ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Ahmed Hamydy

L'existence et le comportement asymptotique des solutions d'ondes progressives pour une équation fortement non linéaire

Volume 15, n° 1 (2008), p. 29-41.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2008__15_1_29_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

Annales mathématiques Blaise Pascal **15**, 29-41 (2008)

L'existence et le comportement asymptotique des solutions d'ondes progressives pour une équation fortement non linéaire

Ahmed Hamydy

Résumé

Dans ce papier on étudie l'existence et le comportement asymptotique des solutions de type ondes progressives à propagations finies de l'équation $U_t = A\left(|U_x|^{p-2}\,U_x\right)_x + KU^q$. On prouve que ces solutions existent si et seulement si $q < 1$ et $c < 0$ ou bien $q \leq p-1$ et $c > 0$. On donne aussi le comportement asymptotique de ces solutions.

The existence and the asymptotic behavior of traveling waves solutions for a strongly nonlinear equation

Abstract

In this paper we study the existence and the asymptotic behavior of traveling waves solutions for the equation $U_t = A\left(|U_x|^{p-2}\,U_x\right)_x + KU^q$. We prove that these solutions exist if and only if $q < 1$ and $c < 0$ or $q \leq p-1$ and $c > 0$. We introduce also the asymptotic behavior of these solutions.

1. Introduction

Ce travail porte sur l'étude de l'équation de diffusion- absorption,

$$U_t = A\left(|U_x|^{p-2}\,U_x\right)_x + KU^q, \tag{1.1}$$

où $p > 2$, $A > 0$, $K \leq 0$ et $q > 0$. Ce type d'équation est un modèle simple des équations qui interviennent en fluide non- Newtonien, en glaciologie...(Cf par exemple [4] et [9]).
On va s'intéresser à des solutions particulières de l'équation (1.1), à savoir,

Mots-clés : Diffusion; Absorption; fortement non linéaire; Solution d'onde; Comportement asymptotique.
Classification math. : 35K55, 35K65.

les solutions d'ondes finies sur $D = \{(x,t)/ -\infty < x < +\infty,\ t > 0\}$ sous la forme

$$U(x,t) = \varphi(ct - x), \tag{1.2}$$

avec φ est une fonction strictement positive non nulle et c un réel. S'il existe un réel ξ_0 tel que $\varphi = 0$ sur $]-\infty, \xi_0]$ et $\varphi > 0$ sur $]\xi_0, +\infty[$, φ est dite solution d'onde finie à vitesse c. D'autre part, si φ est définie sur un intervalle $]-\infty, z[$ alors φ est dite solution d'onde locale.
If faut signaler que le cas $p = 2$ a été realisé par KPP [8], aussi si on remplace l'opérateur $\left(|U_x|^{p-2} U_x\right)_x$ par $(U^m)_{xx}$ on obtient une équation des milieux poreux qui a été largement étudiée par plusieurs auteurs (cf [1], [2], [3], [5], [7], [10] et [11]).
Lorsque $K = 0$ et $A > 0$, une solution d'onde finie existe si et seulement si $c > 0$ et elle est donné explicitement par

$$U(x,t) = \left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{(p-1)/(p-2)} c^{1/(p-2)}(ct - x)_+^{(p-1)/(p-2)}. \tag{1.3}$$

Notre but ici est d'étudier le cas où $K > 0$ et $A > 0$ en appliquant une méthode du plan de phase utilisée pour le cas des milieux poreux dans plusieurs papiers notamment dans [1] et [7]. Par un changement d'echelle on peut prendre $A = 1$ et $K = 1$. En effet, posons

$$v(x,t) = \alpha U(\beta x, \gamma t), \tag{1.4}$$

avec

$$\alpha = \begin{cases} (-A/K)^{1/(p-2)} & \text{si } q = 1, \\ (-K)^{1/(q-1)} & \text{si } q \neq 1, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 1, \\ A^{1/p}/(-K)^{(p-2)/(p(q-1))} & \text{si } q \neq 1, \end{cases} \tag{1.6}$$

