M_j}$ de façon à ce que $\{W_j\}$ soit encore un recouvrement de $\mathfrak{M}$. B étant régulière, il existe des fonctions $\varphi_j \in B_r$ telles que $\varphi_j(M) = 1$ pour $M \in W_j$ et $\varphi_j(M) = 0$ pour $M \notin V_{M_j}$. Soit enfin $\{\psi_j\}$ une décomposition de l'unité dans $B_r$ subordonnée à $\{W_j\}$.

$$F(f_0 + g) = \sum \psi_j F(f_0 + g) = \sum \psi_j F(f_0 + \varphi_j g) \tag{3.1}$$

(F) est donc bornée dans la boule $\{f_0 + g ; \|g\| < \mathcal{E}\}$ avec $\mathcal{E} = \inf_{j=1\ldots n}\left(\dfrac{\mathcal{E}_{Mj}}{\|\varphi_j\|}\right)$.

Soit $F \in \mathcal{F}_0$. Nous surnommons « ordinaire par rapport à F » chaque idéal maximal $M \in \mathfrak{M}$ au voisinage duquel (F) est localement bornée à l'origine ; en d'autres termes M est un idéal maximal ordinaire par rapport à F s'il existe un voisinage V de M est un nombre positif $\mathcal{E}$, tels que l'image par (F) de $\{f ; f \in k(\mathfrak{M} - V), \|f\| < \mathcal{E}\} \cap B_r$ est bornée dans B. Ce surnom est justifié par le lemme suivant :

Lemme 3.2. — *Soit* B *régulière et* $F \in \mathcal{F}_0$. *Il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux maximaux non ordinaires par rapport à* F.

*Démonstration.* — Sans restreindre la généralité on peut supposer $F(0) = 0$ étant donné que $(F(x))$ et $(F(x) + C)$ sont bornées sur les mêmes ensembles.

Supposons qu'il existe une suite infinie $\{M_j\} \subset M$ de points non ordinaires par rapport à F. En choisissant, si nécessaire, une sous-suite on peut supposer qu'il existe des voisinages de $M_j$, $V_j$ et $W_j$ tels que

$$\overline{W}_j \subset V_j, \quad V_j \cap V_k = \emptyset \quad \text{si} \quad j \neq k. \tag{3.2}$$

Soit $\varphi_j \in B_r$ satisfaisant $\varphi_j(M) = 1$ pour $M \in W_j$ et $\varphi_j(M) = 0$ pour $M \notin V_j$. M étant non-ordinaire par rapport à F, on peut trouver

$$f_j \in k(\mathfrak{M} - W_j) \cap B_r, \qquad \|f_j\| < 2^{-j}$$

tel que

$$\|F(f_j)\| > j\|\varphi_j\|.$$

Posons

$$f = \sum f_j \qquad F(f) \in B$$

$$\|F(f)\| > \frac{1}{\|\varphi_j\|}\|\varphi_j F(f)\| = \frac{1}{\|\varphi_j\|}\|\varphi_j F(f_j)\| = \| \frac{1}{\|\varphi_j\|}\|F(f_j)\| \geq j \tag{3.3}$$

d'où la contradiction recherchée.

Chaque automorphisme $\sigma$ de l'algèbre B induit un homéomorphisme $\sigma$ de $\mathfrak{M}$ sur lui-même, ce qui correspond à un changement de variables pour les fonctions de B.

On a $\sigma(f(M)) = f(\sigma M)$ et par conséquent

$$F(\sigma(f)) = F[\sigma(f(M))] = F[f(\sigma M)] = \sigma(F(f))$$

c'est-à-dire que (F) commute avec $\sigma$.

$\sigma$ étant un opérateur borné, inversible sur B, M et $\sigma M$ sont simultanément ordinaires par rapport à F ou non. Il en résulte que si $M_0$ est non ordinaire par rapport à F, il n'existe que nombre fini d'idéaux maximaux qui lui sont homologues, c'est-à-dire qui sont de la forme $\sigma M_0$ pour un automorphisme $\sigma$.

Nous dirons qu'une algèbre B est riche en automorphismes si chaque idéal maximal posséde une infinité d'idéaux maximaux homologues.

Nous avons ainsi démontré :

THÉORÈME 3.1. — *Si* B *est régulière et riche en automorphismes,* (F) *est localement bornée à l'origine pour toute* $F \in \mathcal{F}_0$.

*Exemple* 3.1. — Soit $\mathfrak{M} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ avec la topologie induite par celle de l'axe réel. B est l'ensemble des fonctions $f(x)$ continues sur $\mathfrak{M}$ telles que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right| < \infty$$

avec

$$\|f\| = |f(0)| + \sum \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right|.$$

Il n'est pas difficile de voir que $F \in \mathcal{F}_0$ si et seulement si $F(x)$ est Lipschitzienne d'ordre 1 en tout point, c'est-à-dire

$$(3.4) \qquad |F(x_0+h) - F(x_0)| \leqq K|h| \qquad \text{si} \quad |h| \leqq 1$$

Posons $K(x_0) = \inf K$, K satisfaisant (3.4); on voit immédiatement que pour que (F) soit localement bornée en $f$, il faut et il suffit que $K(x)$ soit bornée au voisinage de $f(0)$, c'est-à-dire qu'au voisinage de $f(0)$, $F(x)$ est l'intégrale d'une fonction bornée. Pour que (F) soit bornée (voir définition 1.3) il faut et il suffit que F soit l'intégrale d'une fonction bornée sur tout intervalle fini. Ainsi $F_0(x) = x \sin \frac{1}{x}$ opère dans B, $(F_0)$ est localement bornée en $f_0$ si et seulement si $f_0(0) \neq 0$ et n'est pas localement bornée à l'origine.

*Définition* 3.1. — Un idéal maximal $M \in \mathfrak{M}$ est ordinaire par rapport à une famille $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_0$ s'il est ordinaire par rapport à toute $F \in \mathcal{H}$.

Lemme 3.3. — *Soit* B *régulière et* $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_0$. *Supposons que pour chaque suite* $\{F_n\} \subset \mathcal{H}$ *il existe une suite* $\{a_n\}$ *de nombres positifs, telle que* $\sum \alpha_n F_n \in \mathcal{F}_0$ *dès que* $|\alpha_n| \leqq a_n$. *Dans ces conditions l'ensemble des points non ordinaires de* $\mathfrak{M}$ *par rapport à* $\mathcal{H}$ *est fini.*

*Démonstration.* — S'il n'en était pas ainsi il existerait une suite infinie $\{M_j\}$ de points non ordinaires par rapport à $\mathcal{H}$ possédant des voisinages $V_j$ disjoints (voir la démonstration du lemme 3.2), Pour chaque $M_j$ il existe une fonction $F_j \in \mathcal{H}$ par rapport à laquelle $M_j$ est non ordinaire. En vertu du lemme 3.2 on peut supposer que $M_k$ est ordinaire par rapport à $F_j$ si $k \neq j$. Soit $\{a_n\}$ la suite associée à $\{F_n\}$ dans les conditions de l'énoncé du lemme. Il est clair que $\sum a_n |F_n(0)| < \infty$. $\{a_n\}$ est associée à $\{F_n(x) - F_n(0)\}$ également et nous pouvons supposer que $F_n(0) = 0$.

On définit par récurrence $\alpha_j$. $W_j$, $\varphi_j$, $g_j$ de la façon suivante :

*a*. $\alpha_j$ est un nombre positif inférieur à $a_j$ tel que

$$(3.5) \qquad \|\alpha_j F_j(g_k)\| \leqq 2^{-j} \qquad \text{pour} \quad k < j;$$

*b*. $W_j$ est un voisinage de $M_j$ $\overline{W}_j \subset V_j$, tel que $(F_k)$ soit bornée au voisinage de l'origine dans $k(\mathfrak{M} - W_j)$ pour tout $k < j$; ici intervient l'hypothèse selon laquelle $M_j$ est ordinaire par rapport à $F_k$ si $k \neq j$.

*c*. $\varphi_j \in B_r$ $\varphi_j(M) = 1$ sur $W_j$ et $\varphi_j(M) = 0$ hors de $V_j$.

*d*. $g_j \in B_r \cap k(\mathfrak{M} - W_j)$, $\|g_j\| \leqq 2^{-j}$ tel que

$$(3.6) \qquad \|\alpha_j F_j(g_j)\| > \|\varphi_j\| \left( j + 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k \|F_k(g_j)\| \right),$$

(3.6) est possible d'après $b$ et l'hypothèse que $M_j$ est non ordinaire par rapport à $F_j$.

Posons

$$F = \sum \alpha_j F_j \quad \text{et} \quad g = \sum g_j,$$

on a

$$F \in \mathcal{F}_0 \quad \text{et} \quad g \in B_r,$$

donc

$$F(g) \in B$$

or

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \| F(g) \| &\geqq \frac{1}{\| \varphi_j \|} \| \varphi_j F(g) \| = \frac{1}{\| \varphi_j \|} \| F(g_j) \| \\ &\geqq \frac{1}{\| \varphi_j \|} \left[ \alpha_j \| F_j(g_j) \| - \sum_{k \neq j} \alpha_k \| F_k(g_j) \| \right] \geqq j \end{aligned} \right.$$

d'après (3.5) et (3.6). La formule (3.7) nous donne la contradiction cherchée.

4. Topologies sur $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}$. — On peut considérer $\mathcal{F}_0$ non seulement comme l'espace des fonctions F à variable réelle qui opèrent dans B, mais aussi comme l'espace des opérations (F), c'est-à-dire comme un certain espace de fonctions de $B_r$ dans B. La topologie de la convergence simple des (F) munit $\mathcal{F}_0$ d'une structure localement multiplicativement convexe, donnée par la famille des semi-normes $N_f(F) = \| F(f) \|$ correspondant à l'ensemble de tous les éléments $f$ de $B_r$.

La multiplicativité $N_f(F.G) \leqq N_f(F) N_f(G)$ résulte de

$$\| F(f) G(f) \| \leqq \| F(f) \| . \| G(f) \| \quad \text{dans B}$$

et implique la continuité de la multiplication dans $\mathcal{F}_0$, qui devient ainsi une algèbre topologique.

Nous appelons cette topologie sur $\mathcal{F}_0$ la topologie simple des opérations, ou bien la topologie simple tout court, réservant le terme topologie simple des fonctions pour la topologie de la convergence simple des fonctions numériques définies sur l'axe réel.

Il est clair que la topologie simple sur $\mathcal{F}_0$ est plus fine que la topologie simple des fonctions. Chaque filtre de Cauchy dans $\mathcal{F}_0$ converge donc simplement sur l'axe réel vers une fonction F qui opère, on le voit, dans B; F appartient ainsi à $\mathcal{F}_0$, où elle est la limite du filtre. $\mathcal{F}_0$ est par conséquent complet.

La topologie induite sur $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_0$ sera appelée encore la topologie simple des opérations ou bien la topologie simple tout court. $\mathcal{F}$, étant une sous-algèbre fermée dans $\mathcal{F}_0$, est une algèbre complète.

Lemme 4.1. — *Pour tout* $F_0 \in \mathcal{F}_0$ ($F_0 \in \mathcal{F}$ *resp.*) *l'application* $F \to F(F_0)$ *est un homomorphisme continu de* $\mathcal{F}_0$ *dans* $\mathcal{F}_0$ (*dans* $\mathcal{F}$ *resp.*).

*Démonstration.* — Le point de vue algébrique étant trivial démontrons la continuité. Pour cela il suffit de remarquer que les conditions assurant qu'une famille $\{F_\alpha(F_0)\}$ fait partie d'un voisinage de zéro, sont des cas particuliers des conditions pour que $\{F_\alpha\}$ fasse partie d'un tel voisinage.

$\mathcal{F}$, muni de la topologie simple des opérations, n'est pas en général une algèbre de Banach. Pour qu'elle le soit il faut et il suffit qu'il existe un voisinage borné de l'origine, c'est-à-dire une suite finie $\{f_n\}_{n=1}^{M} \leqq B_r$ telle que pour tout $f \in B_r$ et $F \in \mathcal{F}$

$$N_f(F) \leqq K(f) \sup_{n=1\ldots M} N_{f_n}(F) \tag{4.1}$$

soit

$$\| F(f) \| \leqq K(f) \sup_{n=1\ldots M} \| F(f_n) \|. \tag{4.2}$$

Une telle suite, lorsqu'elle existe, est appelée suite majorante pour $\mathcal{F}$.

*Définition.* — $\mathcal{F}$ est quasi analytique (I), s'il existe une fonction $F \in \mathcal{F}$, non identiquement nulle, qui s'annule sur un intervalle.

Comme $\mathcal{F}$ est invariante par translation, il existe, quand elle est non quasi analytique (I), pour tout intervalle $I \subset T$, une fonction non nulle dans $\mathcal{F}$ à support dans I.

THÉORÈME 4.1. — *Si $\mathcal{F}$ est non quasi analytique* (I) *et si, munie de la topologie simple, $\mathcal{F}$ est une algèbre de Banach, il existe un élément $f \in B_r$ dont le spectre contient un intervalle. En particulier la puissance de $\mathfrak{M}$ est alors au moins celle du continu.*

*Démonstration.* — Soit $\{f_n\}_{n=1}^{M}$ la suite majorante pour $\mathcal{F}$. $\bigcup_{n=1}^{M} \Lambda(f_n)$ est un ensemble compact dans T; s'il ne couvre pas T tout entier il existe un intervalle $I \subset T$ disjoint à $\cup \Lambda(f_n)$. Soit $F \in \mathcal{F}$ non nulle à support dans I.

$F(f_n) = 0$ pour $n = 1 \ldots M$ sans que $F = 0$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $\{f_n\}$ est une suite majorante.

*Remarque* 1. — La condition de non quasi analyticité qui figure dans l'énoncé du théorème est superflue. Nous verrons que si $\mathcal{F}$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Banach, elle contient toutes les fonctions $p (p < \infty)$ fois dérivables pour un entier $p$.

