

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-CHARLES BOLOMEY

ARMAND WIRGIN

## **Sur le comportement du champ électromagnétique aux arêtes**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 14, n° 2 (1971), p. 97-112

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1971\\_\\_14\\_2\\_97\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_2_97_0)

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur le comportement du champ électromagnétique aux arêtes

par

**Jean-Charles BOLOMEY**

Laboratoire d'Électronique Générale.  
École Supérieure d'Électricité,  
10, avenue P. Larousse. 92-Malakoff.

**Armand WIRGIN**

Groupe de Filtrage et Diffraction.  
Institut d'Optique,  
3, boulevard Pasteur, Paris 15<sup>e</sup>.

---

RÉSUMÉ. — Le comportement du champ électromagnétique est étudié au voisinage des arêtes d'obstacles cylindriques parfaitement conducteurs soumis à des ondes planes. On montre, sur de nombreux exemples, que le champ n'est pas toujours singulier aux arêtes même dans les cas où la condition aux arêtes semblerait prédire un tel comportement. Une nouvelle forme de la condition aux arêtes est ensuite proposée.

---

### I. INTRODUCTION

Depuis les travaux de Rayleigh [1] et Bouwkamp [2] il semblerait que les conditions aux limites, de continuité et de rayonnement, traditionnellement jointes aux équations aux dérivées partielles, sont insuffisantes pour assurer l'unicité d'un problème de diffraction électromagnétique (ou acoustique). Dans le cas de la diffraction par des obstacles parfaitement conducteurs, présentant des pointes ou des arêtes, il est possible d'obtenir des champs dont l'énergie correspondante est infinie au voisinage de ces discontinuités. Pour éliminer de telles solutions, qui apparemment n'ont aucune justification physique, Meixner [3] [4] a introduit, dans la formulation du problème de valeurs aux limites, une contrainte supplémentaire: l'énergie électromagnétique totale localisée dans un volume fini, situé à proximité d'une arête où partout ailleurs, doit être finie. L'implication mathématique de la condition de Meixner

fut subséquemment examinée par Wilcox [5] qui montra que, dans un certain sens, elle équivalait à restreindre le champ à la classe  $\mathcal{L}^2$  des fonctions complexes de carré sommable.

La condition de Meixner détermine une borne supérieure pour l'ordre de la singularité du champ. Au voisinage d'une arête, le champ ne peut être plus singulier que  $r^{-1/2}$  lorsque  $r \rightarrow 0$ ,  $r$  désignant la distance à l'arête. On peut se poser la question de savoir s'il est possible de préciser l'ordre de la singularité. La première réponse fut fournie par Sommerfeld qui résolut, de façon exacte, le problème de la diffraction d'une onde plane par un demi-plan parfaitement conducteur [6]. Bouwkamp [2] montra que la singularité au voisinage de l'arête était précisément en  $r^{-1/2}$ , confirmant ainsi, *a posteriori*, la validité, au sens de Meixner, de la solution de Sommerfeld. Quelques années plus tard, Maué [7] aborda le problème de la singularité du champ à l'arête d'un dièdre d'angle intérieur  $2\alpha$ . En considérant la solution du problème électrostatique correspondant, il montra que le champ se comporte comme :

$$\left\{ \frac{\pi}{r^{2(\pi-\alpha)}} - 1 \right\}$$

au voisinage de l'arête.

Quelques précautions s'imposent dans l'interprétation du résultat de Maué. Comme lui-même le laisse supposer, il n'est pas impossible que le champ soit *non singulier*, même pour  $2\alpha < \pi$ . Cela n'est pas surprenant car de tels champs vérifient bien évidemment la condition de Meixner. Cependant, l'impression que l'on peut retirer de la littérature est que le résultat de Maué implique l'existence *effective* d'une singularité à l'arête pour  $2\alpha < \pi$ .

Il s'ensuit, peut-être fortuitement, que même s'il arrive au champ d'être non singulier, à une arête, la solution déduite de la condition aux arêtes (c'est-à-dire reposant sur l'hypothèse que, pour  $2\alpha < \pi$ , le champ est singulier et présente la singularité donnée par Maué) est correcte. Cela est particulièrement apparent dans les problèmes dont les solutions sont obtenues par la méthode de Wiener-Hopf ou des méthodes semblables [8]. Par exemple, Magnus [9], dans sa reformulation du problème du demi-plan pour une onde incidente plane de type T. E., obtint l'équation intégrale :

$$g(x) = \int_0^{\infty} f(\xi) H_0^{(1)}(k|x-\xi|) d\xi \quad x > 0$$

$f(\xi)$  étant une densité superficielle inconnue sur le demi-plan. En se basant sur la condition aux arêtes, l'hypothèse est faite que  $f(\xi)$  doit se compor-

ter comme  $\xi^{-\frac{1}{2}}$  lorsque  $\xi \rightarrow 0$  et peut donc être représentée au moyen du développement :

$$f(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \xi^{-1} J_{m+\frac{1}{2}}(\xi)$$

Le report de cette série dans l'équation intégrale conduit alors à un système d'équations linéaires en  $C_m$  de rang infini. Bien que Magnus soit parvenu à inverser ce système, résolvant ainsi le problème de façon rigoureuse, on aurait pu songer à une approche numérique, moins élégante, tendant à approcher ce système par un système de rang fini. Quel que soit le mode d'approche, s'il devait arriver que la densité ne soit pas infinie, on trouverait simplement  $C_0$  nul puisque seul le premier terme de la série rend compte de la singularité pour  $\xi = 0$ . Si cependant, la densité étant singulière, Magnus avait fait débiter la série par le terme correspondant à  $m = 1$ , on aurait obtenu une solution incorrecte quelle que soit la méthode utilisée pour déterminer les coefficients  $C_m$ . Des remarques analogues s'appliquent à la technique récente d'Abdelmessih et Sinclair [10], qui calculent le courant à la surface d'un cylindre polygonal. Leur idée consiste à développer le courant, sur chaque segment du polygone, en série de puissances régulières plus deux termes tenant compte des éventuelles variations (prédites par Maue) aux deux arêtes dont est issu le segment. Ce mode de développement donne de bons résultats que le courant soit, ou non, singulier.

