ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

E. ANGELOPOULOS

Décomposition sur le sous-groupe de Lorentz de la représentation de masse positive et de spin nul du groupe de Poincaré

Annales de l'I. H. P., section A, tome 15, nº 4 (1971), p. 303-320
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__15_4_303_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XV, n° 4, 1971, p. 303-320. *Physique théorique.*

Décomposition sur le sous-groupe de Lorentz de la représentation de masse positive et de spin nul du groupe de Poincaré

par

E. ANGELOPOULOS
Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, Paris-V^e.

SOMMAIRE. — La réduction de la représentation unitaire irréductible (M, 0) de $\mathcal{T}$ est esquissée à l'aide de l'analyse harmonique sur le groupe de Lorentz. Les composantes irréductibles sont identifiées à l'aide de son algèbre de Lie et des représentations de celle-ci. L'introduction d'un espace nucléaire convenable, associé à la représentation initiale, permet de donner un sens à une décomposition algébrique (formelle) et d'opérer une première sélection parmi les composantes obtenues qui sont les vecteurs propres d'un opérateur essentiellement auto-adjoint. En se limitant à la partie réelle du spectre, on obtient le résultat final, la série principale à spin nul de Lorentz. Des rapprochements avec des problèmes de décomposition voisins sont effectués, ainsi qu'un examen des conditions topologiques imposées.

INTRODUCTION

La réduction d'une représentation sur un sous-groupe non compact est un problème qui nécessite en général une approche assez rigoureuse du point de vue topologique [*1*]. Le cas examiné dans cet article a déjà été traité par Joos [*2*], d'une manière plutôt formelle. Dans cet article, nous utilisons la théorie des espaces nucléaires pour obtenir le spectre des opérateurs de Casimir du groupe de Lorentz, pour une représentation donnée (masse réelle, spin nul) du groupe de Poincaré. Nous exhibons également les restrictions topologiques, moyennant lesquelles ce spectre est dédoublé.

Le problème est posé et les notations utilisées sont introduites au § I. La réduction de la représentation sur le sous-groupe compact maximal SU(2) est effectuée au § II et, au § III on définit les opérateurs de l'algèbre enveloppante de SL(2, C) qui relient entre elles les r. u. i. de SU(2). Les conditions de définition des générateurs infinitésimaux sont données au § IV et le sous-espace obtenu est muni d'une structure d'espace nucléaire au § V. La diagonalisation du Casimir non nul de SL(2, C) est faite au § VI; on obtient un « spectre » complexe, qui est ensuite réduit par des conditions d'unitarité. L'analyse harmonique est effectuée au § VII, où l'on voit que seules les r. u. i. de la série principale ont une contribution non nulle. Au § VIII, un autre sous-espace dense est introduit, dans lequel le terme du Casimir qui représente une distribution s'annule, ce qui permet le dédoublement du spectre. La représentation de masse imaginaire et « spin » nul de $\mathcal{T}$ est étudiée au § IX : on obtient des résultats analogues, avec cependant un dédoublement « naturel » du spectre. Le § X contient des remarques et des rapprochements avec des problèmes similaires.

I. — GÉNÉRALITÉS ET NOTATIONS

La représentation unitaire irréductible (r. u. i.) du groupe de Poincaré $\mathcal{T}$, de masse $\pm$ M et de spin nul [3] peut être définie sur l'espace de Hilbert $\tilde{\mathrm{H}} = \mathrm{L}^2\left(\Omega_{\mathrm{M}}^{\pm}\,;\frac{d^3p}{p_0}\right)$ où $\frac{d^3p}{p_0}$ est la mesure invariante sur la nappe Ω_{M}^{+} (ou Ω_{M}^{-}) d'hyperboloïde vérifiant $p_\mu p^\mu = \mathrm{M}^2$, $p_0 > 0$ (ou $p_0 < 0$). Sa restriction sur le groupe de Lorentz $\mathfrak{L}$ est donnée par

$$\text{(I.1)} \qquad \tilde{\mathrm{U}}(\Lambda)f(p) = f(p.\Lambda) \quad ; \quad f \in \tilde{\mathrm{H}} \quad , \quad \Lambda \in \mathfrak{L}$$

Dans la suite, on supposera M = 1, ce qui ne change rien à la généralité des résultats, puisque $\Omega_{\mathrm{M}}^{\pm}$ est homothétique à Ω_1^{+}.

Puisqu'on veut identifier les composantes irréductibles de $\tilde{\mathrm{U}}$ et sachant que les r. u. i. de $\mathfrak{L}$ peuvent être définies sur des espaces fonctionnels de la sphère $\mathrm{S}_2 = \mathrm{U}(1)\backslash\mathrm{SU}(2)$, on paramétrisera Ω_1^{+} de façon à mettre en évidence S_2. On posera :

$$\begin{aligned} p_0 &= \operatorname{ch} x & 0 &\leq x < \infty \\ p_1 + ip_2 &= \operatorname{sh} x \sin\varphi\, e^{i\theta} & 0 &\leq \varphi \leq \pi \\ p_3 &= \operatorname{sh} x \cos\varphi & 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Remarquons que Ω_1^+ n'est pas difféomorphe au produit $[0, \infty[\times S_2$; cependant, la nappe « trouée » est difféomorphe à $]0, \infty[\times S_2$. Cette restriction à la paramétrisation n'a pas d'importance tant que les fonctions sont définies presque partout, comme dans $\tilde{H}$. Cependant des conditions aux bornes vont intervenir, lorsqu'il s'agira de définir le domaine des opérateurs infinitésimaux.

On a alors

$$\tilde{H} \cong L^2(\mathbf{R}^+ \times S_2; \operatorname{sh}^2 x\, dxdu) \tag{I.2}$$

(où u représente un élément (φ, θ) de S_2, avec $du = (4\pi)^{-1} \sin \varphi\, d\varphi . d\theta$). Si $u \in S_2$, $w \in SU(2)$, on notera $u.w$ l'élément de S_2 obtenu en considérant l'action de SU(2) sur S_2 : u représente une classe à gauche de SU(2) par U(1), u^{-1} une classe à droite, $u'u^{-1}$ une double classe.

