
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

**Solution des deux problèmes de trigonométrie sphérique énoncés à la
pag. 64 du présent volume et de divers autres problèmes analogues**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 20 (1829-1830), p. 137-151

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1829-1830__20__137_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1829-1830, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Solution des deux problèmes de trigonométrie sphérique énoncés à la pag. 64 du présent volume et de divers autres problèmes analogues ;

Par M. G. P.



AVANT de nous occuper des problèmes énoncés à la pag. 64 du présent volume et de quelques autres problèmes qui se rattachent à ceux-là, nous allons reprendre sommairement, en essayant de la simplifier un peu et de la compléter, une intéressante théorie présentée par M. Maguus, de Berlin, à la pag. 33 du XVI.^{me} volume des *Annales*. Pour cela, nous nous proposerons ce problème :

PROBLÈME. Quelle est la surface conique lieu géométrique de toutes les droites menées par un même point de l'espace, de telle sorte que la somme ou la différence des angles formés par chacune d'elles avec deux droites fixes, menées par ce même point, soit constamment égale à un angle donné de grandeur ?

Solution. Soit pris le point dont il s'agit pour origine des coordonnées rectangulaires, auxquelles nous supposerons d'ailleurs une direction quelconque. Soient alors respectivement a et a' , b et b' , c et c' les cosinus tabulaires des angles que forment les deux droites fixes avec les trois axes ; nous aurons

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad (1)$$

et les équations de ces deux droites seront

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}, \quad (2)$$

Désignant pareillement par A, B, C les cosinus tabulaires des angles que forme la génératrice avec les trois axes, nous aurons

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1, \quad (3)$$

et les équations de cette génératrice seront

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}. \quad (4)$$

Si nous désignons par θ et θ' les angles variables, de grandeur mais constans de somme ou de différence, que forme cette génératrice avec les deux droites fixes, et par 2α leur somme ou leur différence constante, nous aurons

$$\theta + \theta' = 2\alpha,$$

d'où

$$\cos.\theta \cos.\theta' - \sin.\theta \sin.\theta' = \cos.2\alpha,$$

ou, en transposant et quarrant,

$$(\cos.\theta \cos.\theta' - \cos.2\alpha)^2 = \sin.^2\theta \sin.^2\theta' = (1 - \cos.^2\theta)(1 - \cos.^2\theta');$$

ou enfin, en développant, transposant et réduisant,

$$\cos.^2\theta - 2\cos.\theta \cos.\theta' \cos.2\alpha + \cos.^2\theta' = \sin.^2 2\alpha;$$

mais on a

$$\cos.\theta = aA + bB + cC, \quad \cos.\theta' = a'A + b'B + c'C;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\left\{ \begin{array}{l} (aA + bB + cC)^2 \\ + (a'A + b'B + c'C)^2 \end{array} \right\} - 2(aA + bB + cC)(a'A + b'B + c'C)\cos.2\alpha = \sin.^2 2\alpha;$$

mais d'un autre côté les équations (3) et (4) donnent

$$A = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad B = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad C = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

mettant donc ces valeurs dans cette dernière, et chassant les dénominateurs, nous obtiendrons pour l'équation de la surface conique cherchée,

$$\left\{ \begin{array}{l} (ax+by+cz)^2 \\ + (a'x+b'y+c'z)^2 \end{array} \right\} - 2(ax+by+cz)(a'x+b'y+c'z)\cos.2\alpha = (x^2+y^2+z^2)\sin.^2 2\alpha. \quad (5)$$

Ainsi, la surface conique dont toutes les génératrices sont, avec deux droites fixes passant par son sommet, des angles dont la somme ou la différence est constante, est une surface conique du second ordre. Ces deux droites fixes sont ce que M. Magnus a appelé les *lignes focales* de la surface conique; et, par analogie, les deux angles θ et θ' peuvent en être dits les *angles vecteurs*. Il est aisé de voir que, pour une même surface conique de cette nature, c'est la somme ou la différence de ces deux angles qui est constante, suivant que les lignes focales sont prises toutes deux dans une même nappe ou bien l'une dans une nappe et l'autre dans son opposée.

