ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRÉDÉRIC KLOPP

Localisation pour des opérateurs de Schrödinger aléatoires dans $L^2(\mathbb{R}^d)$: un modèle semi-classique

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 1 (1995), p. 265-316

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_1_265_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 1 (1995), 265-316

LOCALISATION POUR DES OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER ALÉATOIRES DANS $L^2(\mathbb{R}^d)$: UN MODÈLE SEMI-CLASSIQUE

par Frédéric KLOPP

0. INTRODUCTION

Dans ce travail, nous étudions le spectre d'opérateurs de Schrödinger, agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, de la forme,

$$P_t = -h^2\Delta + V + \sum_{\gamma\in L} t_\gamma \delta V_\gamma, \tag{0.1}$$

où V est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et L-périodique (L est un réseau de $\mathbb{R}^d$), $\delta V_\gamma(x) = \delta V(x-\gamma)$ où δV est fonction positive $\mathcal{C}^\infty$ supportée dans un voisinage compact de 0, et $t = (t_\gamma)_{\gamma\in L}$ est une famille de paramètres réels.

Comme il est difficile d'étudier le spectre de P_t analytiquement en fonctions des paramètres $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$, nous utiliserons l'approximation classique qui consiste à supposer que les $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$ forment une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d) et à étudier les propriétés du spectre de P_t qui sont vraies pour presque tout t.

Les opérateurs de Schrödinger aléatoires, autant dans le cas discret que continu, ont fait l'objet de nombreuses études et de traités généraux (voir par exemple les livres de L. Pastur et A. Figotin [PFi], ou de R. Carmona et J. Lacroix [CL]). Étant données les propriétés d'ergodicité

Mots-clés : Opérateur de Schrödinger aléatoire – Limite semi-classique – Localisation d'Anderson.
Classification math. : 35Q40 – 47B80 – 81Q10 – 81Q20 – 82Q44.

de P_t, on sait qu'il existe un ensemble fermé, Σ, tel que, si $\sigma(P_t)$ désigne le spectre de P_t alors, pour presque tout t, $\Sigma = \sigma(P_t)$ (par exemple [P], [PFi], [CL] ou [KuSo]). De même, il existe des ensembles Σ_{pp}, Σ_{ac} et Σ_{sc} tels que, si $\sigma_{pp}(P_t)$, $\sigma_{ac}(P_t)$ et $\sigma_{sc}(P_t)$ désignent respectivement les spectres purement ponctuel, absolument continu et singulier continu de P_t alors, pour presque tout t, $\Sigma_{pp} = \sigma_{pp}(P_t)$, $\Sigma_{ac} = \sigma_{ac}(P_t)$ et $\Sigma_{sc} = \sigma_{sc}(P_t)$.

Dans cette étude, nous nous intéresserons plus particulièrement à la propriété de localisation pour P_t. Nous dirons que l'opérateur aléatoire P_t est localisé pour un intervalle d'énergie I si $\Sigma_{ac} \cap I = \emptyset$, $\Sigma_{sc} \cap I = \emptyset$ et $\Sigma \cap I \neq \emptyset$. On dira que l'opérateur aléatoire P_t est exponentiellement localisé pour cet intervalle d'énergie I, si de plus, toute fonction propre de P_t associée à une valeur propre dans I est exponentiellement décroissante à l'infini.

La localisation des opérateurs de Schrödinger aléatoires a surtout été étudiée, pour le cas continu, en dimension 1 (voir, par exemple, les travaux de Ya. Gol'dsheid, S. Molchanov et L. Pastur [GMP], S. Kotani et B. Simon [KoSi] et R. Carmona [C]), et, dans le cas discret, en dimension quelconque, pour le modèle de tight binding d'Anderson (voir, par exemple, les travaux de J. Fröhlich, T. Spencer, F. Martinelli et E. Scoppola [FS], [MS1], [MS2], [FMSS] et de H. von Dreyfus et A. Klein [vDK1], [vDK2]).

Dans le cas continu, en dimension plus grande que 1, il y a beaucoup moins de résultats de localisation. H. Holden et F. Martinelli dans [HM] ont prouvé l'absence de diffusion puis S. Kotani et B. Simon dans [KoSi] ont prouvé la localisation exponentielle, pour des basses énergies, pour le modèle suivant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$P(t) = -\Delta + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^d} t_\gamma \chi_\gamma,$$

où χ_γ est la fonction caractéristique du cube de côté 1 centré en γ et $(t_\gamma)_{\gamma \in L}$ est une famille de variables aléatoires i.i.d.

J. M. Combes et P. D. Hislop se sont intéressés à l'absence de diffusion pour des modèles d'opérateurs de Schrödinger aléatoires sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ (voir les résultats annoncés dans [CoHis]).

Si on annule les perturbations dans notre modèle, P_0 est un opérateur de Schrödinger à potentiel périodique; on sait donc que son spectre est purement absolument continu constitué de bandes. Nous allons étudier le spectre de P_t au voisinage de la première bande du spectre de P_0. Cette étude se découpe en trois parties : une partie semi-classique, une partie que nous dirons "aléatoire" et une dernière partie où nous appliquerons les résultats de la partie "aléatoire" au modèle semi-classique.

Dans la partie semi-classique, en reprenant sans les détailler les techniques utilisées dans [Kl], nous établissons l'existence d'une équivalence unitaire entre P_t, restreint à un intervalle d'énergie convenablement choisi, et une matrice infinie agissant sur $\ell^2(L)$, dont les coefficients sont des fonctions de t qui peuvent être déterminées avec une suffisamment grande précision. Ceci fait l'objet du théorème 1.2.

Dans la partie "aléatoire", en étendant les travaux de [FS] et [vDK1], nous établissons notre théorème principal (théorème 1.7), un théorème de localisation pour des matrices aléatoires infinies agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ qui satisfont à une propriété de découplage (*cf.* définition 1.3), à une estimée de Wegner (*cf.* définition 1.6) et dont les coefficients, supposés fonctions de variables aléatoires indépendantes, décroissent exponentiellement quand on s'éloigne de la diagonale (*cf.* hypothèse (H'.1)). Dans notre cas, les coefficients de la matrice, qui sont les variables aléatoires habituellement considérées dans le cas discret, ne sont pas supposés indépendants; nous admettons également du désordre hors de la diagonale (i.e les coefficients non diagonaux de la matrice que nous étudions, sont des variables aléatoires non nécessairement constantes).

Dans la dernière partie, nous appliquons d'abord ce résultat pour établir un théorème de localisation, pour de grands désordres ou de grandes énergies, pour des analogues à longue portée du modèle d'Anderson discret (théorème 1.8).

Enfin, nous prouvons que, modulo une renormalisation convenable, la matrice obtenue par équivalence unitaire dans la partie semi-classique, satisfait aux conditions requises à l'application du théorème principal de la partie "aléatoire". Ainsi, pour notre modèle semi-classique, nous montrons que, si les $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$ sont des variables aléatoires i.i.d bien distribuées dans un voisinage de 0, pour h assez petit, avec une probabilité 1, le spectre de P_t dans un voisinage de la première bande de spectre de P_0, est purement ponctuel; de plus, si φ est une fonction propre associée à une valeur propre de P_t dans cet intervalle, alors φ est une fonction exponentiellement décroissante à l'infini. Ce résultat fait l'objet du théorème 1.9.

Le contenu de ce papier est agencé de la façon suivante : dans la partie 1, nous définissons les objets de notre étude, et donnons les principaux résultats; dans la partie 2, nous énonçons trois lemmes et, à partir de ceux-ci, prouvons le théorème principal de la partie "aléatoire";

la preuve de ces lemmes fait l'objet des parties 3, 4 et 5; enfin, dans un appendice, la partie 6, nous avons rassemblés les preuves des résultats semi-classiques, ainsi que celles des lemmes dont nous nous servons pour prouver la localisation pour notre modèle semi-classique.

Remerciements. — Une partie de ce travail a été effectuée à l'Université de Saint-Pétersbourg. L'auteur tient à remercier V. Buslaev et A. Fedotov pour leur accueil. Il remercie également les organisateurs du programme "Spectral Problems in Mathematical Physics", B. Helffer, A. Jensen et J. Sjöstrand pour leur invitation à l'institut Mittag-Leffler.

1. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS

A. Modèle semi-classique.

Soit $L = \overset{d}{\underset{j=1}{\oplus}} \mathbb{Z}u_j$, un réseau de $\mathbb{R}^d$ où $(u_j)_{1\leq j\leq d}$ est une base de $\mathbb{R}^d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $x = \sum_{j=1}^{d} x_j u_j$, on définit $|x|_L = \sup_{1\leq j\leq d} |x_j|$.

On considère l'opérateur de Schrödinger suivant agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$P = -h^2\Delta + V \tag{1.1}$$

où V est un potentiel satisfaisant à

(H.1) V est L-périodique, $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $V \geq 0$, $V^{-1}(\{0\}) = L$ et $\mathrm{Hess}V(0)$ est défini positif.

Soit d la distance d'Agmon définie par V c'est-à-dire la distance donnée par la métrique $V(x)dx$. Soit $S_0 = \inf_{\alpha\in L\setminus\{0\}} d(\alpha,\beta)$. On sait que $\sigma(P)$, le spectre de P est constitué de bandes de spectre purement absolument continu. Par [Si1] (voir aussi [O] et [Kl]), on sait que sous l'hypothèse (H.1), la première bande du spectre de P est de longueur $f(h)$ vérifiant

$$\limsup_{h\to 0} h\log f(h) = -S_0. \tag{1.2}$$

Notons $[i_h, s_h]$ la première bande de $\sigma(P)$. Par [O] (voir aussi [Kl]), on sait que, pour h assez petit, il existe $a(h) > 0$ tel que

$$\begin{cases} |a(h)| + h|\log(a(h))| \to 0 \text{ quand } h \to 0 \\ \sigma(P) \cap ([i_h, s_h] + [-8a(h), 8a(h)]) = [i_h, s_h]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Soit δV une fonction à support compact satisfaisant à

(H.2) $\delta V \geq 0$, $\delta V(0) = \|\delta V\|_\infty = 1$, $\delta V \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et δV est bien supportée au voisinage de 0 (pour un énoncé plus précis, voir [Kl]).

Soit $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$, une famille bornée de réels. On s'intéresse à l'opérateur

$$P_t = P + \sum_{\gamma\in L} t_\gamma \delta V_\gamma \tag{1.4}$$

où $\delta V_\gamma(x) = \delta V(x-\gamma)$. On prend $(t_\gamma)_{\gamma\in L} \in [-2a(h), 2a(h)]^L$ et on veut étudier le spectre de P_t dans l'intervalle $[i_h, s_h] + [-2a(h), 2a(h)]$. Pour cela, on procède comme dans [Kl]; on restreint P_t à l'intervalle d'énergie $[i_h, s_h] + [-2a(h), 2a(h)]$, on trouve une base convenable pour y représenter cet opérateur puis on calcule la matrice de P_t dans cette base.

Soit $((s_{\alpha,\beta}))_{(\alpha,\beta)\in L\times L}$, une collection de nombres positifs.

DÉFINITION 1.1. — *Soit $\mathcal{M} = ((m_{\alpha,\beta}))_{(\alpha,\beta)\in L\times L}$, une matrice. On dit que $\mathcal{M}$ est $\mathcal{O}(s_{\alpha,\beta})$ si*

$$\forall(\alpha,\beta)\in L\times L, \quad |m_{(\alpha,\beta)}| \leq e^{-s_{\alpha,\beta}}.$$

On définit, pour $(\alpha,\beta,\gamma)\in L\times L\times L$

$$d_\gamma(\alpha,\beta) = \begin{cases} d(\mathrm{supp}(\delta V_\gamma),\alpha) + d(\mathrm{supp}(\delta V_\gamma),\beta) & \text{si } (\alpha,\beta)\neq(\gamma,\gamma) \\ 2\inf\limits_{\alpha\neq 0}(d(\mathrm{supp}(\delta V_0),\alpha)) & \text{si } (\alpha,\beta) = (\gamma,\gamma) \end{cases}$$

et

$$d_0(\alpha,\beta) = \begin{cases} d(\alpha,\beta) & \text{si } \alpha\neq\beta \\ 2\inf\limits_{\alpha\neq 0}(d(\alpha,0)) = 2S_0 & \text{si } (\alpha,\beta) = (0,0). \end{cases}$$

Soit F_t, l'espace spectral associé à P_t et $[i_h - 2a(h), s_h + 2a(h)]$, et Π_t, la projection orthogonale sur F_t. On a alors le

THÉORÈME 1.2. — *Supposons* (H.1) *et* (H.2) *vérifiées. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[$, il existe $h_\varepsilon > 0$ tel que pour $h\in]0,h_\varepsilon[$ et $t = (t_\gamma)_{\gamma\in L} \in ([-2a(h), 2a(h)])^L$,*

1) *il existe $(\varphi_{\gamma,t})_{\gamma\in L}$, une base hilbertienne de F_t et $C(h) > 0$ tel que, pour tout $\gamma\in L$,*

$$\left\|e^{\frac{(1-\varepsilon)}{h}\cdot d(\gamma,\cdot)}\cdot\varphi_{\gamma,t}(\cdot)\right\|_{L^2} + h\left\|e^{\frac{(1-\varepsilon)}{h}\cdot d(\gamma,\cdot)}\cdot\nabla\varphi_{\gamma,t}(\cdot)\right\|_{L^2} \leq C(h) \tag{1}$$

2) *la matrice de $(P_t)_{|F_t} = P_t\Pi_t$ dans cette base est*

$$\mathcal{H}(t) = \mu(h) + \mathcal{M}(t) + \mathcal{D}_b(t) \tag{2}$$

où

(a) $\mathcal{D}_b(t) = ((b(t_\alpha)\delta_{\alpha,\beta}))_{(\alpha,\beta)\in L\times L}$ *est une matrice diagonale où* $b(t)$ *est analytique en* t *dans* $D(0, 2a(h))$,

(b) $t \mapsto \mathcal{M}(t)$ *est une application à valeur matricielle analytique de* $[D(0, 2a(h))]^L$ *dans* $\mathcal{B}(\ell^2(L))$ *(au sens* $\mathbb{C}$*-différentiable de* $[D(0, 2a(h))]^L$ *dans* $\mathcal{B}(\ell^2(L))$*),*

(*) $\mathcal{M}(0)$ *est une matrice de convolution et est* $\mathcal{O}\Big(\dfrac{(1-\varepsilon)}{h} d_0(\alpha,\beta)\Big)$,

(**) *pour* $\alpha \in L$, $\partial_{t_\gamma}\mathcal{M}(t)$ *est* $\mathcal{O}\Big(\dfrac{(1-\varepsilon)}{h} d_\gamma(\alpha,\beta)\Big)$,

(c) $\mu(h)$ *est un réel vérifiant* $\mu(h) \to 0$ *quand* $h \to 0$.

Remarques.

1) $\mathcal{B}(\ell^2(L))$ désigne l'espace des opérateurs bornés de $\ell^2(L)$ dans lui-même.

2) $\mu(h) + \mathcal{M}(0)$ est la matrice de convolution représentant P dans la base de F_0, $(\varphi_{\gamma,0})_{\gamma\in L}$. Elle donne la première bande de spectre de P.

3) Une description plus précise de b est fournie par le lemme 3.1 et la section 5 de [Kl].

4) Par (b), on obtient que, pour $t \in ([-2a(h), 2a(h)])^L$,

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}(0) + \sum_{\gamma\in L} t_\gamma \int_0^1 \partial_{t_\gamma}\mathcal{M}(ut)du, \tag{1.5}$$

la somme étant convergente au sens fort dans $\mathcal{B}(\ell^2(L))$. On en déduit qu'il existe $c_0 > 0$ tel que, pour h assez petit,

$$\sup_{t\in([-2a(h),2a(h)])^L} \|\mathcal{M}(t)\|_{\mathcal{B}(\ell^2(L))} \leq e^{-\frac{c_0}{h}}. \tag{1.6}$$

De plus, si $a_0 = \inf\limits_{x\in L\setminus\{0\}} \dfrac{d(0,x)}{|x|_L}$, alors, par l'hypothèse (H.1), $a_0 > 0$. Donc, pour tout $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, il existe $h_\varepsilon > 0$ tel que pour $h \in]0, h_\varepsilon[$, on a

$$\sup_{t\in([-2a(h),2a(h)])^L} |m_{\alpha,\beta}(t)| \leq e^{-\frac{a_0(1-\varepsilon)}{h}|\alpha-\beta|_L} \tag{1.7}$$

et, il existe $b_0 > 0$ tel que

$$\sup_{t\in([-2a(h),2a(h)])^L} |\partial_{t_\gamma} m_{\alpha,\beta}(t)| \leq \begin{cases} e^{-\frac{a_0(1-\varepsilon)}{h}(|\alpha-\gamma|_L+|\gamma-\beta|_L)} & \text{si } (\alpha,\beta)\neq(\gamma,\gamma) \\ e^{-\frac{b_0}{h}} & \text{si } (\alpha,\beta)=(\gamma,\gamma). \end{cases} \tag{1.8}$$

La preuve de ce théorème fait l'objet de la partie A de l'appendice. Pour ce qui concerne ce genre de réductions, on pourra consulter les travaux de B. Helffer et J. Sjöstrand, par exemple [HeSj] (pour le cas d'un nombre fini de puits pour le potentiel que l'on veut étudier), et l'article de U. Carlsson [Ca] (dans le cas d'un nombre infini de puits).

B. Localisation d'Anderson pour une classe de matrices aléatoires.

Considérons $\mathbb{Z}^d$ muni de la norme $|x| = \sup_{1\leq j\leq d} |x_j|$ si $x = (x_j)_{1\leq j\leq d}$. Pour $\ell > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on note $\Lambda_\ell(x) = \left\{z \in \mathbb{Z}^d; |z-x| \leq \frac{\ell}{2}\right\}$.

Soit D un ensemble. Soit

$$\mathcal{H} : D^{\mathbb{Z}^d} \to \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}^d) = \{((m(x,y)))_{(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d};\ m(x,y) \in \mathbb{C}\},$$

une application à valeurs matricielles satisfaisant à

(H'.1)

(a) pour tout $t \in D^{\mathbb{Z}^d}$, $\mathcal{H}(t) = ((h(t;x,y)))_{(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d}$ est hermitienne, c'est-à-dire, pour $(x,y) \in \mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$, $h(t;x,y) = \overline{h(t;y,x)}$

(b) il existe $m_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in D^{\mathbb{Z}^d}$ et tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ tel que $x \neq y$, on a

$$|h(t;x,y)| \leq e^{-m_0|x-y|}.$$

Sous cette hypothèse (voir, par exemple, [KuSo]), l'opérateur $\mathcal{H}(t)$, défini par la matrice $\mathcal{H}(t)$ sur le domaine $f(L) = \{\varphi = (\varphi(x))_{x\in\mathbb{Z}^d};$ $\exists R > 0$ tel que $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq R\}$, est essentiellement auto-adjoint. On note alors $\mathcal{H}(t)$, son extension auto-adjointe sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ qui a pour domaine, $D(\mathcal{H}(t)) = \{\varphi;\ \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |h(t;x,x)\varphi(x)|^2 < +\infty\}$.

Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, on définit $\mathcal{H}_\Lambda(t)$ comme $\mathcal{H}(t)$ restreint à $\ell^2(\Lambda)$ ($\ell^2(\Lambda)$ est canoniquement injecté dans $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ par l'inclusion $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$). Si A_Λ est un opérateur défini sur $\ell^2(\Lambda)$, on notera également par A_Λ, son prolongement par 0 à $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ (i.e $A_{\Lambda|_{\ell^2(\Lambda)}} = A_\Lambda$ et $A_{\Lambda|_{\ell^2(\Lambda)^\perp}} = 0$). Soit $e \in D$. On définit l'application $\Pi_{\Lambda,e}$ par

$$\begin{aligned} \Pi_{\Lambda,e} : D^{\mathbb{Z}^d} &\to D^{\mathbb{Z}^d} \\ t = (t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d} &\mapsto \Pi_{\Lambda,e}(t) = (\Pi_{\Lambda,e}(t)_x)_{x\in\mathbb{Z}^d} \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\text{où } \Pi_{\Lambda,e}(t)_x = \begin{cases} t_x & \text{si } x \in \Lambda \\ e & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $(e, f) \in D \times D$, on a

$$\Pi_{\Lambda,e} \circ \Pi_{\Lambda,f} = \Pi_{\Lambda,e}. \tag{1.10}$$

Pour $\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$, on définit

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda',e}(t) = \mathcal{H}_\Lambda(\Pi_{\Lambda',e}(t))$$

(dans $\mathcal{H}_\Lambda(t)$, on a égalé à e les variables t_x pour $x \notin \Lambda'$).

