ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

J. B. BACRO

Bornes pour la distribution limite de la statistique de Shepp

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 87, série *Probabilités et applications*, n° 4 (1985), p. 93-106

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1985__87_4_93_0>

BORNES POUR LA DISTRIBUTION LIMITE DE LA STATISTIQUE DE SHEPP

J.B. BACRO

Résumé :

Soit $X_1,X_2,\ldots,X_n$ un échantillon de variables aléatoires N (0,1) indépendantes. Le but de ce travail est de mettre en évidence des bornes inférieures et supérieures pour la distribution limite de la statistique T_n, où l'on a $T_n = \sup_{1\leq i\leq n} (S_{i+K(i)}-S_i)$ avec $K(i)= [c\log(i)]$, $c>c_{min}\geq 0$, et $S_i=X_1+X_2+\ldots+X_i$.

Cette statistique, introduite par Shepp en 1964, est voisine de celle d'Erdös-Renyi.

Mots clés : Théorème d'Erdös-Renyi, convergence en loi, théorèmes limites.
Classification AMS 1980 : 60F15.

1- INTRODUCTION ET RESULTATS.

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, de sommes partielles $S_0=0$, $S_i=X_1+X_2+\ldots+X_i$, $i=1,2,\ldots$.
On définit la statistique $T_n = \operatorname*{Sup}_{1\le i\le n} (S_{i+K(i)}-S_i)$, où $K(i)=[c\log(i)]$, et les quantités

$\phi(t)=E(e^{tX_1})$, $t_0 = \operatorname{Sup}\{t \,/\, \phi(t)<\infty\}$ et pour $t_0 \geq 0$, $m(t)=\phi'(t)/\phi(t)$ .La fonction m est strictement croissante et continûment différentiable sur $(0,t_0)$, ce qui permet en particulier de définir $t^*(\alpha)$ unique nombre vérifiant $m(t^*(\alpha))=\alpha$ pour tout $0<\alpha<A$, où $A=\operatorname*{Sup}_{0<t<t_0} m(t)$.Soit $c_0=1/\int_0^{t_0} tm'(t)\,dt$.
En 1964, Shepp (8) prouvait que pour tout $\alpha \in \{\phi'(t)/\phi(t),\ 0<t<t_0\}$, si l'on choisit c tel que $e^{-1/c} = \operatorname*{Inf}_t \{\phi(t)e^{-\alpha t}\}$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} T_n \,/\alpha[c\log(n)] = 1 \text{ p.s. .}$$

Considérant le cas particulier où les X_i sont des variables aléatoires N(0,1) indépendantes, on s'interesse, dans la suite du travail, au comportement de la loi limite de la statistique T_n précédemment définie.Signalons que les résultats obtenus ici sont de même essence que certains résultats de l'article de Csörgo (1981), où l'on trouvera en outre de nombreuses références et une présentation des applications à la statistique.
De récents travaux (Deheuvels, Devroye 1983;Deheuvels,Devroye, Lynch 1985) ont permis d'obtenir les résultats suivants:

THEOREME 1 : (D.-D.1983)

Soit X_1 une variable aléatoire non-dégénérée telle que $E(X_1)=0$ et $t_0>0$.

Alors,

1°) pour tout $\alpha \in]0,A)$, si $c=c(\alpha)$ est défini par :

$$e^{-1/c} = \min_t \phi(t)\, e^{-\alpha t}$$

alors,

$$e^{-1/c} = \phi(t^*)\, e^{-\alpha t^*},\quad c \in (c_0,\infty[$$

2°) pour tout $c \in (c_0, \infty[$, il existe un unique $\alpha \in (0,A)$ tel que $c = c(\alpha)$.

Remarque : $c_0=0$ dans tous les cas, exceptés dans les deux cas suivants :

(i) $A<\infty$, $t_0<\infty$ on a alors $c_0=1/(At_0-\log(\phi(t_0)))$.

(ii) $A<\infty$, $t_0=\infty$ on a alors $c_0=-1/(\log(P(X_1=A)))$.

