ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOISE MICHEL
CLAUDE WEBER

Sur le rôle de la monodromie entière dans la topologie des singularités

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 1 (1986), p. 183-218
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_1_183_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 1 (1986), 183 - 218

SUR LE RÔLE DE LA MONODROMIE ENTIÈRE DANS LA TOPOLOGIE DES SINGULARITÉS

par F. MICHEL et C. WEBER

1. Introduction.

1.1. Soit $f: \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}$ une application polynomiale complexe. Supposons que $f(0) = 0$ et que 0 soit une singularité isolée de f.

Posons $V = f^{-1}(0)$. Soient B_ϵ^{2n+2} la boule et S_ϵ^{2n+1} la sphère de rayon ϵ, centrées en l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$. Soit $K_\epsilon = V \cap S_\epsilon^{2n+1}$.

Si ϵ est suffisamment petit, K_ϵ est une sous-variété différentiable de S_ϵ^{2n+1}, de dimension réelle $(2n-1)$. $V \cap B_\epsilon^{2n+2}$ est orientée par les complexes, ce qui munit K_ϵ de l'orientation induite sur le bord. De plus, la classe d'isotopie ambiante de la sous-variété K_ϵ dans S_ϵ^{2n+1} ne dépend pas de ϵ. C'est pourquoi nous omettrons ϵ dans la suite. Cette classe d'isotopie est, par définition, le type topologique de la singularité.

Maintenant, soit $\mathbf{X}$ le complémentaire d'un petit voisinage tubulaire ouvert de K dans S^{2n+1}. J. Milnor montre dans [9] que l'application de $\mathbf{X}$ dans S^1 définie par : $z \longmapsto \dfrac{f(z)}{\|f(z)\|}$ est une fibration localement triviale.

Nous noterons Σ une fibre de cette fibration. Σ est une variété réelle, compacte, connexe, orientée, de dimension $2n$. Comme la singularité de f est isolée en l'origine, la fibration de $\mathbf{X}$ s'étend en une décomposition de S^{2n+1} en livre ouvert, de sorte que l'on peut considérer K comme le bord orienté de Σ.

Mots-clés : Singularités de courbes planes – Fibre de Milnor – Monodromie – Modules cycliques.

La fibration sur le cercle est classée topologiquement par un automorphisme de recollement $h : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, dont la classe d'isotopie est bien déterminée. Nous appellerons monodromie topologique de la singularité n'importe quel représentant de cette classe d'isotopie.

1.2. On sait que $H_n(\Sigma ; \mathbf{Z})$ est un groupe abélien libre de rang μ, où μ est le nombre de Milnor de la singularité. h_* agit de façon bien définie comme automorphisme de $H_n(\Sigma ; \mathbf{Z})$, de sorte que ce dernier groupe est muni d'une structure de $\mathbf{Z}T = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$–module, t agissant via h_*.

Ce module sera noté $M(f)$ et appelé le module de monodromie entière de f.

Semblablement, pour n'importe quel corps $\mathbf{F}$, l'espace vectoriel $H_n(\Sigma ; \mathbf{F})$ est muni d'une structure de $\mathbf{F}T$-module, que nous désignerons par $M_{\mathbf{F}}(f)$.

La détermination du module $M(f)$ est au centre de l'étude topologique des singularités. Pensez au "théorème de la monodromie", aux travaux de N. A'Campo (et de beaucoup d'autres. . .). Les trois questions suivantes sont bien naturelles et implicites chez plusieurs auteurs :

1) Est-ce que $M(f)$ est isomorphe à une somme directe de modules cycliques $\bigoplus_i \mathbf{Z}T/\mathfrak{a}_i$ où les $\mathfrak{a}_i$ sont des idéaux principaux de $\mathbf{Z}T$?

Remarque. – La question revient à demander si $M(f)$ possède une matrice de présentation diagonale ou si h_* possède une forme de Jordan sur $\mathbf{Z}$.

2) Est-ce que $M_{\mathbf{Q}}(f)$ détermine $M(f)$?

3) Est-ce que $M(f)$ détermine la topologie de la singularité ?

Il est connu que la réponse aux trois questions est oui pour les singularités de courbes planes $(n = 1)$, n'ayant qu'une branche à l'origine. Ceci est dû à W. Burau [3] et O. Zariski [15] pour les question 2) et 3) et est implicite chez N. A'Campo [1] pour la question 1).

1.3. Dans cet article, nous montrons que la réponse à chacune des questions est non en général pour les singularités de courbes planes à plusieurs branches. Plus explicitement :

1) Les singularités

$$(X - Y^2)(X^3 - Y^{14}) = 0 \quad \text{et} \quad (X^{37} - Y^6)(X^{10} - Y^3) = 0$$

ont un module de monodromie entière qui n'est pas somme directe de modules cycliques. La monodromie entière de la première singularité est d'ordre fini, tandis que, pour la seconde, cet ordre est infini.

Note. — Dans [10], P. Orlik conjecture que $M(f)$ est somme directe de modules cycliques dans le cas où f est quasi-homogène. De fait, pour les singularités quasi-homogènes à deux variables, on peut montrer par une généralisation des méthodes employées au § 3 (revêtements cycliques de surfaces planaires à un nombre quelconque de composantes de bord) que la monodromie entière est somme directe de modules cycliques et que les facteurs sont ceux souhaités par P. Orlik. Cependant, la "conjecture d'Orlik" a été parfois étendue à des singularités plus générales, par exemple à celles de monodromie (homologiquement) finie. Les deux exemples précédents montrent que ces conjectures plus générales sont fausses.

2) Les deux singularités $(X^{44} - Y^{21})(X^{11} - Y^{14}) = 0$ et $(X^{22} - Y^7)(X^{33} - Y^{28}) = 0$ ont des monodromies rationnelles isomorphes mais des monodromies entières différentes. Cet exemple a été utilisé originalement par M.-C. Grima [5] pour montrer que $M_{\mathbf{Q}}$ ne détermine pas la topologie.

3) Les singularités $XY(X^3 - Y^2) = 0$ et $XY(X^5 - Y) = 0$ ont des modules de monodromie entière tous deux isomorphes à : $\mathbf{Z}T/(t^{11} - 1) \oplus \mathbf{Z}T/(t - 1)$ et sont pourtant topologiquement distinctes.

1.4. Pour obtenir ces exemples, nous étudions systématiquement les singularités à deux branches d'équation : $(X^a - Y^b)(X^c - Y^d) = 0$. Nous utilisons des théorèmes profonds de la topologie des variétés de dimension trois pour obtenir une présentation maniable du module $M(f)$. Cette façon d'aborder la topologie des singularités de courbes planes est d'ailleurs la clé du travail de D. Eisenbud et W. Neumann [4].

Voici quel est, plus précisément, le contenu du présent article :

Au § 2, nous étudions la topologie des singularités $(X^a - Y^b)(X^c - Y^d) = 0$. Dans ce cas, la surface de Jaco-Shalen-Johannson se compose d'un unique tore essentiel qui sépare le complémentaire $\mathbf{X}$ en deux composantes $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$. Un théorème de R. Roussarie et W. Thurston implique que la fibration de J. Milnor de $\mathbf{X}$ induit des fibrations de $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ sur S^1. Un théorème de F. Waldhausen permet de décrire la monodromie de la fibration de $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, 2)$ à partir de la monodromie (!) d'un revêtement cyclique d'un pantalon.

Au § 3, nous étudions la monodromie entière des revêtements cycliques de pantalons. Des exemples tels que 3) ci-dessus sont une conséquence facile de ces calculs.

Au § 4, nous obtenons une présentation simple de $M(f)$ dans le cas où la monodromie est finie, car il n'y a pas de problème de recollement le long du tore essentiel, en ce qui concerne l'homologie.

Une première application en est faite au § 5, où l'on donne des exemples montrant que $M_{\mathbf{Q}}(f)$ ne détermine pas $M(f)$.

L'étude algébrique de la présentation obtenue au § 4 est faite au § 6. Nous démontrons un théorème qui dit exactement dans quelles circonstances un tel module est somme directe de modules cycliques.

Au § 7, nous indiquons comment obtenir facilement des exemples comme la première singularité de l'exemple 1).

Au § 8, nous nous attaquons au cas où la monodromie est infinie, pour obtenir la deuxième singularité de l'exemple 1).

1.5. Les faits classiques suivants sont utilisés sans autre dans cet article :

A. Si un facteur direct de $M(f)$ est de la forme $\mathbf{Z}T/\mathfrak{a}$ alors l'idéal $\mathfrak{a}$ est nécessairement principal. Cela vient de ce que $M(f)$ est sans $\mathbf{Z}$-torsion. En effet, les idéaux non principaux I de $\mathbf{Z}T$ sont engendrés par deux éléments m et $p(t), m \in \mathbf{Z}, p(t) \in \mathbf{Z}T$, $p(t)$ non constant, tels que m ne divise pas $p(t)$. Dans ces conditions, $\mathbf{Z}T/I$ a de la $\mathbf{Z}$-torsion.

B. Les racines du polynôme caractéristique de h_* sont toutes des racines de l'unité (théorème de la monodromie). De sorte que, dire que la monodromie homologique est finie (i.e. d'ordre fini) est équivalent à dire que $M_{\mathbf{Q}}(f)$ est semi-simple.

1.6. Nous avons largement profité d'un exposé d'A. Durfee aux Plans-sur-Bex 1982 sur les problèmes d'Orlik, ainsi que d'un exposé de W. Neumann sur les entrelacs toriques itérés.

D'autre part, nous tenons à remercier très chaleureusement Lê Dung Trang de nous avoir patiemment expliqué la théorie des singularités et de nous avoir fortement poussés à entreprendre ce travail.

1.7. Une partie des résultats présentés ici a été annoncée dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [8].

1.8. Ce travail a été effectué grâce à l'aide du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

2. Topologie des singularités $(X^a - Y^b)(X^c - Y^d) = 0$.

2.1. Soit $f(X, Y) = (X^a - Y^b)(X^c - Y^d)$. Nous supposons : pgcd $(a, b) = 1$; pgcd $(c, d) = 1$ et $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, de sorte que la singularité est réduite et possède exactement deux branches à l'origine. Le type topologique de la singularité est représenté par un entrelacs orienté à deux composantes dans S^3. On peut le décrire ainsi :

Dans S^3, choisissons un cercle non noué Γ_2, que nous orientons arbitrairement. Choisissons ensuite trois tores concentriques d'âme Γ_2. Sur le plus intérieur des trois, dessinons un nœud du tore K_2 de type (b, a), que l'on oriente parallèlement à Γ_2. Ici, a est le coefficient d'enlacement de K_2 avec Γ_2. (Convention main gauche). Sur le tore le plus extérieur, dessinons pareillement un nœud du tore K_1 de type (d, c). K consiste en la réunion de K_1 et K_2.