et

$$\gamma = \begin{cases} -1/K & \text{si } q = 1, \\ 1 & \text{si } q \neq 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

v vérifie l'équation suivante

$$v_t = \left(|v_x|^{p-2} v_x\right)_x - v^q. \tag{1.8}$$

Pour chaque $c \in \mathbb{R}^*$, on note A_c la solution de l'équation algébrique $X^{-1/(p-1)} - X + c = 0$; puis on definit les constantes suivantes :

$$n(p,q) = (q+1)(p-1)/p\ , \tag{1.9}$$

$$M_0 = \begin{cases} c & \text{si } n(p,q) > 1, \\ A_c & \text{si } n(p,q) = 1, \\ n(p,q)^{(1-p)/p} & \text{si } n(p,q) < 1, \end{cases} \tag{1.10}$$

et

$$M_\infty = \begin{cases} c & \text{si } n(p,q) < 1, \\ A_c & \text{si } n(p,q) = 1, \\ n(p,q)^{(1-p)/p} & \text{si } n(p,q) > 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

On a les résultats suivants :

Théorème 1.1. *Soit $c \in \mathbb{R}^*$. L'équation (1.8) admet une solution d'onde finie si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(1) $c < 0$ *et* $q < 1$.

(2) $c > 0$ *et* $q \leq p - 1$.

Théorème 1.2. *Soit φ une solution d'onde finie à vitesse c de l'équation (1.8). Alors $\xi^{-\alpha}\varphi(\xi)$ converge, lorsque ξ tend vers 0, vers $K = \alpha^{-\alpha}M^{\alpha/(p-1)}$, où :*

(1) *Pour $c > 0$ ou $(n(p,q)-1)c < 0$, $\alpha = \dfrac{p-1}{p - \inf\{n(p,q),1\} - 1}$ et $M = M_0$.*

(2) *Pour $c < 0$ et $n(p,q) < 1$, $\alpha = 1/(1-q)$ et $M = (-c)^{1-p}$.*

Théorème 1.3. *Soit φ une solution d'onde finie à vitesse c de l'équation (1.8).*

(1) *Pour $c > 0$ ou $(n(p,q)-1)c < 0$, on a :*

(a) *$n(p,q) = p-1$, alors $\xi^{-1}Log(\varphi(\xi))$ converge vers la constante $M_\infty^{1/(p-1)}$, lorsque ξ tend vers ∞.*

(b) *$n(p,q) < p-1$, alors $\xi^{-\alpha}\varphi(\xi)$ converge vers la constante $\alpha^{-\alpha}M_\infty^{\alpha/(p-1)}$, lorsque ξ tend vers ∞, avec*

$$\alpha = \frac{p-1}{p - \sup\{n(p,q),1\} - 1}.$$

(2) *Pour $c < 0$ et $n(p,q) < 1$, $\xi^{-\alpha}\varphi(\xi)$ converge, lorsque ξ tend vers ∞, vers $(-c/(1-q))^{-1/(1-q)}$.*

2. Résultats préliminaires et preuve des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3.

On considère l'équation (1.6) avec $p > 2$ et $q > 0$. On va chercher les solutions sous la forme $v(x,t) = \varphi(ct - x)$, $c \in \mathbb{R}^*$, ce qui est équivalent à la résolution de l'équation,

$$c\varphi' = \left(|\varphi'|^{p-2}\varphi'\right)' - \varphi^q. \tag{2.1}$$

Si φ est une solution d'onde finie telle que $\varphi = 0$ sur $]-\infty, z_0[$, par translation $z \to z - z_0$, on peut supposer $\varphi(0) = 0$. En intégrant (2.1) on obtient $\varphi'(0) = 0$. Par conséquent, la recherche des solutions d'ondes finies se restreint à l'étude du problème : Trouver un réel c et une fonction φ tels que

$$\begin{cases} c\varphi' = \left(|\varphi'|^{p-2}\varphi'\right)' - \varphi^q \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Dans un premier lieu, on va prouver un résultat de monotonie qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2.1. *Soit φ une solution d'onde finie locale à vitesse c de l'équation (1.8), définie sur un intervalle maximal d'existence I. Alors φ est strictement croissante sur $I \cap]0, +\infty[$.*