(cf D.-D. 1983 théorème 10)

THEOREME 2 : (D.-D.-L. 1985)

Pour tout $\alpha \in (0,A)$, ou d'une façon équivalente pour tout $c=c(\alpha)$ appartenant à $(c_0, \infty[$, on a

(i) $(T_n-\alpha k)/\log(k) \to -\frac{1}{2t^*}$ en probabilité

(ii) $\limsup_{n\to\infty} (T_n-\alpha k)/\log(k) = \frac{1}{2t^*}$ p.s.

(iii) $\liminf_{n\to\infty} (T_n-\alpha k)/\log(k) = -\frac{1}{2t^*}$ p.s.

où $k=K(n) = [c\log(n)]$.

Dans (i), (ii), (iii), T_n peut être remplacé par $U_n = \sup_{0\le i\le n-k} (S_{i+k}-S_i)$.

Les notations introduites pour les théorèmes 1-2 sont reprises pour les théorèmes 3 et 4, qui représentent les résultats de ce travail. Rappelons en particulier que l'on a $K(i)= [c\log(i)]$ et $k=K(n)= [c\log(n)]$.

THEOREME 3 : (borne inférieure).

Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$P(T_n \le \alpha k- \frac{1}{2t^*} \log(k)+ \frac{y}{t^*}) \ge \exp(- \beta_n(\psi (t^*)+o(1))e^{-y})$$

où β_n est un facteur tel que

$$e^{1/c} \le \beta_n+1 \le e^{2/c}$$

THEOREME 4 : (borne supérieure)

Pour tout $y \in R$, il existe une constante $\xi \in (0,1)$ telle que

$$P(T_n \leq \alpha k - \frac{1}{2t^*} \log(k) + \frac{y}{t^*}) \leq \exp(-\xi \beta_n (\psi(t^*) + o(1)) e^{-y}).$$

Notes :

- pour un traitement analogue de U_n, voir (D.D. 1985)
- dans le cas des X_i $N(0,1)$ indépendantes, $\psi(t^*) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}$
- $\xi = \underset{\varepsilon>0}{\mathrm{Sup}} \frac{1-\rho}{2(1-\rho+2\rho C)}$ avec $\rho = \exp(-\frac{\alpha^2}{4}(\frac{1}{1+\varepsilon}))$

$$C = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}(1+\varepsilon)$$

2°) Preuves des théorèmes 3 et 4.

La démonstration des théorèmes 3 et 4 nécessite l'emploi de certains lemmes dont en particulier le lemme suivant de Pétrov :

LEMME 1 (Pétrov 1965)

$$P(S_n \geq n\alpha) \sim \frac{\psi(t^*)}{\sqrt{n}} \exp(n(\log(\phi(t^*)) - t^*\alpha))$$

uniformément en tout $\alpha \in (\varepsilon, \min(A-\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}))$ où $\varepsilon>0$ arbitraire, et $\psi(t^*) > 0$ est un nombre dépendant de t^* et de la distribution de X_1 seulement.

En particulier, pour des distributions continues, on pourra prendre, posant $\sigma(t) = m'(t)$, $\psi(t^*) = (t^*\sigma(t^*)\sqrt{2\pi})^{-1}$, et pour des distributions discrètes d'amplitude H, on a $\psi(t^*) = (H/1-e^{-Ht^*})(1/\sigma(t^*)\sqrt{2\pi})$.

On utilisera en fait un corollaire de ce lemme, à savoir :

LEMME 2 : (D.D.1985)

Soit $\alpha \in (0,A)$ et soit (y_n) une suite de nombres satisfaisants $ny_n^2 \to 0$.

Alors uniformément sur toute suite (z_n) telle que $|z_n| \leq |y_n|$, on a :

$$P(S_n \geq n(\alpha+z_n)) \sim \frac{\psi(t^*)}{\sqrt{n}} \quad \exp(-n/c)\ \exp(-nz_n t^*).$$

Preuve du théorème 3 :

On considère la suite $n_j = \inf\{n / [c\log(n)] = j\}$. Pour $n_j \leq i < n_{j+1}$, on a $K(i)=j$.