DÉFINITION 1.3. — *Soient $d_0 > 0$ et $k_0 > 0$. On dit que $\mathcal{H}(t)$ vérifie une propriété de découplage d'ordre (d_0, k_0) si, pour tout e dans D et pour tous $\Lambda \subset \Lambda'$, cubes finis de $\mathbb{Z}^d$ tels que $\Lambda \neq \Lambda'$, on a,*

$$(*) \qquad \sup_{t \in D^{\mathbb{Z}^d}} \|\mathcal{H}_\Lambda(t) - \mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda',e}(t)\|_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}^d))} \leq k_0 e^{-d_0 \inf_{x\in\Lambda, y\notin\Lambda'} |x-y|}.$$

Remarquons que, s'il existe $d_0 > 0$, $k_0 > 0$ et $e \in D$, tel que pour tous $\Lambda \subset \Lambda'$, cubes finis de $\mathbb{Z}^d$ vérifiant $\Lambda \neq \Lambda'$, on a $(*)$, alors $\mathcal{H}(t)$ vérifie une propriété de découplage d'ordre $(d_0, 2k_0)$. En effet, pour $f \in D$,

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda',f}(t) = \mathcal{H}_\Lambda(\Pi_{\Lambda',f}(t)),$$

et, par (1.10)

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda',e}(t) = \mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda',e}(\Pi_{\Lambda',f}(t)) = \mathcal{H}_\Lambda(\Pi_{\Lambda',e}(t)).$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_\Lambda(t) - \mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda',f}(t)\| &\leq \|\mathcal{H}_\Lambda(t) - \mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda',e}(t)\| + \|\mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda',e}(\Pi_{\Lambda',f}(t)) \\ &\qquad - \mathcal{H}_\Lambda(\Pi_{\Lambda',f}(t))\| \\ &\leq 2k_0 e^{-d_0 \inf_{x\in\Lambda, y\notin\Lambda'} |x-y|}\end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité. Tenant compte de cela, dans la suite de l'article, on se permettra d'omettre toute référence au point e auquel on égale les paramètres t_x pour $x \notin \Lambda'$. On notera alors $\mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda',e}(t) = \mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda'}(t)$.

Pour E n'appartenant pas à $\sigma(\mathcal{H}_\Lambda(t))$, le spectre de $\mathcal{H}_\Lambda(t)$, on note $G_\Lambda(E)$ la résolvante de $\mathcal{H}_\Lambda(t)$ c'est-à-dire

$$G_\Lambda(E) = ((G_\Lambda(E; x, y)))_{(x,y)\in\Lambda^2} = (\mathcal{H}_\Lambda(t) - E)^{-1}$$

et si $\Lambda = \mathbb{Z}^d$, on la notera $G(E)$ (on omet la dépendance en t pour alléger les notations).

À l'instar de [FS] et [vDK1], on définit

DÉFINITION 1.4. — *Soit $\beta \in]0, 1[$, $E \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. $\Lambda_\ell(x)$ est dit (E, β)-N.R (i.e non résonnant) si*

$$\|G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\|_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}^d))} \leq e^{\ell^\beta}.$$

DÉFINITION 1.5. — *Soit* $\beta \in]0,1[$, $E \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in]0,1[$, $\ell > 0$ *et* $x \in \mathbb{Z}^d$. $\Lambda_\ell(x)$ *est dit* $(E, m, \beta, \varepsilon)$*-régulier si*

(a) $\Lambda_\ell(x)$ *est* (E,β)*-N.R*

(b) *on a*

$$\sum_{\frac{\varepsilon\ell}{2} \leq |y-x| \leq \frac{\ell}{2}} |G_{\Lambda_\ell(x)}(E;x,y)| e^{m|y-x|} < 1.$$

Supposons maintenant que les $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ sont des variables aléatoires qui prennent leurs valeurs dans D.

DÉFINITION 1.6. — *Soient* $\eta_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ *et* $I \subset \mathbb{R}$. *On dit que* $\mathcal{H}(t)$ *satisfait dans* I *à une estimée de Wegner de type* $(\eta_0, \rho_0, \varepsilon_0)$ *si, pour tout* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $E \in I$, $\ell \geq 2$ *et* $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{dist}(E, \sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x)}(t))) \leq \varepsilon\} \leq |\Lambda_\ell(x)|^{\eta_0} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{\rho_0}$$

(où P *désigne la mesure de probabilité définie par les* $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ *sur* $D^{\mathbb{Z}^d}$ *et* $|\Lambda_\ell(x)|$ *désigne le cardinal de* $\Lambda_\ell(x)$*).*

On a alors le

THÉORÈME 1.7. — *Soit* $m_0 > 0$, $d_0 > 0$, $k_0 > 0$, $\eta_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $p > \sup(4,d)$, $\beta > 0$ *tel que* $\beta p < \inf(4,d)$, $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ *et* $I \subset \mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{H}(t)$ *vérifiant* (H'.1) *pour* m_0 *et une propriété de découplage d'ordre* (d_0, k_0). *Supposons que les* $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ *sont des variables aléatoires indépendantes telles que* $\mathcal{H}(t)$ *vérifie dans* I *une estimée de Wegner de type* $(\eta_0, \rho_0, \varepsilon_0)$.

Alors il existe $L_0 > 0$ *(dépendant de* m_0, d_0, k_0, η_0, ρ_0, ε_0, p, β, ε*) tel que si pour un* $\ell \geq L_0$, *on a,* $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ *tels que* $|x-y| > \ell(1+\varepsilon)$,

$$\mathrm{P}(\{\forall E \in I,\ \Lambda_\ell(x) \text{ ou } \Lambda_\ell(y) \text{ est } (E, m_0(1-\varepsilon), \beta, \varepsilon) - \text{régulier}\}) > 1 - \ell^{-p}$$

alors, avec une probabilité 1, *le spectre de* $\mathcal{H}(t)$ *dans* I *est purement ponctuel; et si* φ *est un vecteur propre associé à* E, *valeur propre de* $\mathcal{H}(t)$ *dans* I, *on a*

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{\log|\varphi(x)|}{|x|} \leq -m_0(1-2\varepsilon).$$

Remarques.

(1) L'expression "avec une probabilité 1" signifie "pour un ensemble de configurations de "potentiels" $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ de probabilité 1".

(2) Un examen attentif de la preuve de ce théorème montre que la constante L_0 jouit d'une certaine uniformité dans les paramètres m_0 et d_0. Plus précisément, si $a > 0$ et $b > 0$, on peut choisir le même L_0 pour tout couple (m_0, d_0) tel que $m_0 \geq a$ et $\frac{m_0}{d_0} \leq b$.

(3) On peut très certainement relaxer la condition d'indépendance pour les variables aléatoires $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ comme cela a été fait dans [vDK2] L'idée de la preuve de ce théorème est de reconstruire, pour nos matrices, une analyse analogue à celle développée dans [vDK1]. Deux difficultés nouvelles apparaissent. D'abord, les coefficients non nuls de la matrice que nous considérons, décroissent exponentiellement mais ne sont plus réduits aux seuls coefficients ayant pour indices des éléments de $\mathbb{Z}^d$ plus proches voisins. Ceci nous oblige à modifier la définition de la régularité (définition 1.5) ainsi que la technique utilisée pour démontrer la décroissance exponentielle du noyau de Green pour nos matrices. La seconde difficulté provient du fait que les coefficients de nos matrices sont des variables aléatoires non nécessairement indépendantes. Pour la surmonter, nous utilisons la propriété de découplage (définition 1.3). Ceci est expliqué en détail dans les parties 2, 3, 4 et 5 de cet article.

C. Applications.

a) Une classe de laplaciens discrets.

Sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, considérons une matrice de convolution,

$$\mathcal{H}_0 = ((m_{x-y}))_{(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d},$$

auto-adjointe dont les coefficients vérifient, si $x \neq 0$,

$$|m_x| \leq e^{-m_0|x|} \tag{1.11}$$

pour un $m_0 > 0$. Soit $\mathcal{D}(t)$ une matrice diagonale dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d admettant une densité de distribution commune bornée notée g. Soit $\delta_g = \dfrac{1}{\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|}$. On définit $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{D}(t)$. $\mathcal{H}(t)$ vérifie bien (H'.1) pour m_0. De plus, $\mathcal{H}(t)$ vérifie de façon évidente des propriétés de découplage de n'importe quel ordre (d_0, k_0). Par des arguments analogues à ceux développés dans le lemme VIII.1.8 et la proposition VIII.4.11 de [CL] (voir aussi [We] et [FS]), on montre que $\mathcal{H}(t)$ vérifie une estimée de Wegner de type $\left(1, 1, \frac{1}{2\delta_g}\right)$.

Alors, en se servant des propositions (A.1.1) et (A.1.2) de [vDK1] et du théorème 1.7, on obtient le

THÉORÈME 1.8. — *Soit* $m \in]0, m_0[$.

(1) *Soit* $I \subset \mathbb{R}$. *Il existe* $\delta(m, I) > 0$ *tel que si* $\delta_g > \delta(m, I)$ *alors, avec probabilité* 1,

(a) *le spectre de* $\mathcal{H}(t)$ *dans* I *est purement ponctuel,*

(b) *si* φ *est un vecteur propre de* $\mathcal{H}(t)$ *associé à* E *dans* I *alors*

$$(*) \qquad \limsup_{|x|\to\infty} \frac{\log|\varphi(x)|}{|x|} \leq -m.$$

(2) *Il existe* $0 < E(m, g) < \infty$ *tel que, avec probabilité* 1,

(a) *le spectre de* $\mathcal{H}(t)$ *dans* $]-\infty, -E(m, g)] \cup [E(m, g), +\infty[$ *est purement ponctuel,*

(b) *si* φ *est un vecteur propre de* $\mathcal{H}(t)$ *associé à* E *dans* I *alors* φ *vérifie* $(*)$.

Ce théorème étend à une classe plus générale de hamiltoniens, le théorème de localisation pour “petites” énergies ou grands désordres que Fröhlich, Spencer, Martinelli, Scoppola, von Dreyfus, Klein, ...ont démontré pour le laplacien discret usuel. Des résultats de ce type ont déjà été obtenus par W.M. Wang (voir [Wa]) dans des cas particuliers en dimension 1. Tout récemment, le Professeur L. Pastur nous a signalé l'article de V. Grinshpun [Gr] où est annoncée une preuve du théorème 1.8 (preuve indépendante de la nôtre).

b) Le modèle semi-classique.

Revenons à l'opérateur P_t discuté dans la partie A. Soit g, une densité de distribution de probabilité supportée dans $[-1, 1]$ telle qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\rho_0 > 0$ tels que pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{|v|\leq\varepsilon} |g(u+v) - g(u)| du \leq \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{\rho_0}.$$

Remarquons que si g vérifie cette propriété alors g est bornée.

Supposons maintenant que les paramètres $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$ sont des variables aléatoires i.i.d admettant une densité de distribution commune notée g_h définie par, pour $u \in \mathbb{R}$,

$$g_h(u) = \frac{1}{\tilde{a}(h)} g\Big(\frac{u}{\tilde{a}(h)}\Big) \tag{1.12}$$

où $\tilde{a}(h)$ vérifie

$$0 < \tilde{a}(h) \leq a(h) \text{ et } \lim_{h\to 0} h \log \tilde{a}(h) = 0. \tag{1.13}$$

Les variables aléatoires $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$ sont à valeurs dans $[-a(h), a(h)]$. On a alors le

THÉORÈME 1.9. — *Soient $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$ les variables aléatoires définies ci-dessus et P_t défini par (1.4) satisfaisant à* (H.1) *et* (H.2). *Alors, il existe $h_0 > 0$ tel que pour $h \in]0, h_0[$, avec probabilité* 1, *on a*

(a) *le spectre de P_t dans $[-2a(h) + i_h, s_h + 2a(h)]$ est purement ponctuel,*

(b) *si φ est un vecteur propre de P_t associé à une valeur propre dans $[i_h - 2a(h), s_h + 2a(h)]$ alors, il existe $C(h) > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$|\varphi(x)| \leq C(h) e^{-\frac{h_0}{h}\langle x\rangle},$$

où $\langle x\rangle = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Remarques.

(1) Notons que, par (1.3), $\sigma(P) \cap [i_h - 2a(h), s_h + 2a(h)] = [i_h, s_h]$ et que $\sup_t \sup_\gamma |t_\gamma| \leq a(h)$, donc, pour tout t, on a

$$\sigma(P_t) \cap [i_h - 2a(h),\ s_h + 2a(h)] \neq \emptyset.$$

(2) En prenant les variables aléatoires $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$ construites comme ci-dessus, la limite $h \to 0$ correspond à un désordre tendant vers l'infini. En effet, par le théorème 1.2, la matrice $\mathcal{M}(t)$, qui correspond dans ce problème au laplacien, est de taille $e^{-\frac{c}{h}}$ alors que les $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$ sont bien réparties sur un intervalle de taille $\tilde{a}(h)$; donc d'après (1.13), $e^{\frac{c}{h}}\tilde{a}(h)$, qui correspond au désordre, tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0.

(3) Nous voyons ici que nous pouvons obtenir de la localisation avec des perturbations aléatoires exponentiellement petites, i.e $\tilde{a}(h)$ de l'ordre de $e^{-h^{-\delta}}$ pour $0 < \delta < 1$. En fait, d'après les preuves des lemmes 1.10 et

1.11, on voit que l'on aurait pu prendre $\tilde{a}(h)$ de l'ordre de $e^{-\frac{\delta}{h}}$ pour δ assez petit.

Preuve du théorème 1.9. — Fixons $0 < \varepsilon < \inf\left(\varepsilon_0, \frac{1}{2}\right)$ dans le théorème 1.2. Par ce même théorème, pour montrer le point (a), il suffit de voir que le spectre de $\mathcal{M}(t) + \mathcal{D}_b(t)$ est purement ponctuel. On va d'abord renormaliser cet opérateur. Soit $\nu_0 = \dfrac{\inf(\frac{a_0}{2}, b_0, c_0)}{2}$ (où a_0, b_0 et c_0 sont donnés par (1.6), (1.7) et (1.8)). Posons

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\tilde{t}) = \widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t}) + \mathcal{D}(\tilde{t}) = e^{\frac{\nu_0}{h}}(\mathcal{M}(t) + \mathcal{D}_b(t)) \tag{1.14}$$

où

$$\tilde{t}_\gamma = e^{\frac{\nu_0}{h}} b(t_\gamma),$$

$\mathcal{D}(\tilde{t})$ est la matrice diagonale ayant pour éléments, les $(\tilde{t}_\gamma)_{\gamma\in L}$, et

$$\widetilde{\mathcal{M}}((\tilde{t}_\gamma)_{\gamma\in L}) = e^{\frac{\nu_0}{h}} \mathcal{M}((b^{-1}(e^{-\frac{\nu_0}{h}}\tilde{t}_\gamma))_{\gamma\in L}). \tag{1.15}$$

Dans la suite, nous identifierons L et $\mathbb{Z}^d$ en utilisant la base $(u_j)_{1\leq j\leq d}$; cette identification est une isométrie pour les normes $|\cdot|_L$ et $|\cdot|$. Nous considérerons donc que désormais $\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t}) + \mathcal{D}(\tilde{t})$ agit sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

On a alors le

LEMME 1.10. — *Il existe $h_0 > 0$ tel que, pour $h \in]0, h_0[$, on a,*

a) *$\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t})$ satisfait à* (H'.1) *avec $m_0 = \dfrac{\nu_0}{h}$ donc avec $m_0 = \dfrac{h'}{h}$ pour tout $0 < h' \leq \nu_0$,*

b) *$\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t})$ satisfait à une propriété de découplage d'ordre $\left(\dfrac{\nu_0}{h}, 2\right)$ donc d'ordre $\left(\dfrac{h'}{h}, 2\right)$ pour tout $0 < h' \leq \nu_0$,*

c) *on a, pour tout $\tilde{t}$,*

$$\|\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t})\|_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}^d))} \leq e^{-\frac{\nu_0}{h}},$$

d) *les variables aléatoires $(\tilde{t}_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ sont i.i.d,*

e) *$\widetilde{\mathcal{H}}(\tilde{t}) = \widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t}) + \mathcal{D}(\tilde{t})$ vérifie une estimée de Wegner de type $(2, \rho_0, 1)$ sur $\mathbb{R}$.*

Remarque. — La preuve de ce lemme fait l'objet de la partie B de l'appendice. Fixons $p > \sup(4, d)$ et $\beta > 0$ tel que $\beta p < \inf(4, d)$. En fixant $a = 1$ et $b = 1$, la remarque 2) qui fait suite au théorème 1.7 nous dit qu'il existe $h_0' > 0$ et $L_0 > 0$ tels que, pour tout $0 < h \leq h' < h_0'$, si il existe $\ell \geq L_0$ tel que, pour tout couple (x, y) dans $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ vérifiant $|x - y| > \ell(1 + \varepsilon_0)$, on a

$$\mathrm{P}\Big(\Big\{\forall E \in \mathbb{R},\ \Lambda_\ell(x) \text{ ou } \Lambda_\ell(y) \text{ est } \Big(E, 2\frac{h'}{h}, \beta, \varepsilon_0\Big) - \text{régulier}\Big\}\Big) > 1 - \ell^{-p}$$

alors, avec une probabilité 1, le spectre de $\widetilde{\mathcal{H}}(\tilde{t})$ est purement ponctuel; de plus, si φ est un vecteur propre associé à E, valeur propre de $\widetilde{\mathcal{H}}(\tilde{t})$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{|x| \to \infty} \frac{\log|\varphi(x)|}{|x|} \leq -\frac{h'}{h}. \tag{1.16}$$

On montre le

Lemme 1.11. — *Pour tout $\ell > 1$, il existe $h_\ell > 0$ tel que, pour $h \in]0, h_\ell]$, on a, pour tout $(x, y) \in L \times L$ tel que $|x - y| > \ell(1 + \varepsilon_0)$,*

$$\mathrm{P}\Big(\Big\{\forall E \in \mathbb{R},\ \Lambda_\ell(x) \textit{ ou } \Lambda_\ell(y) \textit{ est } \Big(E, 2\frac{h_\ell}{h}, \beta, \varepsilon_0\Big) - \textit{régulier}\Big\}\Big) > 1 - \ell^{-p}$$

(la régularité étant définie pour la matrice $\widetilde{\mathcal{H}}(\tilde{t})$).

Remarque. — La preuve de ce lemme fait l'objet de la partie C de l'appendice. Alors en prenant $h_0 = \inf(h_0', h_{L_0})$ pour h_{L_0} donné par le lemme 1.11 et, L_0 et h_0' donnés ci-dessus, on obtient que pour $h \in]0, h_0[$, avec une probabilité 1, le spectre de $\widetilde{\mathcal{H}}(\tilde{t})$ dans $\mathbb{R}$ est purement ponctuel donc, par construction de $\tilde{t}$, de $\widetilde{\mathcal{H}}(\tilde{t})$ et par le théorème 1.2, avec une probabilité 1, le spectre de P_t dans $[-2a(h) + i_h, s_h + 2a(h)]$ est purement ponctuel. Soit φ est une fonction propre associée à E, une valeur propre de P_t dans $[-2a(h) + i_h, s_h + 2a(h)]$. Notons $(a_\gamma)_{\gamma \in L}$, les composantes de φ dans la base $(\varphi_{\gamma,t})_{\gamma \in L}$. Par le théorème 1.2 et par (1.16), on sait qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in L$, on a

$$|a_\gamma| \leq C e^{-\frac{h_0}{h}|\gamma|_L}. \tag{1.17}$$

En utilisant alors, l'estimée (1) du théorème 1.2, on obtient qu'il existe h_0' vérifiant $h_0 \geq h_0' > 0$ (h_0' ne dépendant que de $\langle\cdot\rangle$, $|\cdot|_L$ et de la distance d'Agmon) et tel que, pour $h \in]0, h_0'[$, il existe $C(h) > 0$ tel que l'on a,

$$\|e^{\frac{h_0'}{h}\langle\cdot\rangle} \cdot \varphi(\cdot)\|_{L^2} + h\|\nabla(e^{\frac{h_0'}{h}\langle\cdot\rangle} \cdot \varphi(\cdot))\|_{L^2} \leq C(h). \tag{1.18}$$

Pour $0 < h < h' < h_0'$, comme φ est solution de $(P_t - E)\varphi = 0$, on a

$$\begin{aligned}\Delta(e^{\frac{h'}{h}\langle x\rangle} \cdot \varphi(x)) = \Delta(e^{\frac{h'}{h}\langle x\rangle})\varphi(x) + \nabla e^{\frac{h'}{h}\langle x\rangle} \cdot \nabla\varphi(x)\\ + h^{-2}(V + \sum_{\gamma \in L} t_\gamma \delta V_\gamma - E)e^{\frac{h'}{h}\langle x\rangle}\varphi(x),\end{aligned}$$

donc, par (1.18), on a que $\Delta(e^{\frac{h'}{h}\langle x\rangle} \cdot \varphi(x)) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. De la même manière, on obtient que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^k(e^{\frac{h'}{h}\langle x\rangle} \cdot \varphi(x)) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. On sait que, pour $s > \frac{n}{2}$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini. On en conclut donc le comportement annoncé pour φ.