Ce qui apparaît donc important est de prédire la possibilité d'un type particulier de singularité à une arête. Si cette singularité est considérée comme une *nécessité*, alors il se peut qu'ayant trouvé un champ non singulier, on soit conduit à rejeter une solution parfaitement correcte sous le seul prétexte qu'elle devrait présenter une singularité à l'arête. De telles situations peuvent-elles se présenter? Les exemples qui suivent indiquent qu'elles le peuvent. L'objet de cet article est de découvrir quelques-uns des dangers qui guettent ceux qui utiliseraient la condition aux arêtes sans en réaliser toutes les implications.

## II. LA CONDITION D'ÉNERGIE FINIE DE MEIXNER

Les équations de Maxwell dans des milieux linéaires, homogènes, isotropes et sans sources, sont :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{H} = (i\omega\mu)^{-1} \text{rot } \vec{E} \\ (2) \quad & \vec{E} = (\sigma - i\omega\epsilon)^{-1} \text{rot } \vec{H} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$(4) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$\vec{E}$  et  $\vec{H}$  désignant respectivement les vecteurs complexes associés aux champs électrique et magnétique. La dépendance de ces grandeurs en fonction du temps, de la forme  $\exp-i\omega t$ , a été supprimée.

Dans la suite, nous considérons le cas d'obstacles parfaitement conducteurs placés dans le vide. Par raison de simplicité, nous nous restreignons à la classe des problèmes de diffraction possédant la symétrie cylindrique,  $z$  désignant la coordonnée correspondante. Soient  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  les champs totaux (incidents plus diffractés) à l'extérieur de l'obstacle; les deux problèmes scalaires indépendants suivants sont ainsi définis :

*Cas T. E.*

$$(5) \quad \vec{E} = (E_r, E_\theta, E_z) = (0, 0, U(r, \theta))$$

Alors de 1)

$$(6) \quad \vec{H} = (H_r, H_\theta, H_z) = (i\omega\mu_0)^{-1}(r^{-1}\partial_\theta U, -\partial_r U, 0)$$

*Cas T. M.*

$$(7) \quad \vec{H} = (H_r, H_\theta, H_z) = (0, 0, U(r, \theta))$$

Alors de 2)

$$(8) \quad \vec{E} = (E_r, E_\theta, E_z) = -(i\omega\varepsilon_0)^{-1}(r^{-1}\partial_\theta U, -\partial_r U, 0)$$

La condition d'énergie finie de Meixner, appropriée à ce genre de problèmes est :

$$(9) \quad \int \int_{S_0} [\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}^*] r dr d\theta < \infty$$

$S_0$  contenant l'origine et étant un sous-domaine, fini, quelconque, du domaine  $S(r, \theta)$  extérieur à l'obstacle. Comme chaque terme de l'intégrale est positif, 9) peut être écrit sous la forme de deux conditions séparées :

$$(10) \quad \int \int_{S_0} \vec{E} \cdot \vec{E}^* r dr d\theta < \infty$$

$$(11) \quad \int \int_{S_0} \vec{H} \cdot \vec{H}^* r dr d\theta < \infty$$

En tenant compte de (5), (8), (10), (11), dans les deux cas de polarisation, se réduisent à :

$$(12) \quad \int \int_{S_0} |U(r, \theta)|^2 r dr d\theta < \infty$$

$$(13) \quad \int \int_{S_0} \{ |r^{-1} \hat{c}_\theta U(r, \theta)|^2 + |-\hat{c}_r U(r, \theta)|^2 \} r dr d\theta < \infty$$

Cependant, le crochet dans (13) est précisément le carré du module du gradient de  $U$ . Ainsi :

$$(14) \quad \int \int_{S_0} |\text{grad } U(r, \theta)|^2 r dr d\theta < \infty$$

Les équations (12) et (14) traduisent la condition d'énergie finie de Meixner, sous une forme qui nous sera utile. On peut tout de suite remarquer que, pour que (14) soit satisfaite,  $|\text{grad } U|$  (i. e.  $|\vec{H}|$  ou  $|\vec{E}|$  dans les cas T. E. et T. M. respectivement), doit présenter, au pire, une singularité en  $r^{-1/2}$  au voisinage de  $r = 0$ . Cela implique que  $|U|$  est non singulier en  $r = 0$ : (12) est automatiquement vérifiée si (14) l'est. Ainsi, seule la relation (14) doit être imposée. Si  $S_0$  est choisi comme un petit domaine entourant l'arête (située à l'origine), alors la condition de Meixner, traduite par (14) impose au champ une singularité, au pire, en  $r^{-1/2}$  au voisinage de l'arête.