Pour obtenir une minoration, on utilise le lemme 10 de D.-D. 1984, à savoir :

LEMME 3 : (D.-D. 1984)

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aleatoires indépendantes. Soit $J_1, \ldots, J_m$ des sous-ensembles de $\{1,2,\ldots,n\}$ où m est un autre entier. Alors pour tous $k_1, \ldots, k_m$ entiers on a :

$$P\Big(\sum_{i \in J_1} X_i \geq k_1, \ldots, \sum_{i \in J_m} X_i \geq k_m\Big) \geq \prod_{j=1}^{m} P\Big(\sum_{i \in J_j} X_i \geq k_j\Big)$$

Utilisant ce lemme on a :

$$P\Big(\sup_{n_j \leq i < n_{j+1}} (S_{i+K(i)} - S_i) \leq \alpha j - \frac{1}{2t^*}\log(j) + \frac{y}{t^*}\Big) \geq P^{n_{j+1}-n_j}\Big(S_j \leq \alpha j - \frac{1}{2t^*}\log(j) + \frac{y}{t^*}\Big)$$

En effet posant $f(j) = \alpha j - \frac{1}{2t^*}\log(j) + \frac{y}{t^*}$, on a :

$$P\Big(\sup_{n_j \leq i < n_{j+1}} (S_{i+K(i)} - S_i) \leq f(j)\Big) = P\big(X_{n_j+1} + \ldots + X_{n_j+j} \leq f(j); \ldots ; X_{n_{j+1}} + \ldots + X_{n_{j+1}+j-1} \leq f(j)\big)$$

$$\geq P^{n_{j+1}-n_j}(S_j \leq f(j)).$$

De plus $P^{n_{j+1}-n_j}(S_j\leq f(j)) \geq \exp(-(n_{j+1}-n_j)\ \dfrac{P(S_j>f(j))}{1-P(S_j>f(j))})$.

Par définition des n_j on a :

$$n_{j+1}-n_j \leq e^{\frac{j+2}{c}} - e^{\frac{j}{c}}$$

$$n_{j+1}-n_j \geq e^{\frac{j}{c}}(e^{1/c}-1)-1 \sim e^{j/c}\ (e^{1/c}-1)$$

c'est à dire

$$(e^{1/c}-1)\leq e^{-j/c}(n_{j+1}-n_j)\leq(e^{2/c}-1)$$

Appliquant le lemme 2, on a :

$$P(S_j>\alpha j- \frac{1}{2t^*}\log(j)+ \frac{y}{t^*})\sim \psi(t^*)e^{-j/c}e^{-y}$$

et combinant avec les précédentes relations sur les n_j on a uniformément en j :

$$P(\sup_{n_j\leq i<n_{j+1}} (S_{i+K(i)}-S_i)\leq \alpha\, j- \frac{1}{2t^*}\log(j)+ \frac{y}{t^*}) \geq\exp(-\beta_j(\psi(t^*)+o(1))e^{-y})$$

$$\text{avec } e^{1/c}\leq\beta_j+1\leq e^{2/c}$$

On en déduit :

$$P(T_n\leq\alpha k- \frac{1}{2t^*}\log(k)+ \frac{y}{t^*}) \geq \exp(- \beta_n(\psi(t^*)+o(1))\ e^{-y})$$

ce qui achève la démonstration du théorème 3.

Démonstration du théorème 4 :

L'idée de la démonstration est la suivante :

Considérant N variables aléatoires j-dépendantes, j≤N, on découpe le N-échantillon en blocs de V variables, séparés par j variables afin d'avoir indépendance entre blocs.

Pour notre problème, $n_j \le i < n_{j+1}$, on a une K(i)-dépendance, avec K(i)=j.