Appelons F le tore intermédiaire.

2.2. Soit **X** le complémentaire dans S^3 d'un petit voisinage tubulaire ouvert de K. C'est une variété compacte de dimension trois, dont le bord consiste en la réunion disjointe de deux tores. Par le théorème de J. Milnor, **X** fibre sur S^1. Par conséquent, **X** est feuilletée par des surfaces compactes, orientées, toutes difféomorphes à la fibre Σ de la fibration. (Le feuilletage est transverse au bord.)

Le tore F est essentiel dans $\mathbf{X}$, c'est-à-dire incompressible et non parallèle au bord. Comme il est évident que le feuilletage de $\mathbf{X}$ ne contient pas de composante de G. Reeb, le théorème de R. Roussarie et W. Thurston, cf. [11, thm. 1, p. 104], dit que l'on peut isotoper F pour qu'il soit transverse au feuilletage. Remarquer qu'on ne peut l'isotoper dans une feuille puisque F n'a pas de bord et que Σ en a.

Appelons $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ les deux composantes de $\mathbf{X}$ séparées par F. Le théorème de stabilité de G. Reeb implique alors que le feuilletage induit sur $\mathbf{X}_i$ provient d'une fibration sur S^1 $(i = 1, 2)$.

Pour fixer les notations, appelons $\mathbf{X}_2$ la composante qui contient Γ_2 et appelons $\mathbf{X}_1$ l'autre. Appelons Σ_i la fibre de la fibration de $\mathbf{X}_i$ sur S^1.

2.3. Nous allons maintenant indiquer comment l'on peut donner des modèles pour ces fibrations partielles.

Pour cela, observons que chaque variété $\mathbf{X}_i$ est fibrée de façon naturelle en cercles, "à la Seifert". Les fibres typiques sont des copies orientées des noeuds du tore K_i que nous avons considérés précédemment. Dans $\mathbf{X}_2$, il n'y a qu'une seule fibre exceptionnelle : le cercle Γ_2. Dans $\mathbf{X}_1$ la seule fibre exceptionnelle est un cercle que nous appellerons Γ_1. Il est "dual" à Γ_2.

Note. – Comme $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, les fibrations en cercles ne se recollent pas le long de F. De là, on déduit que la surface de Jaco-Shalen-Johannson pour $\mathbf{X}$ consiste en exactement le tore F. Il découle de là, par un argument classique, cf. par exemple [6], que l'on ne peut trouver de représentant h de la monodromie topologique qui soit d'ordre fini. Nous utiliserons plus tard au § 8 que les "twists" partiels de recollement ne sont pas nuls.

2.4. Nous sommes maintenant en position d'utiliser un théorème de F. Waldhausen, que nous énonçons de façon détaillée en espérant être utiles au lecteur.

THEOREME (F. Waldhausen). – *Soit* M *une variété de dimension 3, compacte, éventuellement à bord. On suppose que* M *est fibrée en cercles au sens de Seifert et que la fibration est orientable, c'est-à-dire provient d'une action de* S^1 *sur* M. *On note* γ *une fibre-type. Soit* $\pi : M \longrightarrow B$ *la projection sur la base, c'est-à-dire sur l'espace des orbites. (*γ *est un cercle,* B *est une surface.)*

D'autre part, soit $f : M \longrightarrow S^1$ *une fibration (localement triviale), telle que* $f(\gamma)$ *ne soit pas homotope à zéro. Soit* $\Sigma = f^{-1}(1)$ *une fibre de cette fibration. (*Σ *est une surface).*

Alors, il existe un homéomorphisme $g : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ *et un homéomorphisme* $H : T(g) \longrightarrow M$, *où* $T(g)$ *est le "mapping torus" de* g, *c'est-à-dire l'espace* $\Sigma \times [0, 1]$, *modulo la relation d'équivalence qui identifie* $(x, 0)$ *à* $(g(x), 1)$, *tels que :*

(i) $H(\Sigma \times \{0\}) = \Sigma'$ *est isotope à* $f^{-1}(1)$

(ii) g *est d'ordre fini*

(iii) H *envoie homéomorphiquement les trajectoires de* $T(g)$ *(pour le flot parallèle aux segments* $[0, 1]$*) sur les cercles de la fibration de Seifert.*

(iv) *Si l'on identifie* M *à* $T(g)$ *via* H, *la projection naturelle de* $T(g)$ *sur* S^1 *est homotope à* f.

(v) $\Sigma/(g)$ *s'identifie à* B *et la projection naturelle* $\Sigma \to \Sigma/(g)$ *est un revêtement cyclique ramifié, dont le générateur du groupe de Galois correspondant à l'élément* $1 \in \mathbf{Z}/u$ *est précisément* g. *Ici,* u *est le degré en valeur absolue de l'application* $f \mid \gamma \longrightarrow S^1$.

(vi) g *est un représentant de la monodromie topologique de la fibration* f.

Références. – Dans le cas où la fibration de Seifert n'a pas de fibres exceptionnelles, ce théorème fait essentiellement l'objet du § 2 de [14].

Dans le cas où la fibration de Seifert a des fibres exceptionnelles, il faut remplacer le théorème d'horizontalisation de Waldhausen (Satz 2.8) par le théorème VI.34, p. 107 de [6].

Remarquer en lisant Waldhausen, que l'hypothèse $f(\gamma)$ non homotope à zéro empêche Σ d'être verticalisée. De plus, les cas exceptionnels dans Waldhausen et dans Jaco s'éliminent soit en utilisant cette hypothèse, soit en utilisant que M fibre sur S^1.

2.5. Programme pour obtenir un modèle de Σ et de h :

(i) On "déramifie" la situation en enlevant de $\mathbf{X}_i$ un petit voisinage fibré en cercles de Γ_i. On obtient une variété de dimension trois $\check{\mathbf{X}}_i$ et une fibre $\check{\Sigma}_i$. La base de la "vraie" fibration en cercles est maintenant un pantalon P. La projection $\pi_i | \check{\Sigma}_i \longrightarrow \mathrm{P}$ est un revêtement non ramifié. Comme P est planaire, ce revêtement cyclique est entièrement connu quand on le connaît sur le bord de P.

(ii) Ayant décrit ce revêtement non ramifié, on rajoute la ramification.

(iii) Il reste un problème de recollement de Σ_1 et de Σ_2, et surtout de h_1 et de h_2, le long de F.

Note. – Le même principe peut être utilisé pour obtenir un modèle de la fibre et de la monodromie topologique pour tous les entrelacs toriques itérés qui fibrent sur S^1, donc en particulier pour toutes les singularités de courbes planes. Une telle description est essentiellement l'objet du travail de D. Eisenbud et W. Neumann [4].

3. Revêtements cycliques d'un pantalon.

3.1. Par définition, un pantalon P est une surface planaire, compacte, orientée, avec exactement trois composantes de bord. Notons x, y et z les trois composantes en question, munies de l'orientation induite sur le bord. Nous noterons par les mêmes lettres les classes qu'elles représentent dans $H_1(\mathrm{P})$.

Note. – Dans ce paragraphe, l'homologie est toujours à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

Soit u un entier positif et soit $\varphi : H_1(\mathrm{P}) \longrightarrow \mathbf{Z}/u$ un homomorphisme. Soit $\pi : \hat{\mathrm{P}} \longrightarrow \mathrm{P}$ le revêtement galoisien (non nécessairement connexe) de P défini par φ. La classe de $1 \in \mathbf{Z}/u$ détermine un automorphisme de revêtement $g : \hat{\mathrm{P}} \longrightarrow \hat{\mathrm{P}}$, générateur du groupe de Galois. L'automorphisme g_* de $H_1(\hat{\mathrm{P}})$ induit par g munit $H_1(\hat{\mathrm{P}})$ d'une structure de $\mathbf{Z}T$-module.

D'autre part, considérons l'anneau P_x obtenu à partir du pantalon P en collant un disque le long de x. Le revêtement cylique $\pi : \hat{\mathrm{P}} \longrightarrow \mathrm{P}$ s'étend en un revêtement ramifié $\pi_x : \hat{\mathrm{P}}_x \longrightarrow \mathrm{P}_x$.

La surface $\hat{P}_x$ est obtenue à partir de $\hat{P}$ en collant un disque le long de chaque composante de bord de $\hat{P}$ qui se trouve au-dessus de x. L'automorphisme g s'étend à $\hat{P}_x$, de sorte que $H_1(\hat{P}_x)$ est aussi muni d'une structure de $\mathbf{Z}T$-module.

3.2. Le but du § 3 est de décrire la structure des $\mathbf{Z}T$-modules $H_1(\hat{P})$ et $H_1(\hat{P}_x)$. Pour cela, nous aurons besoin de quelques faits classiques concernant les polynômes cyclotomiques et les résultants.

Notation. – Soit r un entier positif. Nous noterons $\Phi_r(t)$ le polynôme cyclotomique des racines primitives r^e de l'unité.

Fait I. – Le résultant $R(\Delta_1(t), \Delta_2(t))$ de deux polynômes $\Delta_i(t) \in \mathbf{Z}[t]$ est égal à 1 si et seulement si il existe deux polynômes $\gamma_i(t) \in \mathbf{Z}[t]$, tels que

$$1 = \gamma_1(t)\,\Delta_1(t) + \gamma_2(t)\,\Delta_2(t).$$

Voir [13, § 30, formule (4)].

Fait II. – Soient s_1 et s_2 deux entiers positifs, et soit p un nombre premier. Alors p divise $R(\Phi_{s_1}(t), \Phi_{s_2}(t))$ si et seulement si $s_1 = s_2 p^j$, $j \in \mathbf{Z}$. Voir [2], par exemple.

3.3. Lemme. – *Soient r_1 et r_2 deux entiers premiers entre eux. Soit r un entier positif. Considérons les polynômes :*

$$\frac{t^{rr_1} - 1}{t^r - 1} \quad \text{et} \quad \frac{t^{rr_2} - 1}{t^r - 1}.$$

Alors il existe des polynômes $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ tels que :

1) $1 = \gamma_1(t)\dfrac{t^{rr_1} - 1}{t^r - 1} + \gamma_2(t)\dfrac{t^{rr_2} - 1}{t^r - 1}$.