### III. LA CONDITION AUX ARÊTES

Comme il l'a été dit dans l'introduction, la condition aux arêtes précise le comportement du champ à l'arête d'un obstacle diffringent. Normalement, ce comportement semblerait dépendre de la géométrie particulière de l'obstacle et du type spécifique de l'onde incidente. Cependant, l'hypothèse de départ pour l'établissement et l'utilisation de la condition aux arêtes est que le comportement du champ est indépendant de ces deux facteurs. Le problème se réduit alors à la résolution du problème canonique pour le type d'arête considéré.

Nous ne considérons donc que des arêtes linéaires de telle sorte que le problème canonique est celui qui est représenté figure 1. Nous limiterons au cas de l'illumination par onde plane (des conclusions analogues s'appliqueraient au cas d'une onde incidente cylindrique issue d'une source linéaire). Le vecteur de propagation  $\vec{k}$  est situé dans le plan  $xOy$  perpendiculaire à l'arête (qui coïncide avec la droite  $x = 0, y = 0$ ) et fait un angle  $\theta_i$  avec l'axe des  $x$ . La composante transversale du champ incident qui lui est associée est :

$$(15) \quad U_i(r, \theta) = \exp \{ -ikr \cos(\theta - \theta_i) \} \quad (k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0})$$

Le champ total transversal,  $U(r, \theta; \theta_i)$  vérifie l'équation de Helmholtz

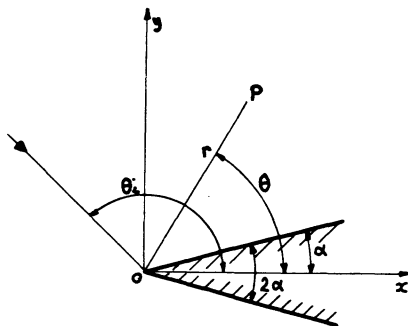


FIG. 1. — Dièdre d'angle intérieur  $2\alpha$  soumis à une onde plane d'angle d'incidence  $\theta_i$  ;  
 $0 \leq \alpha \leq \pi$  ,  $\alpha < \theta_i < 2\pi - \alpha$ .

scalaire, la condition de rayonnement à l'infini, la condition d'énergie finie de Meixner à l'arête (et ailleurs) et les conditions aux limites :

$$(16) \quad \frac{1-v}{2} U(r, \alpha; \theta_i) + \frac{1+v}{2} r^{-1} \partial_\theta U(r, \alpha; \theta_i) = 0 \quad \forall r \geq 0$$

$$(17) \quad \frac{1-v}{2} U(r, 2\pi - \alpha; \theta_i) + \frac{1+v}{2} r^{-1} \partial_\theta U(r, 2\pi - \alpha; \theta_i) = 0 \quad \forall r \geq 0$$

où  $v = -1$  dans le cas T. E. et  $v = +1$  dans le cas T. M.

La solution de ce problème, donnée par Oberhettinger [11] s'écrit :

$$(18) \quad U(r, \theta; \theta_i) = \sum_{n=-\frac{1-v}{2}}^{\infty} A_n J_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr) E_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i)$$

où

$$(19) \quad A_n = \frac{2\pi}{\beta} \varepsilon_n \exp\left(-i \frac{n\pi^2}{2\beta}\right) \quad (\varepsilon_0 = 1; \varepsilon_{n>0} = 2)$$

$$(20) \quad \beta = 2(\pi - \alpha)$$

$$(21) \quad E_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i) = \frac{1-v}{2} \sin \frac{n\pi}{\beta}(\theta - \alpha) \cdot \sin \frac{n\pi}{\beta}(\theta_i - \alpha) \\ + \frac{1+v}{2} \cos \frac{n\pi}{\beta}(\theta - \alpha) \cdot \cos \frac{n\pi}{\beta}(\theta_i - \alpha)$$

J étant la fonction de Bessel. Le calcul de  $\text{grad } U$  donne :

$$(22) \quad r^{-1} \partial_\theta U(r, \theta; \theta_i) = \frac{k}{2} \sum_{n=-\frac{1-v}{2}}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{\beta} \frac{J_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr)}{\frac{kr}{2}} F_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i)$$

où

$$(23) \quad F_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i) = \frac{1-v}{2} \cos \frac{n\pi}{\beta} (\theta - \alpha) \sin \frac{n\pi}{\beta} (\theta_i - \alpha) - \frac{1+v}{2} \sin \frac{n\pi}{\beta} (\theta - \alpha) \cos \frac{n\pi}{\beta} (\theta_i - \alpha)$$

et

$$(24) \quad -\partial_r U(r, \theta; \theta_i) = \frac{1+v}{2} k A_0 J_1(kr) - \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ J_{\frac{n\pi}{\beta}-1}(kr) - J_{\frac{n\pi}{\beta}+1}(kr) \right\} E_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i)$$

En raison des relations suivantes [12] :

$$(25) \quad J_{\eta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{\eta+2m}}{m! \Gamma(\eta + m + 1)}$$

et

$$(26) \quad \text{Min} \left( \frac{\pi}{\beta} \right) = \frac{1}{2} \quad \left( \frac{\pi}{\beta} = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad \alpha = 0 \right)$$

le comportement au voisinage de l'arête peut s'écrire :

$$(27) \quad r^{-1} \partial_{\theta} U(r, \theta; \theta_i) = \sum_{n=1}^4 B_n (kr)^{\frac{n\pi}{\beta}-1} F_{vn}(\alpha, \theta; \theta_i) + 0 \left\{ (kr)^{\frac{\pi}{\beta}+1} \right\}; \quad r \rightarrow 0$$

$$(28) \quad \partial_r U(r, \theta; \theta_i) = \frac{1+v}{2} C_0 kr + \sum_{n=1}^4 C_n (kr)^{\frac{n\pi}{\beta}-1} E_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i) + 0 \left\{ (kr)^{\frac{\pi}{\beta}+1} \right\}; \quad r \rightarrow 0$$