On considérera la représentation équivalente $U = B\tilde{U}B^{-1}$, où B est la bijection isométrique de $\tilde{H}$ sur $H = L^2(R^+ \times S_2;\ dx.du)$ définie par :

$$Bf(x, u) = \operatorname{sh} x f(x, u) \tag{I.3}$$

On a alors pour $f \in H$:

$$U(\Lambda)f(x, u) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x'} f(x', u') \tag{I.4}$$

où x', u' sont définis à partir de $p.\Lambda$ comme x, u à partir de p.

L'algèbre de Lie I est engendrée par les générateurs infinitésimaux J_i, K_i, vérifiant

$$[J_i, J_j] = [K_j, K_i] = \varepsilon_{ijk}K_k \tag{I.5}$$

$$[J_i, K_j] = \varepsilon_{ijk}K_k \qquad \{ i, j, k \} = \{ 1, 2, 3 \} \tag{I.6}$$

Les J_i engendrent la sous-algèbre compacte maximale SU(2) dont l'opérateur de Casimir est $Q = \Sigma J_i^2$.

Les opérateurs invariants de sont $C = \Sigma K_i^2 - \Sigma J_i^2$ et $C' = \Sigma K_i J_i$. La réduction de U nécessite la diagonalisation de l'expression de ces opérateurs, c'est-à-dire la détermination de leurs vecteurs propres dans H, ou, à défaut, dans le dual d'un sous-espace nucléaire dense qu'on définira.

L'expression formelle de ces opérateurs dans la représentation U est la suivante :

$$J_1 \pm iJ_2 = e^{\pm i\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i \operatorname{cotg} \varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)$$

$$J_3 = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

$$\pm iK_1 - K_2 = -e^{\pm i\vartheta}$$
$$\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \coth x\left(-\cos\varphi - \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i(\sin\varphi)^{-1}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right)$$
$$K_3 = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} - \coth x\left(\cos\varphi + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$Q = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \operatorname{cotg}\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}$$
$$C = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}Q - 1$$
$$C' = 0$$

II. — RÉDUCTION SUR SU(2)

Si $w \in SU(2)$, on a

(II.1) $\tilde{U}(w)\tilde{f}(x, u) = \tilde{f}(x, uw)$ pour $\tilde{f} \in \tilde{H}$

(II.2) $U(w)f(x, u) = f(x, uw)$ pour $f \in H$

On peut décomposer f suivant les caractères unitaires de SU(2). Comme ces caractères doivent être invariants par la multiplication à gauche par un élément diagonal (u désignant une classe d'équivalence d'éléments de SU(2)), on obtiendra les seuls j entiers et parmi les caractères, seules les fonctions sphériques $Y^{j,m}(u)$, solutions des équations différentielles :

(II.3) $QY^{j,m}(u) = -j(j+1)Y^{j,m}(u)$

(II.4) $J_3Y^{j,m}(u) = -imY^{i,m}(u)$

Leur forme explicite est :

(II.5) $$Y^{j,m}(\varphi, \vartheta) = \sin^{|m|}\varphi . e^{im\vartheta} \sum_{p=0}^{\left[\frac{j-|m|}{2}\right]} a_p^{j,m} \cos\varphi^{j-|m|-2p}$$

avec :

(II.6) $$a_p^{j,m} = -\frac{(j-|m|-2p+2)(j-|m|-2p+1)}{2p(2j-2p+1)}a_{p-1}^{j,m}$$

Les coefficients initiaux sont choisis de manière à avoir

(II.7) $$\int_{S_2} \overline{Y^{j,m}}Y^{j',m'}du = \delta_j^{j'}\delta_m^{m'}$$

et

(II.8) $$(J_1 \pm iJ_2)Y^{j,m} = \pm(j \mp m)^{1/2}(j \pm m + 1)^{1/2}Y^{j,m\pm 1}$$

Si, en outre, on pose $a_0^{j,0} > 0$ (avec $a_0^{0,0} = 1$), on a les formules

$$\text{(II.9)} \qquad \cos\varphi\, Y^{j,m} = \alpha(j+1, m)Y^{j+1,m} + \alpha(j, m)Y^{j-1,m}$$

$$\text{(II.10)} \qquad \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} Y^{j,m} = j.\alpha(j+1, m)Y^{j+1,m} - (j+1)\alpha(j, m)Y^{j-1,m}$$

où

$$\alpha(j, m) = \frac{\sqrt{j^2 - m^2}}{\sqrt{4j^2 - 1}}$$

En posant, pour $f \in H$

$$\text{(II.11)} \qquad f_{j,m}(x) = \int_{S_2} f(x, u)\overline{Y^{j,m}(u)}du$$

on a la formule d'inversion (pour dx – presque partout)

$$\text{(II.12)} \qquad f(x, u) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} f_{j,m}(x)Y^{j,m}(u)$$

ainsi que

$$\text{(II.13)} \qquad \| f \|^2 = \sum_{j,m} \int_0^{\infty} | f_{j,m}(x) |^2 dx = \sum_{j,m} \| f_{j,m} \|^2 < \infty$$

$$\text{(II.14)} \qquad U(w)f(x, u) = \sum_{j,m,n} D_m^{j,n}(w).f_{j,n}(x).Y^{j,m}(u)$$

où $w \in SU(2)$ et D^j est la r. u. i. de SU(2) indexée par j.

On désignera par $H_{j,m}$ le sous-espace de H qui contient des fonctions de la forme $f_{j,m}(x)Y^{j,m}(u)$ (sans sommation) et par H_j la somme $\bigoplus_m H_{j,m}$. On écrira $H_j = H_j(x) \otimes \mathcal{Y}_j(u)$. Il est clair que H_j est dense dans H. Chaque $H_j(x)$ est isomorphe à $H(x) = L^2(R^+; dx)$. $\mathcal{Y}_j(u)$ est isomorphe à R^{2j+1}. D'après (II.3) et (II.4), les espaces de $H_{j,m}$ sont stables par C, puisque C commute avec Q et J_3 et puisque C est défini sur un sous-espace dense de $H_j(x)$ (les fonctions deux fois différentiables). On notera C_j la restriction de C sur $H_j(x)$:

$$\text{(II.15)} \qquad C_j = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{j(j+1)}{\text{sh}^2\, x} - 1$$