2) $\gamma_1(t)$ et $(t^r - 1)$ *n'ont pas de facteur commun dans* $\mathbf{Z}[t]$.

Preuve. – Si $Q_1(s)$, $Q_2(s)$ et $Q_3(s)$ sont trois polynômes de $\mathbf{Z}[s]$, on a l'égalité : $R(Q_1 Q_2, Q_3) = R(Q_1, Q_3)\,R(Q_2, Q_3)$.

En utilisant convenablement cette égalité et le fait II, on voit que le résultant de $\dfrac{s^{r_1} - 1}{s - 1}$ et de $\dfrac{s^{r_2} - 1}{s - 1}$ est égal à 1.

Par le fait I, il existe des polynômes $\mu_i(s) \in \mathbf{Z}[s]$, tels que :

$$1 = \mu_1(s)\frac{s^{r_1}-1}{s-1} + \mu_2(s)\frac{s^{r_2}-1}{s-1}.$$

Maintenant, si $r_2 = 1$, on choisit $\mu_1(s) \equiv 0$ et $\mu_2(s) \equiv 1$. Si $r_2 \neq 1$, remarquons que $1 = \mu_1(1)\, r_1 + \mu_2(1)\, r_2$, ce qui entraîne $\mu_1(1) \neq 0$. Donc $(s-1)$ ne divise pas $\mu_1(s)$. Si l'on pose $\gamma_i(t) = \mu_i(t^r)$ pour $i = 1, 2$, les $\gamma_i(t)$ satisfont toutes les conditions du lemme.

3.4. Revenons aux revêtements de pantalons. Soit ℓ le représentant modulo u de $\varphi(x)$ compris entre 1 et u. De même, soient m le représentant de $\varphi(y)$ et n celui de $\varphi(z)$.

Notations. – $d_x = \text{pgcd}\,(u, \ell)$, $d_y = \text{pgcd}\,(u, m)$, $d_z = \text{pgcd}\,(u, n)$, $d = \text{pgcd}\,(d_x, d_y, d_z)$.

Remarque. – Comme $x + y + z$ est homologue à zéro, on a $\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = 0$. Ceci entraîne plusieurs égalités du genre : $d = \text{pgcd}\,(d_x, d_y) = \text{pgcd}\,(d_x, m)$ etc.

3.5. Proposition. – *Le* $\mathbf{Z}$T-*module* $\mathrm{H}_1(\hat{\mathrm{P}}_x)$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}\mathrm{T}\Big/\dfrac{(t^u-1)(t^d-1)}{(t^{d_x}-1)}$.

3.6. Proposition. – *Le* $\mathbf{Z}$T-*module* $\mathrm{H}_1(\hat{\mathrm{P}})$ *admet la matrice de présentation :*

$$\begin{pmatrix} (t^{d_x}-1) & (t^m-1)\gamma(t) \\ 0 & -\dfrac{(t^u-1)(t^d-1)}{(t^{d_x}-1)} \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice, $\gamma(t)$ *est un polynôme vérifiant :*

$$1 = \gamma(t)\frac{t^\ell-1}{t^{d_x}-1} + \mu(t)\frac{t^u-1}{t^{d_x}-1}$$

pour un certain $\mu(t) \in \mathbf{Z}\mathrm{T}$.

$\gamma(t)$ *n'a pas de facteur commun avec* $(t^{d_x}-1)$.

On prend $\gamma(t) \equiv 0$ si $d_x = u$. Cette situation se présente s'il n'y a pas de ramification sur le disque de bord x.

3.7. Corollaire. – *Si* $d_x = d$, *alors* $H_1(\hat{P})$ *est isomorphe à :*

$$\mathbf{Z}T/(t^d - 1) \oplus \mathbf{Z}T/(t^u - 1).$$

Preuve du corollaire 3.7. – Si $d_x = d$, alors d_x divise m. Par conséquent, on peut éliminer le terme en haut à droite dans la matrice de présentation, par une opération sur les colonnes.

3.8. Pour démontrer les deux propositions, nous allons décrire dans le lemme 3.9 deux cycles de $\hat{P}$ qui fourniront les générateurs de $H_1(\hat{P})$. L'un d'entre eux sera le générateur de $H_1(\hat{P}_x)$.

Auparavant, soit $* \in P$ et soit $\pi^{-1}(*)$ la fibre au-dessus de $*$. Considérons la suite exacte d'homologie de la paire $\hat{P}$ rel. $\pi^{-1}(*)$:

$$0 \longrightarrow H_1(\hat{P}) \longrightarrow H_1(\hat{P}\,;\pi^{-1}(*)) \xrightarrow{\partial} H_0(\pi^{-1}(*)) \longrightarrow H_0(\hat{P}) \longrightarrow 0.$$

C'est une suite de $\mathbf{Z}T$-modules.

On identifie $\pi^{-1}(*)$ à $\mathbf{Z}/u$ de façon que $g^i(0) \equiv i \bmod u$.

Notons $\hat{x}$ la classe dans $H_1(\hat{P}\,;\pi^{-1}(*))$ du relevé de x qui part de 0. $\hat{y}$ et $\hat{z}$ sont définis de façon analogue. Il est clair que :

(i) $H_0(\pi^{-1}(*)) \approx \mathbf{Z}T/(t^u - 1)$.

(ii) La paire $(\hat{P}, \pi^{-1}(*))$ a même homologie que la paire formée d'un complexe de dimension 1 modulo son 0-squelette. Le groupe d'homologie $H_1(\hat{P}, \pi^{-1}(*))$ est donc libre sur $\mathbf{Z}$, de base l'ensemble des cellules de dimension 1. On s'aperçoit facilement que ces cellules peuvent être énumérées ainsi :

$$\{\hat{x}, g(\hat{x}), \ldots, g^{u-1}(\hat{x})\,;\, \hat{y}, g(\hat{y}), \ldots, g^{u-1}(\hat{y})\}.$$

L'action du groupe de Galois munit donc $H_1(\hat{P}, \pi^{-1}(*))$ d'une structure de $\mathbf{Z}T/(t^u - 1)$ – module libre de base $\{\hat{x}, \hat{y}\}$.

(iii) $\partial(\hat{x}) = (t^\ell - 1) \qquad \partial(\hat{y}) = (t^m - 1) \qquad \partial(\hat{z}) = (t^n - 1)$.

Implicitement, le point $0 \in \pi^{-1}(*)$ a été pris comme base des 0-cycles.

3.9. Lemme. – $H_1(\hat{P}) \approx \operatorname{Ker} \partial$ *est engendré par :*

$$X = \frac{t^u - 1}{t^{d_x} - 1}\,\hat{x}$$

et par

$$G = \frac{t^m - 1}{t^d - 1}\,\gamma(t)\,\hat{x} - \frac{t^{d_x} - 1}{t^d - 1}\,\hat{y}.$$

$\gamma(t)$ *est le polynôme choisi dans la proposition 3.6.*

3.10. *Remarque.* – X est homologue à une composante de bord de $\hat{P}$, qui se trouve au-dessus de x. Plus précisément $\pi^{-1}(x)$ est constitué de d_x composantes, dont les classes d'homologie sont égales à :

$$t^j\,\frac{t^u - 1}{t^{d_x} - 1}\,\hat{x} \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \ldots, d_x - 1.$$

Il y a des formules analogues pour $\pi^{-1}(y)$ et $\pi^{-1}(z)$.

3.11. Le lemme 3.9 implique la proposition 3.5. En effet, par construction du revêtement ramifié on a :

$$H_1(\hat{P}_x) = H_1(\hat{P})/(\pi^{-1}(x) = 0).$$

Le lemme 3.9 avec la remarque 3.10 montrent alors que $H_1(\hat{P}_x)$ est cyclique, de générateur G. Pour trouver l'annulateur de G dans $H_1(\hat{P}_x)$ on procède ainsi :

On a : $\dfrac{(t^u - 1)(t^d - 1)}{(t^{d_x} - 1)}\,G = (t^m - 1)\,\gamma(t)\,X$ car $(t^u - 1)\,\hat{y} = 0$.

Comme X est nul dans $H_1(\hat{P}_x)$, on voit que $\dfrac{(t^u - 1)(t^d - 1)}{(t^{d_x} - 1)}$ est contenu dans l'annulateur de G.

Finalement, puisqu'en vertu de 3.8 (ii), $H_1(\hat{P}\,;\pi^{-1}(*))$ est $\mathbf{Z}T/(t^u - 1)$ – libre de base $\{\hat{x}, \hat{y}\}$, l'annulateur de G est engendré par $\dfrac{(t^u - 1)(t^d - 1)}{(t^{d_x} - 1)}$.

3.12. *Preuve du lemme 3.9.* – On vérifie immédiatement en revenant aux définitions, que X et G appartiennent à Ker. Soit donc $Q \in \operatorname{Ker} \partial$. Nous allons montrer que Q est égal à une combinaison linéaire de X et G. Comme $Q \in \operatorname{Ker} \partial$, le calcul de ∂ effectué précédemment montre que :

$$Q = \Delta_x(t)\,\hat{x} + \Delta_y(t)\,\hat{y}$$

avec : $\quad \Delta_x(t)\,(t^{\ell} - 1) + \Delta_y(t)\,(t^m - 1) = k(t)\,(t^u - 1).$

Remarquons que $\dfrac{t^{d_x} - 1}{t^d - 1}$ divise $\Delta_y(t)$ car :

$(t^{d_x} - 1)$ divise $(t^{\ell} - 1)$ et $(t^u - 1)$. Donc $(t^{d_x} - 1)$ divise le produit $\Delta_y(t)\ (t^m - 1)$. Comme le pgcd de $(t^{d_x} - 1)$ et de $(t^m - 1)$ est $(t^d - 1)$, le quotient $\dfrac{t^{d_x} - 1}{t^d - 1}$ doit diviser $\Delta_y(t)$.

On vérifie alors, en utilisant cette remarque que l'on a l'égalité suivante (par calcul direct) :

$$Q = [k(t)\,\gamma(t) + \Delta_x(t)\,\mu(t)]\,X - \left[\frac{\Delta_y(t)\,(t^d - 1)}{(t^{d_x} - 1)}\right] G$$

où $\gamma(t)$ et $\mu(t)$ vérifient les conditions de l'énoncé de la proposition 3.6.

3.13. *Preuve de la proposition 3.6.* – Le lemme 3.9 fournit les générateurs de $H_1(\hat{P})$. Il reste à trouver les relations. Nous affirmons pour commencer que trois relations suffisent. Or :

1) $(t^{d_x} - 1)$ engendre l'annulateur de X. C'est évident si l'on revient aux définitions.