$B_n$  et  $C_n$  étant proportionnels à  $A_n$ . De (27) et (28) il est possible de déduire :

$$(29) \quad |\text{grad } U(r, \theta; \theta_i)| \simeq A(\theta, \theta_i) (kr)^{\frac{\pi}{\beta}-1} \quad r \rightarrow 0$$

où  $A(\theta, \theta_i)$  s'exprime simplement en fonction de  $B_1, C_1, E_{v1}, F_{v1}$ .

Cette relation constitue la condition aux arêtes. Elle établit que le gradient du champ (proportionnel à  $|\vec{H}|$  et  $|\vec{E}|$  dans les cas T. E. et T. M. respectivement) est singulier à l'arête si l'angle intérieur,  $2\alpha$ , est inférieur à  $\pi$ , et confirme le résultat, directement déductible de la condition de Meixner, c'est-à-dire que  $\text{grad } U$  ne peut être plus singulier que  $r^{-1/2}$  lorsque  $r \rightarrow 0$ .



#### IV. PREMIER EXEMPLE D'UNE EXCEPTION A LA CONDITION AUX ARÊTES

En dérivant (29) de (27) et (28), nous avons négligé l'influence des facteurs E et F qui dépendent de l'angle d'incidence  $\theta_i$ . Il en résulte, ainsi que le montre l'exemple suivant, que ce sont ces facteurs qui sont susceptibles de modifier la singularité du comportement prévu par la condition aux arêtes en cas de non-singularité.

Considérons le cas dans lequel la polarisation est de type T. M. et l'angle d'incidence  $\theta_i$  est égal à  $\pi$  (incidence normale). Alors :

$$(30) \quad E_{1n}(\alpha, \theta; \pi) = \cos \frac{n\pi}{\beta}(\theta - \alpha) \cdot \cos \frac{n\pi}{\beta}(\pi - \alpha) = \cos \frac{n\pi}{\beta}(\theta - \alpha) \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$(31) \quad F_{1n}(\alpha, \theta; \pi) = \sin \frac{n\pi}{\beta}(\theta - \alpha) \cdot \cos \frac{n\pi}{\beta}(\pi - \alpha) = \sin \frac{n\pi}{\beta}(\theta - \alpha) \cos \frac{n\pi}{2}$$

Chacun de ces facteurs s'annule pour  $n = 1$ .  $A_1$  et en conséquence  $B_1$  et  $C_1$ , étant finis, les coefficients de  $(kr)^{\frac{\pi}{\beta}-1}$  dans (27) et (28) s'annulent identiquement. Les termes prédominants de ces séries sont donc les seconds termes, de telle sorte que :

$$(32) \quad |\text{grad } U(r, \theta; \pi)| = 0 \left\{ (kr)^{\frac{2\pi}{\beta}-1} \right\} \quad r \rightarrow 0$$

En d'autres termes, le champ est non singulier à l'arête, quelle que soit l'ouverture du dièdre (puisque  $\text{Min} \left( \frac{2\pi}{\beta} - 1 \right) = 0$ ); ce comportement contredit de façon évidente la condition aux arêtes.

#### V. UN PARADOXE.

##### LE THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE DE RAYLEIGH [13] [14]

Considérons les deux problèmes de diffraction illustrés figure 2. Comme Rayleigh [15] l'a montré, ces deux problèmes sont équivalents, dans ce sens que, dans le domaine  $[r \geq a; 0 \leq \theta \leq \pi]$  les champs de ces deux configurations sont identiques. Ce théorème d'équivalence fut employé par Twersky [16] et généralisé par Wirgin [13] à des protubérances cylindriques de forme quelconque. Le même théorème s'applique aux couples

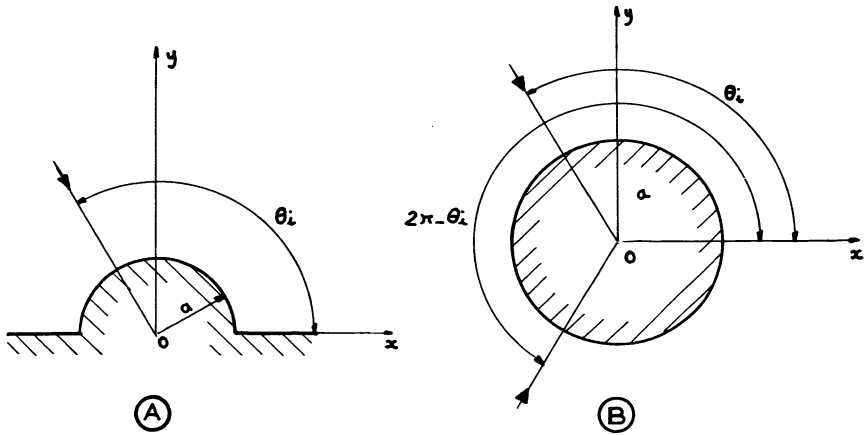


FIG. 2.