*Remarque* 2. — Le théorème 4.1 concerne la topologie simple sur $\mathcal{F}$ plutôt que l'algèbre $\mathcal{F}$ elle-même. Il existe des algèbres B, avec $\mathfrak{M}$ dénombrable, telles que $\mathcal{F}$ puisse être normée de manière à devenir une algèbre de Banach. Dans de tels cas, la topologie simple des opérations est plus faible que la topologie induite par la norme et n'entre évidemment pas dans la classe des topologies localement convexes pour lesquelles le théorème du graphe fermé est valable (*voir* l'exemple 4.1)

*Exemples* 4.1. — Soit X un exemple d'Hausdorff compact infini; $B = C(X)$ l'algèbre de toutes les fonctions continues sur X avec la norme :

$$\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) |.$$

Une condition suffisante et nécessaire pour que $F(t)$ opère dans B est que $F(t)$ soit continue. $\mathcal{F}$ est donc $C(T)$. La topologie simple sur $\mathcal{F}$ coïncide avec celle induite par la norme de $C(T)$ si et seulement si il existe un $f \in B_r$ dont le spectre contient un intervalle.

4.2. Soit I un intervalle, $B = D_n(I)$ l'algèbre de toutes les fonctions $n$ fois continuement dérivables sur I. On a $\mathfrak{M} = I$, $\mathcal{F} = D_n(T)$ avec la topologie donnée par la norme.

4.3. Soit $\varphi(h)$ un module de continuité, c'est-à-dire une fonction non-négative sur $[0, 1]$, continue à l'origine, concave et non identiquement nulle.

Pour $n \geqq 1$, désignons par $\Lambda_{n,\varphi}(I)$ le sous-espace de $D_n(I)$ des fonctions dont la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}$ satisfait à

$$(4.3) \qquad | f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x+h) | \leqq K\varphi(|h|)$$

pour $|h| \leqq 1$ tel que $x$ et $x + h \in I$.

$\Lambda_{n,\varphi}$ est une algèbre de Banach avec une norme équivalente à

$$\| f \| \sim \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{m!} \sup_{x \in I} | f^{(m)}(x) | + K_\varphi(f).$$

$K_\varphi(f)$ étant égal à inf K, K satisfaisant (4.3).

Si $B = \Lambda_{n,\varphi}(I)$ on a $\mathcal{F} = \Lambda_{n,\varphi}(T)$, la topologie simple des opérations étant équivalente à celle induite sur $\mathcal{F}$ par sa norme.

4.4. Soit G un groupe abélien, localement compact, infini. $B = L^1(G)$. Les fonctions qui opèrent dans B sont nécessairement analytiques (*voir* les références dans le chapitre II).

5. Cas où $\mathcal{F}$ est une algèbre de Banach. — Supposons que $\mathcal{F}$ en tant qu'algèbre possède une structure topologique d'algèbre de Banach. Une telle structure, lorsqu'elle existe est plus fine que la topologie simple des opérations. Ceci résulte en effet du théorème du graphe fermé, l'application $F \to F(f)$ de $\mathcal{F}$ dans B ayant son graphe fermé pour tout $f \in B_r$ (B étant semi-simple par hypothèse). Nous désignons les normes de $\mathcal{F}$ et de B de la même manière; il est clair que lorsque l'on parle de la norme d'un élément de B, cette norme est prise dans B et lorsque l'on parle de la norme d'une fonction qui opère la norme est prise dans $\mathcal{F}$.

Posons $\omega_n = \| e^{inx} \|$. Nous appellerons la suite : $\{ \omega_n \}_{-\infty}^{\infty}$, « la suite associée à $\mathcal{F}$ ». $\mathcal{F}$ étant une algèbre de Banach il est clair que $\omega_{m+n} \leqq \omega_m \omega_n$, ce qui implique

que l'ensemble $A\{\omega_n\}$ des séries trigonométriques $\sum a_n e^{inx}$, telles que $\sum |a_n|\omega_n < \infty$, est une algèbre de Banach, où la norme est définie par

$$\left\| \sum a_n e^{inx} \right\|_1 = \sum |a_n|\omega_n \tag{5.1}$$

$A\{\omega_n\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}$; si $F(x) \in A\{\omega_n\}$

$$\|F(x)\| \leq \|F(x)\|_1.$$

Nous verrons dans la suite que ces normes ne sont jamais équivalentes,

THÉORÈME 5.1. — *Si $\mathcal{F}$ admet une structure d'algèbre de Banach, il existe un entier p tel que $\mathcal{F}$ contienne toutes les fonctions p fois dérivables.*

*Démonstration.* — Pour tout $f \in B_r$, l'application $F \to F(f)$ est une application continue de $\mathcal{F}$ dans B. Soit $K_f$ la norme de cette application. Posons

$$K'(f) = \sup_n \left\{ \frac{\|e^{inf}\|}{\omega_n} \right\} \leq K_f. \tag{5.2}$$

$K'(f)$ est une fonction numérique définie sur $B_r$, et, comme elle est le supremum d'une suite de fonctions continues, elle appartient à la première classe de Baire et admet, par conséquent, un point de continuité $f_0$.

Il existe un $\eta > 0$ tel que $\|f - f_0\| < \eta$ implique :

$$K'(f) \leq \overline{K}(f_0, \eta).$$

Pour $\|f - f_0\| < \eta$ on a

$$\|e^{in(f-f_0)}\| \leq \|e^{inf}\| \; \|e^{-inf_0}\| \leq K'(f)\,K'(f_0)\,\omega_n\omega_{-n} \tag{5.3}$$

or

$$K'(f) \leq \overline{K}(f_0, \eta) \qquad \text{et} \qquad \omega_{-n} \sim \omega_n \quad (*).$$

et par conséquent

$$\|e^{in(f-f_0)}\| \leq C(\eta)\,\omega_n^2. \tag{5.4}$$

L'application $F(x) \to F(2x)$ est un opérateur linéaire fermé dans $\mathcal{F}$ et d'après le théorème du graphe fermé il existe un K tel que

$$\|F(2x)\| \leq K\,\|F(x)\|$$

et en particulier

$$\omega_{2n} \leq K\,\omega_n, \qquad \omega_{2^n} \leq K^n\,\omega_1. \tag{5.5}$$

Soit $f \in B_r$ et $m$ un entier quelconque. On a :

$$\|e^{imf}\| = \|e^{i2^n t f}\|$$

avec $t2^n = m$, $n$ étant le plus petit entier tel que $t\|f\| < \eta$.

---

(*) Nous utilisons le signe $a \sim b$, $a$ et $b$ étant des variables, pour indiquer que le rapport $\frac{a}{b}$ est borné inférieurement et supérieurement par des nombres positifs.

D'après (5.4) et (5.5), il résulte que

$$\| e^{imf} \| \leqq C(\eta)\, \omega_{2^n}^2 \leqq C(\eta)\, K^{2n} \omega_1^2$$

et comme

$$n \leqq \text{Const.} + \frac{\log m}{\log 2}$$

nous obtenons

$$\| e^{imf} \| \leqq \text{Const.}\, m^{p-1}, \qquad p = 2\frac{\log K}{\log 2} + 1. \tag{5.6}$$

(5.6) implique évidemment que pour toute fonction F, $p$ fois dérivable, $F(f) \in B$; $f$ étant quelconque, le théorème est démontré.

Corollaire 1. — *$\mathcal{F}$ est non quasi analytique (justification de la remarque 1 à la suite du théorème* 4.1).

Corollaire 2. — *$\mathcal{F}$ est régulière et par conséquent* B *est régulière. En effet, soit* G *un ensemble fermé dans $\mathfrak{M}$ et $M_0 \in \mathfrak{M} - G$; il existe une fonction $\varphi(M)$ continue sur $\mathfrak{M}$, telle que $\varphi(M) = 0$ pour $M \in G$, $\varphi(M_0) = 1$. D'après le théorème de Stone Weierstrass il existe une fonction $f \in B_r$ telle que $|f(M)| - \varphi(M) \leqq \frac{1}{4}$. Il existe une fonction $F(x)$ dans $\mathcal{F}$, nulle pour $|x| < \frac{1}{4}$ et égale à* 1 *pour $|x - 1| \leqq \frac{1}{4}$. $F(f) \in B$ et il est évident que $F(f(M)) = 0$ pour $M \in G$, et $F(f(M_0)) = 1$.*

*Remarque.* — La suite associée à $\mathcal{F}$ est une suite croissante comme nous le verrons plus loin. Ce résultat est basé sur le fait que $\mathcal{F}$ est une algèbre régulière, fait qui, a son tour, repose sur le théorème 5.1; mais, une fois acquis ce résultat montre à l'aide de (5.5) que nous pouvons prendre

$$p = 1 + \frac{\log K}{\log 2} \qquad \text{au lieu de} \qquad 1 + 2\frac{\log K}{\log 2}$$

Théorème 5.2. — *Si $\mathcal{F}$ admet une structure d'algèbre de Banach, il n'existe dans $\mathfrak{M}$ qu'un nombre fini de points non ordinaires par rapport à $\mathcal{F}$. Soit $G \subseteq \mathfrak{M}$ un fermé qui ne contient aucun de ces points; chaque fonction de $\mathcal{F}$ est bornée dans toute partie bornée de $k(\mathfrak{M} - G)$.*

*Démonstration.* — B étant régulière et $\mathcal{F}$ ayant une structure d'algèbre de Banach, le lemme 3.3 est applicable pour $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ ce qui démontre la première partie du théorème.

Il résulte du lemme 3.1 que pour toute $F \in \mathcal{F}$, (F) est bornée au voisinage de l'origine dans l'idéal $k(\mathfrak{M} - G)$. Si $f_n \in k(\mathfrak{M} - G)$, $f_n \in B_r$, $f_n \to 0$, $\{F(f_n)\}$ reste bornée pour toute $F \in \mathcal{F}$. Désignons par $(f)$ l'application $F \to F(f)$ de $\mathcal{F}$ dans B. L'application $f \to (f)$ plonge $B_r$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}, B)$ (l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{F}$ dans B) et il résulte du théorème de Banach-

Steinhaus que pour toute suite $\{f_n\}$ tendant vers zéro dans $k(\mathfrak{M}-G)\cap B_r$, la suite $\{(f_n)\}$ est bornée en norme dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}, B)$. On déduit de ceci qu'il existe toute une boule $\{\|f\|<\eta\}$ dans $k(\mathfrak{M}-G)\cap B_r$ qui est plongée dans un ensemble borné dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}, B)$.

Pour tout entier $n$, l'opérateur $(n)$ : $F(x)\to F(nx)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{F}$. On a

$$F(nx)(f)=F(nf)=F(x)(nf)$$

c'est-à-dire

$$(nf)=(f)(n) \tag{5.7}$$

qui implique que la boule $\{\|f\|<n\eta\}$ dans $k(\mathfrak{M}-G)\cap B_r$ se plonge dans un ensemble borné dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}, B)$ [car $\{\|f\|<\eta\}$ le fait].

Corollaire. — *Si* B *est riche en automorphismes, toute partie bornée de* $B_r$ *est plongée dans une partie bornée de* $\mathcal{L}(\mathcal{F}, B)$. *En particulier,* (F) *est bornée pour toute* $F\in\mathcal{F}$ *(voir la définition* 1.3). *On peut « remonter » à* $\mathcal{F}_0$ : *soit* $F\in\mathcal{F}_0$, $F(k\sin x)\in\mathcal{F}$; $(F(k\sin x))$ *est donc bornée, ce qui implique que* (F) *est bornée sur la boule* $\|f\|<\frac{k}{2}$ *dans* $B_r$; *k étant quelconque,* (F) *est bornée.*

L'algèbre $\mathcal{F}$ étant une algèbre de Banach on peut chercher les fonctions qui opèrent dans $\mathcal{F}$. Il est clair que l'on retrouve $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}$. L'espace des idéaux maximaux de $\mathcal{F}$ est T, comme nous l'avons déjà remarqué, dont tous les points sont équivalents; nous pouvons appliquer le corollaire du théorème 5.2 pour obtenir que pour toute $F\in\mathcal{F}_0$, l'opération (F) comme fonction de $\mathcal{F}_r$ (les fonctions réelles de $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{F}$, est une opération bornée, c'est-à-dire si $F\in\mathcal{F}_0$ et $R>0$, il existe une constante $N=N_R(F)$ telle que

$$\sup_{\|F_\alpha\|\leq R}\|F(F_\alpha)\|=N_R(F).$$

Pour tout R, $N_R(F)$ est une semi norme multiplicative sur $\mathcal{F}_0$. On peut choisir une suite $R_n\to\infty$ et considérer la topologie sur $\mathcal{F}_0$, donnée par la suite (croissante) des semi normes $N_{R_n}(F)$. On voit immédiatement que cette topologie est une structure de Fréchet sur $\mathcal{F}_0$.

La restriction de cette même structure à $\mathcal{F}$ doit, à cause du théorème du graphe fermé, être équivalente à celle de $\mathcal{F}$ en tant qu'algèbre de Banach et par conséquent il existe un $R_0$ tel que (5.8)

$$\|F\|\sim N_{R_0}(F) \qquad \text{pour} \quad F\in\mathcal{F}. \tag{5.8}$$

Il en résulte que la suite $\omega_n$ est équivalente à une suite croissante (justification de la remarque qui suit le théorème 5.1). En effet :

$$\omega_n=\|e^{inx}\|\sim\sup_{\|F\|<R_0}\|e^{inF}\|=\sup_{\|F\|\leq nR_0}\|e^{iF}\|$$

Pour chaque $t\in T$, la translation $\tau_t: F(x)\to F(x+t)$ est un automorphisme de $\mathcal{F}$.

LEMME 5.1. — *La famille* $\{\tau_t\}_{t\in T}$ *est uniformément bornée dans* $\mathcal{L}(\mathcal{F})$; $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ *étant l'espace des opérateurs linéaires continus sur* $\mathcal{F}$.

*Démonstration.* — Soit $F_j(x) \equiv (x) \pmod{2\pi}$ sur $I_j (j = 1, 2)$ ou $I_j$ sont deux intervalles ouverts sur T dont la réunion couvre T. On peut choisir les $F_j$ suffisamment de fois dérivables pour qu'elles appartiennent à $\mathcal{F}$.

