ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

KHALID KOUFANY

Semi-groupe de Lie associé à un cône symétrique

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 1 (1995), p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 1 (1995), 1–29

SEMI-GROUPE DE LIE ASSOCIÉ À UN CÔNE SYMÉTRIQUE

par Khalid KOUFANY

Plan.

0. Introduction.

Soit L un groupe de Lie, $\mathfrak{l}$ son algèbre de Lie et notons $\exp : \mathfrak{l} \longrightarrow L$ l'application exponentielle du groupe L.

Un *semi-groupe* de L est un sous-ensemble S de L vérifiant, $e \in S$ et $S^2 \subset S$. Soit S un semi-groupe fermé de L. L'ensemble

$$\mathcal{C}(S) := \{X \in \mathfrak{l} \mid \exp(\mathbb{R}_+ X) \subset S\}.$$

Mots-clés : Algèbres de Jordan – Domaine symétrique de type tube – Espace symétrique de type Cayley – Semi-groupe de Lie – Transformation de Cayley.
Classification math. : 06E05 – 22E10 – 22E15 – 32M15 – 53C30.

est un cône convexe fermé appelé *cône tangent* à S. On dira que S est un *semi-groupe de Lie* de L si

$$S = \overline{\langle \exp \mathcal{C}(S) \rangle},$$

c'est-à-dire que S est topologiquement engendré par $\exp \mathcal{C}(S)$, (*cf.* [10] et [26]).

Les semi-groupes liés aux groupes de Lie ont commencé à jouer, depuis une dizaines d'années, des rôles importants dans différents domaines des mathématiques, notamment la théorie des représentations (*cf.* [21], [22], [23] et [25]), la géométrie des espaces symétriques ordonnés (*cf.* [5] et [24]), la théorie des fonctions sphériques (*cf.* [6] et [8]), la théorie des espaces de Hardy (*cf.* [11] et [27]), le contrôle stochastique (*cf.* [1] et [30]), *etc.*

Comme la théorie des semi-groupes de Lie est liée à celle des cônes convexes invariants, et comme à chaque algèbre de Jordan euclidienne V on associe un cône convexe invariant $\Omega = \operatorname{int}\{x^2 \mid x \in V\}$, il est naturel d'étudier le semi-groupe Γ, associé au cône Ω,

$$\Gamma = \{g \in {}^cG \mid g(\Omega) \subset \Omega\},$$

où ${}^cG$ est la composante neutre du groupe conforme de V.

Examinons le cas particulier de l'algèbre de Jordan $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$. En 1993 Bougerol (*cf.* [1]) a introduit, dans le cadre du calcul stochastique, le semi-groupe,

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \mid D \text{ inversible, et } \; CD^t, D^tB \text{ positives} \right\}$$

des matrices hamiltonniennes du groupe symplectique réel $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ et a montré que ses éléments sont des contractions pour la distance géodésique du cône des matrices symétriques définies positives.

En termes d'algèbre de Jordan ce semi-groupe s'interprète de la façon suivante :

Muni du *produit de Jordan*

$$A \cdot B = \frac{AB + BA}{2},$$

l'algèbre $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ est une algèbre de Jordan euclidienne dont le cône symétrique associé est le cône $\Omega := \mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R})$ des matrices symétriques définies positives. Dans ce cas le groupe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ n'est autre que le groupe des automorphismes holomorphes du domaine tube

$$T_\Omega = \{X + iY \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C}) \mid Y \in \mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R})\}$$

associé à l'algèbre de Jordan $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$. Dans ce cadre nous montrons facilement que

$$\mathcal{H} = \Gamma := \{g \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) \mid g \cdot \Omega \subset \Omega\}.$$

Nous en déduisons alors que le semi-groupe Γ se décompose à la Harish-Chandra,

$$\Gamma = \Gamma^+ \Gamma^0 \Gamma^-,$$

où

$$\Gamma^+ = \left\{ \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \mid B \text{ symétrique positive} \right\},$$

$$\Gamma^- = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \mid C \text{ symétrique positive} \right\},$$

$$\Gamma^0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Voici maintenant le plan de cet article. Dans les parties 1 et 2 nous donnons quelques rappels et résultats sur les cônes symétriques, algèbres de Jordan et domaines de type tube, qui seront utiles pour la compréhenson de la suite. Pour plus de détails sur ces notions on pourra se référer à [2], [4], [7] et [15]. Dans la partie 3 nous explicitons, en termes d'algèbre de Jordan, les conjugaisons de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport aux formes réelles que nous rencontrons. Dans la partie 4 nous introduisons le semi-groupe Γ et nous montrons que ce semi-groupe admet une décomposition à la Harish-Chandra. Dans la partie 5 nous utilisons cette décomposition pour montrer que les éléments de Γ sont des contractions relativement à la métrique riemannienne invariante de Ω. Dans la partie 6 nous donnons quelques notations et résultats sur les espaces symétriques de type Cayley que nous utiliserons par la suite. Dans la partie 7 nous montrons que le semi-groupe Γ vérifie la décomposition d'Ol'shanskiĭ, ce qui nous permettra d'en déduire, dans la partie 8, que Γ est une forme réelle du semi-groupe holomorphe d'Ol'shanskiĭ relatif au domaine borné associé à l'algèbre de Jordan V. Tous ces résultats ainsi que d'autres résultats intermédiaires sont obtenus par une approche basée sur la théorie des algèbres de Jordan.

Enfin, je tiens à remercier J.-L. Clerc, qui a dirigé ma thèse de Doctorat de l'Université de Nancy 1, que reprend en partie cet article ainsi que J. Faraut pour ses précieux conseils.

1. Cônes symétriques et algèbres de Jordan euclidiennes.

A. Soit Ω un cône convexe ouvert dans un espace vectoriel euclidien V. On suppose que Ω est *pointu*, *i.e.* $\overline{\Omega} \cap -\overline{\Omega} = \{0\}$. Soit $G(\Omega)$ le groupe des transformations linéaires de V qui préservent Ω,

$$G(\Omega) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid g(\Omega) = \Omega\}.$$

Le cône Ω est dit *homogène* si $G(\Omega)$ opère transitivement sur Ω. Le cône ouvert dual Ω^* est défini par

$$\Omega^* = \{x \in V \mid \langle x, y\rangle > 0, \quad \forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}.$$

Le cône Ω est dit *auto-dual* si $\Omega = \Omega^*$. Il est dit *symétrique* s'il est homogène et auto-dual.

B. Une *algèbre de Jordan réelle* V est un espace vectoriel réel V muni d'un produit vérifiant, pour tout $x, y \in V$,

$$xy = yx, \tag{J1}$$

$$x(x^2y) = x^2(xy). \tag{J2}$$

Si on note $L(x)$ l'endomorphisme défini par

$$L(x)y = xy,$$

la propriété (J2) signifie que $L(x)$ et $L(x^2)$ commutent. L'algèbre de Jordan V est dite *euclidienne* s'il existe sur V un produit scalaire associatif, c'est-à-dire tel que

$$\langle xy, z\rangle = \langle y, xz\rangle, \quad \forall\, x, y, z \in V.$$

On montre que l'ensemble des carrés d'une algèbre de Jordan euclidienne,

$$Q = \{x^2 \mid x \in V\},$$

est un cône convexe fermé et que son intérieur Ω est un cône symétrique. De plus, tout cône symétrique peut être obtenu de cette façon (*cf.* [12], [29]).

Par exemple si $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ est l'espace des matrices symétriques réelles $n \times n$ muni du *produit de Jordan*,

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx),$$

alors V est une algèbre de Jordan euclidienne relativement au produit scalaire défini par

$$\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}(xy),$$

et le cône symétrique Ω est le cône des matrices symétriques définies positives.

La *représentation quadratique* de V est l'endomorphisme auto-adjoint défini par

$$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2).$$

Pour $x \in \Omega$, $P(x)$ est défini positif et appartient à $G(\Omega)$. Dans le cas de l'algèbre $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, $P(x)y = xyx$.

Sur Ω on définit une structure riemannienne invariante par $G(\Omega)$ de la manière suivante :

$$(u|v)_x = \langle P(x^{-1})u, v\rangle, \qquad x \in \Omega, \quad u, v \in V.$$

Cette structure riemannienne fait de Ω un espace riemannien symétrique qui s'identifie à l'espace quotient G_0/K_0 où G_0 est la composante connexe neutre de $G(\Omega)$, et

$$K_0 = \{g \in G_0 \mid g(e) = e\},$$

e désignant l'élément unité de V.

C. Supposons que l'algèbre de Jordan V est simple, c'est-à-dire qu'elle n'a pas d'idéal non trivial. Soit r le rang de V et soit $\{c_1, \cdots, c_r\}$ un système complet d'idempotents primitifs,

$$c_i^2 = c_i, \quad c_i c_j = 0 \quad (i \neq j)$$
$$c_1 + \cdots + c_r = e.$$

Tout élément x de V s'écrit sous la forme :

$$x = k\Big(\sum_{j=1}^r \lambda_j c_j\Big), \quad k \in K_0, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit de la *décomposition spectrale* de x, les nombres λ_j étant appelés les *valeurs propres* de x. Le *déterminant* et la *trace* de x sont définis par $\det(x) = \prod_{j=1}^r \lambda_j$ et $\mathrm{tr}(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j$. “det” est un polynôme homogène de degré r, et “tr” une forme linéaire. On peut supposer que le produit scalaire de V est défini par $\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}(xy)$.