On va donc montrer que sur tout intervalle $(n_j, n_{j+1}[$ on a une majoration de

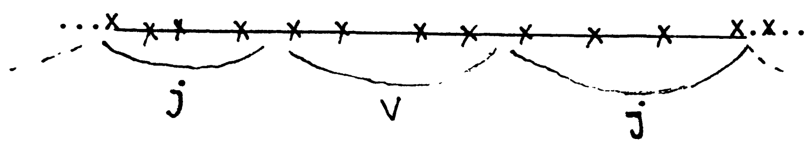
$$P\Big(\sup_{n_j \le i < n_{j+1}} (S_{i+K(i)} - S_i) \le \alpha j - \frac{1}{2t^*}\log(j) + \frac{y}{t^*}\Big) \text{ uniforme en } j.$$

La démonstration utilise les lemmes 4 et 5 suivants :

Soit $A_i = [S_{i+j} - S_i > f(j)]$ où l'on a $f(j) = \alpha j - \frac{1}{2t^*}\log(j) + \frac{y}{t^*}$, $y \in R$

et $n_j \le i < n_{j+1}$.

Soit $N = n_{j+1} - n_j$ et V la "longueur" d'un bloc de variables aléatoires



On a alors :

$$P\Big(\sup_{n_j \le i < n_{j+1}} (S_{i+K(i)} - S_i) < f(j)\Big) = P(A^c_{n_j} \cap A^c_{n_j+1} \cap \ldots\ldots \cap A^c_{n_{j+1}-1})$$

et du fait de l'indépendance entre blocs

$$P\Big(\sup_{n_j \le i < n_{j+1}} (S_{i+K(i)} - S_i) < f(j)\Big) \le \Big[P(A^c_{n_j} \cap \ldots\ldots \cap A^c_{n_j+V-1})\Big]^{\left[\frac{N}{V+j}\right]}$$

On doit donc chercher la probabilité $P(A^c_{n_j} \cap \ldots \cap A^c_{n_j+V-1})$ c'est à dire la probabilité $P(A^c_1 \cap \ldots\ldots \cap A^c_V)$.

Pour cela on utilise le lemme 4, inspiré par le lemme 14 de D.-D. 1985.

LEMME 4 :

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_V$ une suite d'évènements tels que, pour $1 \leq j \leq V$,

$$_{*}P(A_i)=p(j),\ 1\leq i\leq V$$

$$_{*}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) = P(A_{i_1}).\ P(A_{i_2}) = p(j)^2 \text{ pour } |i_1-i_2|>j$$

$_{*}$il existe $C\geq 1$, $\rho\in(0,1)$ tels que :

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) \leq p(j)\ C\rho^{|i_1-i_2|} \qquad \text{pour } |i_1-i_2|\leq j$$

alors,

$$P(A_1^c\cap \ldots \cap A_V^c) \leq \exp(-\xi V p(j)+jp(j))$$

$$\text{où } \xi = \frac{1}{2}\ \frac{1-\rho}{1-\rho+2\rho C+jp(j)}$$

Preuve du lemme 4 :

La démonstration du lemme 4 suit le même schéma que celle du lemme 14 de D.-D.1985

On pose $m=\left[\frac{V}{2j}\right]$ et l'on considère $B_i = \bigcap_{\ell=1}^{j} A^c_{(i-1)2j+\ell}$ $\quad 1\leq i\leq m$.

Les $(B_i)_i$ sont indépendants et $P(\bigcap_{\ell=1}^{V} A_\ell^c) \leq P(\bigcap_{i=1}^{m} B_i) = \prod_{i=1}^{m} P(B_i)$

Utilisant l'inégalité $1-u\leq e^{-u}$, $u\in R$, on a :

$$P(\bigcap_{\ell=1}^{V} A_\ell^c) \leq \exp(-\sum_{\ell=1}^{m} P(B_\ell^c)).$$

Utilisant l'inégalité de Chung-Erdös (1952), et les hypothèses du lemme on a :

$$P(B_\ell^c) \geq \frac{(jp(j))^2}{jp(j)+\sum_{i\neq j} P(A_i\cap A_j)}$$

$$P(B_\ell^c) \geq \frac{(jp(j))^2}{(jp(j))^2+2jp(j)C\sum\limits_{i\geq 1}\rho^i+jp(j)} = \frac{jp(j)}{jp(j)+2C(\rho/1-\rho)+1}$$