Soit $G(x) = 1$ sur $T - I_2$ et $G(x) = 0$ sur $T - I_1$, on a

$$(5.9)\qquad \begin{cases} F(x) = G(x)F(F_1) + (1-G)F(F_2) \\ F(x+t) = G(x)F(F_1+t) + (1-G)F(F_2+t). \end{cases}$$

Or, l'ensemble $\{F_j + t;\, j = 1, 2 \text{ et } -\pi \leqq t \leqq \pi\}$ est borné dans $\mathcal{F}$ et le lemme résulte du fait que (F) en tant qu'opération sur $\mathcal{F}$ est bornée pour toute $F \in \mathcal{F}$ et du théorème de Banach-Steinhaus.

*Remarque.* — $\{\tau_t\}_{t\in T}$ est une représentation du groupe T dans $\mathcal{F}$. Si l'on pose

$$\beta(t) = \|\tau_t\|$$

on a

$$\beta(t_1 + t_2) \leqq \beta(t_1)\beta(t_2)$$

d'où il résulte directement que $\beta(t)$ est bornée *si elle est mesurable.*

*Définition* (5.1). — L'adhérence de l'ensemble des fonctions analytiques dans $\mathcal{F}$ sera notée par $\mathcal{F}^\star$.

Il est clair que $\mathcal{F}^\star$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}$.

Les fonctions analytiques sont, on le sait, continues (et même analytiques) sur $B_r$. Si $\{f_n\}$ est une suite convergente dans $B_r$, la suite des applications $\{(f_n)\}$ (*voir* démonstration du théorème 5.2) converge donc sur l'ensemble des fonctions analytiques de $\mathcal{F}$, et si cette suite est bornée en norme dans $\mathcal{L}(\mathcal{F}, B)$, elle converge fortement dans $\mathcal{F}^\star$.

THÉORÈME 5.3. — *Si l'on garde les hypothèses et les notations du théorème* 5.2, *les fonctions de* $\mathcal{F}^\star$ *opèrent continuement dans* $\mathcal{F}$; *il résulte de* (5.9) *que la restriction de* $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in T}$ à $\mathcal{F}^\star$ *est fortement continue.*

*Définition* 5.2. — On dit que l'algèbre B satisfait la condition D au point $M_0 \in \mathfrak{M}$ si pour tout $f_0 \in M_0$ il existe un $f_1$ aussi voisin que l'on veut de $f_0$ tel que $f_1(M) = 0$ au voisinage de $M_0$.

La condition D pour tout $M \in \mathfrak{M}$ implique la régularité de B et le fait que B n'a pas d'idéaux primaires; en effet, chaque idéal primaire contenu dans $M_0$ contient toutes les fonctions de B qui s'annulent au voisinage de $M_0$, qui est dense dans $M_0$ d'après la condition D. L'implication réciproque est également valable, c'est-à-dire : si B est une algèbre régulière sans idéaux primaires. B satisfait à la condition D en tout $M \in \mathfrak{M}$.

THÉORÈME 5.4. — *Si* B *satisfait la condition* D *au point* $M_0 \in \mathfrak{M}$ *et si* $M_0$ *admet une base dénombrable* $\{V_n\}$ *de voisinages,* $M_0$ *est ordinaire par rapport à* $\mathcal{F}^\star$.

*Démonstration.* — Pour toute fonction F de $\mathcal{F}^\star$, (F) appartient à la première classe de Baire considérée comme fonction de $M_0 \cap B_r$ dans B, et admet par conséquent des points de continuité. Soit $f_0 \in M_0 \cap B_r$ un tel point. (F) est bornée dans une boule $\|f - f_0\| < 2\varepsilon$ dans $M_0$.

Soit $f_1$ l'élément donné par la condition D de distance inférieure à $\varepsilon$ de $f_0$. (F) est encore bornée dans la boule $\|f - f_1\| < \varepsilon$ dans $M_0 \cap B_r$. Soit $V_0$ un voisinage de $M_0$ dans lequel $f_1(M) = 0$; (F) est bornée dans la boule de rayon $\varepsilon$ autour de l'origine de $k(\mathfrak{M} - V_0) \cap M_0 \cap B_r$. Pour tout $F \in \mathcal{F}^\star$, (F) reste donc bornée sur toute suite $\{f_n\}$, $f_n \in M_0 \cap B_r$ telle que $f_n \to 0$, le support de $f_n$ étant contenu dans $V_n$.

Du théorème de Banach-Steinhaus il résulte l'existence d'un voisinage V et de $\varepsilon > 0$ tel que la boule $\{\|f\| < \varepsilon,\ f \in k(\mathfrak{M} - V) \cap M_0 \cap B_r\}$ soit plongée dans une partie bornée de $\mathcal{L}(\mathcal{F}^\star, B)$ (*voir* la démonstration du théorème 5.2).

Du lemme 5.1 il résulte que si $F \in \mathcal{F}^\star$, (F) est bornée sur l'ensemble :

$$K(V, \varepsilon) = \{f + t,\ \|f\| < \varepsilon,\ f \in k(\mathfrak{M} - V) \cap M_0 \cap B_r,\ |t| < 1\}.$$

Soit W un voisinage de $M_0$ tel que $\overline{W} \subset V$, et $g \in B_r$ tel que $g(M) = 0$ sur W, $g(M) = 1$ hors de V. Si $f \in k(\mathfrak{M} - W) \cap B_r$, $\|f\| < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{3\|g\|}$ on a

$$f + f(M_0) g \in K(V, \varepsilon)$$

et le théorème résulte de l'identité

$$F(f) = F(f + f(M_0)g) - F(f(M_0)g) + F(0)$$

et du fait (impliqué par th. 5.3) que pour $F \in \mathcal{F}^\star$, $g \in B_r$, $F(\alpha g)$ comme fonction de $\alpha$, est continue au voisinage de l'origine.

Remarquons que nous avons démontré non seulement que pour toute $F \in \mathcal{F}^\star$ il existe un voisinage V de M tel que (F) soit bornée au voisinage de l'origine dans $k(\mathfrak{M} - V) \cap B_r$, mais aussi qu'il existe un voisinage W commun à toutes les fonctions de $\mathcal{F}^\star$.

Il résulte de (5.7) que les opérations de $\mathcal{F}^\star$ sont bornées (voir définition 1.3) dans $k(\mathfrak{M} - W)$.

La condition que $M_0$ ait une base dénombrable de voisinages est remplie si $\mathfrak{M}$ est métrisable, ce qui est le cas si B est séparable. Dans ce cas nous pouvons améliorer le résultat du théorème 5.2 en nous restreignant à $\mathcal{F}^\star$. Nous savons en effet qu'il n'y a qu'un nombre fini de points $M_1 \ldots M_n$ non ordinaires par rapport à $\mathcal{F}$ (à $\mathcal{F}^\star$). L'algèbre B étant régulière, chaque idéal maximal $M_j$ contient un idéal primaire minimal $P_j$, qui n'est autre que l'adhérence de l'ensemble des fonctions de B qui s'annulent au voisinage de $M_j$. Posons

$$P = \bigcap_{j=1}^{n} P_j.$$

P est une sous-algèbre de B. Nous lui ajoutons $n$ éléments $g_1 \dots g_n$, tels que : $g_j(M) = 1$ au voisinage de $M_j$, $g_j(M) = 0$ au voisinage de $M_k$ si $k \neq j$, et nous obtenons une algèbre $B_1$ avec $\mathfrak{M}$ comme espace d'idéaux maximaux. $B_1$ est une sous-algèbre de B sur laquelle toutes les opérations (F) pour $F \in \mathcal{F}^\star$ sont bornées. En effet, les points M de $\mathfrak{M}$ sont ordinaires dans $B_1$ par rapport à $\mathcal{F}^\star$, soit qu'ils l'étaient déjà dans B, soit, si $M = M_j$, comme conséquence du théorème 5.4.

Rappelons qu'une fonction $G(t)$ à valeurs vectorielles est « mesurable » sur T, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe dans T un ouvert $E_\varepsilon$ de mesure inférieure à $\varepsilon$, tel que $G(t)$ soit continue sur $T - E_\varepsilon$.

**Lemme** 5.2. — *Soit* $F \in \mathcal{F}$; *si* $\tau_t F = F(x+t)$ *est une fonction mesurable de* T *dans* $\mathcal{F}$, *et si* $F(x) = \Sigma a_n e^{inx}$ *on a :*

$$|a_n| < K\omega_n^{-1} \tag{5.10}$$

*Démonstration.*

$$\|a_n e^{inx}\| = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x+t) e^{-int}\, dt \right\| \leq \sup \|F(x+t)\|$$

or $\sup \|F(x+t)\|$ est fini (lemme 5.1), et le lemme est démontré.

**Théorème** 5.5. — *Si* F *remplit les conditions du lemme* 5.2 *elle est adhérente à* $A\{\omega_n\}$ *dans* $\mathcal{F}$. F *appartient donc à* $\mathcal{F}^\star$ *et la fonction* $\tau_t F = F(x+t)$ *est par conséquent continue en tant que fonction de* T *dans* $\mathcal{F}$.

*Démonstration.* — Soit $\eta > 0$ et $E_\eta$ de mesure inférieure à $\eta$ tel que $\tau_t F$ est continue sur $T - E_\eta$. Si $t_0$ est un point de densité de $T - E_\eta$, I un intervalle autour de $t_0$ tel que $\operatorname{mes}(I \cap E_\eta) \leq \varepsilon \operatorname{mes}(I)$ et $\Delta_I(t)$ la fonction triangulaire de support I dont l'intégrale est égale à 1, on a

$$\left\| F(x+t_0) - \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_I(t) F(x+t)\, dt \right\| \leq M\varepsilon + \alpha \tag{5.11}$$

avec $M = \sup_{t \in I} \|F(x+t)\|$ et $\alpha = \sup_{t \in I \cap E_\eta} \|F(x+t_0) - F(x+t)\|$.

Lorsque mes (I) tend vers zéro, $\varepsilon$ et $\alpha$ tendent aussi vers zéro c'est-à-dire

$$F(x+t_0) = \lim_{I} \int \Delta_I(t) F(x+t)\, dt$$

or

$$\int \Delta_I(t) F(x+t)\, dt = \sum a_n \delta_n^{(I)} e^{inx} \in A\{\omega_n\}$$

étant donné que $|a_n| < K\omega_n^{-1}$ (lemme 5.2) et que $\sum|\delta_n^{(I)}| < \infty$, ce qui entraîne $F(x+t_0) \in \overline{A\{\omega_n\}}$, $A\{\omega_n\}$ étant invariante par $\mathcal{T}_t$, $F(x) \in \overline{A\{\omega_n\}} = \mathcal{F}^\star$ et le théorème est démontré.

Remarquons que dans la dernière démonstration il suffirait de supposer qu'il existe un ensemble de mesure positive sur lequel la restriction de $F(x+t)$ — comme fonction de $t$ à valeurs vectorielles — est continue.

Il serait intéressant de montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\star$ (ou d'en donner un contre exemple); nous ne pouvons qu'indiquer quelques conditions entraînant cette identité.

L'intégrale $\int \Delta_I(t) F(x+t)\, dt$ a un sens si l'on considère $F(x+t)$ comme fonction de $t$ à valeurs vectorielles dans $C(T)$ — l'espace des fonctions continues sur T avec $\|F\| = \sup|F(x)|$.

$$F_I(x) = \int \Delta_I(t)\, F(x+t)\, dt = \sum a_n\, \delta_n^{(I)}\, e^{inx} \in \mathcal{F}^\star.$$

Cette intégrale est la limite, dans $C(T)$, de sommes de Riemann dont chacune a une norme dans $\mathcal{F}$ inférieure à $M = \sup\limits_{t\in T} \|F(x+t)\|$.

Si l'intersection de la boule unité de $\mathcal{F}$ avec toute partie compacte de $C(T)$ est faiblement compacte dans $\mathcal{F}$, $\|F_I\|_{\mathcal{F}} \leq M$ et F est la limite faible d'une suite $F_{I_n}$. F appartient donc à l'adhérence faible de $A\{\omega_n\}$ et le théorème de Hahn Banach implique que $F \in \overline{A\{\omega_n\}}$. Ceci étant vrai pour tout $F \in \mathcal{F}$, on a $\mathcal{F}^\star = \mathcal{F}$.

Une deuxième remarque concernant la continuité des opérations (F), $F \in \mathcal{F}$, est la suivante : lorsque pour toute $F \in \mathcal{F}$, (F) est bornée dans $B_r$ (localement bornée à l'origine). L'ensemble :

$$M_0^c = \{F;\ F(0) = 0,\ (F) \text{ continue à l'origine}\}$$

est un idéal primaire dans $\mathcal{F}$.

Soit $p$ tel que toute fonction $p$ fois dérivable opère dans B (Théorème 5.1); il résulte d'un théorème de Naimark (voir chapitre I, section 7) que si $F \in \mathcal{F}$, $F(0) = 0$, $F^{p+1} \in M_0^c$, d'où le théorème :

THÉORÈME 5.6. — *Si au voisinage de $t_0 \in T$, $F \in \mathcal{F}$ est de la forme $F(t_0) + F_1^{p+1}$ avec $F_1 \in \mathcal{F}$, (F) est continue au point $t_0$ (considéré comme fonction appartenant à $B_r$ ayant comme valeur la constante $t_0$).*

Nous ne savons pas si l'hypothèse — admise implicitement dans l'énoncé du théorème 5.6 — selon laquelle pour toute $F \in \mathcal{F}$, (F) est bornée, n'est pas superflue en ce sens qu'elle résulte simplement du fait que $\mathcal{F}$ admet une stucture d'algèbre de Banach. En d'autres termes, nous ne savons pas si le corollaire du théorème 5.2 est valable en l'absence d'hypothèses sur les automorphismes de B.

Nous allons terminer cette section avec un théorème sur les rapports entre l'algèbre $\mathcal{F}$ et les algèbres de type $A\{\Omega_n\}$ qui peuvent lui être associées. Ce théorème généralise un théorème de Beurling et Helson [2] ou plutôt une forme affaiblie de ce théorème due à Leibenson concernant les endomorphismes de l'algèbre $\mathcal{A} = A\{1\} (= L^1(Z))$.