Supposons que les lignes focales, que nous avons supposées quelconques par rapport aux axes des coordonnées, soient toutes deux dans le plan des xz et fassent de différens côtés, avec l'axe des z , des angles égaux que nous désignerons par γ ; nous aurons ainsi

$$a = +\sin \gamma, \quad b = 0, \quad c = \cos. \gamma,$$

$$a' = -\sin \gamma, \quad b' = 0, \quad c' = \cos. \gamma;$$

au moyen de quoi l'équation (5), de la surface conique, deviendra simplement

$$2x^2\sin.^2 \gamma + 2z^2\cos.^2 \gamma + 2(x^2\sin.^2 \gamma - z^2\cos.^2 \gamma)\cos 2\alpha = (x^2+y^2+z^2)\sin.^2 2\alpha. \quad (6)$$

Si, pour avoir les traces de la surface conique sur le plan des yz , on fait $x=0$, cette équation deviendra

$$2z^2 \text{Cos.}^2 \gamma (1 - \text{Cos.} 2\alpha) = (y^2 + z^2) \text{Sin.}^2 2\alpha,$$

ou bien encore

$$z^2 \text{Cos.}^2 \gamma \text{Sin.}^2 \alpha = (y^2 + z^2) \text{Sin.}^2 \alpha \text{Cos.}^2 \alpha;$$

ou encore, en réduisant,

$$z^2 \text{Cos.}^2 \gamma = (y^2 + z^2) \text{Cos.}^2 \alpha,$$

ce qui donnera

$$y^2 = \frac{\text{Cos.}^2 \gamma - \text{Cos.}^2 \alpha}{\text{Cos.}^2 \alpha} z^2;$$

équation commune aux deux traces qui, comme l'on voit, font, de part et d'autre, des angles égaux avec l'axe des z . Désignant par β l'un de ces angles, on aura

$$\text{Tang.}^2 \beta = \frac{\text{Cos.}^2 \gamma - \text{Cos.}^2 \alpha}{\text{Cos.}^2 \alpha};$$

d'où

$$\text{Cos.}^2 \beta = \frac{1}{1 + \text{Tang.}^2 \beta} = \frac{\text{Cos.}^2 \alpha}{\text{Cos.}^2 \gamma};$$

ce qui donne

$$\text{Cos.} \alpha = \pm \text{Cos.} \beta \text{Cos.} \gamma,$$

ce qui lie entre eux les trois angles α, β, γ .

En introduisant dans l'équation (6), pour $\text{Sin.}^2 \gamma$ et $\text{Cos.}^2 \gamma$, leurs valeurs

$$\frac{\text{Cos.}^2 \beta - \text{Cos.}^2 \alpha}{\text{Cos.}^2 \beta} \quad \text{et} \quad \frac{\text{Cos.}^2 \alpha}{\text{Cos.}^2 \beta},$$

donnée par cette dernière équation et remplaçant respectivement $\text{Cos.}2\alpha$ et $\text{Sin.}2\alpha$ par leurs équivalens $\text{Cos.}^2\alpha - \text{Sin.}^2\alpha$ et $2\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha$, on la réduit facilement à cette forme

$$\left(\frac{x}{z\text{Tang.}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{z\text{Tang.}\beta}\right)^2 = 1;$$

or, par un choix convenable des axes, l'équation de toute surface conique du second ordre est aussi réductible à cette forme; donc réciproquement: *toute surface conique du second ordre est le lieu géométrique de toutes les droites qui font, avec deux droites fixes, menées par son sommet, des angles dont la somme ou la différence est constante*, suivant qu'on prend ces deux droites dans l'une des nappes ou bien qu'on prend l'une dans une nappe et l'autre dans son opposée. Les deux angles 2α et 2β peuvent être dits les *angles diamétraux principaux* de la surface conique, et la droite qui divise l'angle de ses lignes focales en deux parties égales peut en être dite l'*axe*.

L'équation de la surface conique étant sous la forme (5), les axes des coordonnées sont quelconques par rapport à elle; en conséquence nous pouvons disposer des indéterminées que renferme cette équation pour amener la surface conique à toucher le plan des xz suivant l'axe des z . Il faudra pour cela qu'en posant $y=0$ dans cette équation, elle se réduise à $x^2=0$; mais elle se réduit alors à

$$\left. \begin{aligned} &(a^2 - 2aa'\text{Cos.}2\alpha + a'^2 - \text{Sin.}^2 2\alpha)x^2 \\ &+ 2\{(ac + a'c') - (ac' + ca')\text{Cos.}2\alpha\}xz \\ &+ (c^2 - 2cc'\text{Cos.}2\alpha + c'^2 - \text{Sin.}^2 2\alpha)z^2 \end{aligned} \right\} = 0;$$

donc, pour que la surface conique touche le plan des xz suivant l'axe des z , il faut qu'on ait, à la fois,