2) $(t^u - 1)$ engendre l'annulateur de G, car $\dfrac{t^m - 1}{t^d - 1}\,\gamma(t)$ et $\dfrac{t^{d_x} - 1}{t^d - 1}$ n'ont pas de facteur commun.

3) On a : $\dfrac{(t^u - 1)\,(t^d - 1)}{(t^{d_x} - 1)}\,G = (t^m - 1)\,\gamma(t)\,X.$

Nous affirmons que cette relation engendre les relations croisées. En effet, supposons qu'il existe des polynômes $\Delta_X(t)$ et $\Delta_G(t)$ vérifiant la relation $\Delta_X(t) \cdot X = \Delta_G(t) \cdot G$. Un retour aux définitions de X et G montre que $\dfrac{(t^u - 1)(t^d - 1)}{(t^{d_x} - 1)}$ divise $\Delta_G(t)$, ce qui implique notre affirmation.

Nous obtenons donc la matrice de présentation suivante pour $H_1(\hat{P})$:

$$\begin{pmatrix} (t^{d_x} - 1) & 0 & (t^m - 1)\gamma(t) \\ 0 & (t^u - 1) & -\dfrac{(t^u - 1)(t^d - 1)}{(t^{d_x} - 1)} \end{pmatrix}$$

On s'aperçoit alors que la 2^e colonne est combinaison linéaire des deux autres. En la supprimant, on obtient la matrice cherchée.

3.14. Nous allons maintenant donner une première application des calculs précédents à la monodromie des singularités.

PROPOSITION. – *Soient* α *et* β *deux entiers positifs, premiers entre eux. Soit* $f(X, Y) = XY(X^\beta - Y^\alpha) = 0$. *Alors, la monodromie entière de* f *est isomorphe à :*

$$\mathbf{Z}T/(t^u - 1) \oplus \mathbf{Z}T/(t - 1)$$

où : $u + 1 = (\alpha + 1)(\beta + 1)$.

3.15. *Preuve de la proposition.* – Il s'agit d'une application facile de la proposition 4.6. (Voir début du paragraphe suivant.) En effet, le complémentaire de l'entrelacs associé à f est exactement la variété $N(\alpha, \beta)$. Les entiers i, τ et e sont tous trois égaux à 1, de sorte que :

$$u = \beta + \alpha\beta + \alpha = (\alpha + 1)(\beta + 1) - 1 .$$

Comme la fibration sur le complémentaire de l'entrelacs s'étend en une décomposition en livre ouvert de S^3, on a : $d = d_x = d_y = d_z = 1$. Le corollaire 3.7 s'applique et donne la réponse.

3.16. On peut facilement trouver deux couples (ou plus !) (α, β), (α', β') avec :

1) pgcd $(\alpha, \beta) = 1 =$ pgcd (α', β').

2) $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')$ et $(\alpha, \beta) \neq (\beta', \alpha')$.

3) $(\alpha + 1)(\beta + 1) = (\alpha' + 1)(\beta' + 1)$.

Si c'est le cas, les singularités $XY(X^\beta - Y^\alpha) = 0$ et $XY(X^{\beta'} - Y^{\alpha'}) = 0$ ont même monodromie entière et sont topologiquement distinctes. On obtient ainsi des exemples tels que 3) dans le paragraphe 1.3.

Exemples numériques :

a) $(1, 5)$ et $(2, 3)$

b) $(1, 11)$, $(2, 7)$ et $(3, 5)$

c) $(1, 23)$, $(2, 15)$, $(3, 11)$ et $(5, 7)$.

3.17. LEMME. – *Pour tout entier n, on peut trouver n singularités distinctes et ayant même monodromie entière.*

Preuve. – Soient $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ les n premiers nombres premiers. Soit $u + 1 = p_1 p_2 \ldots p_n$.

On pose $(\alpha_i + 1) = p_i$ et $(\beta_i + 1) = \dfrac{u+1}{p_i}$ $i = 1, \ldots, n$. Alors α_i et β_i sont premiers entre eux. (Demander à Euclide).

c.q.f.d.

4. Monodromie entière des singularités $(X^a - Y^b)(X^c - Y^d) = 0$ lorsque pgcd $(b, c) = 1$.

4.1. Soit P un pantalon. (La discussion qui suit serait essentiellement la même pour n'importe quelle surface planaire compacte).

Soit $N = P \times S^1$. N fibre de plusieurs façons sur S^1. Soit $f : N \longrightarrow S^1$ une telle fibration et soit Σ la fibre de f. Nous voulons décrire cette fibration en utilisant le théorème de F. Waldhausen cité en 2.4. Nous sommes particulièrement intéressés au revêtement cyclique de P et au générateur canonique g du groupe de Galois, qui donnent un modèle de la monodromie de la fibration.

Pour étudier cela, soit $\Psi : H_1(N ; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$ l'homomorphisme induit par f en homologie entière. Soit γ un cercle $\{p\} \times S^1 \subset N$. Conformément aux notations du § 3, u désigne l'ordre du revêtement cyclique de P.

4.2. Lemme. – *Si* $\Psi(\gamma)$ *est non nul, alors* $u = |\Psi(\gamma)|$.

Note. – Il se peut que $\Psi(\gamma) = 0$. En ce cas, nous sommes dans la variante du théorème de Waldhausen où la surface fibre peut être rendue verticale. Cette variante n'interviendra pas dans les situations que nous rencontrerons, où nous aurons toujours $\Psi(\gamma) > 0$.

Le lemme 4.2 est une conséquence immédiate du théorème de F. Waldhausen.

4.3. Soit $\varphi : H_1(P ; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}/u$ l'homomorphisme qui décrit le revêtement cyclique de P.

Soit x le 1-cycle représenté par l'une des composantes de bord orientée de P. Nous voulons maintenant décrire l'élément $\varphi(x) \in \mathbf{Z}/u$.

Pour cela, soit V la composante de bord $x \times S^1 \subset N = P \times S^1$. Considérons la restriction : $\Psi \,|\, H_1(V ; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$. Cet homomorphisme n'est pas nul, car $\Psi(\gamma) \neq 0$. Soit d_x le générateur positif de l'image. Alors : $\mathrm{Ker}\,\{\Psi \,|\, H_1(V ; \mathbf{Z}) \longrightarrow d_x \mathbf{Z}\}$ est engendré par un cycle qui peut se représenter canoniquement, à isotopie et orientation près, par une courbe fermée simple δ sur V. Appelons $d_x \cdot \delta$ l'union disjointe de d_x copies de δ. Alors $d_x \cdot \delta$ représente $\Sigma \cap V$.

Sur le tore V, considérons le flot $\{\gamma\}$ dont les trajectoires sont les cercles $\{p\} \times S^1, p \in x$. L'homéomorphisme de premier retour sur $d_x \cdot \delta$, pour ce flot $\{\gamma\}$, est le générateur canonique du groupe de Galois pour la partie du revêtement cyclique de P qui se trouve au-dessus de x.

A partir de là, par les techniques habituelles de la théorie des revêtements, on peut calculer $\varphi(x)$.

4.4. Nous allons maintenant déterminer l'homomorphisme φ lorsque la fibration de N sur S^1 est la restriction à N de la fibration du complémentaire d'un entrelacs. Pour cela, nous devons rappeler comment $N = P \times S^1$ se plonge dans S^3.

Considérons un tore non noué W dans S^3. Soient I et E les âmes des tores pleins complémentaires. Orientons I arbitrairement et orientons E pour que $L(\mathrm{I}, \mathrm{E}) = +1$. Ici, L désigne le coefficient d'enlacement ; pour des représentations graphiques, on utilise la convention "main gauche". Sur W, dessinons un noeud du tore T de type (α, β), avec $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$. α et β sont définis par :

$$\alpha = L(\mathrm{T}, \mathrm{E}) \qquad \beta = L(\mathrm{T}, \mathrm{I}).$$

Nous obtenons ainsi un entrelacs orienté dans S^3, à trois composantes : I, T et E.

Otons de S^3 un petit voisinage tubulaire ouvert de l'entrelacs. Nous obtenons une variété $N(\alpha, \beta)$ de dimension trois, qui est difféomorphe à $P \times S^1$. Voir la description que donne H. Seifert des fibrations de S^3 qui portent son nom : [12]. Les cercles fibres sont des copies de T.

Sur chaque composante de bord de $N(\alpha, \beta)$, choisissons un méridien m_{I}, m_{T} et m_{E}. Orientons-le de façon que :

$$L(\mathrm{I}, m_{\mathrm{I}}) = +1 \qquad L(\mathrm{E}, m_{\mathrm{E}}) = +1 \qquad L(\mathrm{T}, m_{\mathrm{T}}) = +1 .$$

4.5. Soit maintenant L un entrelacs orienté dans S^3, fibré sur S^1. Supposons que l'on s'est donné un plongement de $N(\alpha, \beta)$ dans le complémentaire de L, de façon que la fibration du complémentaire de L sur S^1 induise une fibration de $N(\alpha, \beta)$ sur S^1. Dans ces conditions, $\psi : H_1(N(\alpha, \beta), \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$ est donné par $\psi(-) = L(-, \mathrm{L})$.

Posons $i = \psi(m_{\mathrm{I}})$, $\tau = \psi(m_{\mathrm{T}})$, $e = \psi(m_{\mathrm{E}})$.

La méthode générale exposée au début de ce paragraphe donne alors le résultat que voici :

4.6. Proposition. – *L'homomorphisme* $\varphi : H_1(P ; \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}/u$ *est l'homomorphisme suivant :*

$$\begin{aligned} u &= \beta i + \alpha\beta\tau + \alpha e \\ w_{\mathrm{I}} &= -[i\overline{\alpha} + (\beta\tau + e)\overline{\beta}] \\ w_{\mathrm{T}} &= -\tau \\ w_{\mathrm{E}} &= +[(\alpha\tau + i)\overline{\alpha} + e\overline{\beta}] \end{aligned}$$

où $\bar{\alpha}$ *et* $\bar{\beta}$ *sont des entiers tels que* $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$ (α *et* β *sont premiers entre eux, puisque* T *est un noeud (connexe) du tore).*

Explications. – Désignons, sans risque grave de confusion, par I, T et E les trois composantes de bord de $N(\alpha, \beta)$. Par la projection $N(\alpha, \beta) \approx P \times S^1 \longrightarrow P$, chacune de ces composantes va sur une composante du bord de P. L'image par φ de l'élément de $H_1(P)$ qui correspond à cette composante est notée w_I, w_T et w_E.