D. Les valeurs propres de l'endomorphisme $L(c_i)$ sont $1, \dfrac{1}{2}$ et 0. On pose, pour $j \neq k$,

$$V_{jk} = \Big\{x \in V \mid c_j x = \frac{1}{2}x,\ c_k x = \frac{1}{2}x\Big\},$$

et on a la décomposition suivante, dite *décomposition de Peirce* de V,

$$V = \Big(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}c_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j<k} V_{jk}\Big).$$

E. Pour $x, y, z \in V$, on pose

$$\begin{aligned}\{x,y,z\} &= (x \,\square\, y)z,\\ &= (xy)z + x(yz) - y(xz),\end{aligned}$$

l'opérateur $x \,\square\, y$ étant défini par

$$x \,\square\, y := L(xy) + [L(x), L(y)].$$

Le *groupe structurel* de V, $\mathrm{Str}(V)$, est le groupe des éléments g de $\mathrm{GL}(V)$ qui vérifient, pour tout $x, y, z \in V$, l'une des identités suivantes :

$$\begin{aligned} g\{x,y,z\} &= \{gx, {g^t}^{-1}y, gy\},\\ P(gx) &= gP(x)g^t,\\ g(x \,\square\, y)g^{-1} &= (gx) \,\square\, ({g^t}^{-1}y).\end{aligned}$$

F. Soit V une algèbre de Jordan sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui admet une unité e. Fixons $v \in V$ et posons

$$x \underset{v}{\perp} y = P(x,y)v = x(yv) + y(xv) - (xy)v.$$

On a alors les propriétés suivantes (cf. [2]) :

(i) Muni du produit $\underset{v}{\perp}$, V est une algèbre de Jordan que l'on note V_v.

(ii) Si v est inversible alors V_v admet un élément unité qui est v^{-1}.

(iii) Si on note L_v (resp. P_v) la multiplication à gauche ou à droite (resp. la représentation quadratique) associée à V_v, alors

$$\begin{aligned} L_v(x) &= x \,\square\, v\\ P_v(x) &= P(x)P(v).\end{aligned}$$

(iv) Supposons désormais v inversible. Si x est inversible dans V alors il l'est dans V_v et inversement. Plus précisement, si ${}^{-1}x$ désigne l'inverse de x dans l'algèbre de Jordan V_v alors

$${}^{-1}x = P(v)^{-1}x^{-1},$$

x^{-1} étant l'inverse de x dans l'algèbre de Jordan V. L'algèbre V_v est dite *algèbre de Jordan isotypique* au point v.

2. Domaines tubes.

Soit Ω le cône symétrique associé à une algèbre de Jordan euclidienne V, et soit T_Ω le domaine tube dans l'espace complexifié $V_{\mathbb{C}} := V + iV$, de base Ω,

$$T_\Omega := V + i\Omega = \{z = x + iy \mid x \in V, y \in \Omega\}.$$

Une application biholomorphe de T_Ω dans lui-même est dite un *automorphisme holomorphe* de T_Ω. On notera $G(T_\Omega)$ le groupe de ces automorphismes holomorphes.

Soit g un élément de $G(\Omega)$, alors g opère sur T_Ω par

$$z \longmapsto gz = gx + igy, \quad z = x + iy,$$

on peut donc considérer $G(\Omega)$ comme un sous-groupe de $G(T_\Omega)$.

Pour $v \in V$, la translation

$$t_v : z \longmapsto z + v$$

est un automorphisme holomorphe de T_Ω. Notons N^+ le sous-groupe de $G(T_\Omega)$ formé par ces translations.

L'application

$$s : z \longmapsto -z^{-1}$$

est un automorphisme holomorphe involutif de T_Ω, donc un élément de $G(T_\Omega)$. Posons

$$N^- = s \circ N^+ \circ s.$$

Il s'agit du sous-groupe de $G(T_\Omega)$ formé des éléments de la forme

$$z \longmapsto (z^{-1} - v)^{-1}, \qquad v \in V.$$

N^+ et N^- sont deux sous-groupes abéliens de $G(T_\Omega)$ isomorphes à l'espace vectoriel V.

THÉORÈME 2.1 ([7]). — *$G(T_\Omega)$ est engendré par $G(\Omega)$, N^+ et s.*

Muni de la métrique de Bergman, T_Ω est un espace hermitien symétrique, $T_\Omega \simeq G(T_\Omega)/K$, où

$$K = \{g \in G(T_\Omega) \mid g(ie) = ie\}.$$

Soit $\mathcal{D}$ le domaine borné de $V_{\mathbb{C}}$ défini par

$$\mathcal{D} = \{z \in V_{\mathbb{C}} \mid I - z \,\square\, \overline{z} \gg 0\}.$$

Par exemple, si $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$, alors $V_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sym}(m, \mathbb{C})$ et $\mathcal{D}$ est le disque de Siegel

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{C}) \mid I - z\overline{z} \gg 0\}.$$

Pour $z, w \in V_{\mathbb{C}}$ tels que $z + ie$ et $e - w$ soient inversibles, on pose

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - ie)(z + ie)^{-1}, \\ c(w) &= i(e + w)(e - w)^{-1}. \end{aligned}$$

p est un isomorphisme holomorphe tel que $p(T_\Omega) = \mathcal{D}$ et $p^{-1} = c$. L'application c est appelée *transformation de Cayley* associée au domaine tube T_Ω.

Remarque 2.2. — Posons

$$R_\Omega := iV + \Omega,$$

et, pour $z, w \in V_{\mathbb{C}}$ tels que $e + z$ et $e - w$ soient inversibles,

$$\begin{aligned} p'(z) &= (z - e)(z + e)^{-1}, \\ c'(w) &= (e + w)(e - w)^{-1}. \end{aligned}$$

R_Ω est un domaine hermitien symétrique de type tube tel que $p'(R_\Omega) = \mathcal{D}$ et $p'^{-1} = c'$. L'application c' est la transformation de Cayley associée au domaine R_Ω.

Notons $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ l'algèbre de Lie de $G(T_\Omega)$ et $\mathfrak{g}(\Omega)$ celle de $G(\Omega)$. Si $X \in \mathfrak{g}(T_\Omega)$, on note $\widetilde{X}$ le champ de vecteurs holomorphe dans T_Ω, correspondant à X, défini par :

$$\widetilde{X} f(z) = \frac{d}{dt} f(g_t(z))_{|t=0}, \quad f \in \mathcal{C}^1(T_\Omega),$$

où g_t est le sous-groupe à un paramètre associé à X. On peut aussi écrire

$$\widetilde{X} f(z) = \mathrm{D}\, f(z)(X(z)),$$

où $Df(z)$ est la différentielle de f au point z. Pour chaque z, $X(z)$ est un champ de vecteurs de $V_{\mathbb{C}}$.

LEMME 2.3 ([7]). — *$X(z) = u$, $X(z) = Tz$ et $X(z) = P(z)v$ sont respectivement les champs de vecteurs holomorphes correspondants aux sous-groupes à un paramètre suivants :*

$$\begin{aligned} z &\longmapsto z + tu, \\ z &\longmapsto \exp(tT)z, \\ z &\longmapsto (z^{-1} - tv)^{-1}, \end{aligned}$$

où $T \in \mathfrak{g}(\Omega)$ et $u, v \in V$.

Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble des champs de vecteurs de la forme

$$X(z) = u + Tz + P(z)v,$$

où $u, v \in V$ et $T \in \mathfrak{g}(\Omega)$. On notera dans la suite (u, T, v) l'élément $u+T+p_v$ de $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ associé au champ de vecteurs $X(z) = u + Tz + P(z)v$, où l'on a défini l'application p_v par $p_v(z) := P(z)v$.

THÉORÈME 2.4 (Koecher, Tits).

(i) *$\mathfrak{L}$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ du groupe $G(T_\Omega)$ et on a*

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathfrak{g}(T_\Omega)_{-1} \oplus \mathfrak{g}(T_\Omega)_0 \oplus \mathfrak{g}(T_\Omega)_{+1},$$

avec $\mathfrak{g}(T_\Omega)_{-1} = V$, $\mathfrak{g}(T_\Omega)_0 = \mathfrak{g}(\Omega)$ et $\mathfrak{g}(T_\Omega)_{+1} = \{p_v \mid v \in V\} \simeq V$.

(ii) *L'application*

$$\theta : (a, T, b) \longmapsto (b, -T^t, a)$$

est une involution de $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ telle que $\theta\mathfrak{g}(T_\Omega)_\nu = \mathfrak{g}(T_\Omega)_{-\nu}$, pour $\nu = 0, \pm 1$.