2. PREUVE DU THÉORÈME 1.7

Dans cette partie nous donnerons trois lemmes qui rassemblés forment la preuve du théorème 1.7. Ces lemmes, dans leur ensemble, sont les pendants des lemmes 3.1, 4.1 et 4.2 de [vDK1].

Soit $\ell > 1$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $B_{k\ell}(x)$, la couronne centrée en x, de rayon $\frac{k\ell}{2}$ et largeur $\frac{\ell}{2}$, par

$$B_{k\ell}(x) = \Big\{y \in \mathbb{Z}^d; \frac{k\ell}{2} < |x-y| \leq \frac{(k+1)\ell}{2}\Big\}.$$

On définit aussi

$$B^+_{k\ell}(x) = \Big\{y \in \mathbb{Z}^d; |x-y| > \frac{k\ell}{2}\Big\}.$$

Alors pour $\alpha > 1$, si $L = \ell^\alpha$, on a

$$\Lambda_L(x) = \bigcup_{k=0}^{[\ell^{\alpha-1}]-1} B_{k\ell}(x) \bigcup (B^+_{[\ell^{\alpha-1}]\ell}(x) \bigcap \Lambda_L(x))$$

où $[x]$ est la partie entière de x.

DÉFINITION 2.1. — *On dit que $B_{k\ell}(x)$ est une (E,m,β,ε)-barrière si, pour tout $y \in B_{k\ell}(x)$, $\Lambda_\ell(y)$ est (E,m,β,ε)-régulier.*

On montre alors le

LEMME 2.2. — *Soient $m_0 > 0$, $k_0 > 0$, $d_0 > 0$, $\eta_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $p > \sup(4,d)$, $\beta > 0$ tel que $\beta p < \inf(4,d)$, $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $\delta \in]0,1[$, $\alpha \in]1, \frac{p}{4}[$ et D impair tel que $D \geq \dfrac{2(1+p\alpha)+p}{p-4\alpha}$. Soit $I \subset \mathbb{R}$.*

Soit $\mathcal{H}(t)$ vérifiant une propriété de découplage d'ordre (d_0,k_0). Supposons que les $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ sont des variables aléatoires indépendantes tel que $\mathcal{H}(t)$ vérifie dans I, une estimée de Wegner de type $(\eta_0,\rho_0,\varepsilon_0)$.

Alors il existe $\ell_0 > 0$ (dépendant de m_0, k_0, d_0, η_0, ρ_0, ε_0, p, β, ε, δ, α, D) tel que, pour $\ell \geq \ell_0$, si on a, pour un $m_\ell \in]0, m_0(1-\varepsilon)]$, $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y| > \ell(1+\varepsilon)$,

$$\mathrm{P}(\{\forall E \in I,\ \Lambda_\ell(x) \text{ ou } \Lambda_\ell(y) \text{ est } (E, m_\ell, \beta, \varepsilon) - \text{régulier}\}) > 1 - \ell^{-p}$$

alors, si $L = \ell^\alpha$, on a, $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y| > L(1+\varepsilon)$, on a

$$\mathrm{P}\left(\left\{\forall E \in I, \begin{pmatrix} \cdot\ \forall b \in \Lambda_L(x), \\ \quad \Lambda_\ell(b) \text{ est } (E,\beta)\text{-N.R} \\ \cdot\ \Lambda_L(x) \text{ est } (E,\beta)\text{-N.R} \\ \cdot\ \forall 1 \leq k \leq [\ell^{\alpha-1}] - 1, \\ \quad \Lambda_{k\ell}(x) \text{ est } (E,\beta)\text{-N.R} \\ \cdot\ \text{parmi les } B_{k\ell}(x) \text{ contenus dans} \\ \quad \Lambda_L(x), \text{au plus } 8([\frac{m_0}{d_0}] + 1)D \\ \quad \text{ne sont pas des } (E, m_L, \beta, \varepsilon) \\ \quad \text{-barrières} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \text{ibid} \\ \text{pour } y \end{pmatrix} \right\}\right) \geq 1 - L^{-p}$$

avec

$$m_L = m_\ell - \ell^{-\delta} \leq m_0(1-\varepsilon).$$

(Ici P est la mesure de probabilité définie par les variables aléatoires $(t_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$.)

Remarque. — Un examen attentif de la preuve montre que, si $b > 0$, on peut prendre le même L_0 pour toute paire m_0 et d_0 telle que $\frac{m_0}{d_0} \leq b$. La nouveauté dans la démonstration de ce lemme par rapport à celle des lemmes 4.1 et 4.2 de [vDK1] est le fait que, dans le cas que nous traitons, tous les coefficients de la matrice $\mathcal{H}(t)$ sont des variables aléatoires non nécessairement indépendantes. L'hypothèse essentielle pour traiter cette difficulté dans notre cas, est la propriété de découplage. La manière dont on s'en sert est la suivante : si $(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y| > \ell(1+2\varepsilon)$, alors $\Lambda_{\ell(1+\varepsilon)}(x) \cap \Lambda_{\ell(1+\varepsilon)}(y) = \emptyset$, donc $\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x), \Lambda_{\ell(1+\varepsilon)}(x)}(t)$ et $\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(y), \Lambda_{\ell(1+\varepsilon)}(y)}(t)$ sont indépendantes l'une de l'autre (i.e les coefficients de l'une sont indépendants des coefficients de l'autre). Or, d'après la propriété de découplage, l'erreur que l'on commet en remplaçant $\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x)}(t)$ par $\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x), \Lambda_{\ell(1+\varepsilon)}(x)}(t)$ est de taille $e^{-\varepsilon d_0 \frac{\ell}{2}}$, c'est-à-dire beaucoup plus petite que $e^{-\ell^\beta}$, la distance au spectre prise en compte dans la propriété de (E,β)-non-résonance. On procède de façon analogue pour traiter la propriété de $(E, m_\ell, \beta, \varepsilon)$-régularité.

On a le

LEMME 2.3. — *Soient* $m_0 > 0$, $\eta_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $p > \sup(4,d)$, $\beta > 0$ *tel que* $\beta p < \inf(4,d)$, $\varepsilon \in \,]0, \frac{1}{2}[$, $\alpha \in \,]1, \inf(\frac{p}{4}, \frac{p}{d})[$, $0 < \delta < \inf(1-\alpha\beta, \alpha - 1)$ *et* D, *un entier fixé. Soit* $E \in \mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{H}(t)$ *vérifiant (H'.1) pour* m_0. *Alors il existe* $\ell_1 > 0$ *(dépendant de* m_0, β, ε, δ, α, D*) tel que, pour* $\ell \geq \ell_1$ *et tout* $x \in \mathbb{Z}^d$, *si pour un* $m_\ell \in]0, m_0(1-\varepsilon)]$, *on a*

a) $\forall b \in \Lambda_L(x)$, $\Lambda_\ell(b)$ *est* (E,β)*-N.R,*

b) $\Lambda_L(x)$ *est* (E,β)*-N.R,*

c) $\forall 1 \leq k \leq [\ell^{\alpha-1}] - 1$, $\Lambda_{k\ell}(x)$ *est* (E,β)*-N.R,*

d) *au plus* D *couronnes parmi les* $B_{k\ell}(x)$ *pour* $1 \leq k \leq [\ell^{\alpha-1}] - 1$ *ne sont pas des* $(E, m_\ell, \beta, \varepsilon)$*-barrières, alors* $\Lambda_L(x)$ *est* $(E, m_L, \beta, \varepsilon)$*-régulier avec*

$$m_L = m_\ell - (m_0 + 1)\ell^{-\delta} \leq m_0(1-\varepsilon).$$

(La régularité est définie par rapport à la matrice $\mathcal{H}(t)$.*)*

Remarque. — Un examen attentif de la preuve montre que, si $a > 0$, on peut prendre le même L_0 pour tout $m_0 > a$. Dans la preuve des lemmes 4.1 et 4.2 de [vDK1], la propriété que, pour le laplacien discret usuel, seuls les coefficients indexés par les plus proches voisins sont non nuls, est utilisée de manière essentielle. Dans notre cas, cette propriété n'est plus vérifiée mais on dispose de la décroissance exponentielle des coefficients de $\mathcal{H}(t)$ lorsque l'on s'éloigne de la diagonale. On construit une nouvelle analyse sur l'idée suivante : pour obtenir la décroissance du noyau de $G_{\Lambda_L(0)}(E)$, on montre que, pour $y \in \Lambda_L(0)$, plus grand est le nombre de $(E, m_\ell, \beta, \varepsilon)$-barrières qui séparent y de 0, plus le coefficient $G_{\Lambda_L(0)}(E; 0, y)$ est petit. Plus précisément, à chaque fois que y franchit une barrière en s'éloignant de 0, $G_{\Lambda_L(0)}(E; 0, y)$ décroît environ d'un facteur $e^{-m_\ell \frac{\ell}{2}}$. Comme le nombre de barrières que l'on a pu placer dans le cube est environ $\frac{L}{\ell}$, on obtient la décroissance voulue.

En appliquant alternativement ces deux lemmes, par récurrence, il résulte immédiatement le

LEMME 2.4. — *Soient* $m_0 > 0$, $k_0 > 0$, $d_0 > 0$, $\eta_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $p > \sup(4,d)$, $\beta > 0$ *tel que* $\beta p < \inf(4,d)$, $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $\alpha \in \,]1, \inf(\frac{p}{4}, \frac{p}{d})[$ *et* $0 < \delta < \inf(1-\alpha\beta, \alpha-1)$. *Soit* $I \subset \mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{H}(t)$ vérifiant (H'.1) pour m_0 et une propriété de découplage d'ordre (d_0, k_0). Supposons que les $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ sont des variables aléatoires indépendantes tel que $\mathcal{H}(t)$ vérifie dans I une estimée de Wegner de type $(\eta_0, \rho_0, \varepsilon_0)$.

Alors, il existe $\ell_2 > 1$ tel que si, pour un $L_0 \geq \ell_2$, on a, pour un $m_{L_0} \in]0, m_0(1-\varepsilon)[$, $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y| > L_0(1+\varepsilon)$,

$$\mathrm{P}(\{\forall E \in I,\ \Lambda_{L_0}(x) \text{ ou } \Lambda_{L_0}(y) \text{ est } (E, m_{L_0}, \beta, \varepsilon) - \text{régulier}\}) > 1 - L_0^{-p}$$

alors, si on définit la suite L_k par $L_{k+1} = L_k^\alpha$, on a, pour $k \geq 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y| > L_{k+1}(1+\varepsilon)$,

$$\mathrm{P}(\{\forall E \in I, \Lambda_{L_{k+1}}(x) \text{ ou } \Lambda_{L_{k+1}}(y) \text{ est } (E, m_{L_{k+1}}, \beta, \varepsilon) - \text{régulier}\}) > 1 - L_{k+1}^{-p}$$

avec

$$m_{L_{k+1}} = m_{L_k} - 2(m_0+1)L_k^{-\delta} \leq m_0(1-\varepsilon).$$

(P est la mesure de probabilité définie par les variables aléatoires $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$.)

Remarque. — Les remarques qui font suite aux lemmes 2.2 et 2.3 sont encore valables pour le lemme 2.4.

Posons la

DÉFINITION 2.5. — *Soit $E \in \mathbb{R}$. On dit que E est une valeur propre généralisée de $\mathcal{H}(t)$ si il existe φ, un vecteur non nul de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$, polynomialement borné (i.e il existe $C > 0, \eta > 0$ tel que, $\forall z \in \mathbb{Z}^d$, $|\varphi(z)| \leq C(1+|z|)^\eta)$) tel que*

$$(\mathcal{H}(t) - E)\varphi = 0.$$

À l'instar de [vDK1], nous avons alors le

LEMME 2.6. — *Soient $p > \sup(4, d)$, $1 < \alpha < \dfrac{p}{d}$, $\varepsilon \in]0, \dfrac{1}{2}[$ et $m \in]0, m_0(1-\varepsilon)]$. Soient $L_0 > 1$ et $I \subset \mathbb{R}$. On définit la suite L_k par $L_{k+1} = L_k^\alpha$ pour $k \geq 0$.*

Soit $\mathcal{H}(t)$ vérifiant (H'.1) pour m_0. Supposons que les $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Supposons que, pour $k \geq 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y| > L_k(1+\varepsilon)$, on a

$$\mathrm{P}(\{\forall E \in I,\ \Lambda_{L_k}(x) \text{ ou } \Lambda_{L_k}(y) \text{ est } (E, m, \beta, \varepsilon) - \text{régulier}\}) > 1 - L_k^{-p}$$

(la régularité étant définie par rapport à la matrice $\mathcal{H}(t)$).

Alors, avec une probabilité 1, *si* φ *est une fonction propre généralisée de* $\mathcal{H}(t)$ *associée à* E *dans* I, *on a*

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\log|\varphi(x)|}{|x|} \leq -m(1-\varepsilon).$$

Remarques.

(1) La remarque qui fait suite au lemme 2.4 est encore valable pour le lemme 2.6.

(2) L'expression "avec une probabilité 1" signifie "pour un ensemble de configurations de "potentiels" $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ de probabilité 1".

Démontrons le théorème 1.7 à partir des lemmes 2.4 et 2.6. Supposons que pour $\ell > \sup(\ell_2, 2)$ (ℓ_2 donné par le lemme 2.4), on a, pour $m_\ell \in]0, m_0(1-\varepsilon)[$, $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y| > \ell(1+\varepsilon)$,

$$\mathrm{P}(\{\forall E\in I,\ \Lambda_\ell(x) \text{ ou } \Lambda_\ell(y) \text{ est } (E, m_\ell, \beta, \varepsilon) - \text{régulier}\}) > 1-\ell^{-p}.$$

Définissons la suite L'_k par $L'_{k+1} = (L'_k)^\alpha$ pour $k \geq 0$ et $L'_0 = \ell$. Posons

$$m_\infty(\ell) = m_\ell - 2(m_0+1)\sum_{k\geq 0}(L'_k)^{-\delta}.$$

Alors pour un certain C indépendant de $\ell \geq 2$, on a

$$m_\infty(\ell) \geq m_\ell - 2(m_0+1)C\ell^{-\delta}.$$

Par hypothèse du théorème 1.7, $m_\ell = m_0(1-\varepsilon)$. Donc il existe $L_0 > \sup(\ell_2, 2)$ tel que si $\ell > L_0$, alors

$$m_\infty(\ell) \geq m_\infty = m_0(1-\varepsilon-\varepsilon^2).$$

Le lemme 2.4 nous dit alors que, pour $k \geq 0$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y| > L'_k(1+\varepsilon)$, on a

$$\mathrm{P}(\{\forall E\in I,\ \Lambda_{L'_k}(x) \text{ ou } \Lambda_{L'_k}(y) \text{ est } (E, m_\infty, \beta, \varepsilon)\text{-régulier}\}) > 1-(L'_k)^{-p}.$$

On obtient par le lemme 2.6, qu'avec une probabilité 1, si φ est une fonction propre généralisée de $\mathcal{H}(t)$ associée à E dans I, on a

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\log|\varphi(x)|}{|x|} \leq -m_\infty(1-\varepsilon) \leq m_0(1-2\varepsilon). \tag{2.1}$$

Fixons une configuration de "potentiels" dans cet ensemble de mesure 1. D'après [Si2] (voir aussi [Be] et [CL]), on sait que, comme $\mathcal{H}(t)$ est auto-adjoint et étant données les propriétés de décroissance vérifiées par les coefficients de $\mathcal{H}(t)$, presque toute énergie dans le spectre de $\mathcal{H}(t)$ est une valeur propre généralisée de $\mathcal{H}(t)$ (le presque tout étant ici déterminé par la mesure spectrale de $\mathcal{H}(t)$). Donc, pour cette configuration de potentiel, le spectre de $\mathcal{H}(t)$ dans I est purement ponctuel et si φ est une fonction propre de $\mathcal{H}(t)$ associée à une énergie E dans I alors φ vérifie (2.1). Ceci achève la démonstration du théorème 1.7. □

3. PREUVE DU LEMME 2.2

A. Preuve du lemme 2.2.

Soit $\mathcal{H}(t)$ vérifiant (H'1) pour m_0 et une propriété de découplage d'ordre (d_0, k_0). Soient $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$, des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathcal{H}(t)$ vérifie dans I une estimée de Wegner de type $(\eta_0, \rho_0, \varepsilon_0)$. On a le

LEMME 3.1. — *Soient $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \delta$. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. Pour $\ell > 1$ suffisamment grand (dépendant de d_0, ε, ε_0, β, δ),*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\{\mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{\ell+\varepsilon\ell^\delta}(x)}(t))) \leq e^{-\ell^\beta}\}) \\ &= \mathrm{P}_{\Lambda_{\ell+\varepsilon\ell^\delta}(x)}(\{\mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{\ell+\varepsilon\ell^\delta}(x)}(t))) \leq e^{-\ell^\beta}\}) \\ &\leq |\Lambda_\ell(x)|^{\eta_0}\left(\frac{2e^{-\ell^\beta}}{\varepsilon_0}\right)^{\rho_0}.\end{aligned}$$

Remarque. — Les événements que nous considérons seront toujours des événements sur les variables aléatoires $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ ou $(t_x)_{x\in\Lambda}$ pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, c'est-à-dire des ensembles des configurations de "potentiel". P_Λ désigne la probabilité de l'événement considéré par rapport aux variables aléatoires $(t_x)_{x\in\Lambda}$ et P, la probabilité par rapport aux variables aléatoires $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$. Un événement Ev sur les variables aléatoires $(t_x)_{x\in\Lambda}$ peut toujours être compris comme un événement sur les variables aléatoires $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ (en prenant le produit direct $Ev \times D^{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}$, D étant l'ensemble où les variables aléatoires prennent leurs valeurs) et alors comme les $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ sont indépendantes, on a

$$\mathrm{P}_\Lambda(Ev) = \mathrm{P}(Ev \times D^{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}).$$

Preuve du lemme 3.1. — La propriété de découplage exponentiel nous dit

$$\begin{aligned}(3.1)\quad \|\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{\ell+\varepsilon\ell^\delta}(x)}(t) - \mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x)}(t)\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}^d))} \\ \leq k_0 e^{-d_0 \inf_{a\in\Lambda_\ell(x),b\notin\Lambda_{\ell+\varepsilon\ell^\delta}(x)}|x-y|} \leq k_0 e^{-d_0\varepsilon\frac{\ell^\delta}{2}}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a l'inclusion

$$\{\mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{\ell(1+\varepsilon)}(x)}(t)))\le e^{-\ell^\beta}\}$$
$$\subset\{\mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x)}(t)))\le e^{-\ell^\beta}+k_0e^{-d_0\varepsilon\frac{\ell^\delta}{2}}\}.$$

Comme $\beta<\delta$, si ℓ est assez grand, on a

$$\{\mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{\ell(1+\varepsilon)}(x)}(t)))\le e^{-\ell^\beta}\}\subset\{\mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\ell(x)}(t)))\le 2e^{-\ell^\beta}\}.$$

On conclut le lemme 3.1 en utilisant l'estimée de Wegner pour $\mathcal{H}(t)$ et le fait que les $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ sont i.i.d. □

Soit ℓ assez grand pour que le lemme 3.1 soit vérifié pour $0<\beta<\delta<1$. Soit $\alpha>1$ et posons $L=\ell^\alpha$. Soient $(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y|>L(1+\varepsilon)$. Définissons les événements suivants

$$Q(x,y)=\left\{\forall E\in I,\ \begin{pmatrix}\cdot\ \forall b\in\Lambda_L(x),\\ \quad\Lambda_\ell(b)\text{ est }(E,\beta)\text{-N.R}\\ \cdot\ \Lambda_L(x)\text{ est }(E,\beta)\text{-N.R}\\ \cdot\ \forall 1\le k\le[\ell^{\alpha-1}]-1,\\ \quad\Lambda_{k\ell}(x)\text{ est }(E,\beta)\text{-N.R}\\ \cdot\ \text{parmi les }B_{k\ell}(x)\text{ contenus}\\ \quad\text{dans }\Lambda_L(x),\text{au plus}\\ \quad 8\Big(\Big[\dfrac{m_0}{d_0}\Big]+1\Big)D\text{ ne sont pas}\\ \quad\text{des }(E,m_L,\beta,\varepsilon)\text{-barrières}\end{pmatrix}\ \text{ou}\ \begin{pmatrix}\text{ibid}\\ \text{pour }y\end{pmatrix}\right\},$$

$$R_1(x,y)=\left\{\forall E\in I,\ \begin{pmatrix}\cdot\ \forall b\in\Lambda_L(x),\\ \quad\Lambda_\ell(b)\text{ est }(E,\beta)\text{-N.R}\\ \cdot\ \Lambda_L(x)\text{ est }(E,\beta)\text{-N.R}\\ \cdot\ \forall 1\le k\le[\ell^{\alpha-1}]-1,\\ \quad\Lambda_{k\ell}(x)\text{ est }(E,\beta)\text{-N.R}\end{pmatrix}\ \text{ou}\ \begin{pmatrix}\text{ibid}\\ \text{pour }y\end{pmatrix}\right\},$$

et

$$R(x)=\left\{\forall E\in I,\ \begin{pmatrix}\text{parmi les }B_{k\ell}(x)\text{ contenus dans }\Lambda_L(x),\\ \text{au plus }8\Big(\Big[\dfrac{m_0}{d_0}\Big]+1\Big)D\\ \text{ne sont pas des }(E,m_L,\beta,\varepsilon)\text{-barrières}\end{pmatrix}\right\}.$$

Alors

$$^cQ(x,y)\subset{}^cR_1(x,y)\cup{}^cR(x)\cup{}^cR(y),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{P}({}^cQ(x,y)) \leq \mathrm{P}({}^cR_1(x,y)) + \mathrm{P}({}^cR(x)) + \mathrm{P}({}^cR(y)). \tag{3.2}$$

(Ici ${}^cEv$ désigne le complémentaire de Ev.)

a) Estimation de $\mathrm{P}({}^cR_1)$.