Dans la suite de cet article, nous n'utiliserons que la valeur de u donnée par la proposition. Ce calcul est une conséquence immédiate du fait que, dans $N(\alpha, \beta)$, γ est homologue à $\beta m_I + \alpha\beta m_T + \alpha m_E$.

Les valeurs w_I, w_T et w_E sont données par souci d'être complet. Leur calcul se fait en explicitant les homéomorphismes de premier retour décrits en 4.3.

4.7. Nous allons maintenant appliquer ce que nous venons de faire à l'entrelacs orienté associé à la singularité $(X^a - Y^b)(X^c - Y^d) = 0$.

Nous avons vu au § 2 que le tore essentiel F découpe le complémentaire $\mathbf{X}$ de l'entrelacs en deux parties $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$. Il y a un plongement évident de $N(d, c)$ sur $\check{X}_1$, de façon que le tore I aille sur F et le tore T autour de K_1. De même, il y a un plongement évident de $N(b, a)$ sur $\check{X}_2$, de façon que le tore E aille sur F et le tore T autour de K_2.

La description topologique de l'entrelacs K associé à la singularité permet facilement de calculer les entiers i, τ, et e.

Pour $N(d, c)$ on trouve : $i = b$, $\tau = 1$ et $e = 0$. Ceci donne $u_1 = c(b + d)$. Comme γ est homologue à $c \cdot \Gamma_1$, on a $d_E = (b + d)$.

Pour $N(b, a)$ on trouve : $i = 0$, $\tau = 1$ et $e = c$. Ceci donne $u_2 = b(a + c)$. Comme γ est homologue à $b \cdot \Gamma_2$, on trouve $d_I = (a + c)$.

4.8. Proposition. – *Le module de monodromie entière sur* $H_1(\Sigma_i, \mathbf{Z})$ *est cyclique. On a :*

$H_1(\Sigma_1, \mathbf{Z})$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}T/(t-1)A(t)$

$H_1(\Sigma_2, \mathbf{Z})$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}T/(t-1)B(t)$.

Les polynômes $A(t)$ *et* $B(t)$ *sont égaux à :*

$$A(t) = \frac{t^{c(b+d)} - 1}{t^{(b+d)} - 1} \qquad B(t) = \frac{t^{b(a+c)} - 1}{t^{(a+c)} - 1} .$$

Preuve. – A partir des calculs effectués en 4.7, on utilise la proposition 3.5. On remarquera que, dans $\mathbf{X}_1$, la ramification se fait autour de E, tandis que, dans $\mathbf{X}_2$, elle se fait autour de I. C'est pourquoi nous avons calculé la valeur de d_E dans le premier cas et la valeur de d_I dans le deuxième cas. Chaque fois, $d = 1$, ce qui achève la démonstration.

Il nous reste à recoller les monodromies le long de F. C'est ici, pour la première fois dans ce paragraphe, que nous allons utiliser l'hypothèse pgcd $(b, c) = 1$.

4.9. PROPOSITION. – *Le nombre de composantes connexes de* $\Sigma \cap F$ *est égal à* pgcd (b, c).

Preuve. – Munissons F du méridien m et du parallèle p évidents. On a : $\psi(m) = b$ et $\psi(p) = c$.

Donc l'indice de l'image $\psi(H_1(F; \mathbf{Z}))$ est égal au pgcd (b, c).

Mais l'indice de l'image est, bien sûr, égal au nombre de composantes connexes de $\Sigma \cap F$. c.q.f.d.

Si pgcd $(b, c) = 1$, nous obtenons donc une présentation de $M(f)$ en ajoutant à :

$$\mathbf{Z}T/(t-1)\,A(t) \oplus \mathbf{Z}T/(t-1)\,B(t)$$

la relation qui identifie les deux composantes de bord. Plus précisément, il s'agit de la relation qui identifie l'unique composante de $\Sigma_1 \cap F$ avec l'unique composante de $\Sigma_2 \cap F$.

Avant d'expliciter cette relation, remarquons que, puisque le quotient d'un module de monodromie finie est encore de monodromie finie, nous avons le :

4.10. COROLLAIRE. – *Lorsque* pgcd $(b, c) = 1$, *la monodromie (homologique) de la singularité* $(X^a - Y^b)(X^c - Y^d) = 0$ *est finie.*

Remarque. – Nous verrons au § 8 que la réciproque du corollaire est également vraie. Ce type de résultat est connu. Voir, par exemple [4].

4.11. Introduisons la notation $M(a, b; c, d)$ pour le module de monodromie de la singularité $(X^a - Y^b)(X^c - Y^d) = 0$.

Pour déterminer $M(a, b; c, d)$ quand pgcd $(b, c) = 1$, nous devons expliquer de façon précise comment les calculs faits au § 3 sont reliés aux modèles $N(\alpha, \beta)$.

Pour le premier modèle : La composante x est l'image du tore E par la projection $N(d, c) \approx P \times S^1 \longrightarrow P$. y est l'image de I et donc z celle de T.

Par le lemme 3.9, $H_1(\hat{P})$ est engendré par X et G.

$$X = \frac{t^u - 1}{t^{d_x} - 1}\hat{x} \quad \text{et} \quad G = \frac{t^m - 1}{t^d - 1} \cdot \gamma(t)\hat{x} - \frac{t^{d_x} - 1}{t^d - 1}\hat{y}.$$

La composante du bord de $\hat{P}_x$ que l'on va recoller est celle qui se trouve au-dessus de y. Comme $d_y = 1$, cette composante s'écrit :

$$\frac{t^u - 1}{t - 1}\hat{y}. \qquad \text{Cf. remarque 3.10.}$$

4.12. Affirmation. – *Dans* $H_1(\hat{P}_x)$ *on a :*

$$\frac{t^u - 1}{t - 1}\hat{y} = -\frac{t^u - 1}{t^{d_x} - 1}G.$$

Preuve. – On a

$$\frac{t^u - 1}{t^{d_x} - 1}G = \frac{t^u - 1}{t^{d_x} - 1} \cdot \frac{t^m - 1}{t - 1}\gamma(t)\hat{x} - \frac{t^u - 1}{t^{d_x} - 1} \cdot \frac{t^{d_x} - 1}{t - 1} \cdot \hat{y}$$
$$= -\frac{t^m - 1}{t^{d_x} - 1}\gamma(t)X - \frac{t^u - 1}{t - 1}\hat{y}.$$

Or $X = 0$ dans $H_1(\hat{P}_x)$.

Ceci achève la preuve de l'affirmation.

Le générateur G pour le premier modèle sera noté G_1. La composante à recoller s'écrit donc :

$$-\frac{t^{u_1}-1}{t^{d_E}-1}\,G_1 = -\frac{t^{c(b+d)}-1}{t^{(b+d)}-1}\,G_1 .$$

Pour le deuxième modèle : x est l'image de I, y celle de E et z celle de T.

Un calcul tout à fait analogue au précédent montre que la composante à recoller s'écrit :

$$-\frac{t^{b(a+c)}-1}{t^{(a+c)}-1}\,G_2 .$$

La relation qui identifie les 2 composantes est, en tenant compte des orientations :

$$-\frac{t^{c(b+d)}-1}{t^{(b+d)}-1}\,G_1 - \frac{t^{b(a+c)}-1}{t^{(a+c)}-1}\,G_2 = 0 .$$

En d'autres termes : $A(t)\,G_1 + B(t)\,G_2 = 0$.

4.13. En prenant G_1 et G_2 pour générateurs, on obtient la matrice de présentation suivante pour $M(a,b;c,d)$ lorsque pgcd $(b,c) = 1$:

$$\begin{pmatrix} (t-1)\,A(t) & 0 & A(t) \\ 0 & (t-1)\,B(t) & B(t) \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que l'on peut supprimer la 2[e] colonne de cette matrice de présentation.

Nous avons donc obtenu le théorème suivant :

4.14. THEOREME. — $M(a,b;c,d)$ *possède la matrice de présentation suivante, lorsque* pgcd $(b,c) = 1$:

$$\begin{pmatrix} (t-1)\,A(t) & A(t) \\ 0 & B(t) \end{pmatrix}$$

avec $$A(t) = \frac{t^{c(b+d)}-1}{t^{(b+d)}-1} \qquad B(t) = \frac{t^{b(a+c)}-1}{t^{(a+c)}-1} .$$

4.15. Par calcul différentiel libre, on peut obtenir une matrice de présentation pour $M(a,b;c,d)$ qui est à 4 lignes et 4 colonnes.

On peut le faire en suivant la méthode générale de M.-C. Grima [5]. Toutefois, il faut prendre garde au fait que la "méthode de Fox", si elle est suffisante pour obtenir les idéaux élémentaires sur $\mathbf{Q}T$, doit être raffinée si on veut une présentation du module sur $\mathbf{Z}T$. La matrice M de M.-C. Grima, p. 591 de [5] n'est pas une matrice de présentation du module de monodromie.

5. La monodromie rationnelle ne détermine pas la monodromie entière

5.1. Il découle immédiatement du corollaire 4.10 que $M_{\mathbf{Q}}(a, b; c, d)$ est un module semi-simple si pgcd $(b, c) = 1$. Par conséquent, $M_{\mathbf{Q}}(a, b; c, d)$ est, dans ce cas, entièrement déterminé par le polynôme caractéristique. Ce dernier n'est rien d'autre que le déterminant de la matrice carrée de présentation donnée en 4.14 c'est-à-dire :

$$(t-1)\,A(t)\,B(t)\,.$$

Ceci étant, il n'est pas très difficile de trouver des couples de singularités topologiquement distinctes, avec $M_{\mathbf{Q}}$ semi-simple, et ayant même polynôme caractéristique. Voici une façon particulièrement simple d'en obtenir.

Soient p_1 un nombre premier et s un entier, premier à $(p_1 - 1)$ et tel que $1 < s < (p_1 - 1)$. Soient p_2 et p_3 deux nombres premiers tels que : $p_1 < p_2 < p_3$.

5.2. Proposition. — *Les singularités (i) et (ii) ci-dessous ont même monodromie rationnelle et sont topologiquement distinctes :*

Singularité (i) :

$$a = (p_1 - 1)p_3\ ;\ b = sp_2\ ;\ c = p_3\ ;\ d = (p_1 - s)p_2\,.$$

Singularité (ii) :

$$a = (p_1 - s)p_3\ ;\ b = p_2\ ;\ c = sp_3\ ;\ d = (p_1 - 1)p_2\,.$$

Preuve. — Les conditions sur s, p_1, p_2, p_3 impliquent que les deux singularités satisfont :

pgcd $(a, b) = 1$; pgcd $(c, d) = 1$; $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ et, finalement, pgcd $(b, c) = 1$.