Démonstration. La démonstration va se faire par contradiction, elle dépend forcément du signe de c. Pour cela, on distingue deux cas.
Cas 1. $c > 0$. Soit E la fonction d'énergie définie par

$$E(\xi) = \frac{p-1}{p}|\varphi'|^p(\xi) - \frac{1}{q+1}\varphi^{q+1}(\xi), \quad \forall \xi \in I. \tag{2.3}$$

Alors elle vérifie

$$E'(\xi) = c(\varphi')^2(\xi), \qquad \forall \xi \in I, \tag{2.4}$$

il en résulte que E est croissante.

Supposons maintenant que φ n'est pas strictement croissante et soit $\xi_1 > 0$ le premier zéro de φ'. Alors

$$E(\xi_1) = -\frac{1}{q+1}\varphi^{q+1}(\xi_1) \geq E(0) = 0; \tag{2.5}$$

ce qui est absurde. Par conséquent, $\varphi'(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in I \cap]0, +\infty[$.
Cas 2. $c < 0$. Par définition d'une solution d'onde finie il existe $\xi_0 > 0$ tel que φ est strictement croissante sur $[0, \xi_0]$. Supposons que ξ_0 est un

maximum local, c'est à dire $\varphi'(\xi_0) = 0$ et $\left(|\varphi'|^{p-2}\varphi'\right)'(\xi_0) < 0$. Mais d'après l'équation (2.1), on a $\left(|\varphi'|^{p-2}\varphi'\right)'(\xi_0) \geq 0$, ce qui est absurde. On en déduit que φ est strictement croissante. $\square$

Avant d'énoncer le résultat d'existence locale pour le problème aux valeurs initiales (2.2), on va étudier le problème où la condition initiale est remplacée par un comportement au voisinage de $-\infty$. Plus précisément on a la proposition suivante

Proposition 2.2. *Soit $c \in \mathbb{R}$. Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et une fonction φ solution de l'équation 2.1, définie sur un intervalle maximal $]-\infty, \beta[$, vérifiant*

$$\lim_{\xi \to -\infty} \varphi(\xi) = 0 \text{ et } \lim_{\xi \to \beta^-} \varphi(\xi) = +\infty.$$

Avant de prouver la proposition 2.2, on transforme l'équation (2.1) à un système du premier ordre, en introduisant le changement de variable suivant,

$$X = \varphi \text{ et } Y = (\varphi')^{p-1}\,; \tag{2.6}$$

c'est à dire qu'on cherche des solutions croissantes, ceci est plausible grâce au lemme 2.1. Ce qui entraîne que l'équation (2.1) est équivalente au système

$$(S) \quad \begin{cases} X' = Y^{1/(p-1)}, \\ Y' = X^q + cY^{-1/(p-1)}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Il faut noter que $(0,0)$ est une solution ; mais on va montrer que (S) admet au moins une solution non triviale définie sur un intervalle maximal d'existence $]-\infty, \beta[$ et vérifiant $\lim\limits_{\xi \to -\infty} (X(\xi), Y(\xi)) = 0$. Pour cela on considère le problème de Cauchy associé au vecteur champ,

$$(Q) \quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dX} = c + X^q Y^{-1/(p-1)}, \\ Y(0) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Lemme 2.3. *Pour chaque $c \in \mathbb{R}^*$, le problème (Q) admet une solution unique et globale.*

On note que le théorème Cauchy-Lipschitz [6] ne s'applique pas directement car la fonction

$$(X, Y) \to c + X^q Y^{-1/(p-1)} \tag{2.9}$$

n'est pas localement lipshitzienne sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Pour prouver le lemme 2.3 on va utiliser une méthode d'approximation en résolvant le problème suivant

$$(Q_\varepsilon) \begin{cases} \dfrac{dY}{dX} = c + X^q Y^{-1/(p-1)} = F(X,Y); \\ Y(0) = \varepsilon, \end{cases} \tag{2.10}$$

où $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$.