III. — LES OPÉRATEURS D'ÉCHELLE

Si les éléments de SU(2) (et de su(2)) laissent les H^j invariants, les éléments non compacts, tel K_3, ne les laissent pas stables. Si, à l'instar de $J^{\pm}$, on cherche des opérateurs analogues dans l'algèbre enveloppante qui transformeraient j en $j \pm 1$, ils doivent vérifier $[Q, L^{\pm}] = \mp 2\left(j + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)L^{\pm}$. Il est clair qu'on ne peut pas obtenir des opérateurs d'échelle indépendants de j; pour chaque j, on définit donc :

(III.1)
$$L_j^+ = \frac{j+1}{2j+1} K_3 - \frac{1}{2j+1}(K_1J_2 - K_2J_1) + \frac{1}{(j+1)(2j+1)} J_3C' \qquad (j \geqslant 0)$$

(III.2)
$$L_j^- = \frac{j}{2j+1} K_3 + \frac{1}{2j+1}(K_1J_2 - K_2J_1) + \frac{1}{j(2j+1)} J_3C' \qquad (j > 0)$$

On considérera désormais la seule restriction de $L_j^{\pm}$ sur H_0^j (resp $\tilde{H}^j$) qu'on notera encore $L_j^{\pm}$ (resp : $\tilde{L}_j^{\pm} = B^{-1}L_j^{\pm}B$). $L_j^{\pm}$ sont des opérateurs de $H^{j,m}$ dans $H^{j\pm1,m}$. Dans la représentation U ils sont

$$\text{(III.3)} \quad L_j^+ = \left(\frac{\partial}{\partial x} - (j+1)\coth x\right)\left(\frac{j+1}{2j+1}\cos\varphi + \frac{1}{2j+1}\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\text{(III.4)} \quad L_j^- = \left(\frac{\partial}{\partial x} + j\coth x\right)\left(\frac{j}{2j+1}\cos\varphi - \frac{1}{2j+1}\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

On décomposera alors $L_j^{\pm} = M_j^{\pm}(x) \otimes N_j^{\pm}(u) \equiv M_j^{\pm} \otimes N_j^{\pm}$. On écrira $L^{\pm}$ (resp : $M^{\pm}$, $N^{\pm}$) l'opérateur dont la restriction sur chaque H_j (resp : $H_j(x)$, $Y_j(u)$) est $L_j^{\pm}$ (resp : $M_j^{\pm}$, $N_j^{\pm}$). On vérifie que

$$\text{(III.5)} \qquad L^+ + L^- = K_3$$

Remarquons que si les opérateurs « compacts » tels que J_k, Q, $N^{\pm}$ sont définis sur toutes les fonctions C^{∞} de H (et même sur celles qui ne sont différentiables que pour les variables sphériques), il n'en est pas de même des autres. Ainsi, par exemple, $K_3(e^{-x})$ n'est pas de carré sommable. On se propose dans la suite de définir un domaine qui soit invariant par tous les générateurs infinitésimaux, et où ils soient antisymétriques. En pratique, il suffit qur K_3 y soit bien défini, ou, d'après (III.5), L^+ et L^-. Remarquons que C peut être défini sur des vecteurs extérieurs au domaine, comme par exemple e^{-x}.

IV. — CONSTRUCTION DU DOMAINE DIFFÉRENTIABLE

Définition. — Soit $\mathfrak{D}$ le sous-espace de H contenant les fonctions f qui vérifient

1) f est C^{∞} en (x, θ, φ),

2) $f_{jm}(x)$ décroît à l'infini plus vite que toute puissance de ch x,

3) $f_{j,m}(x) = \mathrm{sh}^{j+1} \times \widehat{f}_{j,m}(\mathrm{ch}\, x)$, où $\dfrac{d^n}{d\,\mathrm{ch}\, x^n} \widehat{f}_{j,m}$ est borné pour tout $n \geq 0$.

On écrira

$$\mathfrak{D}_{j,m} = \mathfrak{D}_j(x) \otimes \mathfrak{Y}_{j,m}(u) = \mathfrak{D} \cap \mathrm{H}_{j,m} \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_j = \mathfrak{D}_j(x) \otimes \mathrm{Y}_j(u) = \mathfrak{D} \cap \mathrm{H}_j.$$

On peut définir une structure de Fréchet sur chaque $\mathfrak{D}_j(x)$ et sur $\mathfrak{D}$ en prenant les semi-normes suivantes :

$$\text{(IV.1)} \quad [n^j_{n,q}(f_{j,m})]^2 = \int_0^\infty (\mathrm{ch}\, x)^{2n} \left| \mathrm{sh}\, x^{j+1+q} \frac{d^q}{d\,\mathrm{ch}\, x^q} \widehat{f}_{j,m}(\mathrm{ch}\, x) \right|^2 dx$$

$$\text{(IV.2)} \qquad [n_{n,q}(f)]^2 = \sum_{j,m} [n^j_{n,q}(f_{j,m})]^2$$

$\mathfrak{D}$ est ainsi limite inductive des espaces de Fréchet $\overset{\mathrm{N}}{\underset{0}{\otimes}} \mathfrak{D}_j$.

Remarque. — $\mathfrak{D}_0$ est isomorphe topologiquement à un sous-espace fermé de l'espace des fonctions C^∞ à décroissance en e^{-x^2} sur la droite réelle, à savoir le sous-espace des fonctions impaires. Comme H_0 est isomorphe à l'espace des fonctions impaires et de carré sommable sur $(-\infty, +\infty)$ le choix de $\mathfrak{D}_0$ est « naturel ». Le choix de $\mathfrak{D}_j(x)$ est alors imposé par la forme même des opérateurs différentiels de I.