$$ac + a'c' = (ac' + ca')\text{Cos.}2\alpha;$$

$$c^2 - 2cc' \cos. 2\alpha + c'^2 = \text{Sin.}^2 2\alpha ;$$

éliminant α entre ces deux équations, on aura

$$(c^2 - c'^2) \{ a^2(1 - c'^2) - a'^2(1 - c^2) \} = 0 ;$$

or comme, dans cet état de choses, la situation de la surface conique demeure encore indéterminée, on peut toujours la disposer de telle sorte que c et c' soient inégaux ou que $c^2 - c'^2$ ne soit pas nul; donc on doit avoir généralement alors

$$a^2(1 - c'^2) = a'^2(1 - c^2),$$

ou bien

$$\frac{a^2}{1 - c^2} = \frac{a'^2}{1 - c'^2} ;$$

ou encore (1)

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{a'^2}{a'^2 + b'^2} ;$$

or, ce sont précisément là les carrés des cosinus des angles que forment les plans des angles vecteurs avec le plan des xz , c'est-à-dire, avec le plan tangent; et, comme d'ailleurs ces deux plans ne sauraient se confondre, ils doivent faire, avec le plan tangent, des angles supplémens l'un de l'autre, c'est-à-dire, des angles égaux pris de différens côtés. On a donc cette autre proposition :

Les plans tangent et normal à une surface conique du second ordre, suivant une génératrice quelconque, divisent en deux parties égales les quatre angles dièdres que forment, par leur rencontre, les plans des angles vecteurs de cette génératrice ().*

(*) On peut suivre une marche absolument analogue à celle-ci, dans la discussion analytique des propriétés des sections coniques, relativement à leurs

Si l'on conçoit une sphère de rayon quelconque, ayant même centre que la surface conique, on conclura de ce qui précède les propositions suivantes :

foyers ; comme cette marche n'est pas dépourvue d'une certaine élégance, et comme elle peut offrir un exercice utile aux commençans, nous l'indiquons ici rapidement.

Soient (α, β) , (α', β') deux points pris arbitrairement sur le plan de deux axes rectangulaires, et proposons-nous d'assigner le lieu géométrique de tous les points (x, y) de ce plan dont la somme ou la différence des distances aux points donnés est égale à une longueur constante $2a$,

Soient r et r' ces deux distances, nous aurons

$$r \pm r' = 2a ;$$

d'où en quarrant et transposant

$$r^2 + r'^2 - 4a^2 = \mp 2rr' ;$$

quarrant de nouveau, il viendra

$$(r^2 - r'^2)^2 - 8a^2(r^2 + r'^2) + 16a^4 = 0 ;$$

Or, on a

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2, \quad r'^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 ;$$

et

$$r^2 - r'^2 = -2(\alpha - \alpha')x - 2(\beta - \beta')y + (\alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2),$$

$$r^2 + r'^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2(\alpha + \alpha')x - 2(\beta + \beta')y + (\alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2) ;$$

en substituant donc, nous aurons, pour l'équation du lieu cherché,

$$\left. \begin{aligned} & 4\{(\alpha - \alpha')^2 - 4a^2\}x^2 + 4\{(\beta - \beta')^2 - 4a^2\}y^2 + 8(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')xy \\ & - 4\{(\alpha - \alpha')(\alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2) - 4(\alpha + \alpha')a^2\}x \\ & - 4\{(\beta - \beta')(\alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2) - 4(\beta + \beta')a^2\}y \\ & + \{(\alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2)^2 - 8(\alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2)a^2 + 16a^4\} \end{aligned} \right\} = 0. \quad (1)$$

c'est donc une ligne du second ordre.

I. *Le lieu géométrique de tous les points de la surface d'une sphère dont la somme ou la différence des distances sphériques à deux points fixes de cette sphère est constante, est la courbe à double courbure, intersection de cette sphère avec une surface conique du second ordre, qui a le même centre qu'elle.*

Si l'on suppose que les deux points fixes sont sur l'axe des x , à une distance c de part et d'autre de l'origine, on aura

$$\alpha=c, \quad \alpha'=-c, \quad \beta=0, \quad \beta'=0;$$

au moyen de quoi l'équation (1) deviendra simplement

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2), \quad (2)$$

en y faisant $x=0$ et désignant la valeur correspondante de y^2 par $\pm b^2$, le signe étant choisi de manière à avoir b réel, il viendra

$$c^2=a^2 \pm b^2;$$

introduisant cette valeur de c^2 dans l'équation (2), elle deviendra

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

et l'on sait que l'équation de toute ligne du second ordre qui a un centre est réductible à cette forme.