Problème (A) : Protubérance cylindrique hémicirculaire sur un obstacle plan soumis à une onde plane  $U_i(r, \theta)$  ( $0 < \theta_i < \pi$ ).

Problème (B) : Cylindre circulaire éclairé par deux ondes planes  $U_i(r, \theta)$  et  $vU_i(r, \theta + 2\theta_i - 2\pi)$ .

de problèmes représentés sur les figures 3 et 4 (L'équivalence se déduit directement de la solution exacte donnée en (18)). L'identité des problèmes dans le domaine  $\alpha \leq \theta \leq \pi$  doit bien évidemment s'appliquer au voisinage de l'arête située à l'origine.

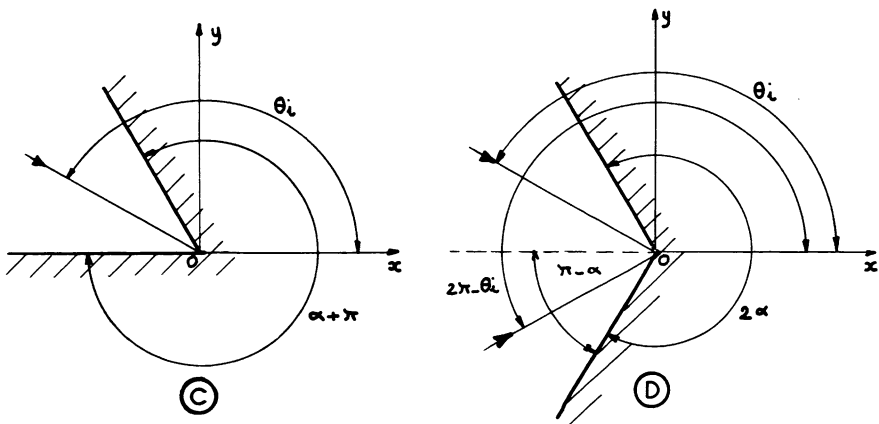


FIG. 3.

Problème (C) : Coin cylindrique, d'angle extérieur  $\alpha + \pi$  ( $\frac{\pi}{2} \geq \alpha < \pi$ ) soumis à une onde plane  $U_i(r, \theta)$  ( $\alpha < \theta_i < \pi$ ).

Problème (D) : Coin cylindrique, d'angle extérieur  $2\alpha$ , éclairé par

$$U_i(r, \theta) + vU_i(r, \theta + 2\theta_i - 2\pi).$$

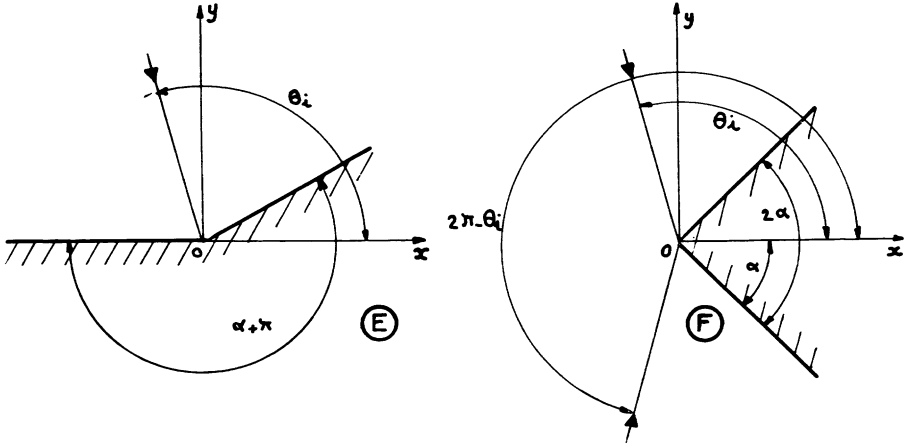


FIG. 4.

Problème **(E)** : Coin cylindrique, d'angle extérieur  $\alpha + \pi$  ( $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ) soumis a une onde plane  $U_i(r, \theta)$  ( $\alpha < \theta_i < \pi$ ).

Problème **(F)** : Dièdre d'angle intérieur  $2\alpha$  soumis aux ondes planes.

$$U_i(r, \theta) + vU_i(r, \theta + 2\theta_i - 2\pi).$$

Toutefois, la condition aux arêtes prédit que dans **(C)** et **(E)** (en remplaçant  $\alpha$  dans (29) par  $\frac{\alpha + \pi}{2}$ ):

$$(33) \quad |\text{grad } U| = 0 \left\{ (kr)^{\frac{2\pi}{\beta} - 1} \right\} \quad r \rightarrow 0; \beta = 2(\pi - \alpha)$$

alors que dans **(D)** et **(F)**:

$$(34) \quad |\text{grad } U| = 0 \left\{ (kr)^{\frac{\pi}{\beta} - 1} \right\} \quad r \rightarrow 0$$

Selon ces résultats,  $\text{grad } U$  croît plus rapidement (ou s'annule plus lentement) dans **(D)** et **(F)** que dans **(C)** et **(E)** respectivement. En particulier, dans **(E)**, le champ est non singulier à l'arête, alors que dans **(F)**, configuration théoriquement équivalente à **(E)** dans le sens indiqué ci-dessus, le champ est singulier à l'arête.

Ce paradoxe est dû au fait que la condition aux arêtes donne un comportement erroné dans **(D)** et **(F)** car, en dérivant (29), la nature particulière du champ incident n'a pas été prise en considération.