Lemme 2.4. *Pour chaque $\varepsilon > 0$, le problème (Q_ε) admet une solution unique et globale.*

Démonstration. La fonction $F(X,Y)$ est localement lipchitzienne sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$, d'où d'après la théorie des équations différentielles ordinaires [6], il existe une solution locale du problème (Q_ε) notée Y_ε. Or si $c > 0$, la fonction $X \to Y_\varepsilon(X)$ est strictement croissante, ainsi (2.9) implique

$$\frac{dY}{dX} \leq c + X^q \varepsilon^{-1/(p-1)}. \tag{2.11}$$

On en déduit alors que la solution est bornée sur tout borné et par suite elle est globale. D'autre part, si $c < 0$, on introduit la courbe (C) solution de l'équation $F(X,Y) = 0$, pour $Y > 0$. La courbe (C) divise le plan de phase (X,Y) en deux régions (cf figure1),

$$R_1 = \{(X,Y),\ F(X,Y) < 0\} \tag{2.12}$$

et

$$R_2 = \{(X,Y),\ F(X,Y) > 0\} \tag{2.13}$$

Comme $Y_\varepsilon(0) = \varepsilon$, alors nécessairement la fonction $X \to Y_\varepsilon(X)$ est décroissante et elle deviendra croissante dés qu'elle touche la courbe (C); par conséquent, il existe $X_0 > 0$ tel que

$$m_\varepsilon = \min Y_\varepsilon = \left(\frac{-X_0^q}{c}\right)^{p-1} > 0, \tag{2.14}$$

il s'en suit que

$$\frac{dY}{dX} \leq c + X^q m_\varepsilon^{-1/(p-1)}; \tag{2.15}$$

d'où Y_ε est globale. $\square$

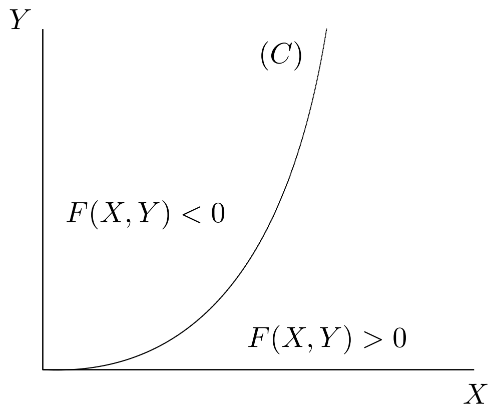

Figure 1. Plan de phase (X, Y)

Maintenant on est en mesure de donner la preuve du lemme 2.3.

Démonstration du lemme 2.3. La preuve est divisée en deux étape.

Etape 1. Unicité. On procède par l'absurde. On suppose qu'il existe deux solutions Y et Z du problème (Q) telles que $Y \neq Z$. Alors

$$R = \max\{r > 0,\ Z(X) = Y(X) \text{ pour tout } 0 \leq X < r\} \tag{2.16}$$

est bien défini. Soit $X_0 > R$ tel que $Z(X_0) < Y(X_0)$. On pose

$$h(X) = (Y - Z)(X), \tag{2.17}$$

alors $h(R) = 0$ et il existe $\theta \in \,]R, X_0[$ tel que

$$0 \leq h(X_{0)} - h(R) = \theta^q \left[Y(\theta)^{-1/(p-1)} - Z(\theta)^{-1/(p-1)}\right] < 0. \tag{2.18}$$

Ce qui est absurde.