De plus, elles ont même polynôme caractéristique. Fin de la démonstration.

L'exemple suivant est le plus simple qui puisse être obtenu par la proposition :

$$p_1 = 5 \,;\; s = 3 \,;\; p_2 = 7 \,;\; p_3 = 11 \,;$$

Ce qui donne :

Singularité (i) : $a = 44 \,;\; b = 21 \,;\; c = 11 \,;\; d = 14$.

Singularité (ii) : $a = 22 \,;\; b = 7 \,;\; c = 33 \,;\; d = 28$.

C'est l'exemple original de M.-C. Grima [5].

5.3. Nous affirmons maintenant que ces deux singularités sont, en fait, distinguées par leur monodromie entière.

PROPOSITION. – $M(44, 21 ; 11, 14)$ *n'est pas isomorphe à* $M(22, 7 ; 33, 28)$.

COROLLAIRE. – *La monodromie rationnelle ne détermine pas la monodromie entière.*

En fait, on a plus généralement :

5.4. THEOREME. – *Les singularités (i) et (ii) construites dans la proposition 5.2 ont des monodromies entières distinctes.*

Preuve. – Soit p un facteur premier de s. Nous allons montrer que $M_{\mathbf{F}_p}$ distingue les deux singularités, ce qui implique, bien sûr, le théorème.

Dans ce but, écrivons $s = p^r \cdot q$ avec $r \geqslant 1$ et q premier à p. La matrice de présentation 4.14, pour la singularité (i) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} (t-1)\dfrac{(t^{sp_1p_2p_3}-1)}{(t^{p_1p_3}-1)} & \dfrac{t^{sp_1p_2p_3}-1}{t^{p_1p_3}-1} \\[2ex] 0 & \dfrac{t^{p_1p_2p_3}-1}{t^{p_1p_2}-1} \end{pmatrix}$$

Considérons l'image de cette matrice par l'homomorphisme de réduction modulo $p : \mathbf{Z}T \longrightarrow \mathbf{F}_p T$. Cette nouvelle matrice présente $M_{\mathbf{F}_p}$.

On a : $(t^{sp_1p_2p_3} - 1) = (t^{p^r q p_1 p_2 p_3} - 1) \equiv (t^{qp_1p_2p_3} - 1)^{p^r} \bmod p$.

De là, on déduit facilement que le pgcd des coefficients de la matrice de présentation de $M_{\mathbf{F}_p}$ est :

$$\frac{t^{p_1p_2p_3} - 1}{t^{p_1p_2} - 1}.$$

Par conséquent, le polynôme minimal de $M_{\mathbf{F}_p}$ est :

$$(t-1)\frac{(t^{sp_1p_2p_3} - 1)}{(t^{p_1p_3} - 1)}.$$

D'autre part, la matrice de présentation 4.14 pour la singularité (ii) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} (t-1)\dfrac{(t^{p_1p_2p_3} - 1)}{(t^{p_1p_3} - 1)} & \dfrac{(t^{p_1p_2p_3} - 1)}{(t^{p_1p_3} - 1)} \\ 0 & \dfrac{(t^{sp_1p_2p_3} - 1)}{(t^{p_1p_2} - 1)} \end{pmatrix}$$

Un calcul analogue au précédent montre que le polynôme minimal pour $M_{\mathbf{F}_p}$ est :

$$(t-1)\frac{(t^{sp_1p_2p_3} - 1)}{(t^{p_1p_2} - 1)}.$$

Les polynômes minimaux étant distincts, la monodromie mod p distingue bien les deux singularités. c.q.f.d.

6. Où l'on apprend quand la monodromie entière des singularités $(X^a - Y^b)(X^c - Y^d) = 0$, avec pgcd $(b, c) = 1$ est somme directe de modules cycliques.

Avertissement. – Ce paragraphe est nettement plus "technique" que les autres. Le lecteur uniquement désireux d'avoir des contre-exemples peut sauter directement au § 7.

6.1. Soit M un $\mathbf{Z}T$-module qui admet une matrice de présentation de la forme :

$$\begin{pmatrix} (t-1)\,A(t) & A(t) \\ 0 & B(t) \end{pmatrix}$$

avec $A(t) = \dfrac{t^{c \cdot r} - 1}{t^r - 1}$ et $B(t) = \dfrac{t^{b \cdot s} - 1}{t^s - 1}$ où c, r, b et s sont des entiers positifs tels que b est premier à c.

Soit $D(t)$ le p.g.c.d. de $A(t)$ et $B(t)$. Soit $\Delta(t)$ le polynôme minimal de M, c'est-à-dire :

$$\Delta(t) = \frac{(t-1)\,A(t)\,B(t)}{D(t)}.$$

Posons $A'(t) = \dfrac{A(t)}{D(t)}$ et $B'(t) = \dfrac{B(t)}{D(t)}$. Soit $R \in \mathbf{N}$ le résultant de $A'(t)$ et $B'(t)$.

6.2. PROPOSITION. – *Si* $R = 1$, M *admet une décomposition en somme directe de modules cycliques. De fait,* M *est isomorphe à* $\mathbf{Z}T/\Delta(t) \oplus \mathbf{Z}T/D(t)$.

6.3. *Preuve.* – Comme R vaut 1, il existe $\gamma(t)$ et $\mu(t)$ dans $\mathbf{Z}T$ tels que

$$1 = \gamma(t)\,A'(t) + \mu(t)\,B'(t).$$

En multipliant à gauche la matrice de présentation définissant M par :

$$\begin{pmatrix} B'(t) & -A'(t) \\ \gamma(t) & \mu(t) \end{pmatrix}$$

on obtient la matrice de présentation suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta(t) & 0 \\ (t-1)\,A(t) & D(t) \end{pmatrix}$$

Comme $D(t)$ divise $A(t)$, cette matrice est équivalente, par une opération sur les colonnes, à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \Delta(t) & 0 \\ 0 & D(t) \end{pmatrix}$$

Ceci termine la preuve de la proposition 6.2.

Tout le reste du paragraphe 6 sera consacré à la preuve de la réciproque de la proposition 6.2, que nous énonçons sous la forme d'un théorème :

6.4. THEOREME. – *Si* $R \neq 1$, M *n'est pas isomorphe à une somme directe de modules cycliques.*

Avant de commencer la preuve proprement dite du théorème 6.4, nous énonçons et démontrons un lemme.

6.5. LEMME. – *Soit* E *un* $\mathbf{Z}$T-*module ayant la matrice de présentation suivante :*

$$\begin{pmatrix} (t-1)\lambda(t) & \lambda(t) \\ 0 & \mu(t) \end{pmatrix}$$

où $(t-1)$ *ne divise pas* $(\lambda(t) \cdot \mu(t))$. *Soient* q *un nombre premier et* j *un entier positif tels que* $\Phi_{q^j}(t)$ *divise* $(\lambda(t)\mu(t))$. *Supposons que* E *admette une décomposition en somme directe de modules cycliques :*

$$\mathbf{Z}T/\gamma_1(t) \oplus \mathbf{Z}T/\gamma_2(t) \oplus \dots$$

et que $(t-1)$ *divise* $\gamma_1(t)$. *Alors* $\Phi_{q^j}(t)$ *divise* $\gamma_1(t)$.

6.6. *Preuve.* – Soit S le localisé de $\mathbf{Z}$T obtenu en inversant tous les facteurs irréductibles de $\lambda(t) \cdot \mu(t)$ différents de $\Phi_{q^j}(t)$. Par hypothèse $(t-1)$ ne divise pas $\lambda(t)\mu(t)$. Donc $(t-1)$ n'est pas une unité de S. Le module $E \otimes S$ admet la matrice suivante pour matrice de présentation :

$$(*) = \begin{pmatrix} (t-1)(\Phi_{q^j}(t))^{n_1} & (\Phi_{q^j}(t))^{n_1} \\ 0 & (\Phi_{q^j}(t))^{n_2} \end{pmatrix}$$

Soit m le maximum de n_1 et n_2. Le polynôme minimal de $E \otimes S$ est égal à $(t-1)(\Phi_{q^j}(t))^m$.

6.7. On calcule le polynôme minimal $\Delta_q(t)$ de $E \otimes S \otimes \mathbf{F}_q$ à partir de la réduction modulo q de la matrice (*) et puisque $\Phi_{q^j}(t)$ est congru à $(t-1)^{(q-1)q^{j-1}}$ on trouve :

$$\Delta_q(t) = (t-1)^{1+m(q-1)q^{j-1}} .$$

6.8. Revenons maintenant à la décomposition de E en somme directe de modules cycliques. Si $(t-1)$ divisait $\gamma_1(t)$ sans que $\Phi_{q^j}(t)$ divise $\gamma_1(t)$, alors le localisé $E \otimes S$ de cette décomposition deviendrait :

$$S/(t-1) \bigoplus_{i=1}^{e} S/(\Phi_{q^j}(t))^{k_i} \qquad \text{avec} \qquad 0 < k_i \leqslant m .$$

Mais alors $E \otimes S \otimes \mathbf{F}_q$ admettrait pour polynôme minimal $(t-1)^{\ell}$ avec $\ell \leqslant m(q-1)q^{j-1}$ ce qui contredirait 6.7. c.q.f.d.

6.9. Soit p un premier divisant R. Par le fait II rappelé en 3.2, il existe un entier n tel que $\Phi_n(t)$ divise $A'(t)$ et tel que $\Phi_{n \cdot p^i}(t)$ divise $B'(t)$ pour un certain i dans $\mathbf{Z}\backslash\{0\}$.

Comme M admet aussi pour matrice de présentation :

$$\begin{pmatrix} (t-1)\cdot B(t) & B(t) \\ 0 & A(t) \end{pmatrix}$$

les rôles de $A'(t)$ et $B'(t)$ sont échangeables. On peut donc supposer que i est positif. La définition de $B(t)$ implique alors que p divise b. La définition de $A(t)$ montre que, $\Phi_n(t)$ divisant $A(t)$, il existe un facteur premier q de c et un entier positif j tels que q^j divise n et $\Phi_{q^j}(t)$ divise $A(t)$.