Le théorème de Beurling-Helson affirme que si la fonction $\alpha(t)$ est telle que

$$f(t) \in \mathcal{A} \Rightarrow f(\alpha(t)) \in \mathcal{A}$$

$\alpha(t)$ est nécessairement une fonction linéaire à pente entière. Leibenson [17] démontre le même résultat lorsque $\alpha(t)$ est supposée deux fois dérivable. Nous donnons l'analogue du théorème de Leibenson pour $A\{\Omega_n\}$.

THÉORÈME 5.7. — *Soit* $A\{\Omega_n\}$ *telle que*

$$F(x) \in A\{\Omega_n\} \Rightarrow F(2x) \in A\{\Omega_n\} \tag{5.12}$$

*ou bien, ce qui revient au même*, $\limsup \dfrac{\Omega_{2n}}{\Omega_n} < \infty$.

Soit $\alpha(x)$ deux fois continuement dérivable; supposons que

$$F(x) \in A\{\Omega_n\} \Rightarrow F(\alpha(x)) \in A\{\Omega_n\} \tag{5.13}$$

on a alors

$$\alpha(x) = Nx + \alpha_0$$

où N est un entier.

*Démonstration.* — Nons utilisons le lemme suivant dû à Kahane [10] :

Soit $\alpha(t)$ réelle, de période $2\pi \pmod{2\pi}$, deux fois dérivable sur un intervalle I où $\alpha''(t) \geqq \rho > 0$.

Posons $\mathcal{E} = \dfrac{2}{\pi\sqrt{|n|\rho}}$ et choisissons K de façon à ce que

$$\theta = 1 - \left(\frac{K}{K-1}\right)^2 \left(1 - \frac{|I|}{2\pi}\right) > 0$$

$|I|$ étant la longueur de I.

Posons

$$e^{in\alpha(t)} = \sum c_m^{(n)} e^{imt}.$$

On a dans ces conditions

$$\sum_{|c_m^{(n)}| < K\mathcal{E}} |c_m^{(n)}| \geqq \frac{\theta}{K\mathcal{E}}. \tag{5.14}$$

(5.13) implique — théorème du graphe fermé — que :

$$\| F(\alpha(t)) \| \leqq \mathrm{Cte} \, \| F \|$$

la norme étant prise dans $A\{\Omega_n\}$; il résulte en particulier que :

$$\| e^{in\alpha(t)} \| \leqq \text{Cte} \| e^{int} \| = \text{Cte}\, \Omega_n. \tag{5.15}$$

Supposons $\alpha''(t) \not\equiv 0$, il existe alors un intervalle I sur lequel $\alpha''(t) > \rho > 0$,

En remplaçant si nécessaire $\alpha(t)$ par $2^m\alpha(t)$, remplacement possible en vertu de (5.12), on peut supposer que $\rho$ est suffisamment grand pour que

$$\frac{\theta}{K^2\mathcal{E}^2} = \frac{\theta\pi^2}{4K^2}\rho\,|n| \geqq 5\,|n|. \tag{5.16}$$

Soit $j(n)$ l'indice de $\Omega_n$ dans la suite $\{\Omega_n\}$ ordonnée selon la grandeur des $\Omega_n[j(n_1) \geqq j(n_2)$ implique $\Omega_{n_1} \geqq \Omega_{n_2}]$, il est évident que pour une suite infinie de $n$, on a $4|n| > j(n)$; pour un tel $n$ il résulte de (5.14) et de (5.16) :

$$\begin{aligned} \| e^{in\alpha(t)} \| &= \sum |c_m^{(n)}|\,\Omega_m \geqq \sum_{|c_m^{(n)}| < K\mathcal{E}} |c_m^{(n)}|\,\Omega_m \\ &\geqq \sum_{j(m)=1}^{5|n|} K\mathcal{E}\Omega_m > \sum_{(m)=4|n|}^{5|n|} K\mathcal{E}\Omega_m \\ &\geqq K\mathcal{E}\,|n|\,\Omega_n = \text{Cte}\sqrt{|n|}\,\Omega_n. \end{aligned} \tag{5.17}$$

ce qui contredit (5.15) et démontre le théorème.

Corollaire. — *Si* $A\{\Omega_n\}$ *opère dans* $A\{\omega_n\}$ *on a :*

$$\limsup_{n=\infty} \Omega_n \omega_n^{-1} |n|^{-\frac{1}{2}} > 0.$$

Si $\{\omega_n\}$ est une suite croissante, on a pour tout $k > 0$

$$\sqrt{|n|}\,\omega_{kn} = O(\Omega_n).$$

En effet

$$\alpha(t) = 2\rho \sin t \in A\{\omega_n\}$$

$F(x) \to F(\alpha(x))$ est une application linéaire continue de $A\{\Omega_n\}$ dans $A\{\omega_n\}$ et le corollaire résulte des formules analogues à (5.15) et (5.17).

*Remarques.* — *a.* L'exemple $\Omega_n = a^n$, $(a > 1)$, montre que l'hypothèse 5.12 n'est pas inutile.

$A\{a^n\}$ est, en effet, analytique; c'est-à-dire que si $F(x) = \sum a_n e^{inx} \in A\{a^n\}$, F peut être prolongée analytiquement dans la bande $|Im(z)| \leqq \log a$, et vice-versa, si $F(z)$, de période $2\pi$, est analytique dans la bande $|Im(z)| < b$ avec $b > \log a$, on a $F(x) \in A\{a^n\}$.

Il en résulte que si $\alpha(x)$, de période $2\pi (\bmod 2\pi)$ est analytique dans une bande $|Im(z)| < b$, $b > a$ et si l'image de cette bande par $\alpha(z)$ est contenue dans la bande $|Im(z)| < \log a$, $\alpha(x)$ est un changement de variable permis dans $A\{a^n\}$.

*b*. Le facteur $\sqrt{|n|}$ obtenu au corollaire est le meilleur possible, en ce sens que pour tout $\mathcal{E} > 0$, $A\left\{|n|^{\frac{3}{2}+\mathcal{E}}\right\}$ opère dans $A\{|n|\}$.

Pour le voir, soit $F \in A\left\{|n|^{\frac{3}{2}+\mathcal{E}}\right\}$ et $f \in A\{|n|\}$ : $\frac{d}{dx}F(f) = F'(f)f'$.

$F'(f)$ est lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{2} + \mathcal{E}$ et appartient, d'après le théorème de Bernstein à $\mathcal{A}$ ; $f' \in \mathcal{A}$ et par conséquent $\frac{d}{dx}F(f) \in \mathcal{A}$ ce qui est équivalent à $F(f) \in A\{|n|\}$.

Ceci donne une limite, en un sens, au lemme de Kahane. Dans le même mémoire [10] il est démontré que si $\alpha(t)$ est analytique, on a aussi inégalité dans le sens inverse, à savoir

$$\| e^{in\alpha} \| = O\sqrt{|n|}$$

Ce résultat reste valable même si l'on remplace la condition « $\alpha(t)$ analytique » par « $\alpha'(t) \in L^2(T)$ » en vertu de l'inégalité de Carleson [3] (communication verbale de Kahane).

*c*. Si toutes les fonctions de $A\{\Omega_n\}$ sont deux fois continuement dérivables, la condition présente dans l'énoncé de théorème, selon laquelle $\alpha(t)$ l'est, est superflue.

6. Quelques théorèmes de structure pour B a partir de $\mathcal{F}$. — Lemme 6.1. — *S'il existe une fonction* $F \in \mathcal{F}$ *telle que* $F(t) = +\sqrt{t}$ *pour* $0 \leqq t \leqq \delta$, *et si* $(F)$ *est bornée localement à l'origine dans* B, *on a* $B = C(\mathfrak{M})$.

*Démonstration*. — Les conditions du lemme impliquent l'existence d'un nombre positif $\eta$ tel que si $f \in B$ $f(M) \geqq 0$ et $\|f\| < \eta$, $\sqrt{f}$ existe et $\|\sqrt{f}\| < K$. Comme $\sqrt{\lambda f} = \sqrt{\lambda}\sqrt{f}$ pour $\lambda > 0$, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que

$$\|f^2\| \geqq K_1 \|f\|^2$$

pour toute $f$ positive, et par conséquent

$$\sup |f(M)| \geqq K_1 \|f\|. \tag{6.1}$$

Pour $f$ réelle $|f| = +\sqrt{f^2}$, les parties positive et négative de $f$ appartiennent donc à B, car

$$f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|), \qquad f^- = f - f^+$$

$f$ est donc la différence de deux fonctions positives. On a

$$\sup |f(M)| = \sup \{f^+(M), -f^-(M)\},$$
$$\|f\| \leqq \|f^+\| + \|f^-\|$$

ce qui joint à (6.1), implique :

$$f \in B_r \Rightarrow \|f\| \leqq \text{Cte} \sup |f(M)|. \tag{6.2}$$

L'algèbre B étant supposée auto-adjointe, (6.2) entraîne

$$B_r = C_r(\mathfrak{M}) \qquad \text{et} \qquad B = C(\mathfrak{M}).$$

Remarquons qu'aucun usage n'a été fait de l'élément unité de B, ou, ce qui revient au même, du fait que $\mathfrak{M}$ est compact.

THÉORÈME 6.1. — *Soit* B *régulière et supposons qu'il existe dans* $\mathcal{F}^\star$ : $F(t)$, $F(t) = +\sqrt{t}$ *pour* $0 \leq t \leq \delta$ *avec* $\delta > 0$. *On a alors :* $B = C(\mathfrak{M})$.

*Démonstration.* — Pour $M_0 \in \mathfrak{M}$ désignons par $pM_0$ l'idéal primaire fermé minimal contenu dans $M_0$. $pM_0$ est l'adhérence de l'ensemble : $\{x \in M_0; \hat{x}(M) = 0$ au voisinage de $M_0\}$. Soit T l'ensemble des éléments non négatifs de $pM_0$. $F(t)$ est une fonction de la première classe de Baire, de T dans $M_0$ et de ce fait admet des points de continuité. Soit $f_0$ l'un d'eux. F est bornée dans la boule $\|f - f_0\| < \mathcal{E}$. Soit $f_1$ dans la boule $\|f - f_0\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ tel que $f_1(M) = 0$ dans un voisinage V de $M_0$. F est encore bornée dans la boule $\|f - f_1\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ et en particulier dans la boule $\|f\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ de $T \cap k(\mathfrak{M} - V)$.

Il résulte du lemme 6.1 que toute fonction continue sur M, nulle en dehors de V et en $M_0$, appartient à B. La régularité de B (déjà utilisée implicitement dans la construction de $pM_0$) implique l'existence d'une fonction $g \in B$ à support dans V, telle que $g(M) = 1$ dans un voisinage de $M_0$. Si $f$ est continue sur $\mathfrak{M}$ et nulle en dehors de V, $f = f(M_0)g + (f - f(M_0)g)$ donc $f$ appartient à $\hat{B}$. Si $f$ est continue sur $\mathfrak{M}$, $fg$ s'annule en dehors de V et $fg \in B$ ou bien $f \in B$ localement en $M_0$. $M_0$ étant quelconque $f$ appartient à B localement en tout point et comme $\mathfrak{M}$ est compact : $f \in B$ (voir Loomis [19] p. 86).

THÉORÈME 6.2. — *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que* $B = C(\mathfrak{M})$.

*a.* $\mathcal{F} = C(T)$.

*b.* $\mathcal{F}$ *admet une stucture d'algèbre de Banach et contient une fonction* $F(t)$ *telle que* $F(t) = +\sqrt{t}$ *pour* $0 \leq t \leq \delta$ *et* $\delta > 0$.

*c.* $\mathcal{F}$ *admet une structure d'algèbre de Banach et n'a pas d'idéaux primaires.*

*Démonstration.* — Que les conditions sont nécessaires est trivial, démontrons qu'elles sont suffisantes.

*a.* $\mathcal{F} = C(T)$ implique $\mathcal{F}^\star = \mathcal{F}$. B est régulière et *a* est réduit au théorème 6.1.

*b.* $\mathcal{F}$ opère dans elle-même et, étant riche en automorphismes, (F) est bornée sur $\mathcal{F}$. Du lemme 6.1 il résulte : $\mathcal{F} = C(T)$ d'où (*cf. a*) $B = C(\mathfrak{M})$.

*c*. Nous considérons de nouveau que $\mathcal{F}$ opère dans elle-même. Du corollaire du théorème 5.2 il résulte que l'ensemble des opérateurs $[G_\alpha] : F \rightarrow F(G_\alpha)$ est borné dans $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ lorque $G_\alpha$ parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{F}_r$. Soit

$$M = \sup_{\|G_\alpha\| \leqq 1} \|[G_\alpha]\|.$$

Choisissons $F_1$, $F_0 \in \mathcal{F}$ telles que :

$$(6.3) \qquad \begin{cases} F_1(t) = t & \text{pour } |t| \leqq 1, \\ F_0(t) = 0 & \text{au voisinage de } t = 0, \text{ soit pour } |t| < \mathcal{E}, \\ & \|F_1 - F_0\| \leqq \dfrac{1}{2M}. \end{cases}$$

Ce choix est possible car $F_1$ peut être suffisamment dérivable pour appartenir à $\mathcal{F}$ (théorème 5.1) et l'existence de $F_0$ est assurée par la condition selon laquelle il n'y a pas d'idéaux primaires dans $\mathcal{F}$ (la condition D). Si

$$F \in \mathcal{F}_r, \qquad \|F\| = 1,$$

on a nécessairement

$$(6.4) \qquad \sup |F(t)| > \mathcal{E},$$

car si l'on avait $|F(t)| \leqq \mathcal{E}$, on aurait

$$(6.5) \qquad 1 = \|F\| = \|F_1(F) - F_0(F)\| = \|[F](F_2 - F_0)\| \leqq M \frac{1}{2M} = \frac{1}{2}$$

ce qui est impossible, et par conséquent :

$$\|F\| \leqq \frac{1}{\mathcal{E}} \sup |F(t)|$$

pour tout F réel.