Reprenons les problèmes  $\textcircled{D}$  et  $\textcircled{E}$  qui peuvent être analysés de la même façon, la seule différence résidant dans les contraintes sur  $\alpha$ . La composante transversale du champ total  $U(r, \theta)$  est obtenue par simple superposition de  $U(r, \theta; \theta_i)$  (18), réponse à  $U_i(r, \theta)$  et  $vU(r, \theta; 2\pi - \theta_i)$  réponse à  $vU_i(r, \theta + 2(\theta_i - \pi))$ . Donc :

$$(35) \quad U(r, \theta) = U(r, \theta; \theta_i) + vU(r, \theta; 2\pi - \theta_i)$$

ou, encore :

$$(36) \quad U(r, \theta) = \sum_{n=\frac{1-v}{2}}^{\infty} A_n J_{\frac{2n}{\beta}}(kr) G_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i)$$

où

$$(37) \quad G_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i) = \left\{ (1-v) \sin \frac{n\pi}{\beta} (\theta - \alpha) \cdot \sin \frac{n\pi}{\beta} (\theta_i - \pi) \right. \\ \left. + (1+v) \cos \frac{n\pi}{\beta} (\theta - \alpha) \cdot \cos \frac{n\pi}{\beta} (\theta_i - \pi) \right\} \cos \frac{n\pi}{2}$$

En calculant le gradient de  $U(r, \theta)$ , nous obtenons la même expression qu'en (22) et (24), avec  $H_{vn}$  et  $G_{vn}$  en remplacement de  $F_{vn}$  et  $E_{vn}$  respectivement.  $H_{vn}$  est donné par :

$$(38) \quad H_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i) = \left\{ (1-v) \cos \frac{n\pi}{\beta} (\theta - \alpha) \cdot \sin \frac{n\pi}{\beta} (\theta_i - \pi) \right. \\ \left. - (1+v) \sin \frac{n\pi}{\beta} (\theta - \alpha) \cdot \cos \frac{n\pi}{\beta} (\theta_i - \pi) \right\} \cos \frac{n\pi}{2}$$

Cependant,

$$(39) \quad G_{v1}(\alpha, \theta, \theta_i) = H_{v1}(\alpha, \theta, \theta_i) = 0$$

de telle sorte que les termes correspondant à  $n = 1$ , dans les séries représentant  $U$  et  $\text{grad } U$ , s'annulent ( $A_1$  est fini). En conséquence, au voisinage de l'arête :

$$(40) \quad r^{-1} \partial_{\theta} U(r, \theta) = \sum_{n=2}^4 \bar{B}_n (kr)^{\frac{n\pi}{\beta}-1} H_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i) + 0 \left\{ (kr)^{\frac{\pi}{\beta}+1} \right\}$$

$$(41) \quad -\partial_r U(r, \theta) = (1+v) \bar{C}_0(kr) + \sum_{n=2}^4 \bar{C}_n (kr)^{\frac{n\pi}{\beta}-1} G_{vn}(\alpha, \theta, \theta_i) \\ + 0 \left\{ (kr)^{\frac{\pi}{\beta}+1} \right\}; \quad r \rightarrow 0$$

$\bar{B}_n$  et  $\bar{C}_n$  étant proportionnels à  $A_n$ ;  $G_{v2}$  et  $H_{v2}$  sont différents de zéro

sauf pour  $\nu = 1$ ,  $\theta_i = \frac{\pi + \alpha}{2}$  (i. e. polarisation de type T. M., incidence normale).

Ainsi :

$$(42) \quad |\text{grad } U| = 0 \left\{ (kr)^{\frac{2\nu}{\beta}-1} \right\}; \quad r \rightarrow 0 \quad \begin{cases} \nu = -1 & \alpha < \theta_i < \pi \\ \nu = +1 & \begin{cases} \alpha < \theta_i < \frac{\pi + \alpha}{2} \\ \frac{\pi + \alpha}{2} < \theta_i < \pi \end{cases} \end{cases}$$

ce qui confirme (33) et contredit (34), et

$$(43) \quad |\text{grad } U| = 0 \left\{ (kr)^{\frac{4\nu}{\beta}-1} \right\}; \quad r \rightarrow 0 \quad \nu = +1 \quad \theta_i = \frac{\pi + \alpha}{2}$$

qui est en accord avec (32) pour les problèmes  $\textcircled{C}$  et  $\textcircled{E}$  (la différence apparente provient du fait que (32) s'applique à un dièdre d'angle intérieur  $2\alpha$  ou à un coin d'angle extérieur  $2\alpha$  alors que dans  $\textcircled{C}$  et  $\textcircled{E}$  les angles sont égaux à  $\alpha + \pi$ ).

### VI. TROISIÈME EXCEPTION A LA CONDITION AUX ARÊTES

Considérons la problème représenté figure 5 (c'est une variante du problème traité par Maréchal et Stroke [17]). Des considérations élémentaires montrent que, pour  $kb = m\pi$ ,  $m = 0, 1, \dots$  le champ total est :

$$(44) \quad U(x, y) = U_i(x, y) + U_i(x, -y) = 2 \cos ky$$

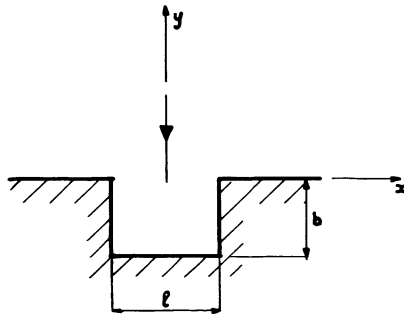


FIG. 5. — Sillon rectangulaire tracé dans un obstacle plan soumis, en incidence normale, à une onde plane de type T. M. :  $U_i(x, y) = \exp \{ -iky \}$ .