$$\geq \frac{jp(j)(1-\rho)}{jp(j)+2\rho C+1-\rho}$$

et,

$$\sum_{i=1}^{m} P(B_i^c) \geq \sum_{i=1}^{(V/2j)-1} P(B_i^c) = \sum_{i=1}^{V/2j} P(B_i^c) - P(B^c_{\frac{V}{2j}-1})$$

$$\geq \sum_{i=1}^{V/2j} P(B_i^c) - jp(j) \quad \text{car pour tout } i,\ P(B_i^c) \leq jp(j)$$

$$\geq \frac{jp(j)(1-\rho)}{jp(j)+2\rho C+1-\rho} \times \frac{V}{2j} - jp(j)$$

et ainsi

$$-\sum_{i=1}^{m} P(B_i^c) \leq -\xi V p(j)+jp(j)$$ ce qui achève la démonstration du lemme 4.

Le lemme 5 va permettre de prouver que, dans le cas de variables aléatoires X_i N(0,1) indépendantes, le lemme 4 peut être appliqué, ce qui nous conduira directement à la démonstration du théorème 4.

<u>LEMME 5</u>.

Soit $n_j = \mathrm{Inf}\ \{n/\ [c\log(n)] = j\}$

Pour $n_j \leq i < n_{j+1}$, on pose $A_i = [S_{i+j}-S_i > f(j)]$, où :

$$f(j) = \alpha j - \frac{1}{2t}{}^*\log(j) + \frac{y}{t}{}^*$$

$$S_i = X_1+\ldots\ldots\ldots+X_i$$

et X_i variables aléatoires indépendantes idem-distribuées, de loi N(0,1).

Les évènements $A_i = [N(0,j) > f(j)]$ sont j-dépendants, pour $n_j \le i < n_{j+1}$, et l'on a, uniformément en tout $j > j_0$ assez grand :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \le P(N(0,j) > f(j))\ \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\,(1+o(1))\, e^{-\frac{\alpha^2}{4}(1-o(1))\,|i_1-i_2|}$$

pour $|i_1-i_2| < j$.

<u>Preuve du lemme 5</u> :

Soit A_{i_1}, A_{i_2} j-dépendants. $|i_1-i_2| < j$ et $n_j \le i_1, i_2 < n_{j+1}$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = P(N(0,j) > f(j); N(0,j) > f(j)) = P\left(N(0,1) > \frac{f(j)}{\sqrt{j}}\ ;\ N(0,1) > \frac{f(j)}{\sqrt{j}}\right)$$

Soit $r_{i_1 i_2}$ le coefficient de corrélation des évènements A_{i_1}, A_{i_2}.

On a :
$$r_{i_1 i_2} = 1 - \frac{|i_1-i_2|}{j} \quad \text{pour } |i_1-i_2| < j\ ;$$

$$= 0 \qquad \text{sinon.}$$

En effet, $jr_{i_1 i_2} = E\left[(X_{i_1+1}+\dots+X_{i_1+j})\,(X_{i_2+1}+\dots+X_{i_2+j})\right]$

Supposons $i_1 < i_2$ et $|i_1-i_2| < j$;

Alors
$$jr_{i_1 i_2} = E(X_{i_2+1}X_{i_2+1}) + \dots + E(X_{i_1+j}X_{i_1+j})$$

$= j+i_1-i_2$ et le raisonnement est symétrique en i_1, i_2.

Appliquant un lemme de Berman (1962), à savoir :

LEMME 6 : (B. 1962)

Si X et Y ont une loi normale bivariée, d'espérance 0, de variance et de coefficient de corrélation r, alors :

$$\lim_{c\to\infty} P(X>c;Y>c) = (2\pi(1-r)^{1/2}c^2)^{-1} \exp\left(-\frac{c^2}{1+r}\right)(1+r)^{3/2}$$

uniformément en tout r tel que $|r|\leq\theta$, $0<\theta<1$.