Notons

$$\mathcal{E}(x) = \{(\ell,z);\ z\in\Lambda_L(x)\}\cup\{(L,x)\}\cup\{(k\ell,x);\ 1\leq k\leq[\ell^{\alpha-1}]-1\}.$$

On a, pour ℓ suffisamment grand,

$$|\mathcal{E}(x)| \leq C_d L^d \tag{3.3}$$

où $|\mathcal{E}|$ désigne le cardinal de $\mathcal{E}$ et C_d ne dépend que de d.

Alors

$$\begin{aligned}{}^cR_1(x,y) &= \left\{\exists E\in I,\ \exists\begin{pmatrix}(\lambda,a)\in\mathcal{E}(x)\\ \text{et}\\ (\lambda',b)\in\mathcal{E}(y)\end{pmatrix}\right.\\ &\qquad\left.\text{tel que}\begin{pmatrix}\Lambda_\lambda(a)\\ \text{et}\\ \Lambda_{\lambda'}(b)\end{pmatrix}\text{ ne sont pas }(E,\beta)\text{-N.R}\right\}\\ &\subset \bigcup_{\mathcal{E}(x)\times\mathcal{E}(y)} Ev1((\lambda,a),(\lambda',b))\end{aligned} \tag{3.4}$$

où l'événement $Ev1((\lambda,a),(\lambda',b))$ est défini par

$$\begin{aligned}Ev1((\lambda,a),(\lambda',b)) &= \left\{\exists E\in I,\begin{pmatrix}\mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\lambda(a)}))\leq e^{-\lambda^\beta}\\ \text{et}\\ \mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_{\lambda'}(b)}))\leq e^{-(\lambda')^\beta}\end{pmatrix}\right\}\\ &\subset\left\{\exists E\in I,\begin{pmatrix}\mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\lambda(a),\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)}))\leq e^{-\lambda^\beta}+k_0e^{-d_0\varepsilon\frac{\ell}{4}}\\ \text{et}\\ \mathrm{dist}(E,\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_{\lambda'}(b),\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)}))\leq e^{-(\lambda')^\beta}+k_0e^{-d_0\varepsilon\frac{\ell}{4}}\end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

Donc, comme pour (λ,a) dans $\mathcal{E}(x)$ et (λ',b) dans $\mathcal{E}(y)$, on a $\ell\leq\lambda\leq L$ et $\ell\leq\lambda'\leq L$, pour ℓ assez grand (dépendant de k_0, d_0 et ε), on a

$$\begin{aligned}&Ev1((\lambda,a),(\lambda',b))\\ &\qquad\subset\{\mathrm{dist}(\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\lambda(a),\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)}),\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_{\lambda'}(b),\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)}))\leq 4e^{-\ell^\beta}\}.\end{aligned}$$

Or, comme $|x-y| > L(1+\varepsilon)$, on sait que, pour $(\lambda, a) \in \mathcal{E}(x)$ et $(\lambda', b) \in \mathcal{E}(y)$, $\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)$ et $\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)$ sont disjoints; ainsi les ensembles de variables aléatoires dont dépendent $\mathcal{H}_{\Lambda_\lambda(a),\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)}$ et $\mathcal{H}_{\Lambda_{\lambda'}(b),\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)}$, sont disjoints. Comme les $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ sont supposées indépendantes, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
(3.5)\quad & \mathrm{P}(\{\mathrm{dist}(\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\lambda(a),\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)}), \sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_{\lambda'}(b),\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)})) \leq 4e^{-\ell^\beta}\}) \\
&= \mathbb{E}_{\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)}(\mathrm{P}_{\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)}(\{\mathrm{dist}(\mu_j(b), \\
&\qquad \sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\lambda(a),\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)}), \sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_{\lambda'}(b),\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)})) \leq 4e^{-\ell^\beta}\})) \\
&= \mathbb{E}_{\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)}\Big(\sum_{1\leq j\leq |\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)|} \mathrm{P}_{\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)}(\{\mathrm{dist}(\mu_j(b), \\
&\qquad\qquad \sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\lambda(a),\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)})) \leq 4e^{-\ell^\beta}\})\Big)
\end{aligned}
$$

où les $\mu_j(b)$ sont les valeurs propres de $\mathcal{H}_{\Lambda_{\lambda'}(b),\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)}$ et $\mathbb{E}_{\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)}$ désigne l'espérance suivant les variables aléatoires $(t_x)_{x\in\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)}$.

Par le lemme 3.1, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}(Ev1((\lambda, a), (\lambda', b))) \\
&\leq \mathrm{P}(\{\mathrm{dist}(\sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_\lambda(a),\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)}), \sigma(\mathcal{H}_{\Lambda_{\lambda'}(b),\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)})) \leq 4e^{-\ell^\beta}\}) \\
&\leq \mathbb{E}_{\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)}\left(|\Lambda_{\lambda'+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(b)||\Lambda_{\lambda+\frac{\varepsilon}{4}\ell}(a)|^{\eta_0}\left(\frac{8e^{-\ell^\beta}}{\varepsilon_0}\right)^{\rho_0}\right) \\
&\leq CL^{d(1+\eta_0)}e^{-\rho_0\ell^\beta}
\end{aligned}
$$

pour un $C>0$ (ne dépendant que de ε_0, η_0, ρ_0 et ε).

De (3.3) et (3.4), on tire, pour un certain $C>0$,

$$\mathrm{P}({}^cR_1(x,y)) \leq CL^{d(3+\eta_0)}e^{-\rho_0\ell^\beta}.$$

Ainsi, pour ℓ suffisamment grand, on a

$$\mathrm{P}({}^cR_1(x,y)) \leq \frac{1}{2L^p}.$$

b) Estimation de $\mathrm{P}({}^cR)$.

Dans cette section, on fixera le point courant x égal à 0 (ce qui ne réduit en rien la généralité de la preuve étant donnée l'invariance par translation des propriétés utilisées). Soit $m_L \in \,]0, m_0(1-\varepsilon)]$ que nous fixerons plus loin. Par définition, on a

$$
{}^cR(0) = \left\{\exists E\in I, \begin{pmatrix}\text{parmi les } B_{k\ell}(0) \text{ contenus dans } \Lambda_L(0), \\ \text{au moins } 8\left(\left[\dfrac{m_0}{d_0}\right]+1\right)D \text{ ne sont pas} \\ \text{des } (E, m_L, \beta, \varepsilon)\text{-barrières}\end{pmatrix}\right\}.
$$

Soit $0 \leq i \leq 8\left(\left[\frac{m_0}{d_0}\right]+1\right)-1$. On va réindexer les couronnes $B_{k\ell}(0)$. On définit

$$(3.6)\quad \begin{aligned} \mathcal{B}_i &= \left\{B_{k\ell}(0);\ k \equiv i\left(8\left(\left[\frac{m_0}{d_0}\right]+1\right)\right) \text{ et } 0 \leq k \leq [\ell^{\alpha-1}]-1\right\} \\ &= \bigcup_{1\leq q\leq q_i} \{B_q^i\} \end{aligned}$$

où $q_i = \sup\left\{q;\ 8\left(\left[\frac{m_0}{d_0}\right]+1\right)q+i \leq [\ell^{\alpha-1}]-1\right\} = |\mathcal{B}_i|$.

Pour $q' < q \leq q_i$, on a

$$(3.7)\quad \begin{aligned} |B_q^i - B_{q'}^i| &\geq 8\left(\left[\frac{m_0}{d_0}\right]+1\right)(q+i)\frac{\ell}{2} - 8\left(\left[\frac{m_0}{d_0}\right]+1\right)(q'+i)\frac{\ell}{2} \\ &\geq 4\left(\left[\frac{m_0}{d_0}\right]+1\right)\ell, \end{aligned}$$

(ici $|B_q^i - B_{q'}^i|$ désigne la distance de B_q^i à $B_{q'}^i$ pour la norme $|\cdot|$) donc si $x \in B_q^i$ et $x' \in B_{q'}^i$,

$$|\Lambda_\ell(x) - \Lambda_\ell(x')| \geq \left(4\left[\frac{m_0}{d_0}\right]+3\right)\ell.$$

Définissons l'événement ${}^cR_i$ par

$${}^cR_i = \left\{\exists E \in I,\ \begin{pmatrix}\text{parmi les } B_q^i, \text{ au moins } D \\ \text{ne sont pas des } (E, m_L, \beta, \varepsilon)\text{-barrières}\end{pmatrix}\right\}.$$

On a

$$(3.8)\qquad {}^cR(0) \subset \bigcup_{i\in\left[0,8\left(\left[\frac{m_0}{d_0}\right]+1\right)-1\right]} \left({}^cR_i\right).$$

Fixons $i \in \left[0, 8\left(\left[\frac{m_0}{d_0}\right]+1\right)-1\right]$. On a

(3.9)

$${}^cR_i \subset \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_D)\in[0,q_i]^D} \left\{\exists E \in I, \begin{pmatrix}\exists (x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_D}) \in B_{\alpha_1}^i \times \dots \times B_{\alpha_D}^i \\ \text{tel que, pour } 1\leq j\leq D, \Lambda_\ell(x_{\alpha_j}) \\ \text{n'est pas } (E, m_L, \beta, \varepsilon)\text{-régulier}\end{pmatrix}\right\}.$$

Fixons $(\alpha_1, \dots, \alpha_D) \in [0, q_i]^D$ et $x_\alpha = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_D}) \in B_{\alpha_1}^i \times \dots \times B_{\alpha_D}^i$. On définit l'événement ${}^cR(x_\alpha)$ par

$${}^cR(x_\alpha) = \{\exists E \in I, \forall 1 \leq j \leq D,\ \Lambda_\ell(x_{\alpha_j}) \text{ n'est pas } (E, m_L, \beta, \varepsilon)\text{-régulier}\}.$$

Alors

$$(3.10)\qquad {}^cR(x_\alpha) \subset \bigcup_{1\leq j\leq D} Q_j \bigcup \bigcup_{1\leq j\neq k\leq D} Q_{j,k}^1$$

où, pour $1 \leq j \leq D$,

$$Q_j = \left\{ \exists E \in I,\ \forall 1 \leq i \leq D, i \neq j, \begin{pmatrix} \Lambda_\ell(x_{\alpha_i}) \text{ n'est pas} \\ (E, m_L, \beta, \varepsilon)\text{-régulier} \\ \text{et } \|G_{\Lambda_\ell(x_{\alpha_i})}(E)\| \leq e^{\ell^\beta} \end{pmatrix} \right\}$$

et, pour $1 \leq j \neq k \leq D$

$$Q^1_{j,k} = \{\exists E \in I,\ \Lambda_\ell(x_{\alpha_j}) \text{ et } \Lambda_\ell(x_{\alpha_k}) \text{ ne sont pas } (E, \beta)\text{-N.R}\}.$$

Par (3.7), pour $j \neq k$,

$$|\Lambda_\ell(x_{\alpha_j}) - \Lambda_\ell(x_{\alpha_k})| \geq \left(4\left[\frac{m_0}{d_0}\right] + 3\right)\ell > (1+\varepsilon)\ell$$

donc, par ce qui a été vu en a),

$$\mathrm{P}(Q^1_{j,k}) \leq CL^{d(3+\eta_0)}e^{-\rho_0 \ell^\beta} \tag{3.11}$$

où la constante C est la même pour tous les x_α.

Fixons $j \in [1, D]$. Soit G, une partition de $[1, D] \setminus \{j\}$ en paires (elle existe car D est impair et $|G| = D - 1$). On a

$$Q_j \subset \bigcap_{\{k,k'\} \in G} \left\{ \exists E \in I, \begin{pmatrix} \Lambda_\ell(x_{\alpha_k}) \text{ et } \Lambda_\ell(x_{\alpha_{k'}}) \text{ ne sont pas} \\ (E, m_L, \beta, \varepsilon)\text{-régulier et} \\ \|G_{\Lambda_\ell(x_{\alpha_k})}(E)\| \leq e^{\ell^\beta} \\ \text{et } \|G_{\Lambda_\ell(x_{\alpha_{k'}})}(E)\| \leq e^{\ell^\beta} \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.12}$$

Pour $\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$, on désignera par $G_{\Lambda,\Lambda'}(E)$, la résolvante de $\mathcal{H}_{\Lambda,\Lambda'}(t)$ à l'énergie E. On a alors le

LEMME DE DÉCOUPLAGE. — *Soit $C > 0$ et $\delta \in]0, 1[$. Il existe ℓ_0 (dépendant de C, m_0, d_0, k_0, ε, δ, β) tel que pour $\ell \geq \ell_0$, on a, pour $m \leq m_0(1 - \varepsilon)$ et $m' = m + \ell^{-\delta} \leq m_0$, et pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$*

a) *si $\Lambda_\ell(x)$ n'est pas $(E, m, \beta, \varepsilon)$-régulier et $\|G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\| \leq Ce^{\ell^\beta}$ alors*

$$\|G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E)\| \leq 2Ce^{\ell^\beta}$$

et

$$\sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2} \leq |y-x| \leq \frac{\ell}{2}} |G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E; x, y)| e^{m'|y-x|} > 1,$$

b) *et réciproquement, si*

$$\|G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E)\| \leq Ce^{\ell^\beta}$$

et

$$\sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|y-x|\leq\frac{\ell}{2}} |G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E;x,y)|e^{m|y-x|}>1$$

alors $\Lambda_\ell(x)$ *n'est pas* (E,m',β,ε)*-régulier et* $\|G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\|\leq 2Ce^{\ell^\beta}$.

Ce lemme sera établi dans la partie 3.B. Servons-nous en pour estimer $\mathrm{P}(Q_{k,k'})$. Le point a) du lemme de découplage nous dit que

$$\begin{aligned} Q_{k,k'} \subset \Bigg\{ & \exists E\in I, \forall x\in\{x_{\alpha_k},x_{\alpha_{k'}}\}, \\ & \|G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E)\|\leq 2Ce^{\ell^\beta} \text{ et} \\ & \sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|y-x|\leq\frac{\ell}{2}} |G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E;x,y)|e^{m'_L|y-x|}>1\Bigg\} \\ = \widetilde{Q}_{k,k'} & \end{aligned}$$

avec $m'_L=m_L+\ell^{-\delta}$.

Si $\ell\geq 1+\varepsilon^{-1}$, par (3.7), pour $k\neq k'$, on a

$$\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x_{\alpha_k})\bigcap\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x_{\alpha_{k'}})=\emptyset. \tag{3.13}$$

Ainsi, pour $\{k,k'\}\neq\{j,j'\}$, les événements $\widetilde{Q}_{k,k'}$ et $\widetilde{Q}_{j,j'}$ sont indépendants donc

$$\mathrm{P}(Q_j)\leq\Pi_{\{k,k'\}\in G}\mathrm{P}(\widetilde{Q}_{k,k'}). \tag{3.14}$$

En utilisant le point b) du lemme de découplage, on obtient

$\widetilde{Q}_{k,k'}\subset\{\exists E\in I,\ \Lambda_\ell(x_{\alpha_k})$ et $\Lambda_\ell(x_{\alpha_{k'}})$ ne sont pas $(E,m''_L,\beta,\varepsilon)$-réguliers$\}$

avec $m''_L=m_L+2\ell^{-\delta}$.

Choisissons alors $m_L=m_\ell-2\ell^{-\delta}$ c'est-à-dire $m''_L=m_\ell$; ainsi, comme d'après (3.7), x_{α_k} et $x_{\alpha_{k'}}$ sont assez éloignés l'un de l'autre, l'hypothèse principale du lemme 2.2 nous dit que, pour tout $\{k,k'\}\in G$,

$$\mathrm{P}(\widetilde{Q}_{k,k'})\leq\ell^{-p}$$

ainsi, par (3.14),

$$\mathrm{P}(Q_j)\leq\ell^{-\frac{p(D-1)}{2}}.$$

Par (3.10) et (3.11),

$$\mathrm{P}({}^cR(x_\alpha))\leq D\ell^{-\frac{p(D-1)}{2}}+CL^{d(3+\eta_0)}e^{-\rho_0\ell^\beta}=\ell^{-\frac{p(D-1)}{2}}A(\ell) \tag{3.15}$$

où

$$A(\ell) = D + D^2 C L^{d(3+\eta_0)+\frac{p(D-1)}{2}} e^{-\rho_0 \ell^\beta}. \tag{3.16}$$

En utilisant (3.9) et (3.8), on a,

$$\mathrm{P}({}^c R(0)) \le \binom{[\ell^{\alpha-1}]+1}{D} L^D A(\ell) \ell^{-\frac{p(D-1)}{2}} \le 8L^{2D} A(\ell) \ell^{-\frac{p(D-1)}{2}} \tag{3.17}$$
$$\le \left(\frac{8A(\ell)}{\ell}\right) \ell^{1+2\alpha D - \frac{p(D-1)}{2}}.$$

On choisit alors D tel que,

$$1 + 2\alpha D - \frac{p(D-1)}{2} \le -p\alpha \ \Leftrightarrow\ D \ge \frac{2(1+p\alpha)+p}{p-4\alpha}$$

et ℓ suffisamment grand pour que $\dfrac{8A(\ell)}{\ell} \le \dfrac{1}{4}$.