Ainsi, le lieu géométrique de tous les points d'un plan dont la somme ou la différence des distances à deux points fixes, pris sur ce plan, est constante, est une ligne du second ordre pourvue d'un centre; et réciproquement, toute ligne du second ordre pourvue d'un centre est un pareil lieu.

La courbe exprimée par l'équation (1) étant quelconque par rapport aux axes, nous pourrions profiter des indéterminées que renferme cette équation pour amener cette courbe à toucher l'axe des x à l'origine. Il faudra pour cela qu'en faisant $y=0$ dans l'équation (1) elle se réduise à $x^2=0$; or, elle devient ainsi

Réciproquement : toute courbe à double courbure , intersection d'une sphère avec une surface conique du second ordre de même centre , est le lieu géométrique de tous les points de cette sphère dont la somme ou la différence des distances sphériques à deux points fixes de sa surface est une quantité constante.

$$\left. \begin{aligned} & 4\{(\alpha-\alpha')^2-4a^2\}x^2 \\ & -4\{(\alpha-\alpha')(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2)-4(\alpha+\alpha')a^2\}x \\ & +\{(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2)^2-8(\alpha^2+\alpha'^2+\beta^2+\beta'^2)a^2+16a^4\} \end{aligned} \right\} = 0 ;$$

afin donc que l'axe des x soit tangent à la courbe à l'origine , il faudra qu'on ait , à la fois ,

$$\begin{aligned} & (\alpha-\alpha')(\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2) = 4(\alpha+\alpha')a^2 , \\ & (\alpha^2-\alpha'^2+\beta^2-\beta'^2)^2 - 8(\alpha^2+\alpha'^2+\beta^2+\beta'^2)a^2 + 16a^4 = 0 ; \end{aligned}$$

éliminant a entre ces deux équations , l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$(\alpha^2\beta'^2 - \alpha'^2\beta^2)(\alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2) = 0 ,$$

ou sous celle-ci

$$(r^2 - r'^2)(\alpha^2\beta'^2 - \alpha'^2\beta^2) = 0 .$$

Or comme , avec ces conditions même , la situation de la courbe demeure encore indéterminée , on peut toujours faire en sorte que r et r' soient inégaux , ou que $r^2 - r'^2$ ne soit pas nul ; donc on doit avoir généralement alors

$$\alpha^2\beta'^2 = \alpha'^2\beta^2 , \quad \text{ou bien} \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\beta'^2}{\alpha'^2} ;$$

or , ce sont précisément là les carrés des tangentes tabulaires des angles que font les deux rayons vecteurs de l'origine avec l'axe des x , c'est-à-dire , des angles que font les deux rayons vecteurs d'un point de la courbe avec

Cette courbe à double courbure est constamment composée de deux parties entièrement fermées, extérieures l'une à l'autre, contenant chacune deux foyers; elle peut être dite *ellipse ou hyperbole sphérique*, suivant qu'on choisit les deux foyers dans l'une de ces deux parties ou qu'au contraire on en prend un dans chacune. On conçoit d'ailleurs qu'il ne saurait y avoir ici de parabole.

II. *Les arcs de grands cercles tangent et normal en un quelconque des points de l'ellipse ou de l'hyperbole sphérique divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les deux arcs vecteurs de ce point.*

On pourra donc décrire une ellipse ou une hyperbole sphérique, soit par points soit d'un mouvement continu; on pourra lui mener une tangente ou une normale par l'un des points de son périmètre, ou encore lui mener des tangentes par un point extérieur, par des procédés tout à fait analogues aux procédés de géométrie plane à l'aide desquels on résout les mêmes problèmes par rapport aux sections coniques.

Si l'on suppose que le rayon de la sphère croît jusqu'à devenir infini, on retombera sur toutes les propriétés connues des sections coniques pourvues de centre; d'où, en supposant ensuite que le grand axe devient infini, on passera à celles de la parabole. La courbe sphérique à double courbure deviendra d'ailleurs ellipse ou hyperbole, suivant que le plan tangent avec lequel la surface de la sphère tendra à se confondre aura son point de contact au centre de la courbe sphérique considérée comme ellipse, ou, au con-

sa tangente en ce point; et, comme d'ailleurs ces deux angles ne sauraient être égaux, il s'ensuit qu'ils doivent être supplément l'un de l'autre ou qu'ils doivent être égaux de différens côtés.