(iii) *$\mathfrak{g}(T_\Omega)$ est une algèbre de Lie semi-simple hermitienne.*

Démonstration. — (*cf.* [7], [14] et [28]).

Posons

$$\mathfrak{q}^+ = \mathfrak{g}(T_\Omega)_{-1}\,, \quad \mathfrak{q}^- = \mathfrak{g}(T_\Omega)_{+1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(T_\Omega)_0,$$

alors

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathfrak{q}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}^-.$$

3. Involutions spéciales.

Notons G la composante connexe neutre de $G(\mathcal{D})$, groupe des automorphismes holomorphes du domaine $\mathcal{D}$, ${}^cG$ celle de $G(T_\Omega)$, et ${}^{c'}G$ celle de $G(R_\Omega)$ groupe des automorphismes holomorphes de R_Ω. On a alors ${}^cG = cGc^{-1}$ et ${}^{c'}G = c'Gc'^{-1}$.

Notons $\mathfrak{g}(\mathcal{D})$ et $\mathfrak{g}(R_\Omega)$ les algèbres de Lie de $G(\mathcal{D})$ et $G(R_\Omega)$. Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{g}(\mathcal{D})$, donc de $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ et $\mathfrak{g}(R_\Omega)$, et soit $G_\mathbb{C}$ le goupe de Lie complexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. G, ${}^cG$ et ${}^{c'}G$ sont des formes réelles de $G_\mathbb{C}$.

Considérons les transformations anti-holomorphes suivantes :

$$ {}^{c}j(z) = \overline{z}, \qquad \forall z \in V_{\mathbb{C}}, $$
$$ {}^{c'}j(z) = -\overline{z}, \qquad \forall z \in V_{\mathbb{C}}, $$

et

$$ j(z) = (\overline{z})^{-1}, \qquad \forall z \in V_{\mathbb{C}}^{\times}, $$

où $V_{\mathbb{C}}^{\times}$ désigne l'ouvert des éléments inversibles de l'algèbre de Jordan complexe $V_{\mathbb{C}}$ et le symbole $^{-}$ la conjugaison complexe dans $V_{\mathbb{C}}$ relativement à V.

Posons, pour tout élément g de $G_{\mathbb{C}}$,

$$ \tau(g) := {}^{c}j \circ g \circ {}^{c}j, $$
$$ \eta(g) := {}^{c'}j \circ g \circ {}^{c'}j, $$

et

$$ \sigma(g) := j \circ g \circ j. $$

τ, η et σ sont des involutions de $G_{\mathbb{C}}$. Notons par les mêmes symboles les involutions correspondantes dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, *i.e.*

$$ \tau = \mathrm{Ad}({}^{c}j), \qquad \eta = \mathrm{Ad}({}^{c'}j) \qquad \text{et} \qquad \sigma = \mathrm{Ad}(j). $$

Il est clair que l'ensemble des points de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ fixés par l'involution τ est $\mathfrak{g}(T_{\Omega})$. Or

$$ {}^{c}j = c \circ j \circ c^{-1} \quad \text{et} \quad {}^{c'}j = c'^{-1} \circ j \circ c'. $$

Comme

$$ \mathrm{Ad}(c)^{-1} \circ \tau \circ \mathrm{Ad}(c) = \sigma \quad \text{et} \quad \mathrm{Ad}(c')^{-1} \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}(c') = \eta, $$

nous avons alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. — *Les conjugaisons de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport à G, ${}^{c}G$ et ${}^{c'}G$ sont données respectivement par σ, τ et η.*

Exemple 3.2. — Dans le cas de l'algèbre de Jordan à une dimension $\mathbb{R}$, le cône symétrique est $\Omega =]0, +\infty[$, le domaine tube T_{Ω} est le demi-plan de Poincaré, $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$, le domaine tube R_{Ω} est le demi-plan droit $\{ix + y \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ et le domaine borné correspondant est le disque unité. Les transformations de Cayley c et c' sont représentées par la matrices

$$ c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. $$

Pour tout élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ nous avons

$$\begin{aligned}
\tau\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= {}^{c}j_o \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ {}^{c}j_o = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}, \\
\eta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= {}^{c'}j_o \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ {}^{c'}j_o = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}, \\
\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= j_o \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ j_o = \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où ${}^{c}j_o$, ${}^{c'}j_o$ et j_o sont les applications définies respectivement dans $\mathbb{C}$ par ${}^{c}j_o(z) = \overline{z}$, ${}^{c'}j_o(z) = -\overline{z}$ et $j_o(z) = 1/\overline{z}$.

Dans la suite nous considérons une algèbre de Jordan V simple et euclidienne, et le cône symétrique Ω associé à V. Notons $G(\Omega)$ la composante neutre du groupe des automorphismes linéaires de Ω. Les autres notations que nous utiliserons dans la suite de cet article sont celles introduites ci-dessus.

4. Semi-groupe de compressions.

L'espace symétrique ${}^{c}G/G(\Omega)N^-$ est compact et l'application

$$\begin{aligned}
V &\longrightarrow {}^{c}G/G(\Omega)N^- \\
v &\longmapsto g(G(\Omega)N^-)
\end{aligned}$$

où $g(z) = z + v$, définit un plongement de V dans ${}^{c}G/G(\Omega)N^-$ d'image dense. ${}^{c}G/G(\Omega)N^-$ est donc une compactification de V sur laquelle ${}^{c}G$ opère et qu'on appelle *compactification conforme*.

Considérons alors le semi-groupe des compressions de Ω,

$$\Gamma := \{g \in {}^{c}G \mid g(\Omega) \subset \Omega\}.$$

Remarquons tout d'abord que $G(\Omega) \subset \Gamma$, et que la condition $g(\Omega) \subset \Omega$ est équivalente à $g(\widetilde{\Omega}) \subset \widetilde{\Omega}$, où $\widetilde{\Omega}$ désigne l'adhérence du cône Ω dans la compatification conforme de V. Notons aussi que

$$j \circ \Gamma \circ j = \Gamma.$$

Soit $\overline{\Omega}$ l'adhérence euclidienne de Ω (dans V). Si $b \in \overline{\Omega}$, la translation

$$t_b : z \longmapsto z + b, \qquad z \in T_\Omega$$

est un élément de Γ.

Définissons les transformations rationnelles $\widetilde{t}_b$, $b \in \overline{\Omega}$, par

$$\widetilde{t}_b : z \longmapsto (I + z \,\square\, b)^{-1} z, \qquad z \in T_\Omega.$$

Posons

$$\Gamma^+ := \{g \in {}^cG \mid g = t_v, v \in \overline{\Omega}\},$$

et

$$\Gamma^- := \{g \in {}^cG \mid g = \widetilde{t}_v, v \in \overline{\Omega}\}.$$

LEMME 4.1. — *Pour tout élément v de $\overline{\Omega}$, nous avons l'égalité d'applications rationnelles*

$$\widetilde{t}_v = j \circ t_v \circ j \tag{4.1.1}$$

là où elles sont définies.

Démonstration. — Soit z un élément inversible de $V_{\mathbb{C}}$ tel que $z^{-1} + v$ soit inversible, alors l'égalité (4.1.1) est équivalente à la suivante :

$$(z^{-1} + v)^{-1} = (I + z \,\square\, v)^{-1} z. \tag{4.1.2}$$

Montrons tout d'abord (4.1.2) pour $z = e$,

$$(e + v)^{-1} = (I + L(v))^{-1} \cdot e. \tag{4.1.3}$$

Il suffit de le vérifier pour les éléments v de $\overline{\Omega}$ tel que $|v| < 1$. Soit alors $v \in \overline{\Omega}$ tel que $|v| < 1$. Les séries $\sum_{n\geq 0} (-1)^n L(v)^n$ et $\sum_{n\geq 0} (-1)^n v^n$ sont convergentes et convergent respectivement vers $(I + L(v))^{-1}$ et $(e + v)^{-1}$. Or

$$\Big(\sum_{n\geq 0} (-1)^n L(v)^n\Big) \cdot e = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (L(v)^n \cdot e) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n v^n,$$

donc $(I + L(v))^{-1} \cdot e = (e + v)^{-1}$, d'où l'égalité (4.1.3).