En additionnant les estimées obtenues par (3.17) pour $\mathrm{P}({}^c R(x))$ et $\mathrm{P}({}^c R(y))$, avec l'estimée obtenue pour $\mathrm{P}({}^c R_1(x,y))$ dans la partie 1, on obtient

$$\mathrm{P}({}^c Q(x,y)) \le L^{-p},$$

ce qui achève la démonstration du lemme 2.2. □

B. Preuve du lemme de découplage.

Supposons vraies les hypothèses du a) du lemme de découplage. La propriété de découplage nous dit que,

$$\|H_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)} - H_{\Lambda_\ell(x)}\| \le k_0 e^{-d_0(4[\frac{m_0}{d_0}]+3-2\varepsilon)\frac{\ell}{2}} \tag{3.18}$$
$$\le k_0 e^{-m_0(\frac{3}{2}-\varepsilon)\ell}.$$

On a

$$G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E) \tag{3.19}$$
$$= G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\Big(1 + \Big(H_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)} - H_{\Lambda_\ell(x)}\Big) G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\Big)^{-1}.$$

Par hypothèse, $\|G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\| \le Ce^{\ell^\beta}$ donc, si ℓ assez grand,

$$\|G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E)\| \le \|G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\| \Big(1 + 2Ck_0 e^{-m_0(\frac{3}{2}-\varepsilon)\ell} e^{\ell^\beta}\Big)$$
$$\le 2Ce^{\ell^\beta}.$$

De (3.19), on tire,

$$
(3.20)\qquad G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E) - G_{\Lambda_\ell(x)}(E)
$$

$$
= G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\Big(1+\Big(H_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)} - H_{\Lambda_\ell(x)}\Big)G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\Big)^{-1}
$$

$$
\cdot\Big(H_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)} - H_{\Lambda_\ell(x)}\Big)G_{\Lambda_\ell(x)}(E).
$$

Ainsi, pour $m' \geq m$ et ℓ assez grand,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|y-x|\leq\frac{\ell}{2}} & |G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E;x,y)|e^{m'|y-x|} \\
&\geq \sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|y-x|\leq\frac{\ell}{2}} |G_{\Lambda_\ell(x)}(E;x,y)|e^{m'|y-x|} \\
&\qquad - \sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|y-x|\leq\frac{\ell}{2}} e^{m'|y-x|}2k_0e^{-m_0(\frac{3}{2}-\varepsilon)\ell}C^2e^{2\ell^\beta} \\
&\geq \Big(\sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|y-x|\leq\frac{\ell}{2}} |G_{\Lambda_\ell(x)}(E;x,y)|e^{m|y-x|}\Big)e^{(m'-m)\varepsilon\frac{\ell}{2}} \\
&\qquad - 2C^2k_0\ell^de^{m'\frac{\ell}{2}}e^{-m_0(\frac{3}{2}-\varepsilon)\ell}e^{2\ell^\beta} \\
&\geq e^{(m'-m)\varepsilon\frac{\ell}{2}} - 2C^2k_0\ell^de^{(m'-m_0)\frac{\ell}{2}}e^{-m_0(1-\varepsilon)\ell}e^{2\ell^\beta} \\
&\geq e^{(m'-m)\varepsilon\frac{\ell}{2}}(1-2C^2k_0\ell^de^{2\ell^\beta}e^{-m_0(1-\varepsilon)\ell}) \\
&\geq \frac{1}{2}e^{(m'-m)\varepsilon\frac{\ell}{2}}.
\end{aligned}
$$

Donc pour $m' = m+\ell^{-\delta}$, si ℓ est suffisamment grand,

$$
\sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|y-x|\leq\frac{\ell}{2}} \Big|G_{\Lambda_\ell(x),\Lambda_{(4[\frac{m_0}{d_0}]+4-2\varepsilon)\ell}(x)}(E;x,y)\Big|e^{m'|y-x|} \geq \frac{1}{2}e^{\frac{\varepsilon}{2}\ell^{1-\delta}} > 1
$$

ce qui achève la preuve du point a) du lemme de découplage. La partie b) du lemme se démontre de la même manière. □

4. Preuve du lemme 2.3.

On fixera $x = 0$. D'après l'hypothèse b) du lemme 2.3, on sait que $\Lambda_L(0)$ est (E,β)-N.R donc il nous suffit de voir que, si ℓ est assez grand, alors,

$$
\sum_{\varepsilon\frac{L}{2}\leq|y|\leq\frac{L}{2}} |G_{\Lambda_L(x)}(E;0,y)|e^{m_L|y|} < 1
$$

avec $m_L = m_\ell - (1+m_0)\ell^{-\delta}$.

Notons

$$K = \{k \in [1, [\ell^{\alpha-1}] - 1];\ B_{k\ell}(0) \text{ est une } (E, m_\ell, \beta, \varepsilon)\text{-barrière}\}.$$

De l'hypothèse d), on tire

$$|K| \geq [\ell^{\alpha-1}] - D - 2.$$

Ordonnons les éléments de K dans le sens croissant et notons les $(k_j)_{1\leq j\leq |K|}$; donc la minoration sur $|K|$ nous dit que,

$$|j - k_j| \leq D + 2. \tag{4.1}$$

Nous allons montrer le

LEMME 4.1. — *Soit $0 < \delta < 1 - \alpha\beta$. Il existe $\ell_0 > 0$ et $C_d > 1$ (dépendants de m_0, β, ε, δ, α, D) tels que si $\ell \geq \ell_0$, pour tout $1 \leq j \leq |K|$, on a, pour tout $y \in B^+_{k_j\ell}(0)$,*

si $y \in B^+_{(k_j+1)\ell}(0)$ alors $\forall k \geq k_j + 1$,

$$|G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;0,y)| \leq (2C_d L^d e^{m_0} e^{L^\beta})^{2j} e^{-m'_\ell j \frac{\ell}{2}}$$

si $y \in B^+_{k_j\ell}(0)$ et $\varepsilon\frac{\ell}{2} \leq |y - \Lambda_{k_j\ell}(0)| \leq \frac{\ell}{2}$ alors $\forall k \geq k_j + 1$,

$$|G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;0,y)| \leq (2C_d L^d e^{m_0} e^{L^\beta})^{2j} e^{-m'_\ell\left((j-1-\varepsilon)\frac{\ell}{2} + |y - \Lambda_{k_j\ell}(0)|\right)}$$

si $y \in B^+_{k_j\ell}(0)$ et $|y - \Lambda_{k_j\ell}(0)| \leq \varepsilon\frac{\ell}{2}$ alors $\forall k \geq k_j + 1$,

$$|G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;0,y)| \leq (2C_d L^d e^{m_0} e^{L^\beta})^{2j} e^{-m'_\ell (j-1)\frac{\ell}{2}}$$

avec $m_\ell - \dfrac{m_0+1}{2}\ell^{-\delta} \leq m'_\ell \leq m_\ell$.

Preuve. — La base technique de ce lemme est une formule de résolvante analogue à celle utilisée par Fröhlich-Spencer [FS] ou von Dreyfus-Klein [vDK1].

Pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, on note,

$$\partial\Lambda^{k,+} = \{y \in \mathbb{Z}^d;\ k < |y - \Lambda| \leq k+1\}.$$

On a

$$\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda = \bigcup_{k\geq 0} \partial\Lambda^{k,+}.$$

Notons $\mathcal{H}(t) = ((h(t;x,y))_{(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d}$ (dans la suite, on omettra la dépendance en t qui ne joue pas de rôle dans cette démonstration). Pour $\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$, on définit l'opérateur $\Gamma^k_{\Lambda,\Lambda'}$ par

$$\Gamma^k_{\Lambda,\Lambda'} = ((\gamma_{x,y}))_{(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d} \text{ avec } \begin{cases} \gamma_{x,y} = h(t;x,y) & \text{si } x \in \Lambda \\ & \text{et } y \in \partial\Lambda^{k,+} \cap \Lambda' \\ \gamma_{x,y} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et ${}^t\Gamma^k_{\Lambda,\Lambda'}$ comme l'adjoint de $\Gamma^k_{\Lambda,\Lambda'}$.

Par définition,

$$\mathcal{H}_{\Lambda'} = \mathcal{H}_{\Lambda} + \mathcal{H}_{\Lambda'\setminus\Lambda} + \sum_{k\geq 0}(\Gamma^k_{\Lambda,\Lambda'} + {}^t\Gamma^k_{\Lambda,\Lambda'}). \tag{4.2}$$

Soit $E \in \mathbb{R}$ tel que $E \notin \sigma(\mathcal{H}_{\Lambda'}) \cup \sigma(\mathcal{H}_{\Lambda})$; si Id désigne la matrice identité, on a

$$(\mathcal{H}_{\Lambda'\setminus\Lambda} - E\,\mathrm{Id}_{\Lambda'\setminus\Lambda})G_{\Lambda}(E) = 0 = G_{\Lambda}(E)(\mathcal{H}_{\Lambda'\setminus\Lambda} - E\,\mathrm{Id}_{\Lambda'\setminus\Lambda})$$

et, pour $k \geq 0$,

$$G_{\Lambda}(E){}^t\Gamma^k_{\Lambda,\Lambda'} = 0 = \Gamma^k_{\Lambda,\Lambda'}G_{\Lambda}(E).$$

De (4.2), on déduit la formule de résolvante suivante,

$$G_{\Lambda'}(E) = G_{\Lambda}(E) - \sum_{k\geq 0} G_{\Lambda}(E){}^t\Gamma^k_{\Lambda,\Lambda'}G_{\Lambda'}(E), \tag{4.3}$$

soit encore, si $G_{\Lambda}(E;x,y)$ désigne le coefficient générique de la matrice $G_{\Lambda}(E)$,

$$G_{\Lambda'}(E;x,y) = G_{\Lambda}(E;x,y) - \sum_{\substack{k\geq 0\\ a\in\Lambda\\ b\in\partial\Lambda^{k,+}\cap\Lambda'}} G_{\Lambda}(E;x,a)\gamma_{a,b}G_{\Lambda'}(E;b,y). \tag{4.4}$$

On a le

LEMME 4.2. — *Soit $0 < \delta < 1 - \alpha\beta$. Il existe $C_d > 1$ et $\ell_0 > 0$ (dépendants de d, m_0, β, ε, δ, α) tel que, pour $\ell \geq \ell_0$ et $x \in \Lambda_{k\ell}(0)$ tel que $\Lambda_\ell(x)$ est $(E, m_\ell, \beta, \varepsilon)$-régulier, et pour $y \in \Lambda_{k\ell}(0)$, on a,*

$$|G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;x,y)| \leq 2C_d^2 e^{m_0} \begin{cases} e^{-m'_\ell\frac{\ell}{2}} & \text{si } y \notin \Lambda_\ell(x) \\ e^{-m'_\ell|y-x|} & \text{si } y \in \Lambda_\ell(x) \text{ et } |y-x| \geq \varepsilon\frac{\ell}{2} \\ e^{\ell^\beta} & \text{si } |y-x| < \varepsilon\frac{\ell}{2} \end{cases}$$

où $m_\ell \geq m'_\ell \geq m_\ell - \dfrac{m_0+1}{4}\ell^{-\delta}$.

Remarque. — Si $y \notin \Lambda_{k\ell}(0)$ alors $G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;x,y) = 0$; donc l'énoncé du lemme reste vrai.

Preuve. — D'après (4.4),

$$|G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;x,y)| \leq |G_{\Lambda_\ell(x)}(E;x,y)| + \Sigma_1,$$

où

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{k\geq 0\\ a\in\Lambda_\ell(x)\\ b\in\partial\Lambda_\ell^{k,+}(x)\cap\Lambda_{k\ell}(0)}} |G_{\Lambda_\ell(x)}(E;x,a)||\gamma_{a,b}||G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;b,y)|,$$

ainsi, par (E,β)-non résonance de $\Lambda_{k\ell}(0)$,

$$\Sigma_1 \leq \sum_{\substack{k\geq 0\\ b\in\partial\Lambda_\ell^{k,+}(x)}} \Bigg(\sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|a-x|\leq\frac{\ell}{2}} (|G_{\Lambda_\ell(x)}(E,x,a)|e^{m_\ell|a-x|}) \\ e^{-m_\ell|a-x|}e^{-m_0|a-b|}e^{L^\beta} + \sum_{\varepsilon\frac{\ell}{2}\geq|a-x|} e^{\ell^\beta}e^{-m_0|a-b|}e^{L^\beta}\Bigg). \tag{4.5}$$

En outre, on sait que $\Lambda_\ell(x)$ est régulier, que $m_\ell \leq m_0(1-\varepsilon)$, que pour $\varepsilon\frac{\ell}{2} \geq |a-x|$ et $b \in \partial\Lambda_\ell^{k,+}(x)$, on a $|b-a| \geq (1-\varepsilon)\frac{\ell}{2} + k - 1$, et, que pour $\varepsilon\frac{\ell}{2} \leq |a-x| \leq \frac{\ell}{2}$ et $b \in \partial\Lambda_\ell^{k,+}(x)$, on a, $|a-b| \geq k$ et $m_\ell|x-a| + m_0|a-b| \geq m_\ell|x-b| + \varepsilon m_0|a-b|$; par conséquent, (4.5) devient

$$\Sigma_1 \leq \sum_{\substack{k\geq 0\\ b\in\partial\Lambda_\ell^{k,+}(x)}} \Bigg(e^{\ell^\beta}e^{L^\beta}e^{-m_0((1-\varepsilon)\frac{\ell}{2}+k-1)} + e^{-m_\ell(\frac{\ell}{2}+k)}e^{-\varepsilon k m_0}e^{L^\beta} \\ \leq e^{-m_\ell\frac{\ell}{2}}e^{L^\beta}\sum_{k\geq 0} C_d(k+\frac{\ell}{2}+1)^{d-1}(e^{\ell^\beta}e^{-m_0(k-1)}+e^{-(m_\ell+\varepsilon m_0)k}\Bigg). \tag{4.6}$$

Pour $d > 0$, il existe $C_d > 0$ tel que pour tout $A > 1$ et $B > 0$ tels que $A\cdot B > 2d$, on a

$$\sum_{k\geq 0}(A+k)^d e^{-Bk} \leq C_d\Big(\frac{A^d}{B}\Big),\ |\Lambda_A(0)| \leq C_d A^d \\ \text{et } |\partial\Lambda_A^{k,+}(0)| \leq C_d(\frac{A}{2}+k+1)^d. \tag{4.7}$$

Ainsi, par (4.6), pour ℓ assez grand, on obtient

$$\Sigma_1 \leq \frac{2C_d^2}{\varepsilon m_0}e^{m_0}\ell^d e^{L^\beta}e^{\ell^\beta}e^{-m_\ell\frac{\ell}{2}} \leq e^{-m'_\ell\frac{\ell}{2}}$$

avec $m_\ell \geq m'_\ell \geq m_\ell - m_0\ell^{-\delta}$. On achève la preuve du lemme 4.2 en remarquant que si $y \notin \Lambda_\ell(x)$ alors $G_{\Lambda_\ell(x)}(E;x,y) = 0$ et, si $y \in \Lambda_\ell(x)$, alors on majore $|G_{\Lambda_\ell(x)}(E;x,y)|$ soit par régularité de $\Lambda_\ell(x)$ ou par (E,β)-non résonance. □

Nous allons démontrer le lemme 4.1 par récurrence sur j.

Supposons $j = 1$. Soit $y \in B^+_{k_1\ell}(0)$ et $k' \geq k_1+1$. Comme $y \notin \Lambda_{k_1\ell}(0)$, la formule de résolvante (4.4) nous dit que

$$(4.8)\qquad \begin{aligned}&|G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)|\\ &\leq \sum_{\substack{k\geq 0\\ a\in\Lambda_{k_1\ell}(0)\\ b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\cap\Lambda_{k'\ell}(0)}} |G_{\Lambda_{k_1\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}||G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;b,y)|.\end{aligned}$$

Si $|y-\Lambda_{k_1\ell}(0)| \leq \varepsilon\frac{\ell}{2}$, comme $\Lambda_{k\ell}(0)$ est (E,β)-N.R, on a

$$|G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)| \leq e^{L^\beta}$$

c'est-à-dire le résultat annoncé pour $j = 1$ dans ce cas.

Supposons maintenant $\varepsilon\frac{\ell}{2} \leq |y-\Lambda_{k_1\ell}(0)|$. Par l'hypothèse d), $B_{k_1\ell}(0)$ est une $(E,m_\ell,\beta,\varepsilon)$-barrière c'est-à-dire, pour $0 \leq k < \frac{\ell}{2}$ et $b \in \partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)$, $\Lambda_\ell(b)$ est $(E,m_\ell,\beta,\varepsilon)$-régulier. Par (4.8), on a

$$(4.9)\qquad \begin{aligned}&|G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)|\\ &\leq \sum_{a\in\Lambda_{k_1\ell}(0)} \left(\sum_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1}(\Sigma_1(k,a)+\Sigma_2(k,a)+\Sigma_3(k,a))+\Sigma_4(a)\right),\end{aligned}$$

où

$$(4.10)\qquad \Sigma_1(k,a) = \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ |b-y|<\varepsilon\frac{\ell}{2}}} |G_{\Lambda_{k_1\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}||G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;b,y)|,$$

$$(4.11)\qquad \Sigma_2(k,a) = \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ \frac{\ell}{2}\geq|b-y|\geq\varepsilon\frac{\ell}{2}}} |G_{\Lambda_{k_1\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}||G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;b,y)|,$$

$$(4.12)\qquad \Sigma_3(k,a) = \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ |b-y|>\frac{\ell}{2}}} |G_{\Lambda_{k_1\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}||G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;b,y)|,$$

et

$$\Sigma_4(a) = \sum_{\substack{k\geq \frac{\ell}{2}\\ b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\cap\Lambda_{k\ell}(0)}} |G_{\Lambda_{k_1\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}||G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;b,y)|. \tag{4.13}$$

Par le lemme 4.2, on a

$$\Sigma_1(k,a) \leq 2(C_d)^2 e^{m_0}\Sigma_1'(k,a) \tag{4.14}$$

où

$$\Sigma_1'(k,a) = \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ \varepsilon\frac{\ell}{2}>|b-y|}} |G_{\Lambda_{k_1\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}|e^{\ell^\beta}.$$

Comme $\Lambda_{k_1\ell}(0)$ est (E,β)-N.R,

$$\begin{aligned}\Sigma_1'(k,a) &\leq e^{2L^\beta}\sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ \varepsilon\frac{\ell}{2}>|b-y|}} e^{-m_0|b-a|} \leq e^{2L^\beta}\sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ |b-y|<\varepsilon\frac{\ell}{2}}} e^{-m_0|b-\Lambda_{k_1\ell}(0)|}\\ &\leq e^{2L^\beta}\sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ |b-y|<\varepsilon\frac{\ell}{2}}} e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_1\ell}(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2})}\end{aligned}$$

en utilisant successivement $a\in\Lambda_{k_1\ell}(0)$ et $|b-\Lambda_{k_1\ell}(0)|\geq|y-\Lambda_{k_1\ell}(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2}$. En remarquant que si $\left|k-|y|+\frac{k_1\ell}{2}\right|>\varepsilon\frac{\ell}{2}$ alors $\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\cap\Lambda_{\varepsilon\ell}(y)=\emptyset$, on obtient

$$\Sigma_1'(k,a)\leq\mathbf{1}_{\{|k-|y|+\frac{k_1\ell}{2}|\leq\varepsilon\frac{\ell}{2}\}}(k)e^{2L^\beta}C_d\Big(\varepsilon\frac{\ell}{2}+1\Big)^d \cdot e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_1}\ell(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2})}. \tag{4.15}$$

Par le lemme 4.2, avec m'_ℓ donné par ce lemme, on écrit,

$$\Sigma_2(k,a)\leq 2(C_d)^2e^{m_0}\Sigma_2'(k,a) \tag{4.16}$$

avec

$$\begin{aligned}\Sigma_2'(k,a) &= \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ \frac{\ell}{2}\geq|b-y|\geq\varepsilon\frac{\ell}{2}}} |G_{\Lambda_{k_1\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}|e^{m'_\ell|y-b|}\\ &\leq \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ \frac{\ell}{2}\geq|b-y|\geq\varepsilon\frac{\ell}{2}}} e^{L^\beta}e^{-m_0|a-b|}e^{m'_\ell|y-b|},\end{aligned}$$

d'où, en remarquant que, si $\left|k-|y|+k_1\frac{\ell}{2}\right|>\frac{\ell}{2}$ alors

$$\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\cap\Big\{\varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|y-z|\leq\frac{\ell}{2}\Big\}=\emptyset,$$

on obtient

$$\Sigma_2'(k,a) \le \mathbf{1}_{\{|k-|y|+\frac{k_1\ell}{2}|\le\frac{\ell}{2}\}}(k) e^{L^\beta} C_d \Big(\frac{\ell}{2}+1\Big)^d e^{-m_\ell'|y-a|m_0 k}. \tag{4.17}$$

En réappliquant le lemme 4.2, on a

$$\begin{aligned}\Sigma_3(k,a) &\le 2(C_d)^2 e^{m_0} \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_1\ell}(0)\\ \frac{\ell}{2}<|b-y|}} |G_{\Lambda_{k_1\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}|e^{-m_\ell'\frac{\ell}{2}} \\ &\le 2(C_d)^3 e^{L^\beta} e^{m_0} e^{-m_\ell'\frac{\ell}{2}} e^{-m_0 k}\Big(k_1\frac{\ell}{2}+k+1\Big)^d.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Enfin, comme $\Lambda_{k\ell}(0)$ est (E,β)-N.R, on sait que

$$\Sigma_4(k) \le \sum_{k\ge 0} e^{2L^\beta} e^{-m_0(k+\frac{\ell}{2}-1+|a-B^+_{k_1\ell}(0)|)} C_d\Big(k+(k_1+1)\frac{\ell}{2}+1\Big)^{d-1}$$

c'est-à-dire, par (4.7),

$$\begin{aligned}\Sigma_4(k) &\le e^{2L^\beta} e^{-m_0(\frac{\ell}{2}-1)} C_d^2\Big((k_1+1)\frac{\ell}{2}+1\Big)^d \\ &\le C_d^2 e^{2L^\beta}(L+1)^d e^{m_0} e^{-m_0\frac{\ell}{2}}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Par (4.18), on a

$$\begin{aligned}&\sum_{a\in\Lambda_{k_1\ell}(0)} \sum_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1} \Sigma_3(k,a) \\ &\le 2C_d^3 e^{L^\beta}(L+1)^d e^{m_0}\Big(\sum_{k\ge 0}(k+L)^d e^{-m_0 k}\Big) e^{-m_\ell'\frac{\ell}{2}} \\ &\le 2C_d^5 e^{L^\beta}(L+1)^{2d} e^{-m_\ell'\frac{\ell}{2}}\end{aligned} \tag{4.20}$$

en utilisant (4.7) et le fait que $L\ge\ell\ge\ell_0$.

