
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

PLANA

**Analyse transcendante. Sur le développement des puissances
des cosinus en cosinus d'arcs multiples**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 84-89

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__84_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1820-1821, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

*Sur le développement des puissances des cosinus en
cosinus d'arcs multiples ;*

Par M. PLANA , professeur d'astronomie à l'université de
Turin.

~~~~~

**D**ANS le troisième volume de son *Calcul intégral* ( 2.<sup>e</sup> édit. , pag. 605 et suiv. ) , M. Lacroix a exposé les difficultés que présente le développement d'une puissance quelconque du cosinus d'un arc en série procédant suivant les cosinus des multiples de cet arc ; développement qu'on avait cru exact pour toutes les valeurs de l'exposant , jusqu'à l'époque où M. Poisson , dans le 2.<sup>e</sup> volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique* ; signala l'erreur où l'on était demeuré jusqu'alors sur ce sujet.

Il m'a paru que ce point de doctrine pourrait être facilement éclairci de la manière suivante.

En posant

$$u = \text{Cos.}x + \sqrt{-1}\text{Sin.}x$$

$$v = \text{Cos.}x - \sqrt{-1}\text{Sin.}x ,$$

on a

$$u + v = 2\text{Cos.}x ,$$

d'où

$$(u+v)^m$$

$$(u+v)^m = 2^m \cdot \text{Cos.}^m x ;$$

donc, en développant le binôme, on aura

$$2^m \cdot \text{Cos.}^m x = u^m + \frac{m}{1} u^{m-2} \cdot u v + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} u^{m-4} \cdot u^2 v^2 + \dots ;$$

en remarquant que  $uv = 1$ , et que

$$u^n = \text{Cos.} nx + \sqrt{-1} \text{Sin.} nx ;$$

et faisant, pour abrégé,

$$A = \text{Cos.} mx + \frac{m}{1} \text{Cos.} (m-2)x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \text{Cos.} (m-4)x + \dots ;$$

$$B = \text{Sin.} mx + \frac{m}{1} \text{Sin.} (m-2)x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \text{Sin.} (m-4)x + \dots ;$$

on aura

$$2^m \cdot \text{Cos.}^m x = A + B \sqrt{-1} . \quad (1)$$

Si, au lieu de développer  $(u+v)^m$ , on développe son équivalent  $(v+u)^m$ , au lieu de l'équation (1), on aura la suivante

$$2^m \cdot \text{Cos.}^m x = A - B \sqrt{-1} . \quad (2)$$

Les équations (1, 2) ne sauraient s'accorder qu'autant qu'on aura généralement  $B=0$ . Or, il est aisé de prouver qu'effectivement cette fonction est toujours nulle, à l'exception d'un cas que la démonstration même met en évidence. En effet, si l'on substitue les exponentiels aux sinus, l'on voit d'un coup-d'œil que l'on a

$$B = \frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} (1 + e^{-2x\sqrt{-1}})^m - \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} (1 + e^{2x\sqrt{-1}})^m.$$

Mais nous avons

$$e^{\pm 2x\sqrt{-1}} = \text{Cos.} 2x \pm \sqrt{-1} \text{Sin.} 2x,$$

ou bien

$$e^{\pm 2x\sqrt{-1}} = 2\text{Cos.}^2 x \pm 2\sqrt{-1} \text{Sin.} x \text{Cos.} x;$$

partant, nous aurons