Etape 2. Existence. Comme la suite $(Y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est croissante positive, alors elle converge vers une fonction Y quand ε tend vers 0. On affirme que cette fonction Y est strictement positive. En effet, on se donne $\varepsilon > 0$, et on considère le problème de Cauchy suivant

$$(L_\varepsilon)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{t^{1/(p-1)}}{u^q(t) + ct^{1/(p-1)}} = g(t, u), \\ u(0) = \varepsilon. \end{cases} \tag{2.19}$$

Il est clair que la fonction g est localement lipschitizienne par rapport à u sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$. Par suite le problème (L_ε) admet une solution unique locale u_ε. De plus si $c > 0$, on a

$$0 \leq \frac{du_\varepsilon}{dt} \leq \frac{1}{c}, \tag{2.20}$$

ce qui implique que u_ε est globale. Tandis que si $c < 0$, on introduit la courbe (C') qui est symétrique à la courbe définie par $F(t,u) = 0$ (où F(t,u) est défini dans (2.9) par rapport à l'axe $t = u$.

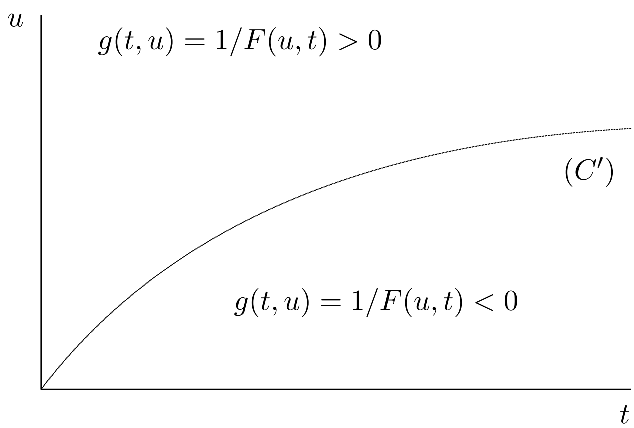

Figure 2. Plan de phase (t, u)

On constate que cette courbe répartie le plan de phase en deux parties. L'une d'entre elles contient $(0, u_\varepsilon(0))$ où il faut noter que $\frac{du_\varepsilon}{dt} > 0$ et tend vers l'infini lorsque $F(t, u_\varepsilon(t))$ tend vers 0 ; par conséquent $(t, u_\varepsilon(t))$ s'éloigne de la courbe (C'), et on montre aussi facilement $u_\varepsilon(t)$ ne peut pas exploser en temps fini ; ce qui implique u_ε est globale. D'autre part, puisque u_ε est croissante alors $\lim_{t\to+\infty} u_\varepsilon(t) = l$ existe dans $]0, +\infty]$. Si $l < +\infty$ alors la limite $\lim_{t\to+\infty} \frac{d}{dt}(u_\varepsilon(t)) = 0$. Par contre, grâce à l'équation (2.19) on aura $\lim_{t\to+\infty} \frac{d}{dt}(u_\varepsilon(t)) = \frac{1}{l+c} > 0$. Ce qui est impossible, ainsi

$\lim\limits_{t\to+\infty} u_\varepsilon(t) = +\infty$. En conséquence, u_ε est une bijection définie de $[0, +\infty[$ à valeur dans $[\varepsilon, +\infty[$. Soit Z_ε sa fonction réciproque. Par un simple calcul on montre que Z_ε vérifie le problème de Cauchy,

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dX} = c + X^q Y^{-1/(p-1)}; \\ Y(\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ainsi, Z_ε et Y_ε vérifient la même équation (2.9) sur $[\varepsilon, +\infty[$ et comme $Y_\varepsilon(\varepsilon) > Z_\varepsilon(\varepsilon) = 0$, alors nécessairement $Y_\varepsilon(X) > Z_\varepsilon(X)$ pour tout $X \in [\varepsilon, +\infty[$.