Si A est l'opérateur défini par

$$\text{(IV.3)} \qquad \mathrm{A}f = \widehat{f} = \sum_{j,m} \mathrm{sh}^{-j-1} \times f_{j,m}(x)\mathrm{Y}^{j,m}(u) = \sum_{j,m} \widehat{f}_{j,m}\mathrm{Y}^{j,m}$$

opérant de $\mathfrak{D}$ sur un espace isomorphe $\widehat{\mathfrak{D}}$, on a

$$\text{(IV.4)} \quad \widehat{\mathrm{M}}^+ = \mathrm{AM}^+\mathrm{A}^{-1} = \frac{d}{d\xi} = \mathrm{sh}^{-1}\, x \frac{d}{dx}$$

$$\text{(IV.5)} \quad \widehat{\mathrm{M}}_j^- = \mathrm{AM}_j^-\mathrm{A}^{-1} = (\xi^2 - 1)\frac{d}{d\xi} + (2j+1)\xi = \mathrm{sh}\, x \frac{d}{dx} + (2j+1)\,\mathrm{ch}\, x$$

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

$$\text{(IV.6)} \qquad \mathrm{M}^\pm \mathfrak{D}_j(x) = \mathfrak{D}_{j\pm 1}(x) \quad ; \quad \mathrm{L}^\pm \mathfrak{D}_{j,m} = \mathfrak{D}_{j\pm 1,m}$$

$$\text{(IV.7)} \quad (\mathrm{M}^+ f_j \,|\, f_{j+1}) + (f_j \,|\, \mathrm{M}^- f_{j+1}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad f_j \in \mathfrak{D}_j(x)$$

M^+ admet un inverse unique, Z, défini par $\widehat{\mathrm{Z}} = \mathrm{AZA}^{-1}$:

$$\text{(IV.8)} \qquad \widehat{\mathrm{Z}}\psi(\xi) = \int_{+\infty}^{\xi} \psi(t)dt \quad \text{pour} \quad \mathrm{A}\psi \in \mathfrak{D}_j(x)\ ;\ j \geqslant 1$$

$$\text{(IV.9)} \qquad n_{n,q}(\mathrm{M}^+ f) = n_{n,q+1}(f)$$

$$\text{(IV.10)} \qquad \| f \| = n_{0,0}(f)$$

Enfin, avec le changement de variable $y = \text{sh}\ x$, le système de semi-normes $(n^j_{n,q})$ se transforme au système topologiquement équivalent $(p^j_{n,q})$

$$\text{(IV.11)} \qquad [p^j_{n,q}(f_{j,m})]^2 = \int_0^\infty (1+y^2)^{n+\frac{1}{2}} \left| \frac{d^q f_{j,m}}{dy^q} \right|^2 dy$$

Ainsi, chaque espace $\mathfrak{D}_{j,m}$ est isomorphe à un sous-espace fermé de $\mathcal{S}$, espace des fonctions à décroissance rapide sur la droite, à savoir l'espace des fonctions paires (impaires) pour j impair (pair) dont les j premières dérivées s'annulent à l'origine. Comme $\mathcal{S}$ est un espace nucléaire $\mathfrak{D}$ l'est également.

V. — L'ESPACE DUAL

PROPOSITION. — $\mathfrak{D}$ est un espace nucléaire, dense dans H, invariant sous l'action de $\mathfrak{l}$ et de $\mathfrak{L}$.

Démonstration. — Par construction, $\mathfrak{D}$ est stable sous l'action de J_k, L^+, L^-, donc de $K_3 = L^+ + L^-$, donc de $\mathfrak{l}$ tout entière. Tous les générateurs, restreints à $\mathfrak{D}$, sont donc définis et anti-adjoints.

Pour l'invariance sous $\mathfrak{L}$, il suffit de démontrer que les éléments $\underline{t} = \exp(tK_3)$ vérifient $U(\underline{t}).\ \mathfrak{D}_0(x) \in \mathfrak{D}$.

Soit $\text{sh}\ x\, \psi(\xi) \in \mathfrak{D}_0$; ψ ne dépend que de $\xi = \text{ch}\ x$ et se transforme en

$$\text{(V.1)} \qquad \psi^t(\xi) = \psi(\xi') = \psi(\text{ch}\ x\ \text{ch}\ t + \text{sh}\ x \cos\varphi\ \text{sh}\ t)$$

Pour $j \neq 0$, l'opérateur Q est inversible et on a :

$$2\psi^t_{j,m}(\xi) = \delta^m_0 \int_{S_2} \psi(\xi')\overline{Y}^{j,m}(u)2du = \delta^m_0 \int_0^\pi Q\psi(\xi')\cdot(-j^2-j)^{-1}\overline{Y}^{j,0}(\varphi)\sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{\delta^m_0}{j^2+j}\int_0^\pi \frac{\partial(\xi')}{\partial\varphi}\cdot\left(\sin\varphi\,\frac{\partial\overline{Y}^{j,0}}{\partial\varphi}\right)d\varphi$$

$$= \delta^m_0\,\frac{\text{sh}\ x\cdot\text{sh}\ t}{j^2+j}\int_0^\pi \frac{d\psi(\xi')}{d\xi'}\,(\lambda\overline{Y}^{j-1,0} - \mu\overline{Y}^{j+1,0})\sin\varphi d\varphi$$

d'après (II.10). En itérant le procédé on obtient :

$$\text{(V.2)} \qquad \psi^t_{j,0}(\xi) = (\text{sh}\ x\ \text{sh}\ t)^j \int_0^\pi \frac{d^j\psi(\xi')}{(d\xi')^j}\sum_{p=0}^{j}\overline{(\lambda_p Y^{2p,0})}\sin\varphi d\varphi$$

avec des coefficients λ_p adéquats. Il reste à prouver que l'intégrale I de (V.2) est une fonction de ξ qui admet des dérivées bornées. En dérivant sous le signe somme, on obtient :

$$\frac{dI}{d\xi} = \int_0^\pi \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \psi^{(j+1)}(\xi') \sum_p \overline{\lambda_p Y^{2p,0}} \sin \varphi d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \left(\text{ch } t + \text{sh } t \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \cos \dot{\varphi} \right) \psi^{(j+1)}(\xi') \Sigma \overline{\lambda_p Y^{2p,0}} \sin \varphi d\varphi$$

Or, d'après (II.9), $\cos \varphi \ \Sigma \overline{\lambda_p Y^{2p,0}} = \sum_{p=0}^{j} \mu_p \overline{Y^{2p+1,0}}$ et, par le procédé précédent, on élimine sh x du dénominateur, ce qui prouve que $\text{sh } x \ \psi^t_{j,0}(\xi) \in \mathfrak{D}_{j,0}$.

Enfin, $\mathfrak{D}$ est dense dans H car l'espace des fonctions C^∞ à support compact contenu dans $]0, \infty[$ est un sous-espace de $\mathfrak{D}$ dense dans H [*4*].