On a donc, uniformément en tout $r_{i_1i_2}$:

$$P\left(N(0,1)>\frac{f(j)}{\sqrt{j}}\,;\,N(0,1)>\frac{f(j)}{\sqrt{j}}\right) \sim \frac{1}{2\pi}\frac{(1+r_{i_1i_2})^{3/2}}{(1-r_{i_1i_2})^{1/2}}\ \frac{j}{f^2(j)}\ \exp\left(-\frac{f^2(j)}{j(1+r_{i_1i_2})}\right)$$

$$\text{et } \exp\left(-\frac{f^2(j)}{j(1+r_{i_1i_2})}\right) = \exp\left(-\frac{f^2(j)}{2j-|i_1-i_2|}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{f^2(j)}{2j}\right).\exp\left(-\frac{|i_1-i_2|f^2(j)}{2j^2\left(2-\frac{|i_1-i_2|}{j}\right)}\right)$$

d'où,

$$(1)\quad P\left(N(0,1)>\frac{f(j)}{\sqrt{j}};\,N(0,1)>\frac{f(j)}{\sqrt{j}}\right) \leq \frac{(1+r_{i_1i_2})^{3/2}}{(1-r_{i_1i_2})^{1/2}}\ \frac{j}{2\pi f^2(j)}\ \exp(-Q)$$

$$\text{où } Q = \frac{f^2(j)}{2j} + \frac{|i_1-i_2|f^2(j)}{2j^2\left(2-\frac{|i_1-i_2|}{j}\right)}$$

Or l'on sait que, si $\frac{x}{\sqrt{j}} \to\infty$ quand $j\to\infty$, on a :

$$(2)\qquad P(N(0,j)>x) \underset{j\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{\sqrt{j}}{x}\ e^{-\frac{x^2}{2j}}$$

Réécrivant (1) en faisant apparaître (2), on obtient :

$$P\left(N(0,1) > \frac{f(j)}{\sqrt{j}} \; ; \; N(0,1) > \frac{f(j)}{\sqrt{j}} \right) \leq P(N(0,j)>f(j)).\left(\frac{\sqrt{j}}{f(j)\sqrt{2\pi}}\right)\left(\frac{(1+r_{i_1 i_2})^{3/2}}{(1-r_{i_1 i_2})^{1/2}}\right) \exp(-Q')$$

$$\text{où } Q' = \frac{|i_1-i_2| \, f^2(j)}{2j^2\left(2-\frac{|i_1-i_2|}{j}\right)}$$

Utilisant les relations suivantes :

$$*(1+r_{i_1 i_2})^{3/2} \leq 2^{3/2}$$

$$*(1-r_{i_1 i_2})^{-\frac{1}{2}} \leq j^{1/2}$$

on a alors,

$$P\left(N(0,1)> \frac{f(j)}{\sqrt{j}} \; ; \; N(0,1)> \frac{f(j)}{\sqrt{j}} \right) \leq P(N(0,j)>f(j)).\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}.\frac{j}{f(j)}. \exp\left(- \frac{f^2(j)}{4j^2}|i_1-i_2|\right)$$

et ainsi, pour j suffisamment grand :

$$P(N(0,j)> f(j) ; N(0,j) > f(j)) \leq P(N(0,j)>f(j)).\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} (1+o(1)).e^{\frac{-\alpha^2}{4}(1-o(1))|i_1-i_2|}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 5.

<u>Preuve du théorème 4</u> : (suite)

On applique le lemme 4, avec $A_i = [S_{i+j}-S_i>f(j)]$, $n_j \leq i \ll n_{j+1}$

On a :

$$P(A_1^c \cap \ldots . \cap A_V^c) \leq \exp(- \xi V.P(S_j>f(j))+jP(S_j>f(j)))$$

Prenons alors $V = j^{1+\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$ arbitraire.

$$P\left(\sup_{n_j \leq i < n_{j+1}} (S_{i+K(i)} - S_i) < f(j)\right) \leq \left(\exp\left(-\xi j^{1+\varepsilon} P(S_j > f(j)) + jP(S_j > f(j))\right)\right)^{\left[\frac{N}{j^{1+\varepsilon}+j}\right]}$$

$$\text{où} \qquad e^{j/c}(e^{1/c}-1) \leq N \leq e^{j/c}(e^{2/c}-1)$$

$$P\left(\sup_{n_j \leq i < n_{j+1}} (S_{i+K(i)} - S_i) < f(j)\right) \leq \exp\left[\frac{N}{j^{1+\varepsilon}+j}\left(-\xi j^{1+\varepsilon} P(S_j > f(j)) + jP(S_j > f(j))\right)\right]$$