La norme dans $\mathcal{F}$ est donc équivalente à la norme spectrale, $\mathcal{F} = C(T)$ et le théorème est démontré.

Comme application simple des théorèmes précédents donnons un critère portant sur un ensemble situé sur T (ou R) afin qu'il soit un « ensemble de Helson ». Rappelons qu'un ensemble $K \subset T$ est dit de Helson (*cf.* [4]) si toute fonction définie et continue sur K, peut être prolongée sur T en une fonction qui est la somme d'une série de Fourier absolument convergente.

En d'autres termes, K est un ensemble de Helson si l'algèbre $\mathcal{A}(K)$ des restrictions à K des fonctions de $\mathcal{A}(T)$ (voir chapitre II) coïncide avec C(K).

**Théorème 6.3.** — *S'il existe* $\mathcal{E} > 0$ *tel que*

$$(6.6) \qquad \|e^{inf}\|_K = O(|n|^{1-\mathcal{E}})$$

*pour tout élément réel de* $\mathcal{A}(K)$, $\|\ \|_K$ *étant la norme de* $\mathcal{A}(K)$, *alors*

$$\mathcal{A}(K) = C(K).$$

*Démonstration.* — La condition (6.6) entraîne que l'algèbre $A\{|n|^{1-\varepsilon}\}$ opère dans $\mathfrak{A}(K)$. Le théorème résulte de ce que $A\{|n|^{1-\varepsilon}\}$ contient des fonctions du type décrit dans l'énoncé du théorème 6.1.

Dans le cas où $\mathfrak{F} = C(T)$, la structure de B est donc complètement connue. Nous n'obtenons pas une caractérisation aussi complète en supposant seulement : $\mathfrak{F} \supseteq D_n(T)$, mais nous pouvons appliquer un lemme, dû à Naimark ([21] p. 189) pour montrer que les éléments du radical de chaque algèbre quotient de B sont nilpotents d'ordre donné par $n$.

Le lemme de Naimark peut être énoncé ainsi :

**Lemme.** — *Soit* X *un élément du radical d'une algèbre normée* R. *Supposons*

$$\|(1-\lambda X)^{-1}\| = O\left(\frac{r^n}{|\sin^p \theta|}\right) \quad \text{avec} \quad \lambda = re^{i\theta} \tag{6.7}$$

*on a alors*

$$X^{n+1} = 0.$$

*Si dans* (6.7) *on remplace* O(   ) *par* o (   ) *on obtient*

$$X^n = 0.$$

Nous utiliserons la forme suivante de ce lemme : soit X un élément réel d'une algèbre de Banach B tel que (6.7) soit vérifié. Soit $\sigma$ un homomorphisme continu de B dans R. Si $\sigma X$ appartient au radical de R

$$\sigma X^{n+1} = 0$$

($\sigma X^n = 0$ si l'on remplace O par o).

*Définition.* — On dit qu'un élément $f \in B$ est « de synthèse spectrale » si $f$ appartient à chaque idéal I tel que $f$ s'annule sur $h(I)$ (voir définition à la section 1).

**Théorème 6.4.** — *Si* $\mathfrak{F} \supseteq D_n(T)$ *et* $f \in B_r$, $f^{n+1}$ *est de synthèse spectrale.*

*Démonstration.* — On peut évidemment supposer $\|f\| < 1$. Pour tout $\lambda$ non réel, soit $F_\lambda(t) = (1-\lambda t)^{-1}$ sur $[-1, 1]$; $F_\lambda(t) \in D_n(T)$ telle que la norme de $F_\lambda(t)$ dans $D_n(T)$ soit de l'ordre de sa norme dans $D_n[-1, 1]$. On obtient ainsi :

$$\|F_\lambda\|_{\mathfrak{F}} \leq C\|F_\lambda\|_{D_m} \leq C_1 \frac{r^n}{|\sin^{n+1}\theta|} \quad \text{où} \quad \lambda = re^{i\theta},$$

ce qui entraîne

$$\|(1-\lambda f)^{-1}\| = \|F_\lambda(f)\| = O\left(\frac{r^n}{|\sin^{n+1}\theta|}\right)$$

et le théorème résulte du lemme de Naimark.

Si $f \in B$, $f = Re(f) + i Im(f)$ et l'on voit que $f^{2n+1}$ est de synthèse spectrale.

Il y a d'autres applications possible du lemme de Naimark au problème de la synthèse spectrale. Dans le cas où $B = \mathfrak{A}(T)$, plusieurs recherches portent sur les conditions pour qu'une fonction soit de synthèse spectrale (voir par exemple Agmon et Mandelbrojt [1] Pollard [22]). Nous indiquons ici un résultat de ce genre, trouvé d'ailleurs par une méthode tout à fait différente par Kahane et Salem.

THÉORÈME 6.5. — *Soit $f(t) \in \mathfrak{A}(T)$. Supposons que $f(t)$ soit à variation bornée et satisfasse une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$. Dans ces conditions $f(t)$ est de synthèse spectrale.*

*Démonstration.* — Sans restreindre la généralité nous supposerons que $f(t)$ est réelle. D'après le lemme il suffit de montrer que

$$\|(1-\lambda f)^{-1}\| = o\left(\frac{r}{\sin^2\theta}\right) \qquad \lambda = re^{i\theta}. \tag{6.8}$$

Pour $\lambda$ non réel, $(1-\lambda f)^{-1}$ et également à variation bornée et lipschitzienne d'ordre $\alpha$, car :

$$(1-\lambda f(x))^{-1} - (1-\lambda f(y))^{-1} = \frac{\lambda(f(x)-f(y))}{(1-\lambda f(x))(1-\lambda f(y))}$$

d'où

$$\operatorname{Var}[(1-\lambda f)^{-1}] \leq \frac{|\lambda| \operatorname{Var}[f]}{|\sin\theta|^2} \qquad \theta = \arg\lambda.$$

et de même, si $|f(x+h)| - f(x)| < C|h|^\alpha$, on a

$$(1-\lambda f(x+h))^{-1} - (1-\lambda f(x))^{-1} \leq \frac{C|\lambda||h|^\alpha}{|\sin\theta|^2}.$$

Posons $(1-\lambda f(x))^{-1} = \sum a_n^{(\lambda)} e^{inx}$. D'après Zygmund ([27] p. 136) on a :

$$\sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} |a_n^{(\lambda)}|^2 \leq C_1 \operatorname{Var}[(1-\lambda f)^{-1}]\, \omega\left[(1-\lambda f)^{-1}; \frac{\pi}{2^\nu}\right] 2^{-\nu}$$

où $\omega[g, h]$ est le module de continuité de $g(x)$. Par conséquent :

$$\sum_{2^{\nu-1}<|n|<2^\nu} |a_n^{(\lambda)}| \leq C_2 |\lambda| 2^{-\frac{\nu\alpha}{2}} |\sin\theta|^{-2}. \tag{6.9}$$

Or, quand $|\lambda| \to \infty$, $\theta$ restant fixe, $a_n^{(\lambda)}$ tend uniformément vers zéro. Ceci et l'inégalité (6.9) entraînent (6.8).

C. Q. F. D.

# CHAPITRE II.

## ÉTUDE DE QUELQUES ALGÈBRES PARTICULIÈRES.

Dans ce Chapitre nous cherchons à déterminer les fonctions qui opèrent dans l'algèbre $\mathfrak{A}(T)$ (*voir* I.1) ainsi que les fonctions qui opèrent dans quelques-unes de ses algèbres quotients. Du point de vue technique il nous sera commode de parler tantôt de $\mathfrak{A}(T)$ tantôt de $\mathfrak{A}(R)$ — l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions sommables — ce qui est licite d'après le théorème, maintenant classique, de N. Wiener (*voir* [26], p. 80) selon lequel localement, ces deux algèbres sont identiques. Précisons : soit I un intervalle de longueur inférieure à $2\pi$, par exemple $I=(-\pi+\mathcal{E}, \pi-\mathcal{E})$, les fonctions à support dans I qui sont les transformées de Fourier des fonctions sommables, sont précisément celles qui, comme fonctions sur $(-\pi, \pi)$, ont une série de Fourier absolument convergente. L'ensemble de ces fonctions est un idéal de deux algèbres $\mathfrak{A}(T)$ et $\mathfrak{A}(R)$ qui induisent sur lui des normes équivalentes. Le passage des propriétés locales aux propriétés globales étant possible, vu la régularité de $\mathfrak{A}(T)$, le théorème de Wiener nous permet de confondre $\mathfrak{A}(T)$ et $\mathfrak{A}(R)$.

Le résultat principal de ce chapitre est la réciproque du théorème de Wiener-Lévy pour l'algèbre $\mathfrak{A}(T)$ et pour quelques-unes de ses algèbres quotients.

Nous démontrerons d'abord deux lemmes dus à Kahane.

Lemme II.1. — *Étant données* $f_1 \ldots f_N \in \mathfrak{A}(T)$ *et* $\mathcal{E} > 0$ *on peut trouver des entiers* $\lambda_1 \ldots \lambda_N$ *tels que*

$$\left\| \prod_{j=1}^{N} f_j(\lambda_j x) \right\| \geqq (1-\mathcal{E}) \prod_{i=1}^{N} \| f_j \|. \tag{II.1}$$

*Démonstration.* — On voit qu'il suffit de démontrer le lemme pour $N=2$ et de procéder par récurrence.

On pose $\lambda_1 = 1$. Si $f_1(x)$ est un polynome trigonométrique on peut prendre $\lambda_2$ supérieur au double du degré de ce polynome et obtenir

$$\| f_1(x) f_2(\lambda_2 x) \| = \| f_1 \| \, \| f_2 \|.$$

Dans le cas général $f_1 = S_m + R_m$ où $S_m$ est une somme partielle de $f_1$ d'ordre $m$ et $\| R_m \|$ tend vers zéro. Nous pouvons choisir $m$ tel que

$$\| S_m \| - \| R_m \| > (1-\mathcal{E}) \| f_1 \|$$

et prendre $\lambda_2 > 2m$

$$\begin{aligned} \| f_1(x) f_2(\lambda_2 x) \| &= \| (S_m(x) + R_m(x)) f_2(\lambda_2 x) \| \geqq (\| S_m \| - \| R_n \|) \| f_2 \| \\ &\geqq (1-\mathcal{E}) \| f_1 \| \, \| f_2 \|. \end{aligned}$$

Lemme II.2. — *Désignons par* $\mathfrak{A}_r$ *l'ensemble des éléments réels de* $\mathfrak{A}(T)$. *Posons*

$$N(R) = \sup_{\substack{f \in \mathfrak{A}_r \\ \|f\| < R}} \| e^{if} \|$$

*On a alors*

$$N(R) = e^R.$$

*Démonstration*

$$\left\| e^{i\frac{R}{N}\cos x} \right\| = 1 + \frac{R}{N} + o\left(\frac{R}{N}\right)$$

comme on le voit en développant $e^{iz}$ en série de Taylor. Il résulte du lemme II.1 que l'on peut trouver $\lambda_1 \ldots \lambda_N$ tels que

$$\left\| e^{i\frac{R}{N}\sum \cos\lambda_n x} \right\| \geqq (1-\mathcal{E})\left(1+\frac{R}{N}+o\left(\frac{R}{N}\right)\right)^N \tag{II.2}$$

ce qui entraîne, lorsque N tend vers l'infini : $N(R) \geqq e^R$. Comme d'autre part il résulte du développement en série que $N(R) \leqq e^R$, le lemme est démontré.

A l'aide de ces lemmes Kahane [10] a démontré le théorème suivant :

Si $F(x)$ est périodique, opère dans $\mathfrak{A}(T)$ et que, quel que soit $f \in \mathfrak{A}_r$ les normes $\|F(f+a)\|$ sont uniformément bornées pour toutes les constantes réelles $a$, F est analytique.

Nous allons démontrer la variante suivante de ce théorème.

**Lemme II.3.** — *Si* $F(x)$, *de période* $2\pi$, *opère, et si* $(F)$ *est bornée dans le cylindre* $C = \{f+a;\ \|f\| < R,\ |a| \leqq \pi\}$ *dans* $\mathfrak{A}_r$, $F(x)$ *est analytique dans une bande de largeur* $2r$ *autour de l'axe réel.*

*Démonstration.* — Il existe dans $\mathfrak{A}_r$ une fonction $f(x)$ identique à $x$ pour $|x| < \eta$. Si $F(f(x)+a) \in \mathfrak{A}$ pour tout $a$ réel, $F(x)$ appartient localement à $\mathfrak{A}$ et, puisqu'elle est de période $2\pi$ : $F(x) \in \mathfrak{A}$; c'est-à-dire

$$F(x) = \sum a_n e^{inx} \qquad \text{avec} \qquad \sum |a_n| < \infty$$

$$(F)(f(x)) = \sum a_n e^{inf(x)} = \sum b_n(f)\, e^{inx}$$

avec

$$\sum |b_n(f)| < \infty \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathfrak{A}_r.$$

$b_n(f)$ est, par la formule de Fourier, une fonction numérique continue sur $\mathfrak{A}_r$. Si l'on pose $S_m(f) = \sum_{-m}^{m} b_n(f)\, e^{inx}$, $S_m(f)$ est une fonction continue de $\mathfrak{A}_r$ dans $\mathfrak{A}$.

Il en résulte que

$$(F)(f) = \lim S_m(f)$$

est une fonction appartenant à la première classe de Baire — comme fonction de $\mathfrak{A}_r$ dans $\mathfrak{A}$ et de même que $(F)(f+a)$ est une fonction de Baire en tant que fonction de $a \in R$ dans $\mathfrak{A}$ (*); en particulier $(F)(f+a)$ est mesurable sur l'axe réel.

Si $\|F(f+a)\| \leqq K$ uniformément dans C, on a

$$\left\| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(f+a)\, e^{-ina}\, da \right\| < K.$$

(*) Remarque due à Helson.