Si $\mathfrak{D}'$ est l'anti-dual topologique de $\mathfrak{D}$, on a le triplet de Gelfand $\mathfrak{D} \subset H \subset \mathfrak{D}'$. Les opérateurs infinitésimaux de I admettent une extension unique dans $\mathfrak{D}'$ donnée par

$$\text{(V.3)} \qquad (Cf' \mid f) = (f' \mid C^* f) \qquad f \in \mathfrak{D}, \ f' \in \mathfrak{D}'$$

Si $f'_j \in \mathfrak{D}'_j(x)$ est une fonction continue dans la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ on doit avoir, pour x petit, $f'_j(x) \sim x^{-j-2+\alpha} \alpha > 0$. Pour ces fonctions, on a :

$$\text{(V.4)} \quad (Cf'_j(x) \mid \text{sh}^{j+1} \widehat{f}_j (\text{ch } x)) = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{j(j+1)}{\text{sh}^2 x} - 1 \right) f'_j \mid \text{sh}^{j+1} x \widehat{f}_j \right)$$
$$+ \lim_{x \to 0} \left(x^j (j+i) \overline{\widehat{f}_j} f'_j + x^{j+1} \left(f'_j \frac{d\overline{\widehat{f}_j}}{dx} - \overline{\widehat{f}_j} \frac{df'_j}{dx} \right) \right)$$

$$\text{(V.5)} \quad (M^+ f'_j(x) \mid \text{sh}^{j+2} x \widehat{f}_{j+1} (\text{ch } x))$$
$$= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} - (j+1) \coth x \right) f'_j \mid \text{sh}^{j+2} x \widehat{f}_{j+1} \right) - \lim_{x \to 0} (x^{j+2} f'_j \overline{\widehat{f}}_{j+1})$$

$$\text{(V.6)} \quad (M^- f'_j(x) \mid \text{sh}^j x - \widehat{f}_{j-1} (\text{ch } x))$$
$$= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + j \coth x \right) f'_j \mid \text{sh}^j x \widehat{f}_{j-1} \right) - \lim_{x \to 0} x^j f'_j \overline{\widehat{f}}_{j-1}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les limites figurant dans (V.4) et (V.6) soient nulles, est $\lim x^j f'_j(x) = 0$; quant à celle figurant dans (V.5), elle est nulle d'après ce qui précède.

VI. — DIAGONALISATION DE C

D'après le théorème nucléaire spectral [5], C possède un système complet de vecteurs propres généralisés dans $\mathcal{D}'$. Comme les sous-espaces $\mathcal{D}'_{j,m}$ sont invariants par C, on cherchera des fonctions de la forme $Y_{j,m}(u) . R_{j,z}(x)$. On se limitera ensuite à $\mathcal{D}'_0$ grâce à la :

PROPOSITION 2. — Si $R_{j,z}(x)$ est vecteur propre de C, $(M^{\pm})^n R_{j,z}(x)$ l'est aussi et appartient à l'espace $\mathcal{D}'_{j\pm m}(x)$ (avec la notation $\mathcal{D}'_{-1} = \mathcal{D}'_{-2} = \ldots = \{ 0 \}$).

Pour la démonstration, on appliquera (V.3) et l'on observera que $M^{\pm}$ commute avec C dans leur domaine de définition $\mathcal{D}$.

En se limitant à $\mathcal{D}'_0$, on tire de (V.4) :

$$C\psi = \psi'' - \psi + \psi(0).\delta' = (z^2 - 1)\psi \tag{VI.1}$$

On doit donc avoir des solutions nulles à l'origine; on notera les vecteurs propres $R_{0,z}(x) = \operatorname{sh} zx$ (et $R_{0,0}(x) = x$) et on écrira

$$| z; j, m) = R_{j,z}(x) Y^{j,m}(u) = (M^+)^j R_{0,z}(x) Y^{j,m}(u) \tag{VI.2}$$

On trouvera en appendice l'expression des fonctions $R_{j,z}(x)$ définies pour z complexe; on a alors les formules :

$$L_j^+ \,| z ; j, m) = \alpha(j + 1, m) \,| z ; j + 1, m) \tag{VI.3}$$

$$L_j^- \,| z ; j, m) = (z^2 - j^2) \,\alpha(j, m) \,| z ; j - 1, m) \tag{VI.4}$$

$$\begin{aligned} K_3 \,| z ; j, m) & \\ &= \alpha(j + 1, m) \,| z ; j + 1, m) + (z^2 - j^2)\alpha(j, m) \,| z ; j - 1, m) \end{aligned} \tag{VI.5}$$

En tenant compte des formules (II.4) et (II.8) et des relations de commutation, on voit que $E(\mathfrak{l}) . \,| z; 0, 0) = V_z \cong V_{-z}$ est un sous-espace de $\mathcal{D}'$ sur lequel est définie une représentation algébrique U_z ($E(\mathfrak{l})$ désignant l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{l}$). U_z est irréductible (sauf pour $z = n$ entier non nul, auquel cas V_n admet un sous-espace invariant V'_n, le quotient V_n/V'_n définissant une représentation finie de dimension $2n + 1$ de SL(2, C)). U_z peut être complétée en une représentation continue et intégrable $\overline{U}_z$, par l'introduction, par exemple, d'une forme bilinéaire sur V_z. Pour que $\overline{U}_z$ soit unitaire, il est nécessaire de munir le complété $\overline{V}_z$ d'une structure d'espace de Hilbert sur lequel les générateurs soient anti-adjoints. Comme on peut toujours choisir un tenseur métrique diagonal sur les $| z, j, m \rangle$, on trouve

(VI.6) $$\langle z, j, m | z, j, m' \rangle = g_{z,j} . \delta_{mm'}$$

(VI.7) $$g_{z,j-1} = (j^2 - z^2) g_{z,j} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leq j$$

d'où la condition $z^2 < 1$ (pour z non entier).