$$B = \frac{2^m \text{Cos.}^m x \cdot e^{mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} (\text{Cos.} x - \sqrt{-1} \text{Sin.} x)^m - \frac{2^m \text{Cos.}^m x \cdot e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} (\text{Cos.} x + \sqrt{-1} \text{Sin.} x)^m.$$

Il suit de là que, en vertu des deux équations

$$e^{\pm mx\sqrt{-1}} = \text{Cos.} mx \pm \sqrt{-1} \text{Sin.} mx$$

$$(\text{Cos.}x + \sqrt{-1}\text{Sin.}x)^m = \text{Cos.}mx + \sqrt{-1}\text{Sin.}mx ;$$

on a

$$B = \frac{2^m \text{Cos.}mx}{2\sqrt{-1}} (\text{Cos.}mx + \sqrt{-1}\text{Sin.}mx)(\text{Cos.}mx - \sqrt{-1}\text{Sin.}mx)$$

$$- \frac{2^m \text{Cos.}mx}{2\sqrt{-1}} (\text{Cos.}mx - \sqrt{-1}\text{Sin.}mx)(\text{Cos.}mx + \sqrt{-1}\text{Sin.}mx) ;$$

c'est - à - dire  $B=0$  , quel que soit l'exposant  $m$  , entier ou fractionnaire.

Cette conclusion cesse pourtant d'être vraie , lorsque  $x=\pi$  , car alors on a

$$\text{Sin}(m-2n)x = \text{Sin.}(m-2n)\pi = \text{Sin.}m\pi ;$$

$n$  étant un nombre entier positif quelconque ; donc , en revenant sur nos pas , la première transformée sera

$$B = \frac{e^{m\pi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} (1+1)^m - \frac{e^{-m\pi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} (1+1)^m ;$$

puisque

$$e^{-2\pi\sqrt{-1}} = e^{+2\pi\sqrt{-1}} = \text{Cos.}2\pi + \sqrt{-1}\text{Sin.}2\pi = 1 .$$

Ainsi nous aurons

$$B = 2^m \text{Sin.}m\pi ,$$

ce qui donnera ces deux équations

$$2^m \cdot \text{Cos.}^m x = A' + 2^m \sqrt{-1} \text{Sin.}^m x ;$$

$$2^m \cdot \text{Cos.}^m x = A' - 2^m \sqrt{-1} \text{Sin.}^m x ;$$

$A'$  étant ce que devient  $A$  lorsque l'on y fait  $x = \pi$ .

Lorsque  $m$  est un nombre entier, positif ou négatif, l'on a  $\text{Sin.}^m \pi = 0$ , et par conséquent ces deux valeurs de  $2^m \text{Cos.}^m x$  coïncident; mais, dans le cas où  $m$  est fractionnaire, il faut considérer les seconds membres de deux équations précédentes comme donnant deux des racines de l'équation

$$y^{\frac{1}{m}} - 2 \text{Cos.} x = 0 ;$$

laquelle revient à

$$y^{\frac{1}{m}} + 2 = 0 ;$$

Il est d'ailleurs facile de voir qu'il n'y a en cela aucune contradiction; car, dans le cas de  $x = \pi$ , on a

$$A' = \text{Cos.}^m \pi \left( 1 + \frac{m}{1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} + \dots \right)$$

ou bien

$$A' = (1+1)^m \cdot \text{Cos.}^m \pi = 2^m \cdot \text{Cos.}^m \pi ;$$

ainsi, les deux équations précédentes donnent

$$2^m \text{Cos.}^m \pi = 2^m (\text{Cos.} m\pi + \sqrt{-1} \text{Sin.} m\pi) ,$$

$$2^m \text{Cos.}^m \pi = 2^m (\text{Cos.} m\pi - \sqrt{-1} \text{Sin.} m\pi) :$$

Donc, en remplaçant  $m$  par la fraction  $\frac{p}{q}$ , il viendra

$$\sqrt[q]{(\text{Cos.} \pi)^p} = \text{Cos.} \frac{p\pi}{q} \pm \sqrt{-1} \text{Sin.} \frac{p\pi}{q} = \sqrt[q]{(-1)^p}$$

ce qui est un résultat exact, lorsque  $p$  et  $q$  sont des nombres entiers, comme nous le supposons.

M. Defflers avait aussi reconnu que la fonction désignée par  $B$  doit être nulle, en général; mais la démonstration que nous en donnons ici nous paraît directe et plus simple (voyez le volume cité, pag. 621).

---