De même, par (4.15),

$$\begin{aligned}&\sum_{a\in\Lambda_{k_1\ell}(0)} \sum_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1} \Sigma_1'(k,a) \\ &\le C_d^2 e^{2L^\beta}(k_1\ell)^d(1+\varepsilon\frac{\ell}{2})^{d-1}\frac{\ell}{2} e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_1\ell}(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2}-1)} \\ &\le C_d^2 e^{2L^\beta}(L\ell)^d e^{m_0} e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_1\ell}(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2})},\end{aligned} \tag{4.21}$$

et, par (4.17),

$$\begin{aligned}&\sum_{a\in\Lambda_{k_1\ell}(0)} \sum_{k=0}^{\frac{\ell}{2}-1} \Sigma_2'(k,a) \\ &\le C_d^2 e^{L^\beta}\Big(\frac{\ell}{2}+1\Big)^d (k_1\ell)^d \frac{\ell}{2} e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_1\ell}(0)|-1)} \\ &\le C_d^2 e^{L^\beta} L^{2d+1} e^{-m_0} e^{-m_0|y-\Lambda_{k_1\ell}(0)|}.\end{aligned} \tag{4.22}$$

En introduisant (4.21) et (4.22) dans (4.14) et (4.15), en additionnant ces deux inégalités aux inégalités (4.19)-(4.20), puis en remplaçant le tout dans (4.9), on obtient

$$|G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)| \leq 2C_d^4 e^{2L^\beta} L^{2d} e^{m_0} \Bigg(\frac{(L+1)^d}{L^{2d}} e^{-m_0 \frac{\ell}{2}}$$

$$+ C_d e^{-L^\beta} \left(\frac{L+1}{L}\right)^{2d} e^{-m'_\ell \frac{\ell}{2}} + e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_1\ell}(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2})} + e^{-L^\beta} L e^{-m_0|y-\Lambda_{k_1\ell}(0)|} \Bigg).$$

Ainsi pour ℓ suffisamment grand (tel que $\left| \frac{(L+1)^d}{L^{2d}} + e^{-L^\beta}(L+1)\ell^{-d(\alpha-1)} + C_d e^{-L^\beta}\left(\frac{L+1}{L}\right)^{2d} \right| < \frac{2}{3}$), on a le résultat annoncé pour $j = 1$.

Supposons le résultat vrai pour $1 \leq j \leq p-1$. Soit $y \in B^+_{k_p\ell}(0)$ et $k' \geq k_p + 1$. Comme $y \notin \Lambda_{k_p\ell}(0)$, la formule de résolvante (4.4) nous dit

$$\begin{aligned}
(4.23)\quad & |G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)| \\
& \leq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ a \in \Lambda_{k_p\ell}(0) \\ b \in \partial\Lambda^{k,+}_{k_p\ell}(0) \cap \Lambda_{k'\ell}(0)}} |G_{\Lambda_{k_p\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}||G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;b,y)| \\
& \leq \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ a \in B^+_{k_j\ell}(0) \cap \Lambda_{k_{j+1}\ell}(0) \\ b \in \partial\Lambda^{k,+}_{k_p\ell}(0)}} |G_{\Lambda_{k_p\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}||G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;b,y)| \\
& \quad + \sum_{\substack{k \geq 0 \\ a \in \Lambda_{k_1\ell}(0) \\ b \in \partial\Lambda^{k,+}_{k_p\ell}(0)}} |G_{\Lambda_{k_p\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}||G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;b,y)|.
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, pour $1 \leq j \leq p-1$ et $a \in B^+_{k_j\ell}(0) \cap \Lambda_{k_{j+1}\ell}(0)$, on a

(4.24)

$$|G_{\Lambda_{k_p\ell}(0)}(E;0,a)| \leq \begin{cases} (2C_d L^d e^{m_0} e^{L^\beta})^{2j} e^{-m'_\ell j \frac{\ell}{2}} \\ \qquad \text{si } a \in B^+_{(k_j+1)\ell}(0) \cap \Lambda_{k_{j+1}\ell}(0) \\ (2C_d L^d e^{m_0} e^{L^\beta})^{2j} e^{-m'_\ell((j-1-\varepsilon)\frac{\ell}{2} + |a-\Lambda_{k_j\ell}(0)|)} \\ \qquad \text{si } \varepsilon\frac{\ell}{2} \leq |a-\Lambda_{k_j\ell}(0)| \leq \frac{\ell}{2} \\ (2C_d L^d e^{m_0} e^{L^\beta})^{2j} e^{-m'_\ell(j-1)\frac{\ell}{2}} \\ \qquad \text{si } \varepsilon\frac{\ell}{2} \geq |a-\Lambda_{k_j\ell}(0)|. \end{cases}$$

Pour $a\in\Lambda_{k_p\ell}(0)$ et $b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_p\ell}(0)$, on a

$$|b-a|\geq|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|+|a-B^{+}_{k_p\ell}(0)|-2$$

car $\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0)$ sépare a et b.

En outre $|\Lambda_{k_j\ell}(0)-B^{+}_{k_p\ell}(0)|\leq p-j$, ainsi, on obtient, pour $1\leq j\leq p-1$, $a\in B^{+}_{k_j\ell}(0)\cap\Lambda_{k_{j+1}\ell}(0)$ et $b\in\partial\Lambda^{k,+}_{k_p\ell}(0)$,

$$|G_{\Lambda_{k_p\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}|$$
$$\leq(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^{2j}e^{2m_0}\begin{cases}e^{-m'_\ell j\frac{\ell}{2}-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|-m_0|a-B^{+}_{k_p\ell}(0)|}\\ \qquad\text{si } a\in B^{+}_{(k_j+1)\ell}(0)\cap\Lambda_{k_{j+1}\ell}(0)\\ (e^{-m'_\ell((j-1-\varepsilon)\frac{\ell}{2}+|a-\Lambda_{k_j\ell}(0)|)}\\ \quad\cdot e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|-m_0|a-B^{+}_{k_p\ell}(0)|})\\ \qquad\text{si } \varepsilon\frac{\ell}{2}\leq|a-\Lambda_{k_j\ell}(0)|\leq\frac{\ell}{2}\\ e^{-m'_\ell(j-1)\frac{\ell}{2}-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|-m_0(p-j-\varepsilon)}\\ \qquad\text{si } \varepsilon\frac{\ell}{2}\geq|a-\Lambda_{k_j\ell}(0)|.\end{cases}$$

En remarquant que $|a-\Lambda_{k_j\ell}(0)|+|a-B^{+}_{k_p\ell}(0)|\geq p-j$ et que, comme $p-j\geq1$, on a $(p-j-\varepsilon)m_0\geq m'_\ell$, on obtient

$$|G_{\Lambda_{k_p\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}|\leq e^{2m_0}(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^{2j}e^{-m'_\ell(p-1)\frac{\ell}{2}}e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|}.\tag{4.25}$$

De plus pour $a\in\Lambda_{k_1\ell}(0)$ et $b\in\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0)$, on a

$$\begin{aligned}|G_{\Lambda_{k_p\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}|&\leq e^{L^\beta}e^{-m_0|a-b|}\\&\leq e^{L^\beta}e^{-m_0(|a-B^{+}_{k_p\ell}(0)|+|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|-2)}\\&\leq e^{L^\beta}e^{2m_0}e^{-m_0(p-1)\frac{\ell}{2}}e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|},\end{aligned}$$

puis, comme $m_0-m'_\ell\geq\varepsilon m_0$ et $p\geq2$,

$$|G_{\Lambda_{k_p\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}|\leq(e^{L^\beta}e^{2m_0}e^{-m_0\varepsilon\frac{\ell}{2}})e^{-m'_\ell(p-1)\frac{\ell}{2}}e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|},$$

donc, si ℓ assez grand pour que $e^{L^\beta}e^{2m_0}e^{-m_0\varepsilon\frac{\ell}{2}}\leq1$

$$|G_{\Lambda_{k_p\ell}(0)}(E;0,a)||\gamma_{a,b}|\leq e^{-m'_\ell(p-1)\frac{\ell}{2}}e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|}.\tag{4.26}$$

Alors par (4.23),

$$(4.27) \qquad |G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)| \leq \sum_{j=1}^{p-1}(2C_d L^d e^{m_0} e^{L^\beta})^{2j} e^{2m_0} L^d e^{-m'_\ell (p-1)\frac{\ell}{2}} \cdot \left(\sum_{\substack{k\geq 0 \\ b\in\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0)}} e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|} |G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;b,y)| \right).$$

Comme au rang 1 de la récurrence, on utilise le lemme 4.2 pour majorer ce dernier terme, à savoir

$$\sum_{b\in\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0)} e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|} |G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;b,y)|$$
$$\leq 2\left(\sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0) \\ \frac{\ell}{2}\geq|b-y|\geq\varepsilon\frac{\ell}{2}}} e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|} C_d^2 e^{-m'_\ell|y-b|} + \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0) \\ \varepsilon\frac{\ell}{2}>|b-y|}} e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|} C_d^2 e^{L^\beta} + \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0) \\ \frac{\ell}{2}<|b-y|}} e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|} C_d^2 e^{-m'_\ell\frac{\ell}{2}} \right)$$

donc

$$(4.28) \qquad \sum_{b\in\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0)} e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|} |G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;b,y)| \leq 2(C_d)^3 L^d e^{-m_0 k} e^{-m'_\ell\frac{\ell}{2}} + 2C_d^2(\Sigma'_1(k)+\Sigma'_2(k)),$$

où

$$(4.29) \qquad \Sigma'_1(k) = \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0) \\ \varepsilon\frac{\ell}{2}>|b-y|}} e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|} e^{L^\beta} \leq \mathbf{1}_{\{||k-|y|+\frac{k_p\ell}{2}|\leq\varepsilon\frac{\ell}{2}\}}(k) e^{L^\beta} C_d L^d e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2})}$$

et

$$(4.30) \qquad \Sigma'_2(k) = \sum_{\substack{b\in\partial\Lambda^{0,+}_{k_p\ell}(0) \\ \frac{\ell}{2}\geq|b-y|\geq\varepsilon\frac{\ell}{2}}} e^{-m_0|b-\Lambda_{k_p\ell}(0)|} e^{-m_\ell|y-b|} \leq \mathbf{1}_{\{||k-|y|+\frac{k_p\ell}{2}|\leq\frac{\ell}{2}\}}(k) e^{L^\beta} C_d L^d e^{-m_\ell|y-a|} e^{-m_0|y-\Lambda_{k_p}\ell(0)|}.$$

Par conséquent, en remplaçant (4.29)-(4.30) dans (4.28) puis dans (4.27), on obtient

$$|G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)| \leq \left(\frac{(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^{2p}-1}{(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^2-1}\right)2C_d^2e^{2m_0}L^de^{-m'_\ell(p-1)\frac{\ell}{2}}$$
$$\cdot\Bigg(\sum_{k\geq 0}C_dL^de^{-m_0k}e^{-m'_\ell\frac{\ell}{2}}+\sum_{k=|y|-(k_p+\varepsilon)\frac{\ell}{2}}^{k=|y|-(k_p-\varepsilon)\frac{\ell}{2}}C_dL^de^{L^\beta}e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2})}$$
$$+\sum_{k=|y|-(k_p+1)\frac{\ell}{2}}^{k=|y|-(k_p-1)\frac{\ell}{2}}C_dL^de^{L^\beta}e^{-m_0|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|}\Bigg),$$

c'est-à-dire,

$$|G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)|\leq\left(\frac{(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^{2p}-1}{(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^2-1}\right)2C_d^2e^{2m_0}L^de^{-m'_\ell(p-1)\frac{1}{2}}$$
$$\cdot(C_d^2L^de^{-m'_\ell\frac{\ell}{2}}+C_dL^{d+1}e^{L^\beta}e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2})}$$
$$+C_dL^{d+1}e^{L^\beta}e^{-m_0|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|}),$$

soit encore,

$$\begin{aligned}(4.31)\qquad &|G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)|\cdot(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^{-2p}e^{m'_\ell(p-1)\frac{\ell}{2}}\\ &\leq\Bigg(\left(\frac{2C_d^4L^{2d}e^{2m_0}}{(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^2-1}\right)e^{-m'_\ell\frac{\ell}{2}}\\ &\quad+\left(\frac{2C_d^3L^{2d}e^{2m_0}}{(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^2-1}\right)\\ &\quad(e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|-\varepsilon\frac{1}{2})}+e^{-m_0|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|})\Bigg).\end{aligned}$$

Donc si ℓ assez grand pour que

$$\left(\frac{C_dL^{2d}e^{2m_0}}{(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^2-1}\right)\leq\frac{1}{3}\text{ et }\left(\frac{3C_d^4L^{2d}e^{2m_0}}{(2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^2-1}\right)\leq\frac{1}{3},$$

on a

$$\begin{aligned}(4.32)\quad |G_{\Lambda_{k'\ell}(0)}(E;0,y)| &\leq (2C_dL^de^{m_0}e^{L^\beta})^{2p}e^{-m'_\ell(p-1)\frac{\ell}{2}}\\ &\cdot\left(\frac{1}{3}e^{-m'_\ell\frac{\ell}{2}}+\frac{1}{3}e^{-m_0|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|}+\frac{1}{3}e^{-m_0(|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|-\varepsilon\frac{\ell}{2})}\right).\end{aligned}$$

Ceci nous donne le résultat escompté si $|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|\geq\varepsilon\frac{\ell}{2}$.

Si $|y-\Lambda_{k_p\ell}(0)|<\varepsilon\frac{\ell}{2}$, on utilise (4.27) et le fait que $\Lambda_{k'\ell}(0)$ est (E,β)-N.R pour obtenir la majoration annoncée. On achève par récurrence la démonstration du lemme 4.1. □

Du lemme 4.1, on tire immédiatement, que pour $0 < \delta < 1 - \alpha\beta$, il existe ℓ_0 tel que si $\ell \geq \ell_0$, pour tout $1 \leq j \leq |K|$, pour tout $y \in B^+_{(k_j+1)\ell}(0)$ et tout $k \geq k_j + 1$

$$|G_{\Lambda_{k\ell}(0)}(E;0,y)| \leq e^{-m'_L \frac{\ell}{2} j} \tag{4.33}$$

où $m'_L = m_\ell - \dfrac{m_0+1}{2}\ell^{-\delta} - 4m_0\ell^{-1}$.

Pour en déduire un résultat sur $G_{\Lambda_L(0)}$, nous allons à nouveau nous servir de la formule de résolvante. Adoptons d'abord les conventions suivantes $\Lambda_{(k_0+1)\ell}(0) = \emptyset$ et $\Lambda_{(k_{|K|+1}+1)\ell}(0) = \Lambda_L(0)$, alors

$$\Lambda_L(0) = \bigcup_{p=0}^{|K|} (\Lambda_{(k_{p+1}+1)\ell}(0) \setminus \Lambda_{(k_p+1)\ell}(0)). \tag{4.34}$$

Pour $p \geq 2$ et $y \in \Lambda_{(k_{p+1}+1)\ell}(0) \setminus \Lambda_{(k_p+1)\ell}(0)$, la formule de résolvante nous dit

$$\begin{aligned} &|G_{\Lambda_L(0)}(E;0,y)| \\ &\leq \Big\{\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{a\in\Lambda_{(k_{j+1}+1)\ell}(0)\setminus\Lambda_{(k_j+1)\ell}(0)} (|G_{\Lambda_{(k_p+1)\ell}}(0)(E;0,y)|e^{-m_0|a-B^+_{(k_p+1)\ell}(0)|})\Big\} \\ &\qquad \cdot e^{m_0}\Big\{\sum_{k\geq 0} \sum_{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{(k_p+1)\ell}(0)\cap\Lambda_L(0)} e^{-m_0|b-\Lambda_{(k_p+1)\ell}(0)|}e^{L^\beta}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Le second facteur est majoré comme suit,

$$\begin{aligned} &\sum_{k\geq 0} \sum_{b\in\partial\Lambda^{k,+}_{(k_p+1)\ell}(0)\cap\Lambda_L(0)} e^{-m_0|b-\Lambda_{(k_p+1)\ell}(0)|}e^{L^\beta} \\ &\qquad \leq \sum_{k\geq 0} C_d((k_p+1)\frac{\ell}{2}+1+k)^{d-1}e^{-m_0 k}e^{L^\beta} \leq C_d^2 e^{L^\beta}L^d. \end{aligned}$$

Pour majorer le premier facteur de membre de droite de l'inégalité (4.35), on remarque que, si $a \in \Lambda_{(k_{j+1}+1)\ell}(0) \setminus \Lambda_{(k_j+1)\ell}(0)$, alors on a $|a - B^+_{(k_p+1)\ell}(0)| \geq (p-j-1)\frac{\ell}{2}$, et que pour $a \in \Lambda_{(k_1+1)\ell}(0)$, on a $|G_{\Lambda_{(k_p+1)\ell}(0)}(E;0,a)| \leq e^{L^\beta}$; ainsi par (4.33), on obtient

$$\begin{aligned} |G_{\Lambda_L(0)}(E;0,y)| &\leq e^{m_0}e^{L^\beta}C_d^2L^d\Bigg(e^{L^\beta}e^{-m_0(p-1)\frac{\ell}{2}} \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{p-1} C_d L^d e^{-m'_L j\frac{\ell}{2}}e^{-m_0(p-j-1)\frac{\ell}{2}}\Bigg) \\ &\leq 2e^{m_0}e^{2L^\beta}C_d^2 e^{-m'_L(p-1)\frac{\ell}{2}}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Donc, pour $0 < \delta < 1 - \alpha\beta$, ℓ assez grand, pour $2 \leq p \leq |K|$ et $y \in \Lambda_{(k_{p+1}+1)\ell}(0) \setminus \Lambda_{(k_p+1)\ell}(0)$, on a

$$|G_{\Lambda_L(0)}(E;0,y)| \leq e^{-m''_L(p-1)\frac{\ell}{2}} \tag{4.37}$$

avec $m''_L = m_\ell - \dfrac{m_0+1}{2}\ell^{-\delta} - 6m_0\ell^{-1}$. Or si $y \in \Lambda_{(k_{p+1}+1)\ell}(0) \setminus \Lambda_{(k_p+1)\ell}(0)$, on a

$$\frac{(k_p+1)\ell}{2} \leq |y| \leq \frac{(k_{p+1}+1)\ell}{2}$$

c'est-à-dire, par (4.2)

$$\frac{2|y|}{\ell} - 8D - 5 \leq p - 1 \leq \frac{2|y|}{\ell} + 8D$$

soit encore pour $\varepsilon\frac{L}{2} \leq |y| \leq \frac{L}{2}$

$$1 - \frac{8D+5}{\varepsilon\ell^{\alpha-1}} \leq \frac{(p-1)\frac{\ell}{2}}{|y|} \leq 1 + \frac{8D}{\varepsilon\ell^{\alpha-1}}.$$

Donc par (4.37), on a, pour $0 < \delta < \inf(1 - \alpha\beta, \alpha - 1)$, il existe ℓ_0 tel que si $\ell \geq \ell_0$ et $\varepsilon\frac{L}{2} \leq |y| \leq \frac{L}{2}$,

$$|G_{\Lambda_L(0)}(E;0,y)| \leq e^{-m'''_L|y|} \tag{4.38}$$

avec $m'''_L = m_\ell - (\frac{1}{2} + m_0)\ell^{-\delta}$.