Deux cas sont à envisager :

I. — $0 < z^2 < 1$.

En choisissant $\rho = z > 0$, on peut transformer $\overline{V}_\rho$ en un espace fonctionnel sur la sphère S_2 où le produit scalaire est défini par un noyau, à l'aide de l'application :

(VI.8) $$| \rho ; j, m) \xrightarrow{F_\rho} \frac{(-\rho)!}{(j-\rho)!} Y^{j,m}(u)$$

d'où

(VI.9) $$(Y^{j,m} | Y^{j',m'}) = \delta^j_{j'} \delta^m_{m'} \frac{(j-\rho)!}{(j+\rho)!} \cdot \frac{\rho !}{(-\rho)!} = h_j \delta^j_{j'} \delta^m_{m'}$$

En posant alors, pour $\psi(u) \in F_\rho \cdot \overline{V}_\rho$,

$$\psi_{j,m} = \int_{S_2} \psi \cdot \overline{Y^{j,m}} du$$

il vient :

$$(\psi | \psi') = \sum_{j,m} \psi_{j,m} \overline{\psi'_{j,m}} h_j = \sum_{j,m} h_j \int \psi(u) \overline{Y^{j,m}}(u) du \int \overline{\psi'(u')} Y^{j,m}(u') du'$$

En permutant la somme discrète (qui converge) avec les intégrations, et compte tenu de la relation

$$\sum_m \overline{Y^{j,m}}(u) Y^{j,m}(u') = Y^{j,0}(u'u^{-1})$$

(cette expression désigne, en fait, une fonction dépendant de la double classe à droite et à gauche par U(1) d'un élément de SU(2)), on obtient :

(VI.10) $$(\psi | \psi') = \iint \psi(u) \overline{\psi'(u')} K_\rho(u'u^{-1}) du du'$$

Le noyau K étant défini par

(VI.11) $$K_\rho(u) = (1 - \cos \varphi)^{\rho - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} h_j Y^{j,0}(u)$$

Les représentations U_ρ ainsi obtenues sont celles de la série supplémentaire de $\mathfrak{L}$. Nous reproduisons en appendice l'expression des opérateurs infinitésimaux.

II. — $z^2 < 0$.

$z = i\lambda$ est imaginaire pur; on peut fixer $\lambda \geqslant 0$. $\overline{V}_{i\lambda}$ est alors isomorphe à $L^2(S_2;\, du)$ par l'application

$$\text{(VI.12)} \qquad \langle z, j, m \,| \xrightarrow{F_{i\lambda}} \frac{(-i\lambda)!}{(j-i\lambda)!} Y^{j,m}(u)$$

d'où

$$(Y^{j,m} \mid Y^{j,m}) = \prod_{k=1}^{j} \frac{1}{k^2 + \lambda^2}\, g_{z,j} = g_{z,0} = 1$$

Il vient, pour $\psi(u) = \Sigma \psi_{j,m} Y^{j,m}(u) \in F_{i\lambda} \cdot \overline{V}_{i\lambda}$

$$(\psi \mid \psi') = \int \psi(u) \cdot \overline{\psi'(u)} du = \sum_{j,m} \psi_{j,m} \overline{\psi}'_{jm}$$

Les représentations $U_{i\lambda}$ ainsi obtenues sont celles de la série principale de $\mathfrak{L}$, pour $C' = 0$. L'expression des opérateurs infinitésimaux figure en appendice.

En résumant, *on voit que toutes les représentations irréductibles de* $\mathfrak{L}$ *qui satisfont* $C' = 0$, *unitaires ou non* [6] *figurent dans* $\mathfrak{D}'$, *chacune avec la multiplicité 1. Cependant, comme on va voir, seules les r. u. i. de la série principale pour* $0 < \lambda < +\infty$ *entrent en compte dans la décomposition de « Fourier » de* $\mathfrak{D}$.

VII. — ANALYSE HARMONIQUE DE U

PROPOSITION 3. — U est intégrale directe des r. u. i. $U_{i\lambda}$ pour $0 < \lambda < \infty$ et pour tout $f \in \mathfrak{D}$, on a

$$\text{(VII.1)} \qquad f(x, u) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} \int_0^\infty (f \mid Y_{i\lambda}^{j,m}) Y_{i\lambda}^{j,m} d\lambda$$

où on a posé

$$Y_{i\lambda}^{j,m} = \langle i\lambda ; j, m \,| \cdot \frac{(-i\lambda)!}{(j-i\lambda)!}$$

L'ordre des sommations étant indifférent, il suffit de démontrer que

$$\text{(VII.2)} \qquad f_{j,m}(x) = \int_0^\infty (f_{j,m} \mid R_{j,i\lambda}) R_{j,i\lambda} d\mu_j(\lambda)$$

à une constante multiplicative positive près. On procédera par récurrence. Si $f \in \mathfrak{D}_0$, on a, en intervertissant les intégrales, pour $x \geqslant 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(y) \sin \lambda y dy\right) \sin \lambda x \frac{2d\lambda}{\pi} = \int_0^{\infty} f(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} \sin \lambda x \sin \lambda y \frac{2d\lambda}{\pi}$$

$$= \int_0^{\infty} f(y)dy \int_0^{\infty} \left[e^{i\lambda(y-x)} - e^{i\lambda(y+x)}\right] \frac{d\lambda}{2\pi}$$

$$= (f(y) \mid \delta_{y-x} - \delta_{y+x}) = f(x) - f(-x) = f(x)$$

car $f(x)$ peut être prolongée en une fonction C^{∞} impaire.
Supposons (VII.2) vrai pour $j - 1$. En utilisant la formule $(M^{+}Z)_j = 1_j$, on a, pour $f_j \in \mathfrak{D}_j(x)$ (et donc $Zf_j \in \mathfrak{D}_{j-1}(x)$) :

$$\int (f_j \mid R_{j,i\lambda})R_{j,i\lambda}d\mu_j(\lambda) = \int (Zf_j \mid M^{-}R_{j,i\lambda})R_{j,i\lambda}d\mu_j(\lambda)$$

$$= \int (Zf_j \mid R_{j-1,i\lambda}) \cdot M^{+}R_{j-1,i\lambda} \cdot (j^2 + \lambda^2)d\mu_j(\lambda)$$

$$= M^{+} \int (Zf_j \mid R_{j-1,i\lambda})R_{j-1,i\lambda} \cdot (j^2 + \lambda^2)d\mu_j(\lambda)$$

En posant $d\mu_j(\lambda) = (j^2 + \lambda^2)^{-1}d\mu_{j-1}(\lambda)$, il vient :

$$\int (f_j \mid R_{j,i\lambda})R_{j,i\lambda}d\mu_j(\lambda) = M^{+} \cdot Zf_j = f_j$$

VIII. — DÉDOUBLEMENT DU SPECTRE

On vient de voir que la multiplicité des composantes irréductibles de U est 1. Ceci est dû au terme $\psi(0).\delta'$ dans (VI.1), ce qui impose la condition à l'origine $\psi(0) = 0$ pour les solutions. La question qui se pose est de savoir s'il existe un sous-espace $\mathcal{F}$ de N qui permet de se passer des conditions à l'origine et donc doubler le spectre. Notons que $\mathcal{F} \subset \mathfrak{D}$ si l'on veut que les générateurs non compacts soient définis.