Or $-\xi j^{1+\varepsilon} P(S_j > f(j)) + jP(S_j > f(j)) \sim -\xi j^{1+\varepsilon} P(S_j > f(j))$

$$\exp\left(\frac{N}{1+j^{\varepsilon}}\left(-\xi j^{\varepsilon} P(S_j > f(j)) + P(S_j > f(j))\right)\right) \sim \exp\left(-N\xi . \frac{j^{\varepsilon}}{1+j^{\varepsilon}} P(S_j > f(j))\right).$$

On a donc, pour tout j,

$$P\left(\sup_{n_j \leq i < n_{j+1}} (S_{i+K(i)} - S_i) < f(j)\right) \leq \exp\left(-N\xi \frac{j^{\varepsilon}}{1+j^{\varepsilon}} P(S_j > f(j))\right)$$

Appliquant le lemme 2, on a $P(S_j > f(j)) \sim \psi(t^*)\, e^{-j/c}\, e^{-y}$

On a donc, uniformément en tout $j > j_0$ assez grand :

$$P\left(\sup_{n_j \leq i < n_{j+1}} (S_{i+j} - S_i) < f(j)\right) \leq \exp\left(-\xi\psi(t^*)\, \beta_j (1+o(1)) e^{-y}\right)$$

D'où uniformément en tout $j > j_0$ assez grand :

$$P\left(\sup_{0 \leq \ell \leq j}\ \sup_{n_\ell \leq i < n_{\ell+1}} (S_{i+K(i)} - S_i) < f(j)\right) \leq \exp\left(-\xi\beta_j (\psi(t^*) + o(1)) e^{-y}\right)$$

et ainsi,

$$P\left(T_n < \alpha k - \frac{1}{2t^*}\log(k) + \frac{y}{t^*}\right) \leq \exp\left(-\xi(\psi(t^*) + o(1))\, \beta_n e^{-y}\right)$$

$$\text{avec } e^{1/c} \leq \beta_n + 1 \leq e^{2/c}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 4.

REFERENCES

(1) CHUNG,K.L. and ERDÖS,P. (1952) "On the application of the Borel-Cantelli lemma"; Trans.Amer.Math.Soc.72,179-186.

(2)CSÖRGO,M. (1981) "Gaussian processes, strong approximation: an inter-play " colloque "Aspects statistiques et physiques des processus gaussiens", éditions du C.N.R.S. .

(3)DEHEUVELS,P. and DEVROYE,L. (1983) "Limit laws related to the ERDÖS-RENYI theorem";Tech.report 83-10,L.S.T.A.,Université Paris 6 .

(4)DEHEUVELS,P. and DEVROYE,L. (1984) "Strong laws for the maximal k-spacing when k clog(n)";Z.Wahrsch.verw.Gebiete 66,315-334 .

(5)DEHEUVELS,P. and DEVROYE,L. (1985) "Limit laws of the ERDÖS-RENYI type ", soumis .

(6)DEHEUVELS,P., DEVROYE,L. and LYNCH,J. (1985)"Exact convergence rate in the limit theorems of ERDÖS-RENYI and SHEPP". à paraître Ann.Probab.

(7)PETROV,V.V. (1965) "On the probabilities of large deviations of sums of random variables". Theor.Proba.Appl.10,287-298

(8)SHEPP,L.A. (1964) "A limit theorem concerning moving averages". Ann.Math.Stat. 35,424-428 .

(9)SIMEON M. BERMAN (1962) "A law of large numbers for the maximum in a stationnary Gaussian sequence";Ann.Math.Stat. 33,93-97 .

J.N. BACRO
L.S.T.A., T. 45-55, E.3
Université PARIS VI
4, Place Jussieu
75230 PARIS Cédex 05

Reçu en Avril 1985
Sous forme définitive en Juillet 1985