Vérifions maintenant le critère de $(E, m_L, \beta, \varepsilon)$-régularité. Choisissons $m_L = m'''_L - \frac{1}{2}\ell^{-\delta}$. On a

$$\sum_{\varepsilon\frac{L}{2} \leq |y| \leq \frac{L}{2}} |G_{\Lambda_L(0)}(E;0,y)| e^{m_L|y|} \leq \sum_{\varepsilon\frac{L}{2} \leq |y| \leq \frac{L}{2}} e^{-(m'''_L - m_L)|y|} \leq C_d L^d e^{-\frac{\varepsilon}{4}\ell^{\alpha-\delta}},$$

ainsi, comme $\alpha > 1 > \delta$, si ℓ est suffisamment grand,

$$\sum_{\varepsilon\frac{L}{2} \leq |y| \leq \frac{L}{2}} |G_{\Lambda_L(0)}(E;0,y)| e^{m_L|y|} \leq \sum_{\varepsilon\frac{L}{2} \leq |y| \leq \frac{L}{2}} e^{-(m'''_L - m_L)|y|} \leq 1.$$

Ceci achève la preuve du lemme 2.3. □

5. PREUVE DU LEMME 2.5

L'idée directrice de cette démonstration est la même que celle de la démonstration du lemme 3.1 de [vDK1]. Par contre, la technique utilisée par von Dreyfus et Klein ne peut être employée dans notre cas.

Soit $f > e > 1 + \varepsilon$ que nous choisirons ultérieurement. Posons pour $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ et $n \geq 0$,

$$A_{n+1}(x_0) = \Lambda_{2fL_{n+1}}(x_0) \setminus \widetilde{\Lambda}_{2eL_n}(x_0)$$

où $\widetilde{\Lambda}_L(x) = \left\{ y \in \mathbb{Z}^d;\ |y - x| < \frac{L}{2} \right\}$.

On définit $E_n(x_0)$, l'événement,

$$E_n(x_0) = \left\{ \exists E \in I \text{ et } x \in A_{n+1}(x_0); \right.$$
$$\left. \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{L_n}(x) \text{ et} \\ \Lambda_{L_n}(x_0) \end{array} \right\} \text{ ne sont pas } (E, m, \beta, \varepsilon)\text{-réguliers} \right\}.$$

Par l'hypothèse du lemme 2.5,

$$\mathrm{P}(E_n(x_0)) \leq \frac{(2fL_{n+1})^d}{L_n^p} \leq (2f)^d L_n^{-(p-\alpha d)},$$

comme on a supposé $p - \alpha d > 0$, on a

$$\sum_{n \geq 0} \mathrm{P}(E_n(x_0)) < +\infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli nous dit alors

$$\mathrm{P}(\{\text{il existe une infinité de } n \text{ pour lequel } E_n(x_0) \text{ a lieu}\}) = 0,$$

soit encore

$$\mathrm{P}(\{\text{il existe } x_0 \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } E_n(x_0) \text{ a lieu pour une infinité de } n\ \}) = 0.$$

Notons alors Ω_0, l'événement,

$$\Omega_0 = \{\forall x_0 \in \mathbb{Z}^d,\ E_n(x_0) \text{ n'a lieu que pour un nombre fini de } n\},$$

on a $\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$.

Soit $(t_x)_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega_0$, une configuration de "potentiels" et $E \in I$, une valeur propre généralisée de $\mathcal{H}(t)$ associée à $\varphi \neq 0$, vecteur propre généralisé. Soit $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Supposons que $\Lambda_{L_n}(x_0)$ est régulier. Alors en multipliant (4.2) à gauche par $G_{\Lambda_{L_n}(x_0)}(E)$, on obtient

$$G_{\Lambda_{L_n}(x_0)}(E)(\mathcal{H}(t) - E) = \mathrm{Id}_{\Lambda_{L_n}(x_0)} + \sum_{k \geq 0} G_{\Lambda_{L_n}(x_0)}(E) \Gamma^k_{\Lambda_{L_n}(x_0), \mathbb{Z}^d}$$

(on a pris $\Lambda' = \mathbb{Z}^d$ dans (4.2)).

En appliquant cette identité à φ, cela donne

$$(5.1) \qquad |\varphi(x_0)| \leq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ b \in \partial \Lambda^{k,+}_{L_n}(x_0) \\ a \in \Lambda_{L_n}(x_0)}} |G_{\Lambda_{L_n}(x_0)}(E; x_0, a)| |\gamma_{a,b}| |\varphi(b)|.$$

Comme $\Lambda_{L_n}(x_0)$ est (E,m,β,ε)-régulier (avec $m \leq m_0$) et que φ est polynomialement bornée, on a

$$(5.2)\quad |\varphi(x_0)| \leq \sum_{\substack{k\geq 0\\ b\in\partial\Lambda^{k,+}_{L_n}(x_0)}} \Bigg(\sum_{\varepsilon\frac{L_n}{2}\leq|a-x_0|\leq\frac{L_n}{2}} (|G_{\Lambda_{L_n}(x_0)}(E;x_0,a)|e^{m|a-x_0|}) \, e^{-m|a-x_0|}e^{-m_0|a-b|}C(1+|b|)^\eta + \sum_{\varepsilon\frac{L_n}{2}>|a-x_0|} e^{L_n^\beta}e^{-m_0|a-b|}C(1+|b|)^\eta \Bigg)$$
$$\leq C(1+|L_n|)^{\eta+2d}e^{L_n^\beta}e^{-m\frac{L_n}{2}}.$$

Comme $|\varphi(x_0)|>0$, il existe $n_1>0$ tel que, pour $n\geq n_1$, $\Lambda_{L_n}(x_0)$ n'est pas régulier; comme $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}\in\Omega_0$, il existe $n_2>0$ tel que si $n\geq n_2$, $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}\notin E_n(x_0)$; ainsi, si $n\geq\sup(n_1,n_2)$, on sait que $\Lambda_{L_n}(x)$ est régulier pour tout x dans $A_{n+1}(x_0)$. On montre alors le

LEMME 5.1. — *Il existe $n_0\geq\sup(n_1,n_2)$ tel que, pour $n\geq n_0$ et pour j entier et $1\leq j\leq f(L_n^{\alpha-1}-1)$, on a, pour $x\in\Lambda_{2fL_{n+1}-jL_n}(x_0)\setminus\widetilde{\Lambda}_{2eL_n+jL_n}(x_0)\subset A_{n+1}(x_0)$,*
$$|\varphi(x)|\leq(2e^m e^{2L_n^\beta})^{j+1}e^{-mj\frac{L_n}{2}-m\inf(\frac{L_n}{2},|x-\Lambda_{(2e+j)L_n}(x_0)|,|x-B^+_{2fL_{n+1}-jL_n}(x_0)|)}.$$

Remarque. — Au rang n, on ne sait rien au sujet de la résolvante $G_{\Lambda_{L_n}(x)}(E)$ pour x hors de $A_{n+1}(x_0)$. Le lemme nous dit que plus on s'éloigne de cette zone (i.e j croît), mieux on connait le comportement de la résolvante, et par conséquent, par (5.1), mieux on contrôle la décroissance de φ.

Preuve. — La preuve de ce lemme sera faite par récurrence sur j. Pour $j=0$, on se sert simplement du fait que $\Lambda_{L_n}(x)$ est (E,m,β,ε)-régulier et de (5.2) pour n suffisamment grand. Supposons la propriété vraie du rang 0 au rang $p-1$. Soit $x\in\Lambda_{2fL_{n+1}-pL_n}(x_0)\setminus\widetilde{\Lambda}_{2eL_n+pL_n}(x_0)$. On a

$$(5.3)\qquad |\varphi(x)|\leq\sum_{\substack{k\geq 0\\ b\in\partial\Lambda^{k,+}_{L_n}(x)}}\Sigma(b)|\varphi(b)|$$

avec, comme $\Lambda_{L_n}(x)$ est (E,m,β,ε)-régulier (avec $m\leq m_0$),

$$(5.4)\qquad \Sigma(b)=\sum_{a\in\Lambda_{L_n}(x)}|G_{\Lambda_{L_n}(x)}(E;x,a)||\gamma_{a,b}|$$
$$\leq C_d(1+|L_n|)^d e^{L_n^\beta}e^{-m|b-x|}\leq e^{2L_n^\beta}e^{-m|b-x|},$$

pour n assez grand.

Or, pour $b \in \partial\Lambda_{L_n}^{k,+}(x)$,
$$\frac{L_n}{2}+k \leq |b-x| \leq \frac{L_n}{2}+k+1$$
donc
$$|x-x_0|-\frac{L_n}{2}-k-1 \leq |b-x_0| \leq |x-x_0|+\frac{L_n}{2}+k+1,$$
ce qui nous donne,
$$-\frac{L_n}{2}-k-1 \leq |b-x_0|-(|x-\Lambda_{2eL_n+pL_n}(x_0)|+\Big(e+\frac{p}{2}\Big)L_n) \leq \frac{L_n}{2}+k+1.$$
On en déduit
$$\partial\Lambda_{L_n}^{k,+}(x) \subset \Lambda_{2(|x-\Lambda_{2eL_n+pL_n}(x_0)|+k+1)+(2e+p+1)L_n}(x_0) \setminus \widetilde{\Lambda}_{2(|x-\Lambda_{2eL_n+pL_n}(x_0)|-k-1)+(2e+p-1)L_n}(x_0).$$
De même,
$$\partial\Lambda_{L_n}^{k,+}(x) \subset \Lambda_{2fL_{n+1}-(p-1)L_n+2(k+1)-2|x-B^+_{2fL_{n+1}-pL_n}(x_0)|}(x_0) \setminus \widetilde{\Lambda}_{2fL_{n+1}-(p+1)L_n-2(k+1)-2|x-B^+_{2fL_{n+1}-pL_n}(x_0)|}(x_0).$$

Soient maintenant $x \in \Lambda_{2fL_{n+1}-(p+1)L_n}(x_0) \setminus \widetilde{\Lambda}_{2eL_n+(p+1)L_n}(x_0)$ et k, un entier tel que $j\dfrac{L_n}{2}-1 \leq k \leq (j+1)\dfrac{L_n}{2}-1$ (pour $0 \leq j \leq p-1$). D'après nos calculs précédents,
$$\partial\Lambda_{L_n}^{k,+}(x) \subset \Lambda_{2fL_{n+1}-(p-j-1)L_n}(x_0) \setminus \widetilde{\Lambda}_{(2e+p-j-1)L_n}(x_0).$$
En outre, pour $b \in \partial\Lambda_{L_n}^{k,+}(x)$, par l'hypothèse de récurrence,
$$|\varphi(b)| \leq (2e^m e^{L_n^\beta})^{p-j} e^{-m(p-j-1)\frac{L_n}{2}} \cdot \begin{cases} e^{-m\frac{L_n}{2}} \\ \quad \text{si } b \in \Lambda_{2fL_{n+1}-(p-j)L_n}(x_0) \setminus \widetilde{\Lambda}_{(2e+p-j)L_n}(x_0) \\ e^{-m|b-\Lambda_{(2e+p-j-1)L_n}(x_0)|} \\ \quad \text{si } b \in \Lambda_{(2e+p-j)L_n}(x_0) \\ e^{-m|b-B^+_{2fL_{n+1}-(p-j-1)L_n}(x_0)|} \\ \quad \text{si } b \in B^+_{2fL_{n+1}-(p-j)L_n}(x_0). \end{cases} \tag{5.5}$$
En reportant cela dans (5.4) et (5.3), on obtient
$$|\varphi(x)| \leq \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=j\frac{L_n}{2}-1}^{(j+1)\frac{L_n}{2}-1} \sum_{b\in\partial\Lambda_{L_n}^{k,+}(x)} 2e^{2L_n^\beta} e^{-m|b-x|}|\varphi(b)| + \sum_{k\geq p\frac{L_n}{2}-1} \sum_{b\in\partial\Lambda_{L_n}^{k,+}(x)} 2e^{2L_n^\beta} e^{-m|b-x|}|\varphi(b)|. \tag{5.6}$$

En outre, pour $0 \leq j \leq p-1$, $j\frac{L_n}{2}-1 \leq k \leq (j+1)\frac{L_n}{2}-1$ et $b \in \partial\Lambda^{k,+}_{L_n}(x)$, on a

$$|x-b|+|b-\Lambda_{(2e+p-j-1)L_n}(x_0)| \geq (j+2)\frac{L_n}{2}-2$$

et

$$|x-b|+|b-B^+_{2fL_{n+1}-(p-j-1)L_n}(x_0)| \geq (j+2)\frac{L_n}{2}-2.$$

Ainsi, l'inégalité (5.6) devient

$$\begin{aligned}|\varphi(x)| \leq \sum_{j=0}^{p-1}&(2e^m e^{2L_n^\beta})^{p-j+1}C_d^2(L_n(j+2))^{\eta+d}\\ &\cdot L_n e^{-m(p-j-1)\frac{L_n}{2}}e^{-m((j+2)\frac{L_n}{2}}e^{-m((j+2)\frac{L_n}{2}-2)}\\ &+\sum_{k\geq p\frac{L_n}{2}-1} e^{-m(p+1)\frac{L_n}{2}}e^{L_n^\beta}C_d(p\frac{L_n}{2}+k)^{\eta+d}e^{-mk}\\ \leq e^{-m(p+1)\frac{L_n}{2}}&\left(C_d^2L_n^{2(\eta+d)}e^{2m}\frac{(2e^m e^{2L_n^\beta})^p-1}{2e^m e^{2L_n^\beta}-1}4e^{4L_n^\beta}+C_d^2L_n^{2(\eta+d)}e^{L_n^\beta}\right)\end{aligned}$$

donc, si n suffisamment grand pour que $\frac{C_d^2L_n^{2(\eta+d)}}{2e^m e^{2L_n^\beta}-1} \leq \frac{1}{2}$, on a

$$|\varphi(x)| \leq (2e^m e^{2L_n^\beta})^{p+2}e^{-m(p+1)\frac{L_n}{2}},$$

ce qui est le résultat annoncé si $x \in \Lambda_{2fL_{n+1}-(p+1)L_n}(x_0)\setminus\widetilde{\Lambda}_{2eL_n+(p+1)L_n}(x_0)$.

L'estimation (5.5) reste valide pour

$$x \in \Lambda_{2eL_n+(p+1)L_n}(x_0) \setminus \Lambda_{2eL_n+pL_n}(x_0)$$

ou

$$x \in \Lambda_{2fL_{n+1}-pL_n}(x_0) \setminus \Lambda_{2fL_{n+1}-(p+1)L_n}(x_0).$$

Pour évaluer (5.6), on se sert de

$$|x-b|+|b-\Lambda_{(2e+p-j-1)L_n}(x_0)| \geq (j+1)\frac{L_n}{2}+|x-\Lambda_{(2e+p)L_n}(x_0)|-2,$$

et

$$|x-b|+|b-B^+_{2fL_{n+1}-(p-j-1)L_n}(x_0)| \geq (j+1)\frac{L_n}{2}+|b-B^+_{2fL_{n+1}-pL_n}(x_0)|-2,$$

et on achève ainsi la preuve du lemme 5.1. □

Pour déduire de ce lemme la décroissance voulue sur φ, on va construire $B_n \subset A_{n+1}$ tel que la réunion des B_n, pour n assez grand, recouvre un voisinage de l'infini et que sur chaque B_n, le lemme 5.1 nous donne une estimation précise sur la taille φ.

Posons

$$m' = m - 2\sum_{n\geq n_0} \frac{2\log 2 + 2L_n^{\beta} + 2m}{L_n} \geq m\Big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

pour n_0 suffisamment grand (dépendant de ε).

Pour $n \geq n_0$ et pour j entier tel que $1 \leq j \leq f(L_n^{\alpha-1} - 1)$, par le lemme 5.1, on a, pour $x \in \Lambda_{(2e+j+1)L_n}(x_0) \setminus \widetilde{\Lambda}_{(2e+j)L_n}(x_0)$,

$$|\varphi(x)| \leq e^{-m' j \frac{L_n}{2}}. \tag{5.7}$$

En outre, si $x \in \Lambda_{(2e+j+1)L_n}(x_0) \setminus \widetilde{\Lambda}_{(2e+j)L_n}(x_0)$, alors

$$1 + \frac{2e}{j} \leq |x - x_0|\frac{2}{jL_n} \leq 1 + \frac{2e+1}{j}.$$

Ainsi, il existe $C > 1$ tel que si $C \leq j \leq f(L_n^{\alpha-1} - 1)$ et $x \in \Lambda_{(2e+j+1)L_n}(x_0) \setminus \widetilde{\Lambda}_{(2e+j)L_n}(x_0)$

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{jL_n}{2}|x - x_0|^{-1}.$$

Par conséquent et par (5.7), pour

$$(2e + C)\frac{L_n}{2} \leq |x - x_0| \leq f\frac{L_{n+1}}{2} + (2e + 1 - f)\frac{L_n}{2},$$

on a

$$|\varphi(x)| \leq e^{-m'(1-\frac{\varepsilon}{2})|x-x_0|} \leq e^{-m(1-\varepsilon)|x-x_0|}. \tag{5.8}$$

Il suffit alors de choisir $f \geq 2e + C + 1$ et n_0 tel que $L_{n_0}^{\alpha-1} \geq f - 2e - 1$, pour constater que

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{n\geq n_0} \Big\{x \in \mathbb{Z}^d;\ (2e + C)\frac{L_n}{2} \leq |x - x_0| \leq f\frac{L_{n+1}}{2} + (2e + 1 - f)\frac{L_n}{2}\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{Z}^d;\ |x - x_0| \geq (2e + C)\frac{L_{n_0}}{2}\Big\} \end{aligned}$$

et que pour tout x dans A, on a (5.8) ce qui achève la preuve du lemme 2.5.

6. APPENDICE

A. Preuve du théorème 1.2.

La preuve du théorème 1.2 suit celle du théorème 1.3 de [Kl]. On n'indiquera que les modifications à apporter à celle-ci. On définit

$$P_{t,\gamma} = P + t_\gamma \delta V_\gamma. \tag{A.1}$$

Le lemme 3.1 de [Kl] s'applique à $P_{t,\gamma}$ uniformément en γ. De plus, on montre que la proposition 3.2 a lieu pour P_t et $P_{t,\gamma}$ (uniformément en γ). Pour z tel que $d(z,[i_h,s_h]) = 2a(h)$ et $t \in [D(0,2a(h))]^L$, on sait que $t \mapsto (z-P_t)^{-1}$ est analytique en t (i.e $\mathbb{C}$-différentiable de $[D(0,2a(h))]^L$ dans $\mathcal{B}(\ell^2(L))$) (uniformément en z). Ceci est donc encore vrai pour l'application $t \mapsto \Pi_t$. En définissant alors, à l'instar de [Kl],

$$\psi_{t,\gamma} = \|\Pi_t\Pi_0\varphi_\gamma\|\Pi_t\Pi_0\varphi_\gamma$$

et $\mathcal{V}_t$, la matrice de Gram des $\psi_{t,\gamma}$, on montre que (voir lemme 4.2 de [Kl])

$$\partial_{t_\gamma}\mathcal{V}_t = \mathcal{O}\Big(\frac{1-\varepsilon}{h}d_\gamma(\alpha,\beta)\Big), \tag{A.2}$$

que $t \mapsto \mathcal{V}_t$ est analytique en t et, en utilisant le lemme de Schur, que

$$\mathcal{V}_t = I + \mathcal{K}_t \tag{A.3}$$

avec

$$\sup_{t\in[D(0,2a(h))]^L} \|\mathcal{K}_t\| \leq e^{-\frac{1}{Ch}} \tag{A.4}$$

pour un certain $C > 0$.