Or

(II.3)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(f+a)\,e^{ina}\,da = a_n\,e^{inf}$$

et, par conséquent :

$$|a_n|.\|e^{inf}\| \leqq K$$

pour tout $f \in \mathfrak{A}_r$ de norme inférieure à R. D'après le lemme II.2 on a :

(II.4)
$$|a_n| \leqq K e^{-nR}$$

et le théorème est ainsi démontré.

Lemme II.4. — *Soit* $F(x)$ *définie dans un intervalle ouvert* I *contenant l'origine. Si* F *opère dans* $\mathfrak{A}$ *et si* (F) *est bornée dans une boule* $\|f\| < \eta$, $F(x)$ *est analytique à l'origine.*

*Démonstration.* — Pour $\alpha$ suffisamment petit, la fonction $F_1(x) = F(\alpha \sin x)$ est $2\pi$ périodique opère dans $\mathfrak{A}$ et $(F_1)$ reste bornée dans un cylindre C (*voir* lemme II.3), Il résulte du lemme II.3 que $F_1(x)$ est analytique dans une bande autour de l'axe réel, et comme $\alpha \sin x$ est analytiquement inversible à l'origine : $F(x) = F_1\left(\arcsin \frac{x}{\alpha}\right)$, $F(x)$ est analytique au point $x = 0$.

Il est clair que dans l'énoncé du lemme II.4 on peut remplacer l'origine par un nombre réel $a$ quelconque. Si $a \in I$ et si (F) est bornée dans une boule $\|f - a\| < \eta$, $F(x)$ est analytique en $a$.

Théorème II.1. — *Si* $F(x)$, *définie dans un intervalle ouvert* I, *opère dans* $\mathfrak{A}(T)$, $F(x)$ *est analytique dans* I.

*Démonstration.* — D'après le lemme II.4 et la remarque qui le suit, il suffit de démontrer que si $a \in I$, (F) est bornée dans une boule $\|f - a\| < \eta$ dans $\mathfrak{A}_r$. En remplaçant $F(x)$ par $F(x-a)$ on peut supposer $a = 0$ et il s'agit de montrer que (F) est bornée dans une boule $\|f\| < \eta$ dans $\mathfrak{A}_r$. Ceci peut se faire de deux manières :

*a.* $\mathfrak{A}(T)$ est une algèbre régulière, riche en automomorphismes et l'on peut donc appliquer le théorème 3.1 du premier chapitre.

*b.* (F) est une fonction de la première classe de Baire (*voir* la démonstration du lemme II.3) et comme telle admet un ensemble partout dense de points de continuité. Pour fixer les idées, supposons que I contient l'intervalle $[-1, 1]$, il existe un point de continuité $f_1$ tel que $\|f_1 - \sin x\| < \frac{1}{4}$; $f_1$ admet donc un zéro $\beta$.

(F) est bornée dans une boule $\|f - f_1\| < \eta_1$. La condition D (*voir* chapitre I : déf. 5.2) est valable, on le sait, dans l'algèbre $\mathfrak{A}(T)$; on peut donc trouver une fonction $f_0 \in \mathfrak{A}_r$, $\|f_0 - f_1\| < \frac{\eta_1}{2}$ telle que $f_0(x) = 0$ pour $|x - \beta| < \delta$. (F) est encore bornée dans la boule $\|f - f_0\| \leqq \eta_2 < \frac{\eta}{2}$ et en particulier dans l'ensemble des éléments de la forme $f_0 + g$, $\|g\| < \eta_2$, $g(x)$ ayant son support dans $T_1 = (\beta - \delta, \beta + \delta)$.

Or

$$F(g) = F(f_0 + g) - F(f_0) + F(0)$$

qui implique que (F) est bornée dans une boule centrée à l'origine dans l'idéal $k(T - T_1)$.

Soit

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x - \beta| \leqq \frac{\delta}{2} \\ 2 - \frac{2}{\delta}|x - \beta| & \text{pour } \frac{\delta}{2} \leqq |x - \beta| \leqq \delta \\ 0 & \text{pour } \delta \leqq |x - \beta| \end{cases}$$

et soit $k(x)$ une fonction de norme 1 à support dans $|x - \beta| < \frac{\delta}{2}$. Pour toute $f \in \mathfrak{A}_r$ on a, d'après le lemme II.1 :

$$\text{(II.5)} \qquad \|F(f)\| = \|F(f(nx))\| = \lim_{n \to \infty} \|k(x) F(f(nx))\|$$

Or

$$\|k(x) F(f(nx))\| = \|k(x) F(\Delta(x) f(nx))\| \leqq \|F(\Delta(x) f(nx))\|$$

qui est uniformément borné si $\|f\| \leqq \frac{1}{3}\eta_2$, étant donné que $\Delta(x) f(nx) \in k(T - T_1)$ et que

$$\|\Delta(x) f(nx)\| \leqq \|\Delta(x)\| \, \|f\| \leqq 3\|f\|$$

et le théorème est démontré.

Corollaire. — *Si* $F(x)$, *définie dans un intervalle fermé* I, *opère dans* $\mathfrak{A}(T)$, $F(x)$ *est analytique dans* I.

*Démonstration.* — Il faut démontrer que $F(x)$ est analytique aux extrémités de I; pour cela nous pouvons supposer $I = [0, 1]$ et il suffit de montrer que $F(x)$ est analytique à l'origine.

$F(x^2)$ est définie dans $[-1, 1]$ et opère dans $\mathfrak{A}(T)$, donc, par suite du théorème que nous venons de démontrer, est analytique à l'origine. Au voisinage de zéro

$$F(x^2) = \sum a_n x^{2n}$$

puisque $F(x^2)$ est une fonction paire; il en résulte que

$$F(x) = \sum a_n x^n.$$

*Remarque.* — Le théorème II.1 reste valable lorsque l'on remplace dans son énoncé $\mathcal{A}(T)$ par $\mathcal{A}(G)$, G étant n'importe quel groupe abélien, localement compact non discret. $\mathcal{A}(G)$ signifie dans ce cas l'algèbre des transformées de Fourier de $L^1(\Gamma)$, $\Gamma$ étant le groupe dual de G. Lorsque G est discret, une condition nécessaire et suffisante pour que $F(x)$ opère dans $\mathcal{A}(G)$ est que $F(0)=0$ et que $F(x)$ soit analytique à l'origine.

Un résultat plus frappant résulte de l'étude des fonctions qui opèrent dans les algèbres $B(G)$ des transformées de Fourier-Stieltjes des mesures portées par $\Gamma$. Pour G non compact, seules les fonctions *entières* opèrent dans $B(G)$; si G est compact, $\Gamma$ est discret, $B(G)=\mathcal{A}(G)$ et les fonctions qui opèrent sont caractérisées par le théorème II.1. Les résultats cités ont été obtenus dans le cas où $G=Z(\Gamma=T)$ par Helson-Kahane [5] et Kahane-Rudin [14]; pour l'exposé du cas général nous renvoyons à Helson-Kahane-Katznelson-Rudin [6].

Soit $F(z)$ une fonction analytique dans un domaine D du plan complexe. Si B est une algèbre de Banach avec unité, $F(z)$ opère dans B et définit une fonction (F), à valeurs dans B, sur une partie $B(D)$ de B, de tous les éléments ayant leur spectre dans D.

La fonction (F) est, on le sait, analytique dans $B(D)$. Si $f_0\in B(D)$ et si l'on pose $d(F, f_0)$ égale à la distance entre le spectre de $f_0$ et l'ensemble des points singuliers de $F(z)$, on a pour tout $g\in B$, dont la norme spectrale $\|g\|_\infty$ est inférieure à $d(F, f_0)$ :

$$(II.6)\qquad F(f_0+g)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(f_0)}{n!}g^n.$$

La convergence de cette série résulte de ce que

$$(II.7)\qquad F^{(n)}(f_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{F(\xi+f_0)}{\xi^{n+1}}\qquad \text{si}\quad r< d(F, f_0)$$

qui implique, si l'on pose $M(r)=\sup\limits_{|\xi|\leq r} F(f_0+\xi)$,

$$\|F^{(n)}(f_0)\|\leq n!\,r^{-n}M(r).$$

D'autre part si $\|g\|_\infty<r$, il résulte d'un théorème classique de Gelfand, que $\|g^n\|<r^n$ pour $n>N_0$ et la série (II.6) converge absolument.

On voit en particulier que (F) reste bornée dans toute boule

$$\|f-f_0\|\leq d< d(F, f_0).$$

Montrons que dans le cas $B=\mathcal{A}(t)\, d(F, f_0)$ est vraiment la borne supérieure des $d$ tels que (F) reste bornée dans $\|f-f_0\|\leq d$.

LEMME II.5. — *Soit* $P(z)=\sum_{n=0}^{M}a_n z^n$. *Pour tout* $R>0$ *on a*

$$(II.8)\qquad N(R)=\sup_{\substack{\|f\|\leq R\\ f\in\mathcal{A}_r}}\|P(f)\|=\sum_{n=0}^{M}|a_n|R^n.$$

*Démonstration.* — Ce lemme est une généralisation du lemme II.2. Nous avons vu qu'en considérant des suites $\{\lambda_n\}$ suffisamment clairsemées on peut construire des éléments

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{R}{N} \cos \lambda_n x$$

tels que

$$\lim_{N \to \infty} \| e^{i f_N} \| = e^R$$

De la démonstration du lemme II.2 on voit que si $|\theta| = 1$ on a aussi

$$(\mathrm{II}.\partial) \qquad \lim_{N \to \infty} \| e^{\theta f_N} \| = e^R$$

(II.9) implique que, pour $n$ et $m$ fixés, les supports de $f_N^n$ et de $f_N^m$ sont « presque » disjoints pour N suffisamment grand. C'est-à-dire, pour tout $\mathcal{E} > 0$ on peut trouver $N_0 = N_0(\mathcal{E})$ tel que si $N > N_0$ il existe deux éléments $g_N^{(n)}$ et $g_N^{(m)}$ ayant leurs supports (en tant que mesures sur Z) disjoints, et tels que

$$\| g_N^{(n)} - f_N^n \| < \mathcal{E}, \; \| g_N^{(m)} - f_N^m \| < \mathcal{E}.$$

En effet, soit

$$\theta = e^{\left(\frac{i\pi}{n-m}\right)}$$

on a

$$e^{\theta f_N} = \sum \frac{\theta^n f_N^n}{n!}$$

et comme $\left\| \sum \frac{\theta^n f_N^n}{n!} \right\|$ tend vers $e^R = \sum \frac{R^n}{n!} = \sum \frac{\| f_N \|^n}{n!}$, lorsque N tend vers l'infini, pour $m$ et $n$ donnés et N suffisamment grand, on a

$$\left\| \frac{\theta^m f_N^m}{m!} + \frac{\theta^n f_N^n}{n!} \right\| > \frac{\| f_N \|^m}{m!} + \frac{\| f_N \|^n}{n!} - \mathcal{E}.$$

Or

$$\left\| \frac{\theta^m f_N^m}{m!} + \frac{\theta^n f_N^n}{n!} \right\| = \left\| \frac{f_N^m}{m!} - \frac{f_N^n}{n!} \right\|$$

d'après le choix de $\theta$.

Si

$$\frac{1}{m!} f_N^m = \sum \alpha_j^{(m, N)} e^{ijx}, \quad \frac{1}{n!} f_N^n = \sum \alpha_j^{(n, N)} e^{ijx}$$

il suffit de prendre

$$g_N^{(m)} = m! \sum k_j^{(m, n, N)} \alpha_j^{(m, N)} e^{ijx}$$

$$g_N^{(n)} = n! \sum (1 - k_j^{(m, n, N)}) \alpha_j^{(n, N)} e^{ijx},$$

où

$$k_j^{(m, n, N)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha_j^{(m, N)} \leq \alpha_j^{(n, N)} \\ 1 & \text{si} \quad \alpha_j^{(m, N)} > \alpha_j^{(n, N)} \end{cases}$$

comme on le voit facilement en tenant compte de ce que $f_N$ est définie positive.

Cette construction se généralise par récurrence et l'on obtient le résultat suivant : pour tout $M > 0$, $\mathcal{E} > 0$ on peut trouver N suffisamment grand pour qu'il existe des éléments $g_N^{(n)}$ $(n = 1, 2 \ldots M)$ ayant des supports deux à deux disjoints (en tant que mesures sur Z) et tels que

$$\| g_N^{(n)} - f_N^n \| < \mathcal{E} \qquad \text{pour} \quad 1 \leq n \leq M.$$

Ceci implique évidemment le lemme car :

$$\text{(II.10)} \qquad \| P(f_N) \| = \left\| \sum a_n f_N^n \right\| = \left\| \sum a_n (g_N^{(n)} + f_N^n - g_N^{(n)}) \right\|$$
$$\geq \sum | a_n | \, \| g_N^{(n)} \| - \varepsilon \sum | a_n | = \sum | a_n | R^n + O(\mathcal{E})$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Soit* $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ *et* $R_0$ *le rayon de convergence de cette série. Pour tout* $0 < R < R_0$ *on a* ;

$$N(R) = \sup_{\substack{\|f\| < R \\ f \in \mathfrak{A}_r}} \| P(f) \| = \sum_{n=1}^{\infty} | a_n | R^n.$$

De ce corollaire il résulte que si le rayon de convergence de la série de Taylor de $F(z)$ est égal à R et si cette série ne converge pas absolument sur le cercle $|z| = R_1$, l'opération (F) n'est pas bornée dans la boule $\|f\| \leq R_1$ de $\mathfrak{A}_r$. Or si la série de Taylor converge absolument sur le cercle de convergence, le lemme précédent ne s'applique pas pour la détermination des rapports entre les domaines de régularité de $F(z)$ et les ensembles sur lesquels (F) est bornée; il faut alors reprendre le raisonnement du lemme II.4.

Nous supposons donc que $F(x)$ opère dans $\mathfrak{A}(T)$ et que (F) reste bornée dans la boule $\|f\| < R$ de $\mathfrak{A}_r$, et nous cherchons le domaine d'analyticité de $F(z)$ dans le plan complexe, ou, plus précisément, le rayon du cercle de convergence de la série de Taylor de F.