Maintenant, on se donne un point $X_0 > 0$ et utilisons le fait que la suite $(Z_\varepsilon(X))_\varepsilon$ est décroissante pour déduire

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Y_\varepsilon(X_0) = Y(X_0) \geq \lim_{\varepsilon\to 0} Z_\varepsilon(X_0) \geq Z_{X_0/2}(X_0) > 0. \tag{2.22}$$

Ce qui permet de conclure que Y est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Pour finir on va montrer que Y est exactement la solution du problème (Q). Puisque Y_ε est solution du problème (Q_ε) alors c'est une solution intégrale, et donc pour toute fonction $\Phi \in D(]0, \infty[)$ on a

$$\int_0^{+\infty} \Phi(X)[C + X^q Y_\varepsilon^{-1/(p-1)}]dX + \int_0^{+\infty} \Phi'(X) Y_\varepsilon(X) = 0. \tag{2.23}$$

Exploitant la décroissance de la suite $(Y_\varepsilon)_\varepsilon$, et passons à la limite sur ε dans la forme intégrale précédente, pour aboutir à

$$\frac{dY}{dX} = c + X^q Y^{-1/(p-1)}, \quad \text{dans } D']0, +\infty[. \tag{2.24}$$

Ensuite, on a $0 < Y(X) < Y_{1/2}(X)$ (où $Y_{1/2}$ solution de $Q_{1/2}$) et comme $Y_{1/2}$ est continue alors d'après (2.24) on obtient $Y \in W^{1,n}(]a, b[)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sur tout intervalle $]a, b[\subset]0, +\infty[$. Par conséquent (2.24) est satisfaite au sens fort. En fin, on a $Y_\varepsilon(0) = \varepsilon \to Y(0) = 0$. $\square$

Maintenant nous allons démontrer la proposition 2.2.

Preuve de la proposition 2.2. On se donne $A > 0$ et on considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}(\varphi(\xi)) = Y^{1/(p-1)}(\varphi(\xi)); \\ \varphi(0) = A, \end{cases} \tag{2.25}$$

où Y est la solution du problème (Q).
Notons que comme la fonction Y est régulière et strictement positive, d'après la théorie des E.D.O le problème (2.25) admet une solution unique définie sur un intervalle maximal $]\alpha, \beta[$. Puisque φ est croissante alors $\lim_{\xi \to \alpha^-} \varphi(\xi) = l$ existe et positive par suite $\alpha = -\infty$. Car dans le cas contraire (i.e. $-\alpha < \infty$) on peut prolonger φ sur $]-\infty, \alpha]$ par 0 dans le cas où $l = 0$, et par la restriction de la fonction solution du problème de Cauchy défini par

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}(\varphi(\xi)) = Y^{1/(p-1)}(\varphi(\xi)) \\ \qquad \varphi(0) = l, \end{cases} \tag{2.26}$$

dans le cas où $l > 0$; ce qui contredit le fait que φ est une solution maximal.
On a affirme que $\lim_{\xi \to -\infty} \varphi(\xi) = 0$ et $\lim_{\xi \to \beta^-} \varphi(\xi) = +\infty$. En effet, puisque φ est croissante minorée par la valeur 0 alors forcément $\lim_{\xi \to -\infty} \varphi(\xi) = 0$. Sinon, d'après (2.26) la fonction φ doit traverser l'axe des abscisses.
D'autre côté, si $\lim_{\xi \to \beta^-} \varphi(\xi) = L < +\infty$, nécessairement $\beta = +\infty$ et $\varphi(\xi) < L$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Mais, comme $\lim_{\xi \to \beta^-} \dfrac{d}{d\xi}(\varphi(\xi)) > 0$ et φ croissante alors elle va traverser l'axe $y = L$, ce qui est absurde. D'où $\lim_{\xi \to \beta^-} \varphi(\xi) = +\infty$.
Pour finir un calcul simple montre que la solution φ du problème (2.25) vérifie bien l'équation (2.1). $\square$

Parmi les solutions du problème (2.25), on va chercher celles qui s'annulent en un point et qui vérifie $\beta = \infty$. Pour cela, on aura besoin du comportement asymptotique de la solution Y du problème (2.8).