Soit maintenant z un élément de $V_{\mathbb{C}}{}^{\times}$ tel que $z^{-1} + v$ soit inversible, et considérons l'algèbre isotypique $(V_{\mathbb{C}})_z$ (*cf.* F. §1). $(V_{\mathbb{C}})_z$ est une algèbre de Jordan d'unité z^{-1}. Dans cette algèbre, l'égalité (4.1.3) devient

$${}^{-1}(z^{-1} + v) = (I + L_z(v))^{-1} z^{-1},$$

${}^{-1}(z^{-1} + v)$ étant l'inverse de $(z^{-1} + v)$ dans l'algèbre de Jordan $(V_{\mathbb{C}})_z$, et comme

$$L_z(v) = v \,\square\, z \quad \text{et} \quad {}^{-1}(z^{-1} + v) = P(z)^{-1} (z^{-1} + v)^{-1},$$

nous avons

$$P(z)^{-1}(z^{-1}+v)^{-1} = (I + v \,\square\, z)^{-1}P(z)^{-1}z,$$

ou encore

$$(z^{-1}+v)^{-1} = P(z)(I + v \,\square\, z)^{-1}P(z)^{-1}z.$$

En vertu de la formule (*cf.* lemme 4.4 ci-dessous)

$$P(x)(y \,\square\, x) = (x \,\square\, y)P(x),$$

nous avons

$$(z^{-1}+v)^{-1} = (I + z \,\square\, v)^{-1}z. \qquad \square$$

COROLLAIRE 4.2. — *On a*

$$\Gamma^- = j \circ \Gamma^+ \circ j,$$

donc Γ^+ *et* Γ^- *sont deux sous semi-groupes du semi-groupe* Γ.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme 4.1, du fait que j est un automorphisme involutif anti-holomorphe de T_Ω qui stabilise Ω, et que si $g \in G(T_\Omega)$ alors $j \circ g \circ j$ est un automorphisme holomorphe de T_Ω, donc un élément de $G(T_\Omega)$. $\square$

LEMME 4.3. — *Soient* $x, y \in \overline{\Omega}$, *alors l'opérateur*

$$Q(x,y) := I + 2x \,\square\, y + P(x)P(y) \tag{4.3.1}$$

est inversible et appartient à $G(\Omega)$.

Démonstration. — Supposons d'abord que $x \in \Omega$, il existe alors un élément g de $G(\Omega) \subset \mathrm{Str}(V)$ tel que $g(e) = x$, donc

$$\begin{aligned} I + 2x \,\square\, y + P(x)P(y) &= g(I + 2L({}^t gy) + P({}^t gy))g^{-1}, \\ &= gP(e + {}^t gy)g^{-1}. \end{aligned}$$

Comme ${}^t gy \in \overline{\Omega}$, $e + {}^t gy$ est inversible. Nous en déduisons alors que $P(e+{}^t gy)$ est inversible, il en est de même pour $Q(x,y)$. De plus, l'opérateur $Q(x,y)$ appartient à $G(\Omega)$, et ses valeurs propres sont ≥ 1. Un élément $x \in \overline{\Omega}$ est limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω. Comme ci-dessus, pour chaque x_n, l'opérateur $Q(x_n, y)$ est dans $G(\Omega)$ et toutes ses valeurs propres sont ≥ 1 et donc à la limite toutes les valeurs propres de $Q(x,y)$ sont ≥ 1. On en déduit que $Q(x,y)$ est inversible et qu'il appartient à $G(\Omega)$. $\square$

LEMME 4.4. — *Soient* $x, y \in V$ *alors*

(i) $P(x)(y \,\square\, x) = (x \,\square\, y)P(x)$.

(ii) *Pour tout entier* $k \geq 0$,

$$P(x)P(y)(x \,\square\, y)^k x = (x \,\square\, y)^{k+2}x.$$

(iii) *Si* $I + x \,\square\, y$ *est inversible alors*

$$(I + x \,\square\, y)^{-1}Q(x,y)(I + x \,\square\, y)^{-1}x = x.$$

Démonstration. — (i) Par un calcul direct, en utilisant les propriétés du produit triple $\{a,b,c\} = P(a,c)b$, on montre que si x et y sont deux éléments de V alors $P(x)(y \,\square\, x) = (x \,\square\, y)P(x)$.

(ii) Soit k un entier positif et supposons que :

$$(\mathcal{H}.R) \qquad P(x)P(y)(x \,\square\, y)^k x = (x \,\square\, y)^{k+2}x.$$

À l'ordre $k+1$ nous avons

$$\begin{aligned} P(x)P(y)(x \,\square\, y)^{k+1}x &= P(x)P(y)(x \,\square\, y)(x \,\square\, y)^k x \\ &= P(x)(y \,\square\, x)P(y)(x \,\square\, y)^k x && \text{d'après (i)} \\ &= (x \,\square\, y)P(x)P(y)(x \,\square\, y)^k x && \text{d'après (i)} \\ &= (x \,\square\, y)(x \,\square\, y)^{k+2}x && \text{d'après } (\mathcal{H}.R) \\ &= (x \,\square\, y)^{k+3}x. \end{aligned}$$

D'où (ii) puisque $(\mathcal{H}.R)$ est vérifiée pour $k = 0$ d'après (i).

(iii) Soient $x, y \in V$ tel que l'opérateur $I + x \,\square\, y$ soit inversible. Supposons $\|x \,\square\, y\| < 1$, alors $(I + x \,\square\, y)^{-1} = \sum_0^{+\infty}(-1)^k(x \,\square\, y)^k$, par suite, en utilisant (ii) nous avons

$$\begin{aligned} &(I + 2x \,\square\, y + P(x)P(y))(I + x \,\square\, y)^{-1}x \\ &= (I+2x \,\square\, y+P(x)P(y))\sum_0^{+\infty}(-1)^k(x \,\square\, y)^k x \\ &= \sum_0^{+\infty}(-1)^k(x \,\square\, y)^k x + 2\sum_0^{+\infty}(-1)^k(x \,\square\, y)^{k+1}x + \sum_0^{+\infty}(-1)^k(x \,\square\, y)^{k+2}x \\ &= (I + x \,\square\, y)x. \end{aligned}$$

Les deux membres de l'égalité (iii) sont des fonctions rationnelles en x et y, égales si $\|x \,\square\, y\| < 1$, donc égales là où elles sont définies, c'est-à-dire si $I + x \,\square\, y$ est inversible. $\square$

Posons, pour $x, y \in \overline{\Omega}$,

$$x^y := Q(x,y)^{-1}(x + P(x)y). \tag{4.3.2}$$

D'après le lemme 4.3, l'élément x^y est bien défini.

LEMME 4.5. — *Soient $x, y \in \overline{\Omega}$, alors l'opérateur $I + x \,\square\, y$ est inversible et $x^y \in \overline{\Omega}$. Plus précisément nous avons*

$$x^y = \widetilde{t}_y(x). \tag{4.5.1}$$

Démonstration. — Soient $x, y \in \overline{\Omega}$. Alors en procédant comme dans le lemme 4.3, nous montrons que $I + x \,\square\, y$ est inversible. Le reste du lemme découle immédiatement de (iii) du lemme 4.4. □

LEMME 4.6.

(i) *$G(\Omega)$ normalise Γ^+ et Γ^-.*

(ii) *Si $x, y \in \overline{\Omega}$ alors*

$$\widetilde{t}_y \circ t_x = t_{x^y} \circ Q(x,y)^{-1} \circ \widetilde{t}_{y^x}, \tag{4.6.1}$$

et donc

$$\widetilde{t}_y \circ t_x \in \Gamma^+ G(\Omega) \Gamma^-.$$

Démonstration. — (i) Il est facile de voir que si $x \in \overline{\Omega}$ et $k \in G(\Omega)$,

$$k \circ t_x \circ k^{-1} = t_{kx} \quad \text{et} \quad k \circ \widetilde{t}_x \circ k^{-1} = \widetilde{t}_{(k^t)^{-1}x}.$$

(ii) Si $x, y \in \overline{\Omega}$ alors, d'après le lemme 4.5, x^y et y^x sont bien définis et appartiennent à $\overline{\Omega}$. Donc $t_{x^y} \in \Gamma^+$ et $\widetilde{t}_{y^x} \in \Gamma^-$, de plus d'après le lemme 4.3, $Q(x,y)^{-1} \in G(\Omega)$. Pour montrer l'identité (4.6.1) il suffit de le faire pour les éléments du sous-ensemble ouvert dense $\{z \in V_{\mathbb{C}} \mid I + (x+z) \,\square\, y \text{ inversible}\}$. Soit z un élément de cet ensemble, ceci signifie dans le langage de Loos (*cf.* [19], §3) que le couple $(ix + iz, iy)$ est quasi-inversible dans la paire de Jordan $(V_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$. Donc nous avons la relation suivante, entre les quasi-inverses $(ix + iz)^{(iy)}$, $(ix)^{(iy)}$ et $(iz)^{((iy)^{(ix)})}$:

$$(ix + iz)^{(iy)} = (ix)^{(iy)} + \left(I - 2(ix) \,\square\, (iy) + P(ix)P(iy)\right)^{-1} (iz)^{((iy)^{(ix)})},$$

et nous en déduisons que

$$i((x+z)^y) = i(x^y) + Q(x,y)^{-1}(i(z^{(y^x)})),$$

donc

$$(x+z)^y = x^y + Q(x,y)^{-1}(z^{(y^x)}),$$

ou encore, d'après le lemme 4.5,

$$\widetilde{t}_y \circ t_x(z) = t_{x^y} \circ Q(x,y)^{-1} \circ \widetilde{t}_{y^x}(z). \qquad \square$$

LEMME 4.7. — $\Gamma \subset N^+G(\Omega)N^-$.