Nous pouvons supposer R grand, quitte à remplacer $F(x)$ par $F(\alpha x)$, $\alpha$ petit. Nous savons, d'après le théorème II.1 que $F(x)$ est analytique à l'origine. Soit $F(x) = \sum a_n x^n$ sa série de Taylor; désignons par $R_1$ le rayon de convergence de cette série.

Lemme II.6.

$$R_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} R.$$

*Démonstration*. — Posons $F_1(x) = F(\sin x)$. Si (F) est bornée sur la boule $\|f\| < R$ et si $\|g\| < r = \log(\sqrt{2} R + o(1))$ : $\|\sin(g + t)\| \leq R$ uniformément pour $t \in T$ et par conséquent $F_1(x)$ reste bornée dans le cylindre dans B : $\{f + t; \|f\| < r, t \in T\}$.

D'après le lemme II.3, $F_1(x)$ est analytique dans la bande $|y| < r$. L'image de cette bande par $\sin z$ couvre le cercle

$$|Z| < \frac{\sqrt{2}}{2} R + \underset{R \to \infty}{o(1)}$$

d'où le lemme.

L'existence d'une constante K positive telle que

$$R_1 \geqq KR$$

pour toute fonction qui opère, n'est pas un phénomène propre à l'algèbre $\mathfrak{A}(T)$, mais une propriété commune de toutes les algèbres B dans lesquelles toute fonction qui opère est nécessairement analytique.

THÉORÈME II.2. — *Soit* B *une algèbre dans laquelle seules opèrent les fonctions analytiques. Il existe une constante positive* K *telle que : si* $F(x)$ *opère dans* B *et si* (F) *est bornée dans la boule* $\|f\| < R$ *dans* $B_r$, F *est analytique dans le cercle* $|z| < KR$.

*Démonstration.* — Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Pour tout $N > 0$ il existe alors une fonction $F_N(x)$, définie pour $-\alpha_N \leqq x \leqq \alpha_N$ qui opère dans B et telle que $(F_N)$ reste bornée dans la boule $\|f\| < N\beta_N$, qui a un point singulier à une distance inférieure à $\beta_N$ de l'origine. Quitte à faire le changement de variable $F_N^*(x) = F_N(\alpha_N \sin \gamma_N x)$, on peut supposer que les fonctions $F_N(x)$ sont définies pour tout $x$, que si $N > M$ $(F_N)$ est bornée dans la boule $\|f\| < M$ de $B_r$, et que $F_N(x)$ admet un point singulier de module inférieur à $\frac{1}{N}$. Pour une suite $\{A_N\}$ décroissant rapidement, la fonction

$$F_0(x) = \sum A_N F_N(x)$$

est une fonction non analytique qui opère dans B, ce qui fournit la contradiction cherchée.

Il résulte en particulier que si seules les fonctions analytiques opèrent dans B, seules les fonctions entières restent bornées sur les parties bornées de $B_r$.

Dans le cas de $\mathfrak{A}(T)$ la constante K est probablement égale à 1. Nous l'avons montré pour des fonctions dont la série de Taylor ne converge pas absolument sur le cercle de convergence et le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ que nous avons trouvé dans le cas général (lemme II.6) est sans doute dû à un défaut technique.

Nous y considérons en effet, non pas toutes les fonctions réelles de norme $\leqq R$, mais seulement l'ensemble des fonctions de type $\sin f$ avec

$$\|f\| < \log(\sqrt{2} R + o(1)).$$

Or, si pour une fonction $F_1(x)$; $R_1 > \frac{1}{\sqrt{2}} R$, la série de Taylor de $F_1(x)$ converge absolument et uniformément sur cet ensemble. Le changement de variable, effectué dans la démonstration du lemme II.6 nous fait donc nécessairement perdre le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La difficulté disparaît trivialement si l'on suppose que (F) est bornée sur l'ensemble des éléments de norme inférieure à R, ayant leur spectre non pas sur l'axe réel, mais dans un voisinage de l'origine du plan complexe.

LEMME II.7. — *Soit* $\mathcal{E} > 0$. *Désignons par* $\mathfrak{U}(\mathcal{E}, R)$ *l'ensemble des éléments de* $\mathfrak{A}(T)$ *dont la norme spectrale est inférieure ou égale à* $\mathcal{E}$, *et la norme dans* $\mathfrak{A}(T)$ *est inférieure à* R. *Si* (F) *est bornée sur* $\mathfrak{U}(\mathcal{E}, R)$, $F(z)$ *est analytique pour* $|z| < R$.

*Démonstration.* — En remplaçant $F(x)$ par $F(\mathcal{E}x)$, R se transforme en $\mathcal{E}^{-1}R$ et le lemme pour $F(\mathcal{E}x)$ est équivalent à l'énoncé du lemme pour $F(x)$. On peut donc supposer $\mathcal{E} = 1$.

Si

$$F(x) = \sum a_n x^n$$

$$F(e^{if}) = \sum a_n e^{inf}$$

$$F(e^{i(f+t)}) = \sum a_n e^{inf} e^{int}$$

qui reste uniformément borné en norme si $f$ est réel de norme inférieure à $\log R$. Comme dans la démonstration du lemme II.3 on obtient $|a_n| < e^{-n \log R} = R^{-n}$ ce qui entraîne que le rayon de convergence de la série de Taylor est au moins égal à R.

THÉORÈME II.3. — *Soit* $f_0 \in \mathfrak{A}(T)$. *Supposons que* $F(z)$ *soit définie dans un ouvert* $\Omega$ *contenant le spectre de* $f_0$, *et qu'elle opère dans* $\mathfrak{A}(T)$ *tout en restant bornée pour* $\|f - f_0\| < R$. *Si* F *est analytique complexe, elle n'a pas de singularités à une distance inférieure à* R *du spectre de* $f_0$. (*Lorsque* $f_0$ *est réelle, il suffit que* $F(x)$ *soit définie dans un intervalle contenant le spectre pour qu'elle puisse être prolongée en une fonction analytique complexe*).

*Démonstration.* — Soit $\xi_0$ un point du spectre de $f_0$, montrons que $F(z)$ est analytique dans un cercle de rayon au moins égal à R autour de $\xi_0$. Sans restreindre pour autant la généralité on peut supposer

$$\xi_0 = 0, \qquad f_0(0) = 0.$$

Soit $f_1$ tel que $f_1(x) = 0$ pour $|x| < \eta$ et $\|f_1 - f_0\| < \mathcal{E}$. (F) est encore bornée dans la boule $\|f - f_1\| < R - \mathcal{E}$ et en particulier dans la boule

$\|g\| < R - \mathcal{E}$ de l'idéal $k(T - (-\eta, \eta))$ — les éléments de $\mathfrak{A}(T)$ à support dans $(-\eta, \eta)$. On sous-entend évidemment que lorsque l'on parle d'une boule c'est en réalité de l'ensemble des éléments de cette boule ayant leur spectre dans $\Omega$ qu'il s'agit.

Désignons par $\Delta_\gamma(x)$ la fonction égale à 1 pour $|x| < \gamma$ égale à zéro pour $|x| > \eta$ et linéaire pour $\gamma \leqq |x| \leqq \eta$. $\Delta_\gamma$ est la différence entre deux fonctions « triangle » dont l'une a sa norme égale à $\frac{\eta}{\eta - \gamma}$ et l'autre à $\frac{\gamma}{\eta - \gamma}$; par conséquent

$$1 \leqq \|\Delta_\gamma\| \leqq \frac{\eta + \gamma}{\eta - \gamma}.$$

Si $f(x) \in \mathfrak{A}(T)$ à spectre dans $\Omega$ et si $\delta(x)$ est une fonction de norme 1 à support dans $(-\gamma, \gamma)$, on a (lemme II.1) :

$$\text{(II.11)} \qquad \begin{aligned} \|F(f)\| = \|F(f(nx))\| &= \lim_{n \to \infty} \|\delta(x) F(f(nx))\| \\ &= \lim_{n \to \infty} \|\delta(x) F(\Delta_\gamma(x) f(nx))\| \\ &\leqq \lim \|F(\Delta_\gamma(x) f(nx))\| \end{aligned}$$

qui est uniformément borné si

$$\|f\| \leqq (R - \mathcal{E}) \frac{\eta - \gamma}{\eta + \gamma}.$$

Or, $\mathcal{E}$ peut être choisi arbitrairement petit, $\eta$ est déterminé par $\mathcal{E}$ et l'on peut choisir $\gamma$ aussi petit que l'on veut par rapport à $\eta$, ce qui entraîne que (F) est bornée dans toute boule de rayon inférieur à R, centrée à l'origine de $\mathfrak{A}(T)$ et le théorème résulte du lemme II.7.

2. Nous passons à l'étude des fonctions qui opèrent dans quelques algèbres quotients de $\mathfrak{A}(T)$. Les algèbres quotients, semi-simples de $\mathfrak{A}(T)$ s'obtiennent comme algèbres de restriction des éléments de $\mathfrak{A}(T)$ à des sous ensembles fermés de T. Soient, en effet, I un idéal dans $\mathfrak{A}(T)$, $h(I)$ l'ensemble des idéaux maximaux qui contiennent I (l'ensemble des zéros communs à tous les éléments de I). L'espace des idéaux maximaux de $\frac{\mathfrak{A}(T)}{I}$ est précisément $h(I)$, qui est un sous ensemble fermé dans T, et pour que $\frac{\mathfrak{A}(T)}{I}$ soit semi-simple il faut et il suffit que $I = kh(I)$ [l'intersection des idéaux de $h(I)$. *Voir* I.1]. Nous donnons ici une condition sur $h(I)$, suffisante pour que seules les fonctions analytiques opèrent dans $\frac{\mathfrak{A}(T)}{I}$. Une telle condition sera dite « condition d'analyticité » et les ensembles $K \subset T$ tels que dans $\frac{\mathfrak{A}(T)}{k(K)}$ seules les fonctions analytiques opèrent seront dits « ensembles d'analyticité ».

Il est clair que chaque sur-ensemble d'un ensemble d'analyticité est un ensemble d'analyticité, de même que chaque translaté et chaque image homothétique. Il est également clair que si K contient un intervalle; K est un ensemble d'analyticité. Nous faisons usage de la remarque du début du chapitre concernant l'équivalence de $\frac{\mathcal{A}(\mathrm{R})}{k(\mathrm{K})}$ et de $\frac{\mathcal{A}(\mathrm{T})}{k(\mathrm{K})}$ si $\mathrm{K} \subseteq (-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)$.

Pour simplifier nous supposons que tous les ensembles dont il s'agit sont des sous-ensembles de $[-1, 1]$ sur l'axe réel. L'algèbre « de base » $\mathcal{A}$ sera la sous algèbre de $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ (et de $\mathcal{A}(\mathrm{T})$) des fonctions à support dans $[-1, 1]$. Pour $f \in \mathcal{A}$ $f(nx)$ aura le sens qu'elle a dans $\mathcal{A}(\mathrm{R})$, c'est-à-dire sans les répétitions modulo $\frac{2\pi}{n}$. Ainsi le support de $f(nx)$ est contenu dans $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Ceci nous permet de parler également de $f(\lambda x)$, $\lambda > 1$ non nécessairement entier. Les normes induites sur $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}(\mathrm{T})$ et par $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ sont équivalentes et nous pouvons les confondre, néanmoins du point de vue technique la norme de $\mathcal{A}(\mathrm{R})$ est plus commode étant donné qu'elle vérifie :

$$\|f(nx)\| = \|f\|.$$

Soit K fermé dans $[-1, 1]$: nous désignons par $f_{\mathrm{K}}$ la restriction d'une fonction $f \in \mathcal{A}$ à K, et par $\|f\|_{\mathrm{K}} = \|f_{\mathrm{K}}\|$. Sa norme dans $\mathcal{A}(\mathrm{K}) = \frac{\mathcal{A}}{k(\mathrm{K})}$.

THÉORÈME II.4. — *Si* K *est (fermé) de mesure positive* K *est un ensemble d'analyticité.*

*Démonstration.* — Soit $\mathrm{F}(x)$ une fonction qui opère dans $\mathcal{A}(\mathrm{K}) = \frac{\mathcal{A}}{k(\mathrm{K})}$, $\mathrm{F}(0) = 0$, montrons qu'elle opère aussi dans $\mathcal{A}$. Sans restreindre la généralité on peut supposer que (F) est bornée dans une boule $\|f\| < \eta$ dans $\mathcal{A}(\mathrm{K})$, car sinon, il existe dans K au plus un nombre fini de points non ordinaires par rapport à F (*Voir* I. lemme 3.2). Il existe dans K un sous ensemble fermé $\mathrm{K}_1$, de mesure positive dont tous les points sont ordinaires par rapport à F et on peut reprendre la suite de la démonstration pour $\mathcal{A}(\mathrm{K}_1)$.

On peut supposer également que $x = 0$ est un point de densité de K.

Soit $f \in \mathcal{A}$, à spectre réel avec $\|f\| < \eta$

$$\|f(nx)\|_{\mathrm{K}} \leq \|f(nx)\| < \eta$$

donc

$$\|\mathrm{F}(f_{\mathrm{K}}(nx))\| < \mathrm{B}.$$

Il existe donc une suite $\{g_n\}$ dans $\mathcal{A}$, telle que

$$g_n(x) = \mathrm{F}(f(nx)) \text{ sur K}$$

avec

$$\|g_n\| < \mathrm{B} + \frac{1}{n}$$

or

$$g_n\left(\frac{x}{n}\right) \in \mathcal{A}(\mathrm{R}), \qquad \left\|g_n\left(\frac{x}{n}\right)\right\| \leq \mathrm{B} + \frac{1}{n}$$

et l'on a

$$g_n\left(\frac{x}{n}\right) = \mathrm{F}(f(x)) \text{ sur } n\mathrm{K}.$$

Choisissons une suite $\{n_j\}$ telle que

$$\text{mes } n_j\mathrm{K} \cap [-2, 2] > 4 - \frac{1}{j!} \tag{II.12}$$

et de la suite $\left\{\delta(x)\, g_{n_j}\left(\frac{x}{n_j}\right)\right\}$ extrayons une sous suite qui converge faiblement vers un élément $\mathrm{G} \in \mathcal{A}$, $\delta(x)$ étant la fonction égale à 1 pour $|x| \leqq 1$, à zéro pour $|x| \geqq 2$ et linéaire pour $1 \leqq |x| \leqq 2$.