Proposition 2.5. *Soient $c \neq 0$, $p > 2$ et $q > 0$. Alors la solution Y se comporte comme suit :*

(1) *Au voisinage de 0, $Y(X) \approx M_0\ X^{\inf\{n(p,q),1\}}$ si $c > 0$ ou $(n(p,q)-1)c \geq 0$ et $Y(X) \approx (-c)^{1-p}\ X^{q(p-1)}$ si $c < 0$ et $n(p,q) > 1$.*

(2) *Au voisinage de ∞, $Y(X) \approx M_\infty\ X^{\sup\{n(p,q),1\}}$ si $c > 0$ ou $(n(p,q)-1)c \leq 0$ et $Y(X) \approx (-c)^{1-p}\ X^{q(p-1)}$ si $c < 0$ et $n(p,q) < 1$.*

Démonstration. On considère la fonction $H(X) = MX^\theta$, où $M > 0$ et θ sont des paramètres à déterminer. Il est aisé de voir que H est une sur-solution de (Q) (resp. sous-solution) si et seulement si

$$\theta M \geq cX^{1-\theta} + M^{-1/(p-1)} X^{p(n(p,q)-\theta)/(p-1)}, \tag{2.27}$$

respectivement

$$\theta M \leq cX^{1-\theta} + M^{\frac{-1}{p-1}} X^{p(n(p,q)-\theta)/(p-1)}, \tag{2.28}$$

On commence par le comportement au voisinage de 0, on distingue deux cas :
1$^{\text{er}}$ *cas.* $c > 0$ ou $(n(p,q)-1)c \geq 0$. Pour que H vérifie (2.27) (resp. (2.28)) au voisinage de 0 il faut que $\inf\{n(p,q),1\} \geq \theta$ (resp. $\inf\{n(p,q),1\} \leq \theta$). Soit $\theta = \inf\{n(p,q),1\}$. Alors H est une sur-solution de (Q) (resp. sous-solution) pour tout $M > M_0$ (resp. $M < M_0$). Par suite $Y(X) \approx M_0 X^{\inf\{n(p,q),1\}}$.
2$^{\text{ème}}$ *cas.* $c < 0$ et $n(p,q) > 1$. On prend dans ce cas $\theta = q(p-1)$ donc (2.27) (resp.(2.28)) devient

$$\theta M \geq \left[c + M^{-1/(p-1)}\right] X^{1-q(p-1)}, \tag{2.29}$$

respectivement

$$\theta M \leq \left[c + M^{-1/(p-1)}\right] X^{1-q(p-1)}, \tag{2.30}$$

Comme $n(p,q) > 1$, alors $1-q(p-1) < 0$ ce qui donne (2.29) (resp.(2.30)) est vérifie pour tout $M \geq (-c)^{1-p}$ (resp. $M < (-c)^{1-p}$), par suite $Y(X) \approx (-c)^{1-p}\ X^{q(p-1)}$.
On passe maintenant au comportement au voisinage de l'infini cette fois-ci on distingue deux cas :
1$^{\text{er}}$ *cas.* $c > 0$ ou $(n(p,q)-1)c < 0$. On prend $\theta = \sup\{n(p,q),1\}$ alors H sur- solution (resp. sous- solution) pour tout $M > M_\infty$ (resp. $M < M_\infty$), ce qui donne $Y(X) \approx M_\infty\ X^{\sup\{n(p,q),1\}}$.
2$^{\text{ème}}$ *cas.* $c < 0$ et $n(p,q) < 1$. On prend $\theta = q(p-1)$ alors (2.27) (resp. (2.28)) devient (2.29) (resp. (2.30)) comme $1-q(p-1) > 0$ (car $n(p,q) < 1$) alors on déduit que $Y(X) \approx (-c)^{1-p}\ X^{q(p-1)}$. □

Maintenant on est on mesure de donner donner la preuve des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3.