Démonstration. — Soit L le sous-groupe des éléments de ${}^cG$ fixés par l'involution σ. Dans [17] nous avons montré que

$$L = c'G(\Omega)c'^{-1}.$$

D'autre part $K_0 = K \cap L$, et L/K_0 s'identifie à Ω au moyen de

$$\begin{aligned} L/K_0 &\longrightarrow \Omega \\ c'P(a^{\frac{1}{2}})c'^{-1}k_0 &\longmapsto a. \end{aligned}$$

De plus

$$L/K_0 \hookrightarrow {}^cG/G(\Omega)N^-,$$

et si on note y_0 le point base de ${}^cG/G(\Omega)N^-$ alors $\Lambda := L \cdot y_0$ est la réalisation de Borel de L/K_0 dans ${}^cG/G(\Omega)N^-$.

Prenons $g \in \Gamma$, alors $g \cdot \Omega \subset \Omega$, donc $g \cdot \Lambda \subset \Lambda$, ou encore $g \cdot y_0 \in Ly_0$, c'est-à-dire $g \in LG(\Omega)N^-$.

Comme

$$\begin{aligned} L &= c'G(\Omega)c'^{-1}, \\ c' &= t_{-e} \circ 2Id \circ \widetilde{t}_e \in N^+G(\Omega)N^-, \end{aligned}$$

et

$$c'^{-1} = t_e \circ 2Id \circ \widetilde{t}_{-e} \in N^+G(\Omega)N^-,$$

on en déduit grâce au lemme 4.6 que

$$L \subset N^+G(\Omega)N^-,$$

et que $g \in N^+G(\Omega)N^-$. $\square$

Posons

$$\Upsilon := \{g \in {}^cG \mid g \cdot 0 \in V\}.$$

On a alors

LEMME 4.8. — $\Upsilon = N^+G(\Omega)N^-$.

Démonstration. — On sait que $V \hookrightarrow {}^cG/G(\Omega)N^-$. Si on pose

$$\begin{aligned} \xi \ : \ {}^cG &\longrightarrow {}^cG/G(\Omega)N^- \\ g &\longmapsto \ g \cdot 0, \end{aligned}$$

alors $\Upsilon = \xi^{-1}(V)$ et Υ est un ouvert dense dans ${}^cG$. Puisque N^+ opère simplement transitivement sur V, on a alors

$$\Upsilon = N^+ \cdot y_0 = N^+ G(\Omega) N^-. \qquad \square$$

THÉORÈME 4.9. — *Γ est un semi-groupe fermé de ${}^cG$ vérifiant*

(i) $\Gamma = \Gamma^+ G(\Omega) \Gamma^-$.

(ii) $\Gamma \cap \Gamma^{-1} = G(\Omega)$.

Démonstration. — (i) Il est clair que $\Gamma^+ G(\Omega)\Gamma^- \subset \Gamma$. Inversement, soit g un élément de Γ. D'après le lemme 4.7, g se décompose sous la forme

$$g = g_+ h g_-, \quad \text{où} \quad g_\pm \in N^\pm \quad \text{et} \quad h \in G(\Omega),$$

avec $g_+ = t_v$ et $g_- = \widetilde{t}_w$, où $v, w \in V$.

Nous avons $g \cdot 0 \in \widetilde{\Omega}$, donc d'après les lemmes 4.7 et 4.8,

$$g \cdot 0 \in V \cap \widetilde{\Omega} = \overline{\Omega}.$$

Or

$$\begin{aligned} g \cdot 0 &= (g_+ h g_-) \cdot 0, \\ &= g_+((hg_-) \cdot 0), \\ &= g_+ \cdot 0, \\ &= v. \end{aligned}$$

Donc nécessairement $v \in \overline{\Omega}$, d'où $g_+ \in \Gamma^+$.

Montrons maintenant que $w \in \overline{\Omega}$. Il existe un système complet d'idempotents primitifs $\{c_1, \cdots, c_r\}$ de V et des réels $\lambda_1, \cdots \lambda_r$ tel que $w = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j$. Supposons que $w \notin \overline{\Omega}$, nous pouvons alors supposer par exemple que $\lambda_1 < 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $0 < -\dfrac{1}{\lambda_1} < t < -\dfrac{2}{\lambda_1}$. L'opérateur

$$I + tc_1 \,\square\, w = L(e + t\lambda_1 c_1),$$

est diagonalisable et ses valeurs propres sont les nombres $1 + t\lambda_1, 1 + \dfrac{1}{2}t\lambda_1$, et 1 de multiplicités respectives 1, $d(r-1)$ et $(r-1) + \dfrac{d}{2}(r-1)(r-2)$. Ces valeurs propres n'étant pas nulles, l'opérateur $L(e + t\lambda_1 c_1)$ est donc inversible. De plus

$$\begin{aligned} (I + tc_1 \,\square\, w)^{-1}(tc_1) &= L(e + t\lambda_1 c_1)^{-1}(tc_1), \\ &= \frac{t}{1 + t\lambda_1} c_1. \end{aligned}$$

Comme $tc_1 \in \overline{\Omega}$, nous avons $g(tc_1) \in \overline{\Omega}$, mais

$$\begin{aligned} g(tc_1) &= t_v \circ h \circ \widetilde{t}_w(tc_1), \\ &= h((I + tc_1 \,\square\, w)^{-1}(tc_1)) + v, \\ &= h\Big(\frac{t}{1+t\lambda_1}c_1\Big) + v, \\ &= h\Big(\frac{t}{1+t\lambda_1}c_1 + h^{-1}v\Big). \end{aligned}$$

Donc forcément $\frac{t}{1+t\lambda_1}c_1 + h^{-1}v \in \overline{\Omega}$. Par suite nous devons avoir

$$\Big\langle\Big(\frac{t}{1+t\lambda_1}c_1 + h^{-1}v\Big)y, y\Big\rangle \geq 0$$

pour tout $y \in V$ et en particulier pour $y = c_1$, donc

$$\begin{aligned} 0 \leq \Big\langle\Big(\frac{t}{1+t\lambda_1}c_1 + h^{-1}v\Big)c_1, c_1\Big\rangle &= \Big\langle\Big(\frac{t}{1+t\lambda_1}\Big)c_1, c_1\Big\rangle + \langle (h^{-1}v)c_1, c_1\rangle, \\ &= \frac{t}{1+t\lambda_1}\langle c_1, c_1\rangle + \langle (h^{-1}v)c_1, c_1\rangle, \\ &= \frac{t}{1+t\lambda_1} + \langle (h^{-1}v)c_1, c_1\rangle, \end{aligned}$$

puisque $\langle c_1, c_1\rangle = \operatorname{tr}(c_1) = 1$. En faisant $t \to -\frac{1}{\lambda_1}$ nous aurions $\frac{t}{1+t\lambda_1} \to -\infty$, ce qui est absurde. Nous en déduisons alors que $w \in \overline{\Omega}$ d'où (i).

(ii) Soit $g \in \Gamma \cap \Gamma^{-1}$. D'après (i) il existe $x, y, v, w \in \overline{\Omega}$ et $h, k \in G(\Omega)$ tel que

$$g = t_v \circ k \circ \widetilde{t}_w = \widetilde{t}_{-y} \circ h \circ t_{-x}.$$

Comme dans le lemme 4.6, nous montrons en posant $-y = b$ et $-x = a$, que

$$\begin{aligned} \widetilde{t}_b \circ h \circ t_a &= h \circ \widetilde{t}_{h^t b} \circ t_a, \\ &= h \circ t_{a^d} \circ Q(a,d)^{-1} \circ \widetilde{t}_{d^a}, \quad \text{où } d = h^t b, \\ &= t_{ha^d} \circ h \circ Q(a,d)^{-1} \circ \widetilde{t}_{d^a}. \end{aligned}$$

Donc d'après l'unicité de la décomposition $N^+G(\Omega)N^-$ nous avons

$$ha^d = v, \quad h \circ Q(a,d)^{-1} = k, \quad \text{et} \quad d^a = w.$$

D'après le lemme 4.5, ha^d et d^a sont dans $-\overline{\Omega}$, donc $v, w \in \overline{\Omega} \cap -\overline{\Omega} = \{0\}$ et par suite $g = k$, d'où (ii). $\square$

5. Contractions.

Rappelons que sur Ω on définit une métrique riemannienne, invariante par $G(\Omega)$, en posant

$$(u|v)_x = \langle P(x)^{-1}u, v\rangle \tag{5.0.1}$$

où $x \in \Omega$ et u, v sont des éléments de l'algèbre V considérée comme l'espace tangent à Ω au point x.

On dira qu'un élément g de ${}^cG$ est une contraction pour la métrique (5.0.1) si, pour tout $x \in \Omega$, on a

$$(D(g)v|D(g)v)_{g(x)} \leq (v|v)_x,$$

pour tout $v \in V$.