On définit $(\varphi_{t,\gamma})_{\gamma\in L} = (\psi_{t,\gamma})_{\gamma\in L})(\mathcal{V}_t)^{-\frac{1}{2}}$; on montre que c'est une base hilbertienne de F_t (voir la proposition 4.1 de [Kl]). Le point 1) du théorème 1.2 est ainsi une conséquence de (5.1) de [Ca], et, de (4.28) et de la proposition 3.2 de [K]. Pour prouver le reste du théorème 1.2, on remarque que la matrice de P_t dans la base $(\varphi_{t,\gamma})_{\gamma\in L}$, notée $\mathcal{H}(t)$, est analytique en t dans $[D(0,2a(h))]^L$. On définit $\mathcal{D}_b(t)$ comme la matrice diagonale ayant pour éléments la suite $(\mu(t_\gamma)-\mu(h))_{\gamma\in L}$ où $\mu(t_\gamma)$ est la première valeur propre de $P_{t,\gamma}$ et $\mu(h)$ est définie par (H.3) de [Kl] (le point 2) c) en découle immédiatement). L'application $t \mapsto \mathcal{D}_b(t)$ est analytique en t; par conséquent , il en est de même pour $t \mapsto \mathcal{M}(t) = \mathcal{H}(t) - \mu(h) - \mathcal{D}_b(t)$.

On suit la démarche de la section 5 de [Kl], pour obtenir que

$$\partial_{t_\gamma}\mathcal{H}(t) = \partial_{t_\gamma}\mu(t_\gamma) + \mathcal{O}\Big(\frac{1-\varepsilon}{h}d_\gamma(\alpha,\beta)\Big), \tag{A.5}$$

ce qui permet de conclure les estimées b). □

B. Preuve du lemme 1.10.

Les points a) et c) du lemme sont des conséquences immédiates du théorème 1.2 et de la définition de ν_0. Le point d) découle de la définition des $(\tilde{t}_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ et du fait que les $(t_\gamma)_{\gamma\in L}$ ont été choisies i.i.d.

La propriété de découplage pour $\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t})$ est une conséquence des estimées b) **) du théorème 1.2 données pour $\partial_{t_x}\mathcal{M}(t)$. Soient $\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$ et $\Lambda \neq \Lambda'$. Par (1.5), on a

$$\mathcal{M}_{\Lambda,\Lambda',0}(t) - \mathcal{M}_\Lambda(t) = \sum_{x \notin \Lambda'} t_x \int_0^1 \partial_{t_x}\mathcal{M}_\Lambda(u\Pi_{\Lambda'}(t))du. \tag{A.6}$$

Or, par le lemme de Schur et l'estimée (1.8), pour $x \notin \Lambda$ et pour tout t,

$$\|\partial_{t_x}\mathcal{M}_\Lambda(t)\| \leq \sup_{y\in\Lambda}\left(e^{-\frac{a_0}{h}|x-y|}\right)\cdot\left(\sum_{z\in\Lambda} e^{-\frac{a_0}{h}|x-z|}\right) \leq Ce^{-2\frac{a_0}{h}\inf_{y\in\Lambda}|x-y|}$$

pour un certain $C > 0$ uniforme pour h assez petit.

Ainsi, par (A.6), pour h assez petit,

$$\sup_t \|\mathcal{M}_{\Lambda,\Lambda',0}(t) - \mathcal{M}_\Lambda(t)\| \leq e^{-\frac{a_0}{2h}} e^{-\frac{a_0}{h}\inf_{x\in\Lambda, y\notin\Lambda'}|x-y|}.$$

Par définition,

$$\begin{aligned}\sup_{\tilde{t}} \|\widetilde{\mathcal{M}}_{\Lambda,\Lambda',0}(\tilde{t}) - \widetilde{\mathcal{M}}_\Lambda(\tilde{t})\| &= e^{\frac{\nu_0}{h}} \sup_t \|\mathcal{M}_{\Lambda,\Lambda',0}(t) - \mathcal{M}_\Lambda(t)\| \\ &\leq e^{-\frac{\nu_0}{h}\inf_{x\in\Lambda, y\notin\Lambda'}|x-y|}\end{aligned}$$

qui donne l'estimée recherchée si on tient compte de la remarque qui suit la définition 1.3.

Il nous reste à montrer que $\widetilde{\mathcal{H}}(\tilde{t})$ vérifie une estimée de Wegner de type $(2, \rho_0, 1)$. D'après (1.15), on a,

$$\partial_{\tilde{t}_x}\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t}) = \frac{1}{b'\left(b^{-1}(e^{-\frac{\nu_0}{h}}\tilde{t}_x)\right)}\partial_{t_x}\mathcal{M}\left(\left(b^{-1}(e^{-\frac{\nu_0}{h}}\tilde{t})\right)\right). \tag{A.7}$$

Par l'étude faite dans la section 3 de [Kl], on sait qu'il existe $C > 0$ tel que, pour h assez petit et $u \in [-2a(h), 2a(h)]$, on a $\frac{1}{C} \leq b'(u) \leq C$. Donc, par (A.7) et (1.8), pour h assez petit, les coefficients de $\partial_{\tilde{t}_x}\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t})$ vérifient

$$\sup_{\tilde{t}} |\partial_{\tilde{t}_x}\tilde{m}_{y,z}(\tilde{t})| \leq \begin{cases} e^{-\frac{\nu_0}{h}(|x-y|_L + |x-z|_L)} & \text{si } (y,z) \neq (x,x) \\ e^{-\frac{\nu_0}{h}} & \text{si } (y,z) = (x,x). \end{cases}$$

On en déduit que, pour h assez petit et tout Λ cube fini de $\mathbb{Z}^d$,

$$\|\sum_{x\in\Lambda}\partial_{\tilde{t}_x}\widetilde{\mathcal{M}}_\Lambda(\tilde{t})\| \leq e^{-\frac{\nu_0}{2h}},$$

donc, pour h assez petit,

$$\sum_{x\in\Lambda}\partial_{\tilde{t}_x}\widetilde{\mathcal{H}}_\Lambda(\tilde{t}) = \mathrm{Id}_\Lambda + \sum_{x\in\Lambda}\partial_{\tilde{t}_x}\widetilde{\mathcal{M}}_\Lambda(\tilde{t}) \geq \frac{1}{2}\mathrm{Id}_\Lambda\,. \tag{A.8}$$

Notons $(\mu_x(\tilde{t}))_{x\in\Lambda}$, les valeurs propres de $\widetilde{\mathcal{H}}_\Lambda(\tilde{t})$. Soit $0\leq\varepsilon\leq 1$. On définit le vecteur $\varepsilon_\Lambda=(\varepsilon\delta_\Lambda(x))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ où δ_Λ est la fonction caractéristique de Λ. Par le principe du Min-Max et par (A.8), on a, pour $x\in\Lambda$

$$\mu_x(\tilde{t})+\frac{1}{2}\varepsilon\leq\mu_x(\tilde{t}+\varepsilon_\Lambda)\text{ et }\mu_x(\tilde{t})-\frac{1}{2}\varepsilon\geq\mu_x(\tilde{t}-\varepsilon_\Lambda).\tag{A.9}$$

Soit $E\in\mathbb{R}$. Notons $N(E,\tilde{t})=|\{x\in\Lambda;\ \mu_x(\tilde{t})\leq E\}|$. Alors, par (A.9),

$$N(E+\varepsilon,\tilde{t})-N(E-\varepsilon,\tilde{t})\leq N(E,\tilde{t}-2\varepsilon_\Lambda)-N(E,\tilde{t}+2\varepsilon_\Lambda).\tag{A.10}$$

D'après Wegner [We] (voir aussi [FS]), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\{d(E,\sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_\Lambda(\tilde{t})))\leq\varepsilon\})&\leq\int(N(E+\varepsilon,\tilde{t})-N(E-\varepsilon,\tilde{t}))dP(\tilde{t})\\&\leq\int(N(E,\tilde{t}-2\varepsilon_\Lambda)-N(E,\tilde{t}+2\varepsilon_\Lambda))dP(\tilde{t})\end{aligned}\tag{A.11}$$

où $dP(\tilde{t})$ désigne la mesure de probabilité engendrée par les variables aléatoires $(\tilde{t}_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$. Comme les variables aléatoires t admettent une densité commune, les variables aléatoires $\tilde{t}$ en admettent aussi une, notée $\tilde{g}_h$, que l'on calcule,

$$\tilde{g}_h(u)=g(f_h(u))f_h'(u)\text{ où }f_h(u)=\frac{b^{-1}(e^{-\frac{\varepsilon_0}{h}}u)}{\tilde{a}(h)},\tag{A.12}$$

(le fait que b est inversible dans l'intervalle considéré, est prouvé dans la section 5 de [Kl]).

Par (A.11),

$$\mathrm{P}(\{d(E,\sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_\Lambda(\tilde{t})))\leq\varepsilon\})\leq\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}}\left(\int_{\mathbb{R}^\Lambda}(N(E,\tilde{t}-2\varepsilon_\Lambda)-N(E,\tilde{t}+2\varepsilon_\Lambda))\cdot\prod_{x\in\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x)d\tilde{t}_\Lambda\right)\prod_{x\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x)d\tilde{t}_{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}^\Lambda}N(E,\tilde{t}-2\varepsilon_\Lambda)\prod_{x\in\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x)d\tilde{t}_\Lambda=\int_{\mathbb{R}^\Lambda}N(E,\tilde{t})\prod_{x\in\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x+2\varepsilon)d\tilde{t}_\Lambda,$$

ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\{d(E,\sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_\Lambda(\tilde{t})))\leq\varepsilon\})&\leq\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}}\left(\int_{\mathbb{R}^\Lambda}N(E,\tilde{t})\Big(\prod_{x\in\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x+2\varepsilon)-\prod_{x\in\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x-2\varepsilon)\Big)d\tilde{t}_\Lambda\right)\prod_{x\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x)d\tilde{t}_{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}\\&\leq|\Lambda|\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}}\left(\int_{\mathbb{R}^\Lambda}\Big|\prod_{x\in\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x+2\varepsilon)-\prod_{x\in\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x-2\varepsilon)\Big|d\tilde{t}_\Lambda\right)\prod_{x\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}\tilde{g}_h(\tilde{t}_x)d\tilde{t}_{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda},\end{aligned}$$

comme $N(E,\tilde{t}) \leq |\Lambda|$.

On en déduit, en écrivant $\Lambda = \{x_j;\ 1 \leq j \leq |\Lambda|\}$ et en intégrant par rapport aux variables $(t_x)_{x\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\{d(E,\sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_\Lambda(\tilde{t}))) \leq \varepsilon\}) &\leq |\Lambda| \int_{\mathbb{R}^\Lambda} |\prod_{x\in\Lambda} \tilde{g}_h(\tilde{t}_x + 2\varepsilon) - \prod_{x\in\Lambda} \tilde{g}_h(\tilde{t}_x - 2\varepsilon)| d\tilde{t}_\Lambda \\
&\leq |\Lambda| \int_{\mathbb{R}^\Lambda} \sum_{1\leq j\leq|\Lambda|} \prod_{1\leq k<j} \tilde{g}_h(\tilde{t}_{x_k} + 2\varepsilon) \prod_{j<k\leq|\Lambda|} \\
&\qquad \cdot \tilde{g}_h(\tilde{t}_{x_k} - 2\varepsilon) |\tilde{g}_h(\tilde{t}_{x_j} + 2\varepsilon) - \tilde{g}_h(\tilde{t}_{x_j} - 2\varepsilon)| d\tilde{t}_\Lambda,
\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{P}(\{d(E,\sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_\Lambda(\tilde{t}))) \leq \varepsilon\}) \leq |\Lambda|^2 \int_{\mathbb{R}} |\tilde{g}_h(u+2\varepsilon) - \tilde{g}_h(u-2\varepsilon)| du. \tag{A.13}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |\tilde{g}_h(u+2\varepsilon) - \tilde{g}_h(u-2\varepsilon)| du \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} |g(f_h(f_h^{-1}(u) + 4\varepsilon)) - g(u)| du
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, par les hypothèses faites sur g,

$$\leq \Bigg(\frac{4\varepsilon \sup\limits_{u\in f_h([-\tilde{a}(h),\tilde{a}(h)])} \displaystyle\int_0^1 |f_h'(f_h^{-1}(u) + 4t\varepsilon)| dt}{\varepsilon_0} \Bigg)^{\rho_0}$$

donc par ce que l'on sait sur b (voir les sections 3 et 5 de [Kl]), pour un certain $C > 0$,

$$\leq \Big(\frac{4Ce^{-\frac{\nu_0}{h}}}{\varepsilon_0 \tilde{a}(h)} \Big)^{\rho_0} \varepsilon^{\rho_0},$$

soit encore, si h assez petit,

$$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{g}_h(u+2\varepsilon) - \tilde{g}_h(u-2\varepsilon)| du \leq \varepsilon^{\rho_0}. \tag{A.14}$$

Donc, par (A.13) et (A.14), pour h assez petit,

$$\mathrm{P}(\{d(E,\sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_\Lambda(\tilde{t}))) \leq \varepsilon\}) \leq |\Lambda|^2 \varepsilon^{\rho_0}$$

ce qui achève la preuve de l'estimée de Wegner et donc du lemme 1.10. □

C. Preuve du lemme 1.11.

Soit $\ell > 0$ et $(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ tels que $|x-y| > \ell(1+\varepsilon)$. Soit $\mathcal{E}(h)$, l'événement défini par

$$\mathcal{E}(h) = \left\{\exists E \in I;\ \Lambda_\ell(x) \text{ et } \Lambda_\ell(y) \text{ ne sont pas } \left(E, 2\frac{h_\ell}{h}, \beta, \varepsilon\right) - \text{régulier}\right\}$$
$$\subset \left\{\exists E \in I;\ \begin{pmatrix} \|G_{\Lambda_\ell(x)}(E)\| \geq e^{-\frac{3h_\ell}{2h}\ell}\ell^{-d} \\ \|G_{\Lambda_\ell(y)}(E)\| \geq e^{-\frac{3h_\ell}{2h}\ell}\ell^{-d} \end{pmatrix}\right\}.$$

Or $\|\widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{t})\| \leq 1$ donc

$$\mathcal{E}(h) \subset \left\{\exists E \in I;\ \exists (a,b) \in \Lambda_\ell(x) \times \Lambda_\ell(y) \right.$$
$$\left. \text{tels que } \begin{pmatrix} |\tilde{t}_a - E| \leq 1 + e^{\frac{3h_\ell}{2h}\ell}\ell^d \\ |\tilde{t}_b - E| \leq 1 + e^{\frac{3h_\ell}{2h}\ell}\ell^d \end{pmatrix}\right\}$$
$$\subset \{\exists (a,b) \in \Lambda_\ell(x) \times \Lambda_\ell(y) \text{ tels que } |\tilde{t}_a - \tilde{t}_b| \leq 2 + 2e^{\frac{3h_\ell}{2h}\ell}\ell^d\}.$$

En utilisant les estimées sur b données par la section 3 de [Kl], la définition de $\tilde{t}$ et en choisissant $h_\ell > 0$ tel que $2\nu_0 - 3h_\ell > \nu_0$, on obtient, pour $h \in]0, h_\ell[$,

$$\mathcal{E}(h) \subset \{\exists (a,b) \in \Lambda_\ell(x) \times \Lambda_\ell(y) \text{ tels que } |t_a - t_b| \leq Ce^{-\frac{\nu_0}{2h}}(1+\ell^d)\}$$

pour un certain $C > 0$ (indépendant de h).

On calcule

(A.15)
$$\mathrm{P}(\mathcal{E}(h)) \leq |\Lambda_\ell|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\tilde{a}(h)} g\left(\frac{t}{\tilde{a}(h)}\right) \int_{t - Ce^{-\frac{\nu_0}{2h}}(1+\ell^d)}^{t+Ce^{-\frac{\nu_0}{2h}}(1+\ell^d)} \frac{1}{\tilde{a}(h)} g\left(\frac{u}{\tilde{a}(h)}\right) du\right) dt$$
$$\leq 2C\ell^{2d} \frac{e^{-\frac{\nu_0}{2h}}}{\tilde{a}(h)}(1+\ell^d),$$

comme g est bornée.

Ainsi par les hypothèses faites sur $\tilde{a}(h)$, il est immédiat qu'il existe $h_\ell > 0$ tel que, pour $h \in]0, h_\ell]$, on a

$$\mathrm{P}(\mathcal{E}(h)) \leq \ell^{-p}$$

ce qui démontre le lemme 1.11. □

BIBLIOGRAPHIE

[Be] Yu. M. BEREZANSKII, On expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators, Ukrain. Math. Zh., 11 (1959), 16–24, English transl. in Amer. Math. Soc. Trans. (2), 93 (1970).

[Ca] U. CARLSSON, An infinite number of wells in the semi-classical limit, Asympt. Anal., vol. 3 (1990), 189–214.

[C] R. CARMONA, Exponential localization in one dimensional disordered systems, Duke Math. Jour., 49 (1982), 191–213.

[C-L] R. CARMONA, J. LACROIX, Spectral theory of random Schrödinger operators, Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1990.

[Co-His] J.M. COMBES, P.D. HISLOP, Some transport and spectral properties of disordered media, Schrödinger operators: the quantum mechanical many-body problem, LNP 403 (E. Balslev, eds.) Proceedings, Aarhus, Denmark 1991, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York (1992), 16–47.

[vDK1] H. von DREYFUS, A. KLEIN, A new proof of localization in the Anderson tight binding model, Commun. Math. Phys., 124 (1989), 285–299.

[vDK2] H. von DREYFUS, A. KLEIN, Localization for random Schrödinger operators with correlated potentials, Commun. Math. Phys., 140 (1991), 133–147.

[FMSS] J. FRÖHLICH, F. MARTINELLI, E. SCOPPOLA, T. SPENCER, Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model, Commun. Math. Phys., 101 (1985), 21–46.

[FS] J. FRÖHLICH, T. SPENCER , Absence of diffusion in the Anderson tight binding model, Commun. Math. Phys., 88 (1983), 151–184.

[GMP] Ya. GOL'DSHEID, S. MOLCHANOV, L. PASTUR, Pure point spectrum of stochastic one dimensional Schrödinger operators, Funct. Anal. Appl., 11 (1977) 1.

[Gr] V. GRINSHPUN, Point spectrum of random infinite order operators acting on $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, Dok. Akad. Nauk Ukraïni, 8 (1992), 18-21 (en russe).

[HM] H. HOLDEN, F. MARTINELLI, A remark on the absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator in $L^2(R^\nu)$, Commun. Math. Phys., 93, (1984) 197–217.

[He-Sj] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, Multiple wells in the semi-classical limit 1, Comm. P.D.E, 9 (1984), 337–408.

[Kl] F. KLOPP, Étude semi-classique d'une perturbation d'un opérateur de Schrödinger périodique, Ann. Inst. Henri Poincaré, sér. Phys. Théor., 55 (1991), 459–509.

[KoSi] S. KOTANI, B. SIMON, Localization in general one dimensional systems, II, Commun. Math. Phys., 112 (1987), 103–119.

[KuSo] H. KUNZ, B. SOUILLARD, Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires, Commun. Math. Phys., 78 (1980), 201–246.

[MS1] F. MARTINELLI, E. SCOPPOLA, Introduction to the mathematical theory of Anderson localization, Riv. Nuovo Cim., 10 (1987), N10.

[MS2] F. MARTINELLI, E. SCOPPOLA, Remark on the absence of absolutely continuous spectrum for d-dimensional Schrödinger operators with random potential for large disorder and low energy, Commun. Math. Phys., 97 (1985), 465–471.

[O] A. OUTASSOURT, Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique, J. Funct. Anal., 72 (1987), 65–93.

[P] L. PASTUR, Spectra of random self-adjoint operators, Russ. Math. Surv., 28 (1973), 1.

[PFi] L. PASTUR, A. FIGOTIN, Spectra of random and almost-periodic operators, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1992.

[Si1] B. SIMON, Semi-classical analysis of low lying eigenvalues III. Width of the ground state band in strongly coupled solids, Ann. Phys., 158 (1984), 415–420.

[Si2] B. SIMON, Schrödinger semigroups, Bull. Am. Math. Soc., 7 (1982), 447–526.

[Wa] W.-M. WANG, Exponential decay of green's functions for a class of long range hamiltonians, Commun. Math. Phys., 136 (1991), 35–41.

[We] F. WEGNER, Bounds on the density of states in disordered systems, 1981, Z. Phys., B44 (1981), 9–15.

Manuscrit reçu le 29 septembre 1993.

Frédéric KLOPP,
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
91405 ORSAY Cedex (France).