La condition aux arêtes prédit une singularité en  $r^{-1/3}$  aux arêtes A et B, mais il ne peut en être ainsi puisque grad U calculé à partir de (44) est régulier dans tout le plan  $x - y$ .

**VII. QUATRIÈME EXCEPTION  
A LA CONDITION AUX ARÊTES**

Considérons un obstacle identique à celui du paragraphe précédent, illuminé maintenant par deux ondes planes  $U_i(x, y)$  et  $\gamma U_i(-x, y)$  où  $\gamma = \pm 1$  et

$$(45) \quad U_i(x, y) = \exp \{ ik(x \sin \varphi - y \cos \varphi) \} = \exp \{ ik(xs - yc) \}$$

$\varphi$  étant mesuré à partir du demi-axe positif des  $y$  et  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ . Dans les cas particuliers où les relations suivantes sont satisfaites :

$$(46) \quad \begin{aligned} kbc &= m\pi & m &= 0, 1, \dots \\ kls &= \left\{ 2n - \frac{|v - \gamma|}{2} \right\} \pi & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

( $v = +1$  dans le cas T. M.,  $v = -1$  dans le cas T. E.), le champ total est :

$$(47) \quad U(x, y) = \{ (1 - v) \sin kcy + i(1 + v) \cos kcy \} \cdot \{ (1 - \gamma) \sin ksx - i(1 + \gamma) \cos ksx \}$$

Une fois encore, la condition aux arêtes prévoit une singularité en  $r^{-1/3}$  pour grad U aux arêtes A et B alors que grad U, déduit de (47), est visiblement régulier dans tout le plan  $x - y$ .

**VIII. CINQUIÈME EXCEPTION  
A LA CONDITION AUX ARÊTES [14]**

Considérons les problèmes  $\textcircled{G}$  et  $\textcircled{H}$ , représentés figure 6, qui sont équivalents au sens indiqué dans le paragraphe V. Des solutions exactes ne peuvent être obtenues pour de tels problèmes. L'obstacle cylindrique de section carrée, illuminé par une seule onde plane,  $U_i(x, y)$  (ou  $U_i(x, -y)$ ) a été étudié numériquement au moyen de la méthode des moments [18] [19] [20] [21] [22]. Soient  $U_1(x, y)$  et  $U_2(x, y)$  les réponses correspondant

respectivement à  $U_i(x, y)$  et  $U_i(x, -y)$ . En vertu du principe de superposition, la solution du problème  $\textcircled{H}$  est :

(48) 
$$U(x, y) = U_1(x, y) - U_2(x, y)$$

(49) 
$$\text{grad } U(x, y) = \text{grad } U_1(x, y) - \text{grad } U_2(x, y)$$

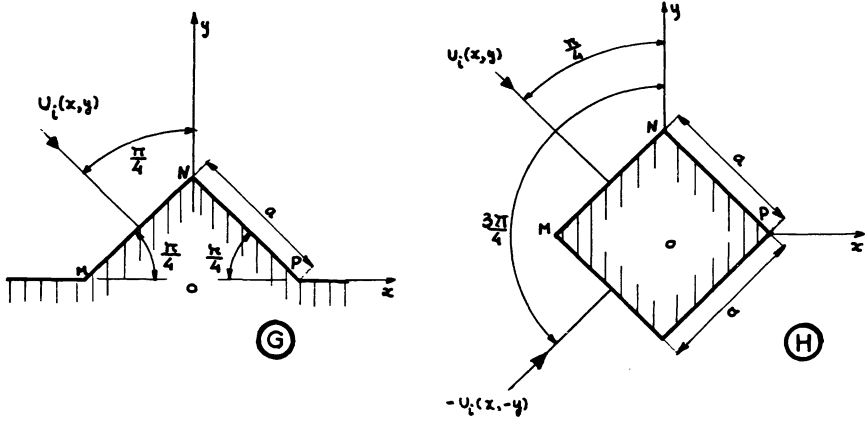


FIG. 6.

Problème  $\textcircled{G}$  : Protubérance cylindrique triangulaire sur un obstacle plan soumis à une

onde plane de type T. E.:  $U_i(x, y) = \exp \left\{ ik \frac{\sqrt{2}}{2} (x - y) \right\}$ .

Problème  $\textcircled{H}$  : Cylindre carré soumis aux ondes planes de type T. E.:  $U_i(x, y) - U_i(x, -y)$ .

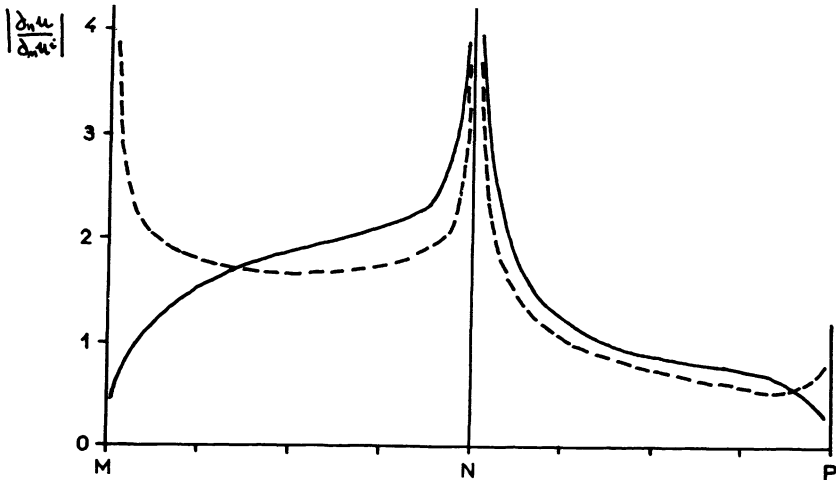


FIG. 7.