PROPOSITION 5.1. — *Les éléments du semi-groupe Γ sont des contractions pour la métrique (5.0.1).*

Démonstration. — Soit $v \in \Omega$ et montrons que

$$\begin{aligned} t_v : \ \Omega &\longrightarrow \ \Omega \\ x &\longmapsto \ x+v, \end{aligned}$$

est une contraction pour la métrique (5.0.1). Pour cela, il suffit de démontrer que sa différentielle

$$D(t_v)x : T_x(\Omega) \longrightarrow T_{x+v}(\Omega),$$

vérifie $\|D(t_v)x\| < 1$. Comme $D(t_v)x = I$ et que $T_x(\Omega) = T_{x+v}(\Omega) = V$, ceci revient à démontrer que

$$(w|w)_{x+v} < (w|w)_x, \qquad \forall w \in V \setminus \{0\}.$$

Soit alors $w \in V$, nous avons

$$(w|w)_{x+v} - (w|w)_x = \langle (P(x+v)^{-1} - P(x)^{-1})w, w\rangle.$$

Or il existe $g \in G(\Omega)$ et $y \in \Omega$ tel que $g(e) = v$ et $g(y) = x$, donc

$$\begin{aligned} P(x+v)^{-1} - P(x)^{-1} &= P(g(y+e))^{-1} - P(g(y))^{-1}, \\ &= g^{t^{-1}}(P(y+e)^{-1} - P(y)^{-1})g^{-1}, \end{aligned}$$

car $g \in \mathrm{Str}(V)$. Par ailleurs, il existe un système complet d'idempotents primitifs de V, $\{c_1, \cdots, c_r\}$, et des réels $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \cdots, r$ tel que $y = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j$. Par rapport à ce système, V se décompose sous la forme (*cf.* D §1):

$$V = \Big(\bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{R}c_j\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j<k} V_{jk}\Big).$$

L'opérateur $P(y+e)^{-1} - P(y)^{-1}$ est diagonalisable et ses valeurs propres suivant les sous espaces V_{jk} $(j \leq k)$ sont données par le tableau suivant :

	$\mathbb{R}c_i$	V_{jk}
$P(y+e)^{-1} - P(y)^{-1}$	$\left(\frac{1}{\lambda_i+1}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2$	$\frac{1}{(\lambda_j+1)(\lambda_k+1)} - \frac{1}{\lambda_j\lambda_k}$

Puisque ces valeurs propres sont strictement négatives, $P(y+e)^{-1} - P(y)^{-1}$ est défini négatif, et par suite $P(x+v)^{-1} - P(x)^{-1}$ est défini négatif. Ainsi t_v est une contraction stricte pour la métrique (5.0.1), ou encore

$$\big(D(t_v)w|D(t_v)w\big)_{v+x} < \big(w|w\big)_x,$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $w \in V$.

Nous en déduisons que si v est un élément de $\overline{\Omega}$ alors

$$\big(D(t_v)w|D(t_v)w\big)_{v+x} \leq \big(w|w\big)_x, \tag{5.1.1}$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $w \in V$.

D'autre part, si $x \in \Omega$ alors $j(x) = x^{-1}$, et comme $D(x^{-1})v = -P(x)^{-1}v$, donc

$$\begin{aligned} \big(-P(x)^{-1}v| - P(x)^{-1}v\big)_{x^{-1}} &= \langle v, P(x)^{-1}v\rangle, \\ &= \langle P(x)^{-1}v, v\rangle, \\ &= \big(v|v\big)_x. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Nous en déduisons, grâce à (4.1.1), (5.1.1) et (5.1.2), que si $v \in \overline{\Omega}$, alors

$$\big(D(\widetilde{t_v})w|D(\widetilde{t_v})w\big)_{\widetilde{t_v}(x)} \leq \big(w|w\big)_x,$$

pour tout $x \in \Omega$ et $w \in V$. Comme la métrique $(\cdot|\cdot)_x$ est invariante par $G(\Omega)$ nous avons pour tout $g \in \Gamma$ et tout $x \in \Omega$

$$\big(D(g)v|D(g)v\big)_{g(x)} \leq \big(v|v\big)_x \qquad \forall v \in V. \qquad \square$$

Remarque 5.2. — Posons

$$\Gamma_1 = \{t_v h\widetilde{t_w} \mid h \in G(\Omega), v \in \Omega, w \in \overline{\Omega}\}$$

et

$$\Gamma_2 = \{t_v h \widetilde{t_w} \mid h \in G(\Omega), v \in \overline{\Omega}, w \in \Omega\}.$$

Γ_1, Γ_2 et $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sont des sous semi-groupes de Γ et nous avons, pour tout $g \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et tout $x \in \Omega$,

$$\big(D(g)v|D(g)v\big)_{g(x)} < \big(v|v\big)_x, \qquad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

6. Espace symétrique de type Cayley.

Dans ce paragraphe nous allons donner des résultats et notations qui nous seront utiles pour la suite. Dans [17] nous avons montré que $H := G(\Omega)$ est le sous-groupe des éléments de ${}^cG$ fixés par l'involution η. Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(\Omega)$ et posons

$$\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}(T_\Omega) \mid \eta(X) = -X\}.$$

Alors

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q},$$

et

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^+ \oplus \mathfrak{q}^-$$

où nous avons noté $\mathfrak{q}^\pm = \mathfrak{g}(T_\Omega)_{\mp 1}$ (*cf.* §2 pour les notations).

Il existe une involution de Cartan θ qui commute avec η. Soit $K = {}^cG^\theta$ et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie. Posons

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}(T_\Omega) \mid \theta(X) = -X\},$$

alors

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

La compatibilité de θ et η implique la décomposition

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathfrak{h}_\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{q}_\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}_\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q}_\mathfrak{p},$$

où l'indice $\mathfrak{k}$ resp. $\mathfrak{p}$ désigne l'intersection avec $\mathfrak{k}$ resp. $\mathfrak{p}$.

Nous avons aussi montré dans [17] que ${}^cG/H$ est un *espace symétrique de type Cayley* au sens d'Ólafsson & Ørsted, c'est-à-dire qu'il existe dans $\mathfrak{q}$ des cônes réguliers C_1 et C_2, $\mathrm{Ad}(H)$-invariants et tels que $C_1^\circ \cap \mathfrak{k} \neq \varnothing$ et $C_2^\circ \cap \mathfrak{p} \neq \varnothing$. Dans ce cas il existe un élément Z° dans le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ tel que

$$\mathfrak{q}^\pm = \{X \in \mathfrak{g}(T_\Omega) \mid [Z^\circ, X] = \pm X\},$$

$$\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}(T_\Omega)}(Z^\circ),$$

et

$$\eta = \mathrm{Ad}(\exp(\pi i Z^\circ)).$$

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Il est aussi abélien maximal dans $\mathfrak{p}$ et dans $\mathfrak{q}$. Comme $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$, $Z^\circ \in \mathfrak{a}$. Soit $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}(T_\Omega), \mathfrak{a})$ le système de racines de $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ relativement à $\mathfrak{a}$ et choisissons dans Δ un système positif Δ^+. Soient

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{h}} &= \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(Z^\circ) = 0\} = \Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}),\\ \Delta_{\mathfrak{q}^+} &= \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(Z^\circ) = +1\},\end{aligned}$$

et

$$\Delta_{\mathfrak{q}^-} = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(Z^\circ) = -1\}.$$

Posons

$$\mathfrak{n}_{+1} = \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{q}^+}} \mathfrak{g}(T_\Omega)^\alpha,$$

et soient $N_{+1} = \exp(\mathfrak{n}_{+1})$ et $N_{-1} = \theta(N_{+1})$. Alors

$$\mathfrak{n}_\pm = \mathfrak{q}^\pm \qquad \text{et} \qquad N_{\pm 1} = N^\pm.$$

7. Décomposition d'Ol'shanskiĭ.

Soit $\mathfrak{l}$ une algèbre de Lie réelle simple hermitienne, et soit $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre complexifiée

$$\mathfrak{l}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l}.$$

Soit $L_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$. Notons μ la conjugaison de $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ relativement à $\mathfrak{l}$ et soit L un sous-groupe fermé de $L_{\mathbb{C}}$ tel que $(L^\mu)_o \subset L \subset L^\mu$.

Soit W_o un cône convexe fermé pointu et *générateur* (c'est-à-dire d'intérieur non vide) dans $\mathfrak{l}$ qui soit invariant par $\mathrm{Ad}(L)$, alors $W = iW_0$ est un cône convexe fermé dans $i\mathfrak{l}$ invariant par $\mathrm{Ad}(L)$.

THÉORÈME 7.1 (Ol'shanskiĭ).

(i) *Supposons que L et $L_{\mathbb{C}}$ soient connexes, alors $S = \exp(W)L$ est un semi-groupe fermé de $L_{\mathbb{C}}$ tel que $S \cap S^{-1} = L$.*

(ii) *L'application* Exp *de $i\mathfrak{l}$ dans $L_{\mathbb{C}}/L$, définie par*

$$\mathrm{Exp}(X) = \exp(X)L$$

est un difféomorphisme de W sur $\mathrm{Exp}(W)$.

Démonstration. — (cf. [25]).

DÉFINITION 7.2. — La décomposition $S = \exp(W)L$ est appelée *décomposition d'Ol'shanskiĭ* du semi-groupe S.