Ainsi, dans toute ligne du second ordre pourvue d'un centre, la tangente et la normale en un point quelconque divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les deux rayons de ce point.

J. D. G.

traire, au centre de cette courbe considérée comme hyperbole (*).

Ces préliminaires ainsi établis, passons aux questions proposées et aux autres qui s'y rattachent, et dont la solution peut être facilement déduite de celle d'un problème général que nous allons d'abord nous proposer.

PROBLÈME GÉNÉRAL. *Quel est le point de la surface d'une sphère dont la somme des distances sphériques aux circonférences de trois cercles tracés sur cette sphère est la moindre possible ?*

Solution. Soient C, C', C'' les pôles des trois cercles et soit P le point que l'on suppose résoudre le problème. Il est d'abord clair que les arcs de grands cercles qui joindront le point P aux trois circonférences devront être les plus courts qu'on puisse leur mener de ce point, et qu'ainsi il faudra que les prolongemens de ces arcs passent par les pôles respectifs de ces trois cercles. Soient A, A', A'' les points où ces arcs rencontrent leurs circonférences, de manière que la somme d'arcs $PA + PA' + PA''$ soit la moindre possible. Si, d'un autre point Q de la surface de la sphère, on veut conduire à ces mêmes circonférences des arcs de grands cercles dont la somme soit la moindre possible, il faudra pareillement que les prolongemens de ces arcs passent par leurs pôles, et si l'on désigne par B, B', B'' les points où ils rencontrent leurs circonférences; pour que le point P résolve effectivement le problème, il faudra qu'on ait, quel que soit Q ,

$$PA + PA' + PA'' < QB + QB' + QB'' ;$$

(*) Tout semble sans cesse nous ramener, comme malgré nous, vers cette pensée philosophique que la véritable géométrie, la géométrie fondamentale pourrait fort bien être la géométrie sphérique, dont alors la géométrie plane ne serait plus qu'un cas particulier, un pur accident.

mais on a aussi, quel que soit Q , $AC = BC$, $A'C' = B'C'$, $A''C'' = B''C''$, et, par conséquent,

$$AC + A'C' + A''C'' = BC + B'C' + B''C'' ;$$

donc, en ajoutant, on devra avoir aussi, quel que soit Q ,

$$(PA + AC) + (PA' + A'C') + (PA'' + A''C'') < (QB + BC) + (QB' + B'C') + (QB'' + B''C''),$$

ou plus simplement

$$PC + PC' + PC'' < QC + QC' + QC'' ;$$

ce qui nous apprend que la somme des distances sphériques du point cherché P aux pôles des trois cercles doit être la moindre possible.

Supposons donc qu'il en soit ainsi, et soit décrite une ellipse sphérique ayant les points C' et C'' pour foyers et passant par le point P ; en supposant le point Q sur le périmètre de cette ellipse, on aura

$$PC' + PC'' = QC' + QC'' ;$$

d'où il suit, en retranchant, qu'on devra avoir

$$PC < QC ;$$

donc PC devra être normal à l'ellipse sphérique en P , et devra conséquemment diviser en deux parties égales l'angle $C'PC''$ des deux rayons vecteurs PC' et PC'' . Or, comme on pourrait raisonner tour à tour sur chacun des points C' et C'' , comme nous venons de le faire sur le point C , il s'ensuit que chacun des arcs PC , PC' , PC'' doit diviser en deux parties égales l'angle formé par les deux autres; ce qui revient à dire que ces trois arcs doivent former des angles égaux autour du point P . On a donc le théorème général que voici :

PREMIER THÉORÈME GÉNÉRAL. *Le point de la surface d'une sphère dont la somme des distances sphériques aux circonférences de trois cercles tracés sur cette sphère, est la moindre possible, doit être tellement situé que les arcs de grands cercles qui le joindront aux pôles respectifs de ces trois cercles, forment autour de lui des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

Si l'on conçoit des cônes droits ayant leur centre commun au centre de la sphère, et passant respectivement par ces trois cercles, on déduira de là cet autre théorème :

DEUXIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL. *La droite qui, partant du sommet commun de trois cônes droits, fait avec les surfaces de ces cônes des angles dont la somme est la moindre possible, doit être tellement située que les plans conduits par cette droite, et par les axes des trois cônes, forment autour d'elle des angles dièdres égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

Si l'on suppose, dans le premier théorème général, que le rayon de la sphère croît jusqu'à devenir infini, le théorème ne cessera pas d'être vrai, et alors il se changera en celui-ci :

TROISIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL. *Le point du plan de trois cercles dont la somme des distances à leurs circonférences est la moindre possible, doit être tellement situé que les droites qui le joindront aux centres de ces trois cercles, forment autour de lui des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

Présentement, comme la vérité de ces théorèmes est indépendante de la grandeur des cercles ou de l'ouverture des cônes qu'on y considère, on pourra, sans qu'ils cessent d'être vrais, supposer que tous ou partie des cercles ou des cônes se réduisent à des points ou à des droites. On pourra aussi supposer, dans le premier, que tous ou partie des cercles deviennent des grands cercles de la sphère : dans le second, que tous ou partie des cônes deviennent des plans, et enfin, dans le troisième, que tous ou partie des cercles deviennent des droites indéfinies. En épuisant tou-

tes les combinaisons que peuvent offrir ces diverses hypothèses , on reconnaîtra que chacun de ces théorèmes en renferme implicitement dix, servant à résoudre un égal nombre de problèmes (*). Mais il faut remarquer que , tandis que les problèmes qui répondent aux deux premiers sont généralement tous possibles , plusieurs de ceux qui répondent au troisième sont généralement impossibles , à moins qu'ils ne tombent dans l'indétermination. Comme l'examen des cas particuliers ne saurait , d'après ce qui précède , offrir aucune difficulté , nous nous bornerons ici à énoncer ceux qui avaient été proposés , et qui ont donné naissance à cet essai.

I. *Le point de l'intérieur d'un triangle sphérique dont la somme des distances sphériques à ses trois sommets est la moindre possible , doit être tellement situé que les arcs de grands cercles , qui le joindront à ces mêmes sommets , forment , autour de lui , des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

II. *Le point de l'intérieur d'un triangle sphérique dont la somme des distances sphériques à ses trois côtés est la moindre possible , doit être tellement situé que les arcs de grands cercles qui le joindront aux pôles de ces mêmes côtés , sommets de son supplémentaire , forment autour de lui trois angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

Leurs analogues dans l'espace sont les suivans :

I. *La droite qui , menée par le sommet d'un angle trièdre , fait avec ses arêtes des angles dont la somme est la moindre possible , doit être tellement située qu'en la joignant à ces mêmes arêtes par trois plans , ces plans forment , autour d'elle , des angles dièdres égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

(*) Les dix problèmes qui répondent au troisième théorème , ainsi que beaucoup d'autres du même genre , ont été traités dans ce recueil (tom. I , pag. 375).

II. *La droite qui, menée par le sommet d'un angle trièdre, fait avec ses faces des angles dont la somme est la moindre possible, doit être tellement située qu'en la joignant aux perpendiculaires conduites par le sommet à ces mêmes faces par trois plans, ces plans forment, autour d'elle, des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.*

L'analogie du premier de ces théorèmes, dans la géométrie plane, est le suivant :

Le point de l'intérieur d'un triangle rectiligne, dont la somme des distances à ses trois sommets est la moindre possible, est le point d'où l'on verrait ses trois côtés sous des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit ().*

Quant à l'analogie plan du second problème, il est indéterminé si le triangle est équilatéral, et, dans le cas contraire, il est impossible en ce sens que la somme des distances d'un point à ses trois côtés, prises avec leurs signes, peut avoir toutes les valeurs entre l'infini positif et l'infini négatif.

Lyon, le 17 d'août 1829.

(*) Quelqu'un, sans doute par trop de précipitation, a donné, pour solution du premier problème sphérique, le point où se coupent les arcs de grands cercles qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés. S'il en était ainsi, il s'ensuivrait que le point de l'intérieur d'un triangle rectiligne, dont la somme des distances à ses trois sommets serait la moindre possible, devrait être le centre de gravité de la surface de ce triangle; ce qui est généralement faux, d'après ce qui précède.

Il y a plus de quarante ans que ce dernier problème m'a été proposé par mon professeur, au collège de Nancy où j'étudiais alors. Je l'ai moi-même proposé, en 1810, dans le premier volume du présent recueil où il a été résolu et généralisé (pag. 285) par M. Tédénat, correspondant de l'Institut, alors recteur à Nismes. Je devais donc croire que cela courait à peu près les rues, lorsque je l'ai vu proposer de nouveau par M. Noël, dans le tom. V.^{me} de la *Correspondance* de Bruxelles, où il se trouve résolu (pag. 237) par M. Heichen.

J. D. G.