Problème  $\textcircled{H}$  : Densité superficielle de courant normalisée sur un obstacle cylindrique de contour carré.  $ka = 1$ . Polarisation T. E.

La courbe en trait interrompu correspond au champ incident  $U_i(x, y)$ ; la courbe en trait plein, au champ  $U_i(x, y) - U_i(x, -y)$ .

Les mêmes relations linéaires s'appliquent au courant superficiel qui est proportionnel à la dérivée normale de  $U$  sur la surface. Selon la condition aux arêtes, ce courant doit être singulier aux arêtes M, N, P. C'est précisément le cas en ce qui concerne  $|\text{grad } U_1|$ , ainsi que l'indique la courbe en trait pointillé de la figure 7. Pour l'illumination par deux ondes, la condition aux arêtes prévoit le même comportement que dans le cas précédent. Un calcul reposant sur (49), donne cependant la courbe en trait plein de la figure 7 qui ne présente de singularité qu'aux arêtes N et Q. Cela constitue donc un exemple dans lequel le comportement du champ, pour un obstacle comprenant plusieurs arêtes identiques, est singulier à certaines arêtes et non singulier à d'autres.

## CONCLUSION

La condition aux arêtes, de la façon dont elle est couramment utilisée, établit que le champ est *effectivement* singulier à l'arête d'un dièdre d'angle intérieur inférieur à  $\pi$ . Toutefois, nous avons montré, au moyen de quelques exemples, que le champ n'est pas *nécessairement* singulier à l'arête. La raison en est que la géométrie spécifique du problème (champ incident et obstacle) peut conduire à l'annulation de la singularité prévue.

Il convient de remarquer que l'ordre de la singularité est bien celui qui est prédit par Maue, en cas d'existence effective de cette singularité. Il semble peu probable que l'on puisse trouver des exemples contredisant cette remarque.

Il semble donc que l'on puisse reformuler la condition aux arêtes pour un dièdre de la façon suivante : à une arête, le champ peut être non singulier ou singulier. Dans ce dernier cas l'ordre de la singularité est celui qui est donné par Maue. En aucun cas le champ n'est plus singulier que  $r^{-1/2}$  lorsque  $r \rightarrow 0$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. RAYLEIGH, *Sc. Papers*, vol. 4, 1903, p. 288.
- [2] C. J. BOUWKAMP, *Physica*, t. 12, 1946, p. 467.
- [3] J. MEIXNER, *Z. Naturforsch.*, t. 3 a, 1948, p. 506.
- [4] J. MEIXNER, *Ann. d. Physik*, t. 6, 1949, p. 2.
- [5] C. H. WILCOX, *Electromagnetic Waves*, edit. R. E. Langer, U. Wisconsin Press, Madison, 1962.
- [6] A. SOMMERFELD, *Math. Ann.*, t. 47, 1896, p. 317.
- [7] A. W. MAUE, *Z. f. Physik*, t. 126, 1949, p. 601.
- [8] R. E. COLLIN, *Field Theory of Guided Waves*, McGraw Hill, New York, 1960.
- [9] W. MAGNUS, *Z. f. Physik*, t. 117, 1941, p. 168.



- [10] S. ABDELMESSIH et G. SINCLAIR, *Canad. J. Phys.*, t. **45**, 1967, p. 1305.
- [11] F. OBERHETTINGER, *J. Math. Phys.*, t. **34**, 1955, p. 245.
- [12] G. N. WATSON, *A Treatise on the theory of Bessel functions*, Cambr. U. Press, Cambridge, 1966, p. 40.
- [13] A. WIRGIN, *C. R. Acad. Sci.*, t. **267 B**, 1968, p. 102.
- [14] J. C. BOLOMEY et A. WIRGIN, *C. R. Acad. Sci.*, t. **268 B**, 1969, p. 833.
- [15] L. RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, t. **14**, 1907, p. 350.
- [16] V. TWERSKY, *IRE Trans.*, AP-5, 1957, p. 81.
- [17] A. MARECHAL et G. W. STROKE, *C. R. Acad. Sci.*, t. **249**, 1959, p. 2042.
- [18] K. K. MEI et J. G. VAN BLADEL, *IEEE Trans.*, AP-11, 1963, p. 185.
- [19] M. G. ANDREASEN et K. K. MEI, *IEEE Trans.*, AP-12, 1964, p. 235.
- [20] J. C. BOLOMEY, Thèse de 3<sup>e</sup> Cycle, Orsay, 1967.
- [21] E. ROUBINE et J. C. BOLOMEY, *C. R. Acad. Sci.*, t. **266 B**, 1968, p. 127.
- [22] R. F. HARRINGTON, *Field Computation by moment methods*, MacMillan, New York, 1968.

*Manuscrit reçu le 24 juillet 1970.*

---