Choisissons un tel q. Observons que $p \neq q$ car p divise b, q divise c et pgcd $(b, c) = 1$. Choisissons maintenant i et j de la façon suivante :

i est la valuation $v_p(b.s)$ de $(b.s)$ en p et j est v_q (pgcd $(c.r, s)$). Les i et j ainsi choisis sont les plus grands entiers tels que $\Phi_{q^j}(t)$ divise $A'(t)$ et $\Phi_{p^i q^j}(t)$ divise $B'(t)$. De plus on remarque que $\Phi_{p^i}(t)$ divise $B'(t)$.

6.10. Pour démontrer le théorème 6.4, nous raisonnons par l'absurde en supposant que M possède une décomposition en somme directe de modules cycliques :

$$\mathbf{Z}T/\gamma_1(t) \oplus \mathbf{Z}T/\gamma_2(t) \oplus \ldots$$

Soit S le localisé de $\mathbf{Z}T$ obtenu en inversant les facteurs irréductibles de $\Delta(t)$ différents de $(t-1), \Phi_{q^j}(t), \Phi_{p^i}(t)$ et $\Phi_{p^i q^j}(t)$. Le module $M \otimes S$ admet la matrice $(*)$ pour matrice de présentation :

$$(*) = \begin{pmatrix} (t-1)\,\Phi_{q^j}(t) & \Phi_{q^j}(t) \\ 0 & \Phi_{p^i}(t) \cdot \Phi_{p^i q^j}(t) \end{pmatrix}$$

Observons que $M \otimes S$ ne peut être cyclique car l'idéal de S engendré par les termes de $(*)$ n'est pas S tout entier. Ceci vient de ce que p divise le résultant des termes de la deuxième colonne.

D'autre part, en vertu de l'hypothèse absurde, $M \otimes S$ est isomorphe à :

$$(**) \qquad S/\gamma_1(t) \oplus S/\gamma_2(t) \oplus \ldots$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $(t-1)$ divise $\gamma_1(t)$. Par le lemme 6.7 on obtient que $(t-1)\,\Phi_{q^j}(t)\,\Phi_{p^i}(t)$ divise $\gamma_1(t)$. L'unique possibilité pour la décomposition $(**)$ est donc :

$$S/(t-1)\,\Phi_{q^j}(t)\,\Phi_{p^i}(t) \oplus S/\Phi_{p^i q^j}(t)\ .$$

6.11. Considérons $M \otimes S \otimes \mathbf{F}_q$. Au moyen de la matrice $(*)$ on calcule le polynôme minimal de $M \otimes S \otimes \mathbf{F}_q$ et on constate qu'il est égal à la réduction modulo q de :

$$(t-1)\,\Phi_{q^j}(t)\,\Phi_{p^i}(t)\,\Phi_{p^i q^j}(t)\ .$$

Or la réduction modulo q de la décomposition $(**)$ admet pour polynôme minimal la réduction modulo q de :

$$(t-1)\,\Phi_{q^j}(t) \cdot \Phi_{p^i q^j}(t)\ .$$

Nous avons obtenu la contradiction cherchée.

7. Quelques exemples numériques.

7.1. Dans ce paragraphe nous indiquons comment trouver sans peine des singularités avec monodromie entière non isomorphe à une somme directe de modules cycliques. Le raisonnement est un cas particulier des arguments développés au § 6, mais nettement plus simple.

7.2. THEOREME. – *Soient* b *et* c *deux premiers distincts. Supposons que* $a + c = b^k$ *et* $b + d = b^\ell$ *et que :* $k < \ell$, pgcd $(a, b) = 1$, pgcd $(c, d) = 1$ et $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$. *Alors* $\mathrm{M}(a, b; c, d)$ *n'est pas somme directe de modules cycliques.*

7.3. Exemples numériques explicites :

(i) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 14$

(ii) $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$

(iii) $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 14$

etc., etc.

7.4. *Preuve du théorème.* – La méthode que nous allons suivre est la suivante : nous allons calculer le polynôme minimal de $\mathrm{M}_{\mathbf{F}_b}(f)$ et de $\mathrm{M}_{\mathbf{F}_c}(f)$. Nous montrerons ensuite qu'aucune décomposition de $\mathrm{M}(f)$ en somme directe de modules cycliques n'a de polynômes minimaux sur $\mathbf{F}_b \mathrm{T}$ et sur $\mathbf{F}_c \mathrm{T}$ égaux à ceux que nous aurons calculés. La matrice de présentation 4.14 a pour coefficients $\mathrm{A}(t)$ et $\mathrm{B}(t)$, lorsque a, b, c, d ont les valeurs données dans le théorème, les polynômes suivants :

$$\mathrm{A}(t) = \frac{t^{c(b+d)} - 1}{t^{(b+d)} - 1} = \frac{t^{c \cdot b^\ell} - 1}{t^{b^\ell} - 1}$$

$$\mathrm{B}(t) = \frac{t^{b(a+c)} - 1}{t^{(a+c)} - 1} = \frac{t^{b \cdot b^k} - 1}{t^{b^k} - 1} = \frac{t^{b^{k+1}} - 1}{t^{b^k} - 1} = \Phi_{b^{k+1}}(t).$$

7.5. Réduisons $A(t)$ et $B(t)$ modulo b.

$$A(t) \equiv \frac{(t^c - 1)^{b^\ell}}{(t-1)^{b^\ell}} = \left(\frac{t^c - 1}{t-1}\right)^{b^\ell} = (\Phi_c(t))^{b^\ell}$$

$$B(t) = \Phi_{bk+1}(t) \equiv (\Phi_1(t))^{(b-1)b^k}.$$

Dans $\mathbf{F}_b T$, $\Phi_c(t)$ et $\Phi_1(t)$ sont premiers entre eux. Le p.g.c.d. des coefficients de la matrice de présentation de $M_{\mathbf{F}_b}(f)$ est donc égal à 1. Par conséquent $M_{\mathbf{F}_b}(f)$ est un module cyclique. Son polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique, c'est-à-dire égal à :

$$(\Phi_1(t))^{(b-1)\cdot b^k + 1} \cdot (\Phi_c(t))^{b^\ell}.$$

7.6. AFFIRMATION. – *Si* $M(f)$ *est somme directe de modules cycliques, les deux seules possibilités sont :*

$$M' = \mathbf{Z}T/(t-1)\,A(t)\,B(t)$$

ou :

$$M'' = \mathbf{Z}T/(t-1)\,B(t) \oplus \mathbf{Z}T/A(t).$$

Preuve. – Ce sont les deux seules sommes directes de modules cycliques, de polynôme caractéristique $(t-1)\,A(t)\,B(t)$, qui, quand on les réduit modulo b, donnent un module cyclique sur $\mathbf{F}_b T$.

7.7. Réduisons maintenant modulo c. On a :

$$A(t) = \frac{(t^{c\cdot b^\ell} - 1)}{(t^{b^\ell} - 1)} \equiv \frac{(t^{b^\ell} - 1)^c}{(t^{b^\ell} - 1)} = (t^{b^\ell} - 1)^{c-1}$$

$$B(t) = \Phi_{bk+1}(t).$$

Comme $k < \ell$, $\Phi_{bk+1}(t)$ divise $(t^{b^\ell} - 1)^{c-1}$. Le p.g.c.d. des coefficients de la matrice de présentation de $M_{\mathbf{F}_c}(f)$ est donc $\Phi_{bk+1}(t)$. Le polynôme minimal de $M_{\mathbf{F}_c}(f)$ est donc $\Phi_1(t)\cdot(t^{b^\ell} - 1)^{c-1}$.

7.8. Calculons le polynôme minimal de la réduction modulo c des M' et M'' donnés dans l'affirmation 7.6.

Pour M' on trouve $\Phi_1(t)\cdot\Phi_{bk+1}(t)\cdot(t^{b^\ell} - 1)^{c-1}$.

Pour M″ on trouve $(t^{b\ell} - 1)^{c-1}$.

Aucun de ces polynômes n'est égal au polynôme minimal calculé en 7.7.

Ceci achève la démonstration.

8. Les singularités $(X^a - Y^b)(X^c - Y^d) = 0$ lorsque pgcd $(b, c) \neq 1$.

8.1. Posons $\epsilon = \text{pgcd}(b, c)$. Par hypothèse, dans ce paragraphe, nous avons $\epsilon > 1$.

Nous voulons, à nouveau, trouver une présentation du module de monodromie entière. Pour cela, nous revenons aux notations et calculs du § 4. (Jusqu'à 4.8. nous n'avions pas utilisé $\epsilon = 1$) .

La fibre Σ se décompose en $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ et $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ se compose de ϵ cercles disjoints. La suite exacte de Mayer-Vietoris, en homologie entière, se réduit à :

$$0 \longrightarrow H_1(\Sigma_0) \longrightarrow H_1(\Sigma_1) \oplus H_1(\Sigma_2) \longrightarrow H_1(\Sigma) \xrightarrow{\partial} \overline{H}_0(\Sigma_0) \longrightarrow 0$$

C'est une suite de $\mathbf{Z}$T-modules et de $\mathbf{Z}$T-homomorphismes, t agissant via h_* .

Les modules $H_1(\Sigma_i)$ ont été déterminés dans la proposition 4.8, pour $i = 1,2$. Il est immédiat de voir que :

$$H_1(\Sigma_0) \approx \mathbf{Z}T/(t^\epsilon - 1)$$

$$\overline{H}_0(\Sigma_0) \approx \mathbf{Z}T/\frac{(t^\epsilon - 1)}{(t - 1)} .$$

Considérons alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\partial \longrightarrow H_1(\Sigma) \xrightarrow{\partial} \overline{H}_0(\Sigma_0) \longrightarrow 0 . \qquad (*)$$

8.2. Lemme. — Ker ∂ *possède la présentation, à deux générateurs et trois relations, suivante :*

$$\begin{pmatrix} (t-1)A(t) & 0 & \dfrac{(t-1)A(t)}{(t^\epsilon - 1)} \\ & & \\ 0 & (t-1)B(t) & \dfrac{(t-1)B(t)}{(t^\epsilon - 1)} \end{pmatrix}$$

avec :
$$A(t) = \frac{(t^{c(b+d)} - 1)}{(t^{b+d} - 1)}$$

$$B(t) = \frac{t^{b(a+c)} - 1}{t^{(a+c)} - 1}\,.$$

Preuve du lemme. – Nous procédons comme à la fin du § 4, à partir de 4.11. Cette fois d_y n'est pas égal à 1 mais à ϵ dans chacun des 2 modèles. L'analogue de l'affirmation 4.12 est :

Dans $H_1(\hat{P}_x)$ on a :

$$-\frac{t^u - 1}{t^\epsilon - 1}\,\hat{y} = \frac{(t^u - 1)}{(t^{d_x} - 1)}\,\frac{(t - 1)}{(t^\epsilon - 1)}\,G\,.$$

La preuve est essentiellement la même que celle de 4.12.