On a $\|\mathrm{G}\| \leqq \mathrm{B}\|\delta\| < 3\mathrm{B}$. Le support de $\mathrm{G}(x)$ est visiblement contenu dans $[-2, 2]$; il résulte de (II.12) que $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(f(x)) \in \mathcal{A}$ et le théorème est démontré.

Le théorème II.4 est un cas particulier du théorème suivant qui donne une condition de nature arithmétique suffisante pour que K soit un ensemble d'analyticité.

Théorème II.5. — *Si, quel que soit* N, K *contient une progression arithmétique de* N *termes,* K *est un ensemble d'analyticité.*

Ce théorème a déjà été énoncé dans [13] et deux démonstrations ont été signalées.

La première, analogue en un sens à celle du théorème II.4 a été donnée d'une manière assez détaillée. Cette démonstration consiste à mettre en évidence que si $\mathrm{F}(x)$ opère dans $\mathcal{A}(\mathrm{K})$ elle opère aussi dans $\mathcal{A}(\mathrm{Z})$ (l'algèbre des coefficients de Fourier des fonctions sommables sur T). On sait ([5]) que seules les fonctions analytiques opèrent dans $\mathcal{A}(\mathrm{Z})$. La seconde méthode est seulement esquissée dans [13] et nous donnons plus de détails ici; elle est analogue à la démonstration du théorème II.1.

Lemme II.8. — *Désignons par* $\mathrm{P}_n$ *la suite* $\left\{\frac{\pi k}{n}\right\}_{k=-n}^{n}$ *et par* $\|f\|_n$ *la norme de la restriction d'une fonction* $f \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$ *à* $\mathrm{P}_n$, *alors pour toute* $f \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$

$$\|f\|_n \to \|f\|$$

*Démonstration.* — Soit $\varphi$ une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{A}(\mathrm{T})$ :

$$\varphi \sim \sum c_m e^{-imx}$$

avec

$$\sup |c_m| = \|\varphi\| < \infty.$$

Soit

$$\Delta_{\mathrm{N}} = \sum \delta_n^{(\mathrm{N})} e^{inx} = \begin{cases} \mathrm{N}\left(1 - \dfrac{\mathrm{N}|x|}{2\pi}\right) & \text{si } \quad |x| < \dfrac{2\pi}{\mathrm{N}} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Soit

$$\varphi_N = \varphi \star \Delta_N = \sum c_m \delta_m^{(N)} e^{-imx}.$$

Posons

$$\text{(II.13)} \qquad E_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) f\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$f(x) = \sum \gamma_n e^{inx}$ étant un élément générique de $\mathfrak{A}(T)$. $E_N(f)$ est une fonctionnelle linéaire sur $\mathfrak{A}(T)$, et l'on a :

$$\text{(II.14)} \qquad \begin{cases} E_N(f) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_k \sum_m \sum_n \gamma_n c_m \delta_m^{(N)} e^{i(n-m)\frac{2k\pi}{N}} = \sum \gamma_n c_n^{(N)} \\ \text{avec} \\ c_n^{(N)} = \displaystyle\sum_i c_{n+jN} \delta_{n+jN}^{(N)} \end{cases}$$

comme on le voit en sommant d'abord par rapport à $k$. Or, d'après la formule de Poisson

$$\text{(II.15)} \qquad \sum \delta_{n+jN}^{(N)} = 1$$

et comme $\Delta_N(x)$ est de type positive, $\delta_{n+jN} \geqq 0$ pour tout N, $n$, $j$ et l'on obtient

$$C_n^{(N)} \leqq \sup_m |c_n| = \|\varphi\|,$$

soit

$$\|E_N\| \leqq \|\varphi\|.$$

D'autre part $\delta_n^{(N)}$ tend vers 1 lorsque N tend vers l'infini ce qui implique

$$\lim_{N \to \infty} C_n^{(N)} = c_n,$$

ou bien

$$E_N(f) \to \langle \varphi, f \rangle$$

pour tout $f \in \mathfrak{A}(T)$.

Pour un $f \in \mathfrak{A}(T)$ donné, prenons $\varphi$ de norme 1 tel que $\langle \varphi, f \rangle = \|f\|$.

Si $f_N(x) = f(x)$ sur $P_N$, $E_N(f_N) = E_N(f)$ étant donné que le support de $E_N$ est justement $P_N$ (II.13), par conséquent

$$\text{(II.16)} \qquad \|f_N\| \geqq |E_N(f_N)| = |E_N(f)| \to \|f\|.$$

et le lemme en résulte.

Le lemme II.8 s'inspire de la méthode utilisée par Herz [7] pour démontrer que l'ensemble triadique de Cantor est un ensemble de synthèse spectrale. Nous l'avons démontré dans l'algèbre $\mathfrak{A}(T)$ pour la simplicité des formules (II.14) (II.15), mais il est clair que l'analogue de ce lemme est valable pour $\mathfrak{A}$. Comme corollaire du lemme II.8 nous obtenons l'analogue du lemme II.2 pour les algèbres $\mathfrak{A}(K)$, K satisfaisant à la condition du théorème II.5.

LEMME II.9. — *Si, quelque soit* N, K *contient une progression arithmétique de* N *termes, et si l'on pose*

$$M(R) = \sup_{\substack{f \in \mathfrak{A}_r \\ \|f\|_K \leqq R}} \|e^{if}\|_K$$

*on a :*

$$M(R) = e^R \tag{II.17}$$

*Démonstration.* — Il est clair que (II.17) est valable pour l'algèbre $\mathfrak{A}$; soit donc $f \in \mathfrak{A}_r$ de norme R telle que

$$\|e^{if}\| > (1 - \mathcal{E})\, e^R \tag{II.18}$$

D'après le lemme II.8, il existe un N tel que

$$\|e^{if}\|_N \geqq (1 - \mathcal{E})\, \|e^{if}\|$$

($\|e^{if}\|_N$ étant ici la norme de la restriction de $e^{if}$ à la progression arithmétique de N termes dont le premier est égal à $-1$ et le dernier à $+1$).

D'après l'hypothèse du lemme il existe dans K une progression arithmétique de N termes, soit

$$P'_N = P_{N, a_N, h} = \{a_N + jh\}_{j=1}^{N}$$

avec

$$a_N > -1, \qquad h > 0, \qquad a_N + Nh < 1,$$

La fonction $f_1(x) = f\left(\frac{2}{Nh}x - 1 - \frac{2a_N}{Nh}\right)$ a les propriétés suivantes :

$$\|f_1\| = R, \qquad \|e^{if_1}\|_K \geqq \|e^{if_1}\|_{P'_N} = \|e^{if}\|_N$$

et par conséquent

$$\|e^{if_1}\|_K \geqq (1 - \mathcal{E})^2\, e^R$$

et le lemme est démontré.

Nous sommes maintenant en état de donner la démonstration du théorème II.5. Quitte à prendre un sous-ensemble de K nous pouvons supposer que K est constitué d'une suite d'ensembles de type $P'_j = P_{N_j}, a_{N_j}, h_j$ dont les intervalles supports sont disjoints et tels que $\{a_{N_j}\}$ tend d'une manière monotone (p. ex. décroissante) vers un certain $a_0 \in [-1, 1]$. Nous pouvons supposer encore que :

$$a_{N_j} - a_0 > 2(a_{N+1} + N_{j+1}h_{j+1} - a_0) \tag{II.20}$$

(si $\{a_{N_j}\}$ décroit).

Nous définissons maintenant les opérations $(F_j)$ de la façon suivante :

$$(F_j)(f(x)) = \begin{cases} F(f(x)) \text{ pour } x \in P'_k \text{ avec } k \leqq j \\ F(f(a_0)) \text{ pour } x \in P'_k \text{ avec } k > j. \end{cases} \tag{II.21}$$

Il est clair que les $(F_j)$ sont des opérations continues sur $\mathfrak{A}(K)$. D'après le théorème de Kaplansky et (II.20) on a

$$(F) = \lim_{j=\infty} (F_j)$$

c'est-à-dire (F) est une fonction de la première classe de Baire sur $\mathfrak{A}(K)$.

Si l'on pose $F_1(x) = F(\alpha \sin x)$, $F_1(f+t)$ est une fonction mesurable de $t$ et on peut avoir les évaluations (II.3) et (II.4) pourvu que l'on sache que (F) est bornée dans une boule $\|f\|_K < \eta$ dans $\mathfrak{A}_r(K)$.

Il ne nous reste qu'à montrer que (F) est en effet bornée dans une telle boule. Pour cela, il suffit de mettre en évidence l'existence d'une telle boule dans laquelle les $F_j$ sont uniformément bornées, ou encore que (F) est bornée sur l'ensemble des éléments à spectre fini de cette boule. Supposons le contraire; pour chaque $n$ il existe alors un élément $f \in \mathfrak{A}_r(K)$ à spectre fini, tel que

(II.22) $$\|f_n\|_K < 2^{-n}, \qquad \|F(f_n)\|_K > 2^n$$

En changeant, si nécessaire, la variable, nous pouvons supposer que les supports dans K des $f_n$ sont disjoints. Posons

$$f = \sum f_n, \qquad E(f) = \sum F(f_n)$$

(nous pouvons évidemment supposer que $F(0) = 0$). Or, $F(f)$ ne peut pas appartenir à $\mathfrak{A}(K)$ étant donné (II.2) et le théorème est démontré.

*Remarque.* — Insistons sur le caractère arithmétique des conditions d'analyticité. Des ensembles très voisins du point de vue métrique peuvent donner naissance à des algèbres de restriction très différentes. Ainsi par exemple la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ satisfait la condition du théorème II.5 et est par conséquent un ensemble d'analyticité. Pour toute suite $\{\mathcal{E}_n\}$ décroissant vers zéro aussi vite que l'on veut, on peut trouver une suite $\{\lambda_n\}$ dont les éléments sont linéairement indépendants (ce qui entraîne évidemment que $\{\lambda_n\}$ est un ensemble de Helson) et telle que $\left|\lambda_n - \frac{1}{n}\right| < \mathcal{E}_n$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon et Mandelbrojt, *Une généralisation du théorème Tauberien* (*Acta Sci. Math. Szeged*, vol. 12, 1950, B. 167-176).

[2] A. Beurling and H. Helson *Fourier Stieltjes transforms with bounded powers.* (*Math. Scand.*, t. 1, 1953, p. 120-126).

[3] Carleson, *Une inégalité* (*Arkiv Mat.*, t. 25 B, n° 1, 1935, p. 1-5).

[4] H. Helson, *Fourier transforms on perfect sets.* (*Studia Math.*, t. 14, 1954, p. 209-213).

[5] H. Helson et J.-P. Kahane, *Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 247, 1958, p. 626-628).

[6] H. HELSON, J.-P. KAHANE, Y. KATZNELSON and W. RUDIN, *The functions with operate on Fourier Transforms* (Sous presse).

[7] C. HERZ, *Spectral synthesis for the cantor set* (*Proc. Nat. Acad. Sci*, t. **42**, 1956, p. 42-43).

[8] I. GELFAND, *Normierte Ringe* (*Math. Sbornik*, vol. **9**, 1941, p. 3-24).

[9] J.-P. KAHANE, *Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes* (*C. R. Acad. Sci.*, t. **240**, 1955, p. 36-37).

[10] J.-P. KAHANE, *Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes* (*Jour. de Math. Pures et Appliquées*, vol. **35**, 1956, p. 249-259).

[11] J.-P. KAHANE, *Sur un problème de Littlewood* (*Indag. Math.*, **19**, 1957, p. 268-271).

[12] J.-P. KAHANE. *Sur un théorème de Wiener-Lévy* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 246, 1958, p. 1949-1951).

[13] J.-P. KAHANE et Y. KATZNELSON, *Sur la réciproque du théorème de Wiener-Lévy* (*C. R. Acad. Sci.*, t. **248**, 1959, p. 1279-1281).

[14] J.-P. KAHANE, W. RUDIN, *Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieltjes* (*C. R. Acad. Sci.*, t. **247**, 1958, p. 773-775).

[15] Y. KATZNELSON, *Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes* (*C. R. Acad. Sci.*, t. **247**, 1958, p. 404-406).

[16] Y. KATZNELSON, *Algèbres caractérisées par les fonctions qui opèrent sur elles* (*C. R. Acad. Sci.*, t. **247**, 1958, p. 903-905).

[17] LEIBENSON, *Sur l'algèbre des fonctions dont la série de Fourier converge absolument* (*en russe*) (*Ouspiekhi mat. Nauk*, t. **9**. 1954, p. 157-162).

[18] P. LEVY, *Sur la convergence absolue des séries de Fourier* (*Compositio Math.*, vol. **1**, 1934, p. 1-14).

[19] L. H. LOOMIS, *An introduction to Abstract Harmonic Analysis*, New-York 1953.

[20] MARCINKIEWICZ, *Sur la convergence absolue des séries de Fourier* (*Jour. Math. Cluj.*, **16**, 1940, p. 66-73).

[21] NATMARK, *Normirovanie Koltza*, Moscou, 1956.

[22] H. POLLARD, *The harmonic analysis of bounded functions* (*Duke Math. Journal*, vol. **20**, 1953, p. 499-512).

[23] W. RUDIN, *Non-analytic functions of absolutely convergent Fourier Seires* (*Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. **41**, 1955, p. 238-240).

[24] W. RUDIN, *Transformaiion des coefficients de Fourier* (*C. R. Acad. Sci.*, t. **243**, 1956, p. 638-640).

[25] G. E. ŠILOV, *O razloğenia kommutativnovo normirovanovo kolza v pr'amu'u summu idealov* (*Mat. Sbornik*, **32**, **2**, 1953, p. 353-364).

[26] N. WIENER, *The Fourier Integral...* Cambridge 1933.

[27] A. ZYGMUND, *Trigonometrical Series*, Warsaw 1935.