Reprenons à présent les hypothèses et les notations des paragraphes précédents; on a alors :

THÉORÈME 7.3 (Ólafsson). — *Si C_0 est un cône convexe fermé dans $\mathfrak{q}$ invariant par* $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$ *alors :*

(i) $S = G(\Omega)\exp(C_0)$ *est un semi-groupe fermé de* ${}^cG$.

(ii) *L'application* Exp *de* $C_0 \times G(\Omega)$ *dans* ${}^cG$ *définie par*

$$\mathrm{Exp}(X, g) = \exp(X)g$$

est un homéomorphisme de $C_o \times G(\Omega)$ *sur* S.

Démonstration. — (*cf.* [24]).

Posons

$$C := \overline{\Omega} + \sigma(\overline{\Omega}).$$

C est un cône convexe fermé dans $\mathfrak{q}$ et invariant par $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$.

THÉORÈME 7.4. — Γ *est un semi-groupe de Lie vérifiant la décomposition d'Ol'shanskiĭ :*

$$\Gamma = G(\Omega)\exp(C). \tag{7.4.1}$$

Démonstration. — D'après le théorème 7.3, $G(\Omega)\exp(C)$ est un semi-groupe, donc $\Gamma \subset G(\Omega)\exp(C)$. Pour montrer l'inclusion réciproque il suffit de montrer que $\exp(C) \subset \Gamma$. Supposons démontré que, pour tout $v \in \Omega$, $\exp(e + \sigma(v)) \in \Gamma$. Comme $G(\Omega)$ est transitif sur Ω et que l'action de $G(\Omega)$ sur $\mathfrak{q}$ est l'action adjointe, $\exp(u + \sigma(v)) \in \Gamma$ pour tout $u, v \in \Omega$. Puisque le semi-groupe Γ est fermé nous avons $\exp(C) \subset \Gamma$, et par suite $G(\Omega)\exp(C) \subset \Gamma$.

Pour $z, w \in V$ soit l'opérateur

$$B(z, w) = I - 2z \,\square\, w + P(z)P(w).$$

La démonstration du théorème 6.4 s'achève par le lemme suivant :

LEMME 7.5. — *Soit $v \in \Omega$, et soit $v = \sum_{k=1}^{r} \mu_k c_k$ sa décomposition spectrale, alors*

$$\begin{aligned}\exp(e + \sigma(v)) &= t_{v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}} \circ B(\tanh v^{\frac{1}{2}}, \tanh v^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \circ \widetilde{t}_{v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}} \\ &\in \Gamma^+ G(\Omega)\Gamma^-\end{aligned}$$

où $\tanh v^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{r}(\tanh\sqrt{\mu_k})c_k$, $v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{r}(\sqrt{\mu_k}\tanh\sqrt{\mu_k})c_k$ *et* $v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{r}(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\tanh\sqrt{\mu_k})c_k$.

Démonstration. — Soit $v \in \Omega$, il existe un système complet d'idempotents primitifs $\{c_1, \cdots, c_r\}$ et des réels $\mu_k > 0$ tel que $v = \sum_{k=1}^{r}\mu_k c_k$. Pour chaque $k \in \{1, \cdots, r\}$ on définit l'homomorphisme

$$f_k : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow {}^cG$$

par

$$\begin{aligned} f_k : \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto t_{\alpha c_k} = \exp(\alpha c_k), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \widetilde{t}_{\alpha c_k} = j \circ t_{\alpha c_k} \circ j = \exp(\sigma(\alpha c_k)), \\ \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} &\longmapsto B(c_k, (1-\mu)c_k). \end{aligned}$$

Nous avons, pour tout $k = 1, \cdots, r$,

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_k & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\sqrt{\mu_k} & \frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\mathrm{sh}\sqrt{\mu_k} \\ \sqrt{\mu_k}\,\mathrm{sh}\sqrt{\mu_k} & \mathrm{ch}\sqrt{\mu_k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\tanh\sqrt{\mu_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{ch}\sqrt{\mu_k}} & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\sqrt{\mu_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{\mu_k}\tanh\sqrt{\mu_k} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En appliquant l'homomorphisme f_k nous avons alors

$$\begin{aligned} &\exp(c_k + \sigma(\mu_k c_k)) \\ &\quad = t_{(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\tanh\sqrt{\mu_k})c_k} \circ B\Big(c_k, \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\sqrt{\mu_k}}\Big)c_k\Big) \circ \widetilde{t}_{(\sqrt{\mu_k}\tanh\sqrt{\mu_k})c_k}. \end{aligned}$$

LEMME 7.6. — *Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et tout idempotent $c \in V$, nous avons*

$$B\Big(c, \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mu}\Big)c\Big)^2 = B((\tanh\mu)c, (\tanh\mu)c).$$

Démonstration. — En effet

$$\begin{aligned} B\Big(c, \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mu}\Big)c\Big)^2 = &I - 4\Big(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mu}\Big)L(c) + 4\Big(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mu}\Big)^2 L^2(c) \\ &+ 2\Big(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mu}\Big)^2 P(c) - 2\Big(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mu}\Big)^3 L(c)P(c) \\ &- 2\Big(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mu}\Big)^3 P(c)L(c) + \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mu}\Big)^4 P(c). \end{aligned}$$

Or $L(c)P(c) = P(c)L(c)$, et en appliquant la formule "*magique*" de V, *i.e.*

$$L(x^2y) - L(x^2)L(y) = 2\{L(xy) - L(x)L(y)\}L(x)$$

(*cf.* [2], [4] ou [7]) à $x = y = c$, nous avons $P(c)L(c) = P(c)$. Donc, en écrivant $2L^2(c) = P(c) + L(c)$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} B(c, (1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\mu})c)^2 &= I - 2(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\mu})L(c) \\ &\quad + \left[4(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\mu})^2 - 4(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\mu})^3 + (1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\mu})^4\right] P(c), \\ &= I - 2(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\mu})L(c) + (1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\mu})^2 P(c), \\ &= I - 2(\tanh^2\mu)L(c) + (\tanh^4\mu)P(c), \\ &= B((\tanh\mu)c, (\tanh\mu)c). \end{aligned}$$

De plus l'opérateur symétrique $B\Big(c, \Big(1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch}\mu}\Big)c\Big)$ est positif, pour le voir il suffit de calculer ses valeurs propres dans la décomposition de Peirce par rapport à l'idempotent c, d'où le lemme 7.6. □

Ainsi, pour tout $j = 1, \cdots, r$, nous avons

$$\exp(c_k + \sigma(\mu_k c_k)) \\ = t_{(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\tanh\sqrt{\mu_k})c_k} \circ B((\tanh\sqrt{\mu_k})c_k, (\tanh\sqrt{\mu_k})c_k)^{\frac{1}{2}} \circ \widetilde{t}_{(\sqrt{\mu_k}\tanh\sqrt{\mu_k})c_k}.$$

Comme les idempotents c_k sont deux à deux orthogonaux, les homomorphismes f_k commutent, donc

$$\exp(e + \sigma(v)) = t_{v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}} \circ B(\tanh v^{\frac{1}{2}}, \tanh v^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \circ \widetilde{t}_{v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}}.$$

D'autre part les éléments $v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}$ et $v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}$ sont dans Ω. Nous en déduisons que $t_{v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}}$ et $\widetilde{t}_{v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}}$ appartiennent respectivement à Γ^+ et Γ^-. De plus, $B(\tanh v^{\frac{1}{2}}, \tanh v^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = P((e - \tanh v)^{\frac{1}{2}})$, donc il s'agit d'un élément de $G(\Omega)$ puisque $(e - \tanh v)$ appartient à Ω. □

8. Forme réelle du semi-groupe holomorphe d'Ol'shanskiĭ.

Notons $\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q})$ l'ensemble des cônes convexes, fermés, générateurs dans $\mathfrak{q}$ qui sont invariants par $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$. D'après le théorème de Kostant-Vinberg, (*cf.* [24] ou [25]), il existe un unique cône (à un signe près) $C_{\min}$ et un unique cône (à un signe près) $C_{\max}$ dans $\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q})$ tel que

$$C_{\min} \subset W \subset C_{\max},$$

pour tout cône W dans $\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q})$. De plus

$$C^*_{\min} = C_{\max}.$$

D'autre part, d'après Ólafsson (*cf.* [24]), nous avons les propriétés suivantes :

1) $\overline{\Omega}$ est (à un signe près) le seul cône convexe, fermé, pointu et générateur de $\mathfrak{q}^+$, qui soit invariant par $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$.

2) Les seuls cônes convexes, fermés pointus et générateurs de $\mathfrak{q}$ qui sont invariants par $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$ sont :

$$C_{\mathfrak{k}}, \quad -C_{\mathfrak{k}}, \quad C_{\mathfrak{p}}, \quad -C_{\mathfrak{p}},$$

où

$$C_{\mathfrak{k}} = \overline{\Omega} + \theta(\overline{\Omega}),$$
$$C_{\mathfrak{p}} = \overline{\Omega} - \theta(\overline{\Omega}).$$

Ainsi

$$\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q}) = \{C_{\mathfrak{p}}, -C_{\mathfrak{p}}, C_{\mathfrak{k}}, -C_{\mathfrak{k}}\}.$$

De plus $\mathrm{int}(C_{\mathfrak{p}}) \cap \mathfrak{p} \neq \varnothing$ et $\mathrm{int}(C_{\mathfrak{k}}) \cap \mathfrak{k} \neq \varnothing$.