Démonstration. Soit φ une solution du problème (2.25) dont l'intervalle maximal d'existence est $]-\infty, \beta[$. Alors tant que $\varphi(\xi) \neq 0$ (et par suite

$Y(\varphi(\xi)) \neq 0$) on a
$$Y^{-1/(p-1)}(\varphi(\xi))\varphi'(\xi) = 1. \tag{2.31}$$
En intégrant (2.31) sur $(\xi, \xi_1) \subset]-\infty, \beta[$ on obtient
$$\xi_1 - \xi = \int_{\varphi(\xi)}^{\varphi(\xi_1)} Y^{-1/(p-1)}(s)ds, \tag{2.32}$$
pour tout $\xi \in]-\infty, \beta[$, tel que $\varphi(\xi) > 0$. Ainsi si φ ne s'annule jamais sur $]-\infty, \beta[$ on peut faire tendre ξ vers $-\infty$ dans la formule (2.32) on obtient $\int_0^{\varphi(\xi_2)} Y^{-1/(p-1)}(s)ds = \infty$. Donc φ s'annule en un point si et seulement si
$$\int_0 Y^{-1/(p-1)}(s)ds < \infty. \tag{2.33}$$
D'autre part, on fait tendre ξ_1 vers β dans la formule (2.32) on obtient que $\beta = \infty$ si et seulement si
$$\int^{+\infty} Y^{-1/(p-1)}(s)ds = \infty. \tag{2.34}$$
Faisons appel maintenant au comportement asymptotique de Y (solution du problème (Q)), le théorème 1.1 découle immédiatement.
On combine à nouveau les résultats du comportement asymbtotique de la solution Y et la relation (2.31), on obtient les résultats concernant le comportement asymptotique (théorèmes 1.2 et 1.3). □

Remerciements

L'auteur voudrait remercier le rapporteur de son lecture soigneuse du manuscrit original et de faire les suggestions qui ont amélioré la présentation de ce travail.

Références

[1] D. ARCOYA, J. DIAZ et L. TELLO – « S-shaped biffurcation branch in quasilinear multivalued model arising in climatology », *J. Diff Equ.* **150** (1998), p. 215–225.

[2] A. DE PABLO et A. SANCHEZ – « Global travelling waves in reaction-convection- diffusion equations », *J.Diff. Eq* **165** (2000), p. 377–413.

[3] A. DE PABLO et J. VAZQUEZ – « Travelling waves and finite propagation in reaction-diffusion equation », *J.Diff. Eq* **93** (1991), p. 19–61.

[4] A. C. Fowler – *Matematical models in the applied sciences*, Cambridge texts Applied Mathematics, Cambridge University press, 1997.

[5] K. Hadeler – *Travelling front and free boundary value problems, numerical treatment of free boundary problems*, Birkhäuser verlag, 1981.

[6] H.AMANN – *Ordinary differential equations*, Walter de Gruyter, 1996.

[7] M. Herrero et J. Vazquez – « Thermal waves in absorption media », *J.Diff.Eq* **74** (1988), p. 218–233.

[8] A. Kolmogorov, I. Petrovsky et N. Piskunov – « Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique », *Bull. Univ. Moskov, ser. Internat.Sec A 1,6* (1937), p. 1–25.

[9] S. Lee et W. Ames – « Similarity solution for non-newtonian fluids », *A.T.CH.E. Journal* **12** (1966), no. 4, p. 700–708.

[10] F. Sanchez-Garduno – « Travelling wave phenomena in some degenerate reaction-diffusion equations », *J.Dif. Eq.* **177** (1995), p. 281–319.

[11] A. Sànchez-Valdés et H.-B. B. – « New travelling wave solutions for the Fisher equation with general exponents », *Applied Mathematics Letters* **18** (2005), p. 1281–1285.

Ahmed Hamydy
Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des Sciences Departement
de Mathématiques et informatique
B. P. 2121 Tetouan
Maroc
hamydy@caramail.com