En se limitant à $\mathcal{F}_0 \subset \mathfrak{D}_0$, on obtient la condition $\delta'.\mathcal{F}_0 = \{0\}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_0$ se compose de fonctions de $\mathfrak{D}_0$ dont la dérivée est nulle à l'origine. En appliquant plusieurs fois l'opérateur $L^{-}L^{+}$, on voit que toutes les dérivées doivent s'annuler à l'origine.

On définit donc $\mathcal{F}$ comme le sous-espace de $\mathfrak{D}$ dont toutes les fonctions ont toutes leurs dérivées par rapport à (x, φ, θ) nulles à l'origine.

$\mathcal{F}$ est dense dans H, il est invariant sous I, métrisable et complet (avec un système de semi-normes analogues à $n_{n,g}$ qui font intervenir la décroissance à l'origine plus vite que toute puissance de x).

Par contre, on peut vérifier que $\mathcal{F}$ n'est pas invariant par U(£), le plus grand sous-espace de $\mathcal{F}$ invariant par U(£) étant $\{ 0 \}$ ($\mathcal{F}$ ne contient aucun vecteur analytique de la représentation U mais seulement des vecteurs différentiables).

Tous les résultats du § VI sont alors valables pour les fonctions $S_{0,z} = \text{ch } zx$ (et $S_{0,0}(x) = 1$) et pour $S_{j,z}(x) = (M^+)^j S_{0,j}(X)$.

Notons que les fonctions $S_{0,z}$ (donc les $S_{j,z}$) sont dans $\mathcal{D}'$; c'est l'expression de l'extension de C qui varie entre $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{D}'$. En résumant, on a :

Proposition 4. — A partir de la représentation (de I) dU, on peut définir une représentation $\check{U}$ de I par restriction sur le domaine $\mathcal{F}$ (qui est invariant sous l'action des opérateurs infinitésimaux, mais pas sous l'action des transformations finies). $\check{U}$ est une représentation non intégrable qui contient comme sous-représentations toutes celles figurant dans U, mais avec la multiplicité 2.

Remarque. — Les sous-représentations irréductibles de $\check{U}$ sont définies à l'aide de la décomposition du dual $\mathcal{F}'$ en sous-espaces invariants. Mais l'analyse harmonique, qui permettrait d'isoler la partie réelle des valeurs propres de l'opérateur de Casimir non nul, et d'écrire $\check{U}$ comme une intégrale directe de représentations, ne donne pas de résultats nouveaux.

IX. — CAS DE MASSE IMAGINAIRE ET « SPIN » NUL

On comparera maintenant les résultats obtenus à ceux qu'on obtient pour la réduction sur £ de la r. u. i. U′ de $\mathcal{T}$ de masse imaginaire et « spin » nul (c'est-à-dire pour la r. u. i. induite par la r. u. i. triviale du sous-groupe stabilisateur SU(1, 1)).

L'espace homogène est alors l'hyperboloïde à une nappe $\mathcal{K}$, défini par $p_\mu p^\mu = -1$. Avec des notations analogues au § 1, on posera

$$\tilde{H}' = L^2\left(\mathcal{K}; \frac{d^3p}{p_0}\right).$$

Mais $\mathcal{K}$ est difféomorphe à $R \times S_2$ et avec la paramétrisation

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{sh } x & -\infty < x < +\infty \\ p_1 + ip_2 &= \text{ch } x \, \sin \varphi c^{i\theta} & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ p_3 &= \text{ch } x \, \cos \varphi & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{aligned}$$

on aura

$$\text{(IX.1)} \qquad H' = L^2(R \times S_2\,;\, \operatorname{ch}^2 x\, dx.du)$$

On peut alors définir la r. u. i. $U' \sim \tilde{U}'$ sur $H' = L^2(R \times S_2;\, dx.du)$ par

$$\text{(IX.2)} \qquad U'(\Lambda)f(x, u) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x'} f(x', u')$$

L'expression que l'on obtient pour les opérateurs infinitésimaux est la même qu'au § 1, à condition d'intervenir partout sh x et ch x. Ceci vaut également pour les opérateurs d'échelle définis dans le § 3.

Le fait qu'on n'intègre plus sur la demi-droite mais sur toute la droite rend les générateurs infinitésimaux automatiquement antihermitiens (s'ils sont définis). Il n'y aura donc plus de conditions à l'origine nécessaires pour définir l'espace nucléaire $\mathfrak{D}^-$ correspondant. Il suffira, en plus de la différentiabilité, d'introduire une notion de décroissance rapide à l'infini. On peut le faire de deux manières :

a) plus vite que toute puissance de x,

b) plus vite que toute puissance de ch x.

Notons que seul l'espace nucléaire $\mathfrak{D}_b^-$ défini à l'aide de *b)* est invariant sous $U'(\mathfrak{T})$ (la même remarque étant valable pour l'algèbre de Lie p). On vérifie facilement que les $\mathfrak{D}_j^-(x)$ définis comme dans le § 4 sont tous isomorphes à un espace fonctionnel sur la droite, qui dans le cas *a)* est $\mathcal{S}(x)$. Comme $(\mathfrak{D}_b^-)' \supset (\mathfrak{D}_a^-)'$ et $\mathfrak{D}_a^- \supset \mathfrak{D}_b^-$, la réduction de l'extension de C sera différente dans les deux cas. Elle permettra notamment l'élimination des solutions parasites.

En effet, les solutions de

$$Cf = (z^2 - 1)f$$

pour $j = 0$ sont e^{-zx} (et x). Toutes sont dans $(\mathfrak{D}_b^-)'$, mais seules celles pour lesquelles z est imaginaire pur sont dans $(\mathfrak{D}_a^-)'$. On passe dans le cas général $j \neq 0$ en utilisant les opérateurs d'échelle.