On achève la preuve comme précédemment.

8.3. PROPOSITION. – *Une matrice de présentation de* Ker ∂ *est :*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(t-1)\,A(t)}{(t^\epsilon - 1)} \\ (t-1)\,B(t) & \dfrac{(t-1)\,B(t)}{(t^\epsilon - 1)} \end{pmatrix}$$

Preuve. – On obtient cette matrice de présentation en faisant des manipulations sur les colonnes de la matrice obtenue en 8.2. Ces opérations ne changent pas les générateurs de Ker ∂.

Dans la suite exacte courte (*), nous avons donc une présentation des deux modules qui se trouvent aux extrémités. Pour trouver une présentation de $H_1(\Sigma)$, nous utiliserons le lemme évident que voici :

8.4. LEMME. – *Soit* A *un anneau avec unité. Soit*
$$0 \longrightarrow E'' \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ \partial\ } E' \longrightarrow 0$$
une suite exacte courte de A*-modules. Soit* $< v_1, \ldots, v_n ; v_1, \ldots, r_s >$ *une présentation de* E''. *Supposons que* E' *est cyclique, de présentation* $< v' ; r' >$. *(Cette hypothèse suffit à nos besoins.) On obtient alors une présentation de* E *de la façon suivante :*

Pour générateurs, on prend les images par i *de* $v_1, \ldots, v_n$ *et un relevé quelconque* v de v'. *Pour relations, on prend les images* *par i des relations $r_1, \ldots, r_s$ et une dernière relation r obtenue comme suit :*

$r' \cdot v$ est un élément du noyau de ∂.

Par exactitude, il existe un mot (non unique en principe) w en les $v_1, \ldots, v_n$ tel que $r'v = i(w)$. On prend alors $r \equiv r'v - i(w)$.

8.5. Appliquons le lemme à la suite exacte (*) :

Σ_0 est une union disjointe de ϵ cercles permutés cycliquement par la monodromie h. Choisissons un point P_0 sur l'une de ces courbes. Soient $P_1, \ldots, P_{\epsilon-1}$ les images par $h, h^2, \ldots, h^{\epsilon-1}$ de P_0. Prenons pour générateur v' de $\overline{H}_0(\Sigma_0)$ le 0-cycle relatif $(P_1 - P_0)$.

Un relevé v de v' est une courbe fermée (simple) dans Σ ayant la propriété suivante : l'intersection de v avec Σ_0 consiste en les 2 points P_0 et P_1. L'orientation qu'il faut mettre sur v dépend de la façon dont on définit l'homomorphisme bord ∂ dans la suite de Mayer-Vietoris.

On considère alors le cycle $\dfrac{t^\epsilon - 1}{t-1}\, v = v + tv + \ldots + t^{\epsilon-1} v$ dans Σ. Ce cycle est homologue à une somme $\eta_1 + \eta_2$ avec $\eta_i \in H_1(\Sigma_i)$. η_i est un multiple $\lambda_i(t) \in \mathbf{Z}T$ du générateur G_i que nous avons choisi pour $H(\Sigma_i)$. Par conséquent, on obtient pour $H_1(\Sigma)$ la matrice de présentation suivante :

8.6.
$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(t-1)\,A(t)}{(t^\epsilon - 1)} & \lambda_1(t) \\[2ex] (t-1)\,B(t) & \dfrac{(t-1)\,B(t)}{(t^\epsilon - 1)} & \lambda_2(t) \\[2ex] 0 & 0 & \dfrac{t^\epsilon - 1}{t-1} \end{pmatrix}$$

8.7. *Remarque.* – Le problème de la détermination exacte de $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ peut être résolu en principe. C'est ici qu'intervient la difficulté du recollement de Σ_1 et Σ_2, ou plutôt de h_1 et h_2, le long de Σ_0. Cela se fait au moyen de "twists de Dehn partiels", que l'on peut calculer explicitement à l'aide de la proposition 4.6. Pour ce qui nous intéresse dans ce travail, seule la forme de la matrice de présentation compte. C'est pourquoi nous laisserons $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ indéterminés.

8.8. *Exercice.* – Considérer la singularité d'A'Campo : $(X^3 - Y^2)(X^2 - Y^3) = 0$. Déterminer $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$. Montrer que la monodromie entière de cette singularité est somme directe de modules cycliques. De fait, $M(f)$ est isomorphe à :

$$\mathbf{Z}T/\Phi_{10}(t) \oplus \mathbf{Z}T/\Phi_1(t) \cdot (\Phi_2(t))^2 \cdot \Phi_{10}(t) \cdot$$

8.9. *Observation.* – C'est le cycle v que nous venons de décrire qui est responsable de la non-finitude de la monodromie entière lorsque $\epsilon > 1$. En effet soit u_1 l'ordre de la monodromie pour Σ_1 et soit u_2 celui de Σ_2. Soit ω le p.p.c.m. de u_1 et u_2. Alors h^ω est l'identité sur Σ en dehors d'un petit voisinage de Σ_0. Mais sur ce voisinage h^ω consiste en des twists de Dehn à une certaine puissance, et cette puissance est non nulle. cf. 2.3. De là, il découle que $h_*^\omega(v)$, $h_*^{2\omega}(v), \ldots, h_*^{n\cdot\omega}(v)$, etc. sont des classes d'homologie toutes distinctes sur Σ. Donc h_* ne peut pas être d'ordre fini.

8.10. PROPOSITION. – *La monodromie entière de la singularité :* $(X^{37} - Y^6)(X^{10} - Y^3) = 0$ *n'est pas somme directe de modules cycliques.*

8.11. *Preuve de la proposition.* – Utilisons la matrice 8.6 qui présente $M = M(37,6\,;10,3)$ en substituant $a = 37$, $b = 6$, $c = 10$, $d = 3$, et donc $\epsilon = 2$. Calculons le polynôme minimal $\Delta(t)$.

On obtient :

$$\Delta(t) = (t-1)\frac{t^{9\cdot 10} - 1}{t^9 - 1} \cdot \frac{t^{6\cdot 47} - 1}{t^{47} - 1} \cdot$$

Localisons $\mathbf{Z}T$ en inversant les facteurs irréductibles de $\Delta(t)$ sauf $(t-1)$, $\Phi_3(t)$, $\Phi_5(t)$ et $\Phi_{15}(t)$. Soit S le localisé ainsi obtenu.

On observe alors que la matrice 8.6 possède en bas à droite un terme inversible dans S. On en déduit, après élimination des unités, que $M \otimes S$ possède la matrice suivante pour matrice de présentation :

$$\begin{pmatrix} 0 & \Phi_5(t) \cdot \Phi_{15}(t) \\ (t-1)\Phi_3(t) & \Phi_3(t) \end{pmatrix}$$

On affirme que $M \otimes S$ ne peut être somme directe de modules cycliques. En effet :

8.12. Considérons le module $M \otimes S \otimes \mathbf{F}_3$. Son polynôme minimal est $((t-1) \cdot \Phi_5(t))^3$. Supposons maintenant que $M \otimes S$ est somme directe de modules cycliques :

$$S/\gamma_1(t) \oplus S/\gamma_2(t) \oplus \dots$$

Supposons que $(t-1)$ divise $\gamma_1(t)$, par exemple. Alors $\Phi_3(t)$ divise $\gamma_1(t)$, car $(t-1)^3$ divise le polynôme minimal de $M \otimes S \otimes \mathbf{F}_3$. (On peut aussi utiliser 6.5). Pour une raison analogue $\Phi_5(t)$ divise $\gamma_1(t)$.

D'autre part, $M \otimes S$ ne peut être cyclique car le résultant des termes de la deuxième colonne de la matrice de présentation est divisible par 5. La seule décomposition possible en somme directe est donc :

$$S/(t-1) \cdot \Phi_5(t) \cdot \Phi_3(t) \oplus S/\Phi_{15}(t) \cdot$$

Mais le polynôme minimal de ce module tensorisé par $\mathbf{F}_3$ est : $(t-1)^3 \cdot (\Phi_5(t))^2$. Ceci est en contradiction avec le calcul du polynôme minimal de $M \otimes S \otimes \mathbf{F}_3$ effectué précédemment.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. A'Campo, Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, *Invent. Math.*, 20 (1973), 147-169.

[2] T. Apostol, Resultants of Cyclotomic Polynomials, *Proc. A.M.S.*, 24 (1970), 457-462.

[3] W. Burau, Kennzeichnung der Schlauchknoten, *Abh. Math. Sem. Hamburg.*, 9 (1932), 125-133.

[4] D. Eisenbud, W. Neumann, Fibering Iterated Torus Links, Preprint (96 pages).

[5] M.-C. Grima, La monodromie rationnelle ne détermine pas la topologie d'une hypersurface complexe, *Springer Lecture Notes*, n° 409, pp. 580-602.

[6] W. JACO, Lectures on Three-Manifold Topology, *C.B.M.S.*, n° 43 (1980), 251 pages.

[7] M. KERVAIRE, Les noeuds de dimensions supérieures, *Bull. Soc. Math. France,* 93 (1965), 225-271.

[8] F. MICHEL, C. WEBER, Une singularité isolée dont la monodromie n'admet pas de forme de Jordan sur les entiers, Note aux *C.R.A.S.* de Paris t. 299, série I, n° 9 (1984).

[9] J. MILNOR, Singular Points of Complex Hypersurfaces, *P.U.P. Annals of Mathematics Studies,* Vol. 61 (1968).

[10] P. ORLIK, On the Homology of Weighted Homogeneous Polynomials, *Springer Lecture Notes,* vol. 298, pp. 260-269.

[11] R. ROUSSARIE, Plongements dans les variétés feuilletées et classification des feuilletages sans holonomie, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 43 (1973), 101-141.

[12] H. SEIFERT, Topologie dreidimensionalen gefaserter Räume, *Acta Math.*, 60 (1933), 147-238.

[13] B.L. VAN DER WAERDEN, Algebra, Springer Verlag.

[14] F. WALDHAUSEN, Uber eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I, *Invent. Math.*, 3 (1967), 308-333.

[15] O. ZARISKI, On the Topology of Algebroid Singularities, *Amer. J. Math.*, 54 (1932), 453-465.

Manuscrit reçu le 13 novembre 1984.

F. MICHEL & C. WEBER,
Section de mathématiques
Université de Genève
Rue du Lièvre 2-4
Case postale 240
CH – 1211 Genève 24 (Suisse).