3) Notons $\mathrm{Cone}_{G(\Omega),\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})$ l'ensemble des cônes W de $\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q})$ tel que $\mathrm{int}(W) \cap \mathfrak{p} \neq \varnothing$. Donc

$$\mathrm{Cone}_{G(\Omega),\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}) = \{C_{\mathfrak{p}}, -C_{\mathfrak{p}}\}.$$

Si $W \in \mathrm{Cone}_{G(\Omega),\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})$ alors $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}({}^{c'}G)W)} \in \mathrm{Cone}_{{}^{c'}G}({}^{c'}\mathfrak{g}(\mathcal{D}))$, où $c' = -ic$, ${}^{c'}G = c'Gc'^{-1}$ et ${}^{c'}\mathfrak{g}(\mathcal{D})) = \mathrm{Ad}(c')\mathfrak{g}(\mathcal{D})$.

Soit maintenant $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{q}^+}$ et $X \in \mathfrak{g}(T_\Omega)^\alpha$ (*cf.* §6). Comme $\mathfrak{g}(T_\Omega)^\alpha \cap \mathfrak{g}(\Omega) = \{0\}$ et que $\mathfrak{g}(\Omega) = \mathfrak{g}(T_\Omega)^{\theta\sigma}$ alors $\theta\sigma(X) = -X$. Nous en déduisons que pour tout $X \in \mathfrak{q}^+$, $\theta(X) = -\sigma(X)$. Donc $C_{\mathfrak{p}} = C := \overline{\Omega} + \sigma(\overline{\Omega})$ et C est le cône maximal $C_{\max}$ de $\mathrm{Cone}_{G(\Omega),\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})$.

THÉORÈME 8.1 (Ol'shanskiĭ). — *Soit W un cône convexe générateur de $i\mathfrak{q}$ invariant par* $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$ *tel que* $\mathrm{int}(W) \cap \mathfrak{p} \neq \varnothing$, *et soit* $\mathcal{W} = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}({}^{c'}G)(W))}$, *alors*

$${}^{c'}G \exp(\mathcal{W}) = \exp(\mathcal{W})\, {}^{c'}G$$

est un semi-groupe fermé dans $G_{\mathbb{C}}$ homéomorphe à ${}^{c'}G \times \mathcal{W}$.

Démonstration. — (*cf.* [3], [18] et [24]).

Rappelons que $\mathcal{D}$ désigne le domaine borné de $V_{\mathbb{C}}$,

$$\mathcal{D} = p(T_\Omega) = \{z \in V_{\mathbb{C}} \mid I - z \,\square\, \overline{z} \gg 0\}.$$

THÉORÈME 8.2 (Ol'shanskiĭ).

$$\{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D}\} = G \exp(-i\mathcal{C}_{\max}),$$

où $\mathcal{C}_{\max}$ *est le cône maximal de l'ensemble des cônes convexes, fermés générateurs de* $\mathfrak{g}(\mathcal{D})$ *invariants par* $\mathrm{Ad}(G)$.

Démonstration. — (*cf.* [25]).

Notons Ξ ce semi-groupe, appelé *semi-groupe holomorphe d'Ol'shanskiĭ* associé au domaine $\mathcal{D}$,

$$\Xi := \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D}\},$$

et posons

$${}^{c'}\Xi := c' \, \Xi \, c'^{-1},$$

nous avons alors :

THÉORÈME 8.3.

$${}^{c'}\Xi \cap {}^{c}G = \Gamma.$$

Démonstration. — D'après le théorème 8.2,

$$\Xi = G \exp(-i\mathcal{C}_{\max}),$$

donc

$${}^{c'}\Xi = {}^{c'}G \exp(-i \, \mathrm{Ad}(c')^{-1} \mathcal{C}_{\max}).$$

$\mathrm{Ad}(c')^{-1}\mathcal{C}_{\max}$ est le cône maximal de ${}^{c'}\mathfrak{g}(\mathcal{D})$, invariant par ${}^{c'}G$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(c')^{-1}\mathcal{C}_{\max} &= \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}({}^{c'}G)(iC_{\max}))}, \\ &= \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}({}^{c'}G)(iC))}. \end{aligned}$$

D'où

$${}^{c'}\Xi = {}^{c'}G \exp(C).$$

Par suite

$$\begin{aligned} {}^{c'}\Xi \cap {}^{c}G &= {}^{c'}G \exp(C) \cap {}^{c}G, \\ &= G(\Omega) \exp(C), \\ &= \Gamma. \end{aligned}$$

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ph. BOUGEROL, Kalman filtring with random coefficients and contractions, SIAM. J. Control and Optimization, 31 (1993), 942–959.

[2] H. BRAUN & M. KOECHER, Jordan Algebren, Springer, 1975.

[3] N. DÖRR, On Ol'shanskiĭ semigroup, Math. Ann., 288 (1990), 21–33.

[4] J. FARAUT , Algèbres de Jordan et cônes symétriques, École d'été du CIMPA, Université de Poitiers, 1989.

[5] J. FARAUT, Espaces symétriques ordonnés et algèbres de Volterra, J. of Math. Soc. Japan, 43, 1 (1991), 133–146.

[6] J. FARAUT, Fonctions sphériques sur un espace symétrique ordonné de type Cayley, Preprint, avril 1994.

[7] J. FARAUT & A. KORANYI, Analysis on symmetric cones, À paraître, Oxford University Press.

[8] J. FARAUT, J. HILGERT & G. ÓLAFSSON, Spherical functions on ordered symmetric spaces, Preprint, July 1993.

[9] S. HELGASON, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press. New York-London, 1978.

[10] J. HILGERT, K.H. HOFMANN & J.D. LAWSON, Lie groups, convex cones, and semigroups Oxford University Press, 1989.

[11] J. HILGERT, G. ÓLAFSSON & B. ØERSTED, Hardy spaces on affine symmetric spaces, J. reine angew. Math., 415 (1991), 189–218.

[12] M. KOECHER, Die Geodätischen von Positivitätsbereichen, Math. Ann., 135 (1958), 192–202.

[13] M. KOECHER, Jordan algebras and their applications, Lectures notes, Univ. of Minnesota, Minneapolis, 1962.

[14] M. KOECHER, An elementary approach to bounded symmetric domains, Lectures notes, Rice University, 1969.

[15] A. KORANYI, Complex analysis and symmetric domains, École d'été du CIMPA, Université de Poitiers, 1988.

[16] K. KOUFANY, Semi-groupe de Lie associé à une algèbre de Jordan euclidienne, Doctorat de l'Université de Nancy I, octobre 1993.

[17] K. KOUFANY, Réalisation des espaces symétriques de type Cayley, C.R. Acad. Sci. Paris, 318, Série I (1994), 425–428.

[18] J.D. LAWSON, Polar and Ol'shanskiĭ decompositions, Seminaire Sophus Lie, 1, 2 (1991), 163–173.

[19] O. LOOS, Jordan pairs, Lectures Notes in Math. 460, Springer, 1974.

[20] O. LOOS, Bounded symmetric domains and Jordan pairs, Lectures notes, University of California, Irvine, 1977.

[21] K.-H. NEEB, Holomorphic representation theory I, Preprint, 1993.

[22] K.-H. NEEB, Holomorphic representation theory II, Preprint, 1993.

[23] K.-H. NEEB, Holomorphic representation theory III, Preprint, 1993.

[24] G. ÓLAFSSON, Causal symmetric spaces, Math. Gotting., 15 1990.

[25] G.I. OL'SHANSKIĬ, Invariant cones in Lie algebras, Lie semigroups, and the holomorphic discrete series, Funct. Anal. Appl., 15 (1982), 275–285.

[26] G.I. OL'SHANSKIĬ, Convex cones in symmetric Lie algebras, Lie semigroups and invariant causal (order) structures on pseudo-Riemannian symmetric spaces, Soviet Math. Dokl., 26 (1982), 97–101.

[27] G.I. OL'SHANSKIĬ, Complex Lie semigroups, Hardy spaces and the Gelfand Gindikin program, Topics in group theory and homological algebra, Varoslavl University Press, 1982, p. 85–98 (Russian); English translation in Differential Geometry and its Applications, 1 (1991), 235–246.

[28] I. SATAKE, Algebraic structures of symmetric domains, Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980.

[29] E.B. VINBERG, Homogeneous cones, Soviet Math. Dokl., 1 (1960), 787–790.

[30] M. WOJTKOWSKI, Invariant families of cones and Lyapunov exponents, Ergod. Theo. and Dyn. Sys., 5 (1985), 145–161.

Manuscrit reçu le 7 janvier 1994,
révisé le 5 septembre 1994.

Khalid KOUFANY,
Université Henri Poincaré, Nancy 1
Institut Élie Cartan
URA n^{o} 750 CNRS
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex (France).
E-mail: koufany@iecn.u-nancy.fr