La formule d'inversion s'obtient de la même manière qu'au § VII, en observant que, pour $j = 0$, on a la transformation de Fourier habituelle sur **R**. On en déduit la

PROPOSITION 5. — U' est intégrale directe des r. u. i. $U_{i\lambda}$ pour $0 \leq \lambda < \infty$, avec la multiplicité 2 pour $\lambda \neq 0$ (et 1 pour $\lambda = 0$).

Nous remarquons que le spectre de C est « naturellement » dédoublé dans U' alors que, dans le cas de masse réelle, on peut obtenir le dédoublement en sacrifiant l'intégrabilité.

X. — CONCLUSION ET REMARQUES

1) L'espace $\mathfrak{D}$ n'est pas maximal pour la restriction de dU sur le sous-groupe $\mathfrak{L}$: en effet, les générateurs de $\mathfrak{L}$ n'imposent aucune restriction de décroissance à l'infini pour les vecteurs de H, mais seulement d'être des fonctions C^∞ (coth x étant borné pour $x \to \infty$). La décroissance en ch x, imposée par les générateurs des translations, permet aux solutions « parasites » (pour $iz \notin$ R) de figurer dans $\mathfrak{D}'$ malgré une croissance exponentielle. Il est possible, en choisissant une décroissance moins rapide pour définir le sous-espace dense, d'éliminer ces solutions parasites. Cependant, l'espace obtenu à partir d'une telle définition n'est pas invariant sous l'action des transformations inhomogènes (finies ou infinitésimales) alors que $\mathfrak{D}$ l'est. Les mêmes observations sont valables pour $\mathcal{F}$. Par ailleurs, l'existence même de ces solutions parasites, liée à la disparition de la notion d'opérateur autoadjoint dans $\mathfrak{D}'$ (l'adjonction n'est définie que par rapport au produit scalaire de H), fait apparaître l'ambiguïté de la notion de réduction dans $\mathfrak{D}'$: pour y définir l'intégrale directe de représentations, on doit faire appel au produit scalaire de H. Ainsi, il existe des sous-espaces invariants de $\mathfrak{D}'$ dont la contribution à l'analyse harmonique est nulle.

2) La situation est à rapprocher de la décomposition d'une r. u. i. de la série principale de SO(4; 1) [7]. En effet, dans le cas correspondant au spin nul, il y a un dédoublement du spectre de C, qui correspond aux deux nappes de l'hyperboloïde. Il serait intéressant d'examiner comment une contraction de la représentation de SO(4; 1) la ramène à U $\oplus$ U, et notamment l'expression des opérateurs, puisque la réduction est la même avec ou sans contraction.

3) Dans le cas de spin, $s \neq 0$, le calcul spinoriel rend la définition d'un espace nucléaire adéquat plus compliquée techniquement. Il subsiste cependant des conditions analogues à l'origine et il semble notamment que le spectre de l'analyse harmonique obtenu par Joos soit de nouveau dédoublé pour des espaces définis de manière analogue à $\mathcal{F}$ [*8*].

APPENDICE

1. — LES FONCTIONS $R_{j,z}(x)$

Les fonctions $R_{j,z}$ sont les solutions qui s'annulent à l'origine de l'équation différentielle

(A.1) $$f'' - j(j+1)(\operatorname{sh} x)^{-2}f - z^2 f = 0$$

La solution générale, pour $z \neq 0$ de (A.1) est de la forme :

$$\exp(zx)\sum_{n=0}^{j} a_n^+ (\coth x)^n + \exp(-zx)\sum_{n=0}^{j} a_n^- (\coth x)^n$$

où les coefficients a_n^+, a_n^- vérifient la relation :

(A.2) $$(j-n)(j+n+1)a_n^{\pm} \pm 2z(n+1)a_{n+1}^{\pm} + (n+1)(n+2)a_{n+2}^{\pm} = 0$$

La solution qui s'annule à l'origine est donc de la forme :

(A.3) $$R_{j,z}(x) = \operatorname{sh} zx \sum_{q=0,1,\dots} a_{j-2q} (\coth x)^{j-2q} + \sum_{q=0,1,\dots} \operatorname{ch} zx \cdot a_{j-2q-1} (\coth x)^{j-2q-1}$$

2. — EXPRESSION DES OPÉRATEURS INFINITÉSIMAUX

En utilisant les formules (II.9), (II.10,) (VI.5), (VI.8), (VI.12), on obtient le tableau suivant, où il suffit de remplacer z par ρ ou $i\lambda$, pour avoir les représentations U_ρ et $U_{i\lambda}$.

$$J_1 \pm iJ_2 = e^{\pm i\vartheta}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm i\cdot\operatorname{cotg}\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)$$

$$J_3 = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

$$-K_2 \pm iK_1 = e^{\pm i\vartheta}\left(z\cdot\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \mp i\,(\sin\varphi)^{-1}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)$$

$$K_3 = \sin\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} + (1-z)\cdot\cos\varphi$$

$$Q = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \operatorname{cotg}\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}$$

$$C = z^2 - 1$$

$$C' = 0$$

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier MM. les Professeurs M. FLATO, B. NAGEL et et D. STERNHEIMER, pour les discussions qu'il a eues avec eux à propos de ce travail. Leurs critiques et leurs remarques lui ont été très utiles.

NOTES ET RÉFÉRENCES

[1] BRUHAT, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **84**, 1956, p. 97.
[2] JOOS, *Fortschr. Phys.*, t. **10**, 1962, p. 65.
[3] WIGNER, *Ann. Math.*, t. **40**, 1939, p. 149.
[4] Remarquons que $\mathfrak{D}$ est un domaine *maximal*, sur lequel une représentation de l'algèbre enveloppante de Poincaré est définie, d'après le choix même des conditions de définition. C'est le domaine de tous les vecteurs différentiables, dans le sens suivant :

$$H \times \mathfrak{I} \ni (e, g) \mapsto U(g).e \in H \qquad \text{est une fonction } C^{\infty} \text{ de } \mathfrak{I}.$$

$\mathfrak{D}$ contient en particulier le domaine de Garding de U.
[5] MAURIN, General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups, ch. II.
[6] Pour toutes les représentations irréductibles (unitaires ou non) de L, voir NAÏMARK.
[7] S. STRÖM, *Inst. Theor. Phys.*, Göteborg, preprints 68-12 et 68-1.
[8] ANGELOPOULOS *(à paraître)*.

(Manuscrit reçu le